

Egy tétel születése

CÉDRIC VILLANI

EGY TÉTEL SZÜLETÉSE

Claude Gondard illusztrációival

Fordította: Gosztonyi Katalin



A könyv a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.



**Magyar Tudományos
Akadémia**

Cet ouvrage a bénéficié du soutien des Programmes d'aide
à la publication (P.A.P.) de l'Institut français.

Ez a mű a Francia Intézet Könyvtámogatási Programjainak (P.A.P.) keretében jelent meg.



**INSTITUT
FRANÇAIS**
BUDAPEST

Cédric Villani: *Théorème vivant*

© Éditions Grasset & Fasquelle, 2012

Hungarian translation © Gosztanyi Katalin, 2018

Hungarian edition © Typotex, Budapest, 2018

Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

Lektorálta: Krámlai András

ISBN 978 963 279 976 6

Témakör: *matematika, életrajz*

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!

Újabb kiadványainkról és akcióinkról

a www.typotex.hu és a [facebook.com/typotexkiado](https://www.facebook.com/typotexkiado)
oldalakon értesülhet.

Kiadja a Typotex Elektronikus Kiadó Kft.

Felelős vezető: Votisky Zsuzsa

Főszerkesztő: Horváth Balázs

A kötetet gondozta: Gerner József

A borítót Orosz István grafikájának felhasználásával

Szalay Éva készítette

Készült a Multiszolg Bt. nyomdájában

Felelős vezető: Kajtor Bálint

Előszó

Sokszor kérdezik tőlem, milyen egy kutató, egy matematikus élete: mit csinálunk a hétköznapijainkon, hogyan születnek az eredményeink. Erre a kérdésre kísérel meg választ adni ez a mű.

Egy matematikai eredmény születésének történetét beszéli el, attól a pillanattól kezdve, amikor elhatározzuk, hogy belevágunk a kalandba, egészen addig, amikor az új eredményt – az új *tételt* – bemutató cikket elfogadja publikálásra egy nemzetközi folyóirat.

E két időpont között a kutató munkája messze nem egyenes vonalú pályát követ: inkább kacsaringós útra hasonlít, tele kitérőkkel és elakadással, ahogy az sokszor az életben is történik.

Néhány jelentéktelen módosítástól eltekintve, amelyet az előadás igényei tettek szükségessé, a leírtak mindenben megfelelnek a valóságnak, de legalábbis annak, ahogy én azt megéltem.

Néhány hosszabb angol nyelvű részlet fordítása a mű végén olvasható.

Köszönöm Olivier Norának, hogy egy rögtönzött találkozó alkalmával életre keltette ezt a projektet; köszönöm Claire-nek a szöveg figyelmes átolvasását és a javaslatait; köszönöm Claude-nak a szép illusztrációit; köszönöm Ariane Fasquelle-nek és a Grasset csapatának a minőségi figyelmet és kiadói munkát; végül

köszönöm Clément-nak a felejtethetlen együttműködést, amely nélkül e könyv tárgya nem jöhetett volna létre.

Szívesen veszem, ha olvasóim elektronikus formában megosztják velem kérdéseiket illetve megjegyzéseiket.

Cédric Villani

Párizs, 2011. december

Egy

Lyon, 2008. március 23.

Vasárnap, 13 óra: a kutatóintézet kihalt lenne, ha nem volna bent két elfoglalt matematikus. Meghitt találkozóra jöttünk össze, nyugalmas munkamegbeszélésre abban az irodában, amelyet nyolc éve használok a lyoni *École normale supérieure* harmadik emeletén.

Egy kényelmes fotelben ülve energikusan dobolok az asztalon póklábak módjára széttárt ujjaimmal, ahogy valaha a zongoratanárom tanította.

Bal oldalamon, egy külön asztalon számítógépes munkaállomás. Jobb oldalamon könyvszekrény, néhány száz matematikáról és fizikáról szóló könyvvvel megrakodva. Mögöttem, hosszú polcokon ezer meg ezer oldalnyi gondosan elrendezett, fénymásolt szakcikk abból az őskorból, amikor a tudományos folyóiratok még nem elektronikusan jelentek meg; továbbá számos tudományos mű fénymásolata abból a korszakból, amikor a fizetésem még nem tette lehetővé, hogy csillapítsam könyvek iránti szomjamat. Van itt ezenkívül, hosszú évek gondos archiválásának eredményeként egy jó folyóméternyi piszkozat is, illetve ugyanennyi kéziratos jegyzet annak a megszámlálhatatlan órának a tanúságaként, amelyeket tudományos előadások hallgatásával töl-

töttem. Előtte az íróasztalon Gaspard, a laptopom, amely a forradalom nagy matematikusának, Gaspard Monge-nak a tiszteletére kapta a nevét, ezenkívül pedig egy rakás papír teleírkálva matematikai szimbólumokkal, a világ nyolc sarkából erre az alkalomra összegyűjtve.

Cinkosom, Clément Mouchot csillogó szemmel, szövegkiemelővel a kezében áll a nagy fehér tábla mellett, amely a velem szemben lévő falat teljes egészében elfoglalja.

– Szóval magyarázd el, miért hívtál ide, mire készülsz? Nem sok részletet árultál el az e-mailedben ...

– Visszatérek régi mumusomhoz, ami persze nagyon is ambiciózus: az inhomogén Boltzmann regularitása.

– Feltételes regularitás? Úgy érted, hogy minimális regularitási feltételek mellett?

– Nem, feltételek nélkül.

– Húha! Nem is perturbációs módszerekkel? Gondolod, hogy ez lehetséges?

– Igen, újra nekiálltam, elég jól haladtam, vannak ötleteim. Vízont most elakadtam. Először mindenféle redukált modell segítségével próbáltam egyszerűsíteni a feladatot, de még a legegyszerűbb is kifog rajtam. Azt hittem, megfogom egyfajta maximumelv-érveléssel, de nem, szétesett az egész. Szükségem van rá, hogy beszéljünk róla.

– Mondd csak, hallgatlak.

Hosszan beszélek: a fejemben motoszkáló eredményről, a próbálkozásaimról, a különböző részletekről, amelyeket nem sikerül sorba rendeznem, a logikai kirakósról, amely nem akar összeállni, a Boltzmann-egyenletről, amely nem adja meg magát.

A Boltzmann-egyenlet a világ legszebb egyenlete, ahogy azt egyszer egy újságírónak mondtam! Kiskoromban szerettem bele, a doktorim idején, és minden oldalról tanulmányoztam. A Boltzmann-egyenletben minden benne van: statisztikus fizika, az idő egyirányúsága, a folyadékok mechanikája, valószínűségelmélet, információelmélet, Fourier-analízis ... Egyesek azt mondják, senki a világon nem ismeri úgy a Boltzmann-egyenlet által alkotott matematikai világot, mint én.

Hét évvel ezelőtt avattam be Clément-t ebbe a misztikus univerzumba, amikor a témavezetésemmel megkezdte doktori tanulmányait. Clément mohón tanult, kétségkívül ő az egyetlen, aki a Boltzmann-egyenletről szóló minden munkámat olvasta. Most elismert, önálló, briliáns és lelkes kutató.

Hét évvel ezelőtt én indítottam el a siker felé, most pedig nekem van szükségem órá. Túl nehéz problémával foglalkozom, egyedül nem fogok boldogulni vele – legalább arra szükségem van, hogy elmesélhessem az erőfeszítéseimet valakinek, akinek a kisujjában van az elmélet.

– Tegyük fel, hogy vannak súrlódó ütközések, rendben? cut-off nélküli modell. Az egyenlet ekkor úgy viselkedik, mint egy nemlineáris diffúziós egyenlet, természetesen elfajult, de a diffúzió ugyanaz, és ha korlátozod a sűrűséget és a sebességet,

akkor alkalmazhatsz egy olyan módosított Moser iterációt, ami a lokalitás hiányát figyelembe veszi.

– Egy Moser-sémát? Hmm ... Várj, elkezdek jegyzetelni.

– Igen, egy Moser-jellegű sémát. A dolog kulcsa, hogy a Boltzmann-operátor ... igaz, hogy ez az operátor bilineáris, nem lokális, de mégis, alapvetően divergencia típusú: emiatt működik a Moser-séma. Csinálsz egy nemlineáris függvénycserét, hatványozod ... És igazából egy kicsit több kell, mint a hőmérséklet, ott van a második momentumok mátrixa, amit szintén kontrollálni kell. De a lényeg mégiscsak a pozitivitás.

– Várj, ne ilyen gyorsan; miért nem elég a hőmérséklet? Hosszasan magyarázom; beszélgetünk, vitatkozunk. A táblát elárasztják a matematikai szimbólumok, Clément többet akar tudni a pozitivitásról. Hogyan lehet megmutatni a szigorú pozitivitást regularitási korlátozás nélkül?

– Ez nem olyan meglepő, ha belegondolsz: az ütközések alsó korlátokat adnak, a zárt tartománybeli transzportok szintén: mindez egy irányba mutat. A két hatásnak elvileg erősítenie kell egymást, kivéve, ha nagyon nincs szerencsénk. Annak idején Bernt megpróbálta, de elakadt. Igaz, egy csomóan vannak, akik sikertelenül próbálkoztak, de azért hihetőnek tűnik a dolog.

– Biztos vagy benne, hogy a transzport regularitás nélkül pozitív lesz? Ütközések nélkül, ha transzportálsz a sűrűség értékét, az nem lesz pozitívabb ...

– Igen, de ha a sebességgel átlagolunk, az erősíti a pozitívítást ... valahogy úgy, mint a kinetikus átlagokra vonatkozó lemmánál, csak itt nem regularitás van, hanem pozitivitás. Igaz, hogy ezt senki nem nagyon tanulmányozta még ebből a szempontból. Erről jut eszembe ... két évvel ezelőtt a Princetonon egy kínai posztdok kérdezett tőlem valami ilyesmit. Veszél egy transzport-egyenletet, mondjuk, a tóruszon, zéró regularitást feltételezel, és azt akarod megmutatni, hogy a térbeli sűrűség szigorúan pozitív lesz. Regularitás nélkül! Ő szabad transzportra meg tudta csinálni, vagy általánosabban is kis időre, de nagyobb idővel nem boldogult ... Annakidején továbbítottam másoknak a kérdését, de nem kaptam meggyőző választ.

– Na várj, hogy csinálod egy egyszerű szabad transzportra? A szabad transzport szakzsargon, olyan ideális gázt jelent, amelyben a részecskék nem lépnek egymással kölcsönhatásba. Annyira leegyszerűsített modell, hogy a legkevésbé sem reális, sokszor mégis nagyon tanulságos.

– Hát, az explicit megoldással kell, hogy működjön; várj, próbáljuk meg kitalálni.

Külön-külön nekilátunk, hogy megpróbáljuk felírni azt az okfejtést, amelyet Dong Li követhetett. Ez nem egy jelentős eredmény, inkább csak egy kis újgyakorlat; de e kis gyakorlat megoldásának megértése talán segít majd elindulni a nagy rejtvény megfejtése felé. Meg hát olyan ez, mint egy játék! Néhány percnyi csendes írógátás után én győzők.

– Azt hiszem, megvan.

Odamegyek a táblához, hogy felírjam a megoldást, mint egy feladatmegoldó szemináriumon.

– Szétbontjuk a megoldást a tórusz replikái szerint ... minden példányon változókat cserélünk ... a Jacobi kiesik, használod a Lipschitz-folytonosságot ... és végül $1/t$ -rendű konvergenciát kapsz. Lassú, de jónak tűnik.

– De hát akkor nem regularizálsz ... a konvergenciát úgy hozod ki, hogy átlagolod ... átlagolod ...

Clément hangosan gondolkodik a számításaim fölött. Egyszerre felragyog, izgatottan rázza mutatóujját a tábla felé:

– Akkor meg kéne nézni, hogy nem segít-e ez a Landau-csillapításban!

Ez váratlanul ér. Három másodperc csönd. Egy homályos érzés: valami fontos dolognál járhatunk.

Kérem, hogy fejtse ki. Clément zavarba jön, elkezd magyarázni, hogy a bizonyítás egy három évvel ezelőtti beszélgetésre emlékezteti, amelyet Providence-ben, az Egyesült Államok keleti partján folytatott egy kínai származású kutatóval, Yan Guoval.

– A Landau-csillapításnál egy reverzibilis egyenlethez keressünk relaxációt ...

– Igen, igen, tudom, de a kölcsönhatásnak itt nincs szerepe? Nem Vlaszov-típusról van szó, ez csak egy szabad transzport!

– Talán a kölcsönhatásnak tényleg szerepelnie kéne, igen, és ezenkívül... a konvergenciának exponenciálisnak kéne lennie. Gondolod, hogy $1/t$ optimális?

– Ez jól hangzik, nem?

– De ha a regularitás erősebb lenne?

– Hmmm.

Mormogok, kétségeket, koncentrációt, érdeklődést és frusztrációt elegyítve.

Néhány pillanatnyi szünet, meredt tekintetek, összezárt ajkak, majd újrakezdjük a beszélgetést. Akármilyen izgalmas is legyen, a legendás (és misztikus?) Landau-csillapításnak nem sok köze van eredeti kutatási tervünkhöz: néhány perc után más témára térünk át. A beszélgetés hosszan folytatódik. Szó szót követ, egyik matematikai kérdéstől utazunk a másikig. Jegyzetelünk, érvelünk, háborgunk, tanulunk, haditervet készítünk. Mire elválunk, a Landau-csillapítás mégis felkerül házi feladataink hosszú listájára.

*

A Boltzmann-egyenlet,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} |v - v_*| \left[f(v') f(v'_*) - f(v) f(v_*) \right] dv_* d\sigma,$$

amelyet névadója 1870 körül fedezett fel, egy ritka gáz fejlődését modellezi, amely sok milliárdnyi egymással ütköző részecskéből áll. A részecskék helyzetének és sebességének statisztikai eloszlását egy $f(t, x, v)$,

függvénnyel reprezentáljuk, amely t időpontokhoz megadja azoknak a részecskéknél a sűrűségét, amelyeknek a helyzete (köribelül) x és a sebessége (köribelül) v .

Ludwig Boltzmann vezette be a gáz entrópiájának vagy rendezetlenségének statisztikai fogalmát:

$$S = - \iint f \log f \, dx \, dv.$$

Az egyenletét felhasználva bebizonyította, hogy egy véletlenszerűen rögzített kezdőállapotból kiindulva az entrópia csak növekedhet, soha nem csökkenhet az idő előrehaladtával. Képletesen szólva, a magára hagyott gáz spontán módon egyre rendezetlenebbé válik, és ez a folyamat visszafordíthatatlan.

Az entrópia növekedésének törvényét, amely a termodinamika második törvénye néven ismert, már Boltzmann előtt néhány évtizeddel felfedezték kísérleti úton – Boltzmann azonban néhány rendkívül jelentős elméleti összetevővel gazdagította azt. Mindenekelőtt a korábban tapasztalati úton megfigyelt, empirikus törvényt, amelyet axiómaként tettek fel, egy bizonyított tétellel helyettesítette; továbbá rendkívül termékeny matematikai értelmezést adott az entrópia misztikus fogalmának; és végül összeegyeztette a kiszámíthatatlan, kaotikus és visszafordítható mikrofizikát egy megjósolható és kiszámítható makrofizikával. Ezek az eredmények kitüntetett helyet biztosítanak Boltzmannnak az elméleti fizika panteonjában, egyúttal újra és újra felkeltik a filozófusok érdeklődését is.

Boltzmann ezután egy statisztikai rendszer egyensúlyi állapotát a maximális entrópia állapotaként definiálja, megalapozva ezzel a statisztikai

tikus egyensúly fizikájának hatalmas területét: a legrendezetlenebb állapot a legtermészetesebb.

A diadalmas fiatal Boltzmann lassanként megkeseredett öregember-ré vált, aki 1906-ban öngyilkos lett. A gázok elméletéről szóló értekezése, amely máig megőrizte aktualitását, mai szemmel nézve a 19. század egyik legjelentősebb tudományos művének tekinthető. De a tapasztalat által megerősített jóslatai mögül máig hiányzik egy teljes matematikai elmélet; és a kirakós egyik hiányzó darabja a Boltzmann-egyenlet adta megoldások regularitásának vizsgálata. E makacs rejtély ellenére, vagy éppen emiatt a Boltzmann-egyenlet ma egy virágzó elmélet tárgyát képezi: matematikusok, fizikusok és mérnökök nemzetközi közösségét foglalkoztatja, akik százával gyűlnek össze a Rarefied Gas Dynamics konferenciákon és egyéb alkalmakkor.



Ludwig Boltzmann