Hraskó Péter

Relativitáselmélet

2., javított kiadás

TYPOTEX

Tartalomjegyzék

Előszó . . . 9
A második kiadásról . . . 11

1. Speciális relativitáselmélet (téridő-geometria) 13
1.1. Vonatkoztatási rendszerek . . . 13
1.2. A Galilei-transzformáció és a Galilei-féle sebesség-összeadási törvény . . . 16
1.3. A fénysebesség problémája és az egyidejűség relativitása . . . 17
1.4. Az inerciarendszerek közötti transzformáció általános alakja . 20
1.5. A Lorentz-transzformáció és a relativisztikus sebesség-összeadási törvény . . . 32
1.6. A relativitáselmélet két posztulátuma . . . 37
1.7. A téridő . . . 39
1.8. A téridő geometriája a speciális relativitáselméletben . . . 47
1.9. A sajátidő . . . 55
1.10. A kauzalitási paradoxon . . . 62
1.11. A Lorentz-kontrakció . . . 64
1.12. A testhez rögzített koordináta-rendszer . . . 71
1.13. Tenzorok . . . 77

2. Speciális relativitáselmélet (dinamika) 83
2.1. Sebesség, gyorsulás . . . 83
2.2. Sűrűség és áramsűrűség . . . 86
2.3. A Maxwell-egyenletek . . . 92
2.4. Fázisfelületek és fénysugarak . . . 97
2.5. Tömegpont mozgása erőtérben . . . 100
2.6. A tömegpont energiája és impulzusa . . . 106
2.7. Nulla tömegű részecskék . . . 111
2.8. Az energia-impulzus tenzor . . . 114
2.9. Spinorok . . . 123

3. A gravitáció mint geometria 133
3.1. Problémák a newtoni gravitációelméletben . . . 133
3.2. A súlyos és a tehetetlen tömeg . . . 138

3.3. A geodetikus hipotézis 141
3.4. Az inerciarendszerek lokalitása 143

4. A Riemann-geometria alapjai 151
4.1. Kétdimenziós felületek 151
4.2. A Riemann-sokaság 158
4.3. A pszeudoriemann-sokaság 160
4.4. A párhuzamos eltolás 166
4.5. A kovariáns és az abszolút derivált 174
4.6. A párhuzamos elterjesztés egyenlete 180
4.7. A geodetikus egyenlet 185
4.8. A Riemann-tenzor 191
4.9. A Riemann-tenzor tulajdonságai 197
4.10. Sűrűségek 207
4.11. Integrálás 213

5. A pszeudoriemann-téridő és az ekvivalenciaelv 219
5.1. Lokális inerciarendszerek 219
5.2. Lokális gyorsuló rendszerek 225
5.3. A Nap körüli metrika a geodetikus hipotézis alapján 230
5.4. Az ikerparadoxon a Föld gravitációs terében 237
5.5. A szabadon mozgó tömegpont 240
5.6. Elektrodinamika a pszeudoriemann-téridőben 243
5.7. A gravitációs vöröseltolódás 248
5.8. Tetrádok 252
5.9. Spinorok a pszeudoriemann-téridőben 256

6. Az Einstein-egyenlet 259
6.1. Az Einstein-egyenlet 259
6.2. A Hilbert-hatás 266
6.3. A gravitációs energia 272
6.4. A koordináták az általános relativitáselméletben 281

7. A magányos csillag térideje 287
7.1. A centrálszimmetrikus statikus téridő 287
7.2. A Schwarzschild-megoldás 291
7.3. A fényelhajlás 299
7.4. A perihélium-vándorlás 302
7.5. A relativisztikus precesszió 305
7.6. A Schwarzschild-szingularitás természete 311
7.7. A Kruskal–Szekeres-téridő 322
7.8. A forgó csillag térideje 330

8. A gravitációs sugárzás **343**
8.1. Gravitációs síkhullámok 343
8.2. A kvadrupólsugárzás 352
8.3. A gravitációs sugárzás észlelésének elvi alapjai 354

9. A kozmológia alapjai **359**
9.1. A relativisztikus kozmológia alapfeltevései 359
9.2. A standard modell 362
9.3. A kozmológiai vöröseltolódás 364
9.4. A Friedman-egyenletek 371
9.5. A Friedman-egyenlet megoldása 376
9.6. A Friedman-univerzum 381
9.7. A horizontprobléma 383
Jegyzetek 387
Fontosabb jelölések 423
Index 425

Jegyezze meg, fiatal barátom, hogy a fizikában nem a matematika nehéz, hanem a fizika.

I. M. Frank, Nobel-díjas

Előszó

Ez a könyv bevezetés kíván lenni a relativitáselmélet fogalomrendszerébe és alapvető matematikai módszereibe. Az elmélet – mint ismeretes – két diszciplínára tagolódik: a speciális és az általános relativitáselméletre. Mindkettőnek a központi problémája az, hogy milyen viszonyban áll a tér és az idő a benne mozgó anyaggal. A speciális relativitáselmélet az egyidejűség fogalmának a tisztázásán keresztül arra a következtetésre jut, hogy a fény sebessége minden egyenletesen mozgó testhez képest ugyanakkora. Egy másik fontos eredménye a tömeg és az energia kapcsolatának a felismerése. Az általános relativitáselmélet azt mutatja meg, hogy a térnek és az időnek (pontosabban a téridőnek) olyan pozitív geometriai-fizikai tulajdonságai vannak, mint a deformálhatóság, és a gravitáció ennek a tulajdonságnak a látható megnyilvánulása.

A speciális relativitáselmélet a fizikának azokon a területein megkerülhetetlen, amelyek nagy sebességű mozgásokkal és a részecskék átalakulásaival foglalkoznak. Elsősorban az atomfizika és az elemi részecskék fizikája tartozik ide, amelyeknek az elmélete két tartópilléren nyugszik: a kvantumelméleten és a speciális relativitáselméleten. Jelenlegi ismereteink szerint a téridő deformációja ebben a jelenségkörben nem játszik szerepet. Ezeken a területeken lehet – és érdemes is – korlátozódni az általános relativitáselméletnek azokra az aspektusaira, amelyeket a speciális relativitáselmélet foglal magába.

Ez az egyik oka annak, hogy a relativitáselmélet ismertetését célszerű a speciális relativitáselmélettel elkezdeni. A másik ok az, hogy az általános relativitáselmélet a speciális relativitáselméletet követően, ennek bázisán jött létre, és az elmélet elsajátítását megkönnyíti, ha ezt a történeti sorrendet megtartjuk. A könyv első két része ezért kizárólag a speciális relativitáselmélettel foglalkozik, és annak, akit az elméletnek csak ez a vonatkozása érdekel, elég ezt a két részt áttanulmányoznia. Ha még az általános relativitáselmélet alapjairól is szeretne legalább tájékozódni, elolvashatja a harmadik részt, amely megkísérli a matematikai apparátus felhasználása nélkül bemutatni az elmélet alapgondolatát, a gravitáció geometrizálását.

A speciális relativitáselmélet egyáltalán nem igényel különleges matematikai ismereteket. A differenciál- és integrálszámítás alapjai elegendők hozzá.

Az általános relativitáselmélethez azonban szükség van olyan matematikára is, amely ezen a szinten túlmegy, és az egyetemi matematikai alapkurzusok sem tartalmazzák. A Riemann-geometriáról van szó, amelyet a negyedik részben elég részletesen megtárgyalunk ahhoz, hogy az általános relativitáselméletet az is megérthesse, akinek nincsenek ezen a területen előzetes ismeretei.

A Riemann-geometriát a klasszikus differenciálgeometria módszerével tárgyaljuk, amely az általános relativitáselmélet kialakulása idején már rendelkezésre állt. Azóta megszületett a modern differenciálgeometria is, amely a klasszikustól új matematikai technikák, főleg a differenciális formák és a nyalábok szisztematikus alkalmazásában különbözik.

A modern differenciálgeometria az olyan sokaságok vizsgálatánál nélkülözhetetlen, amelyek topológiai tulajdonságai egy bizonyos globális értelemben bonyolultak. A kétdimenziós felületek közül például azok tartoznak ide, amelyek „fogantyúkkal és lyukakkal” rendelkeznek, és ennek következtében nem lehet rajtuk minden zárt görbét folytonos módon ponttá összehúzni. A gömbön és a végtelen síkon nincsenek ilyen képződmények, ezért ezek a felületek ebből a szempontból egyszerűek.

Jelenlegi ismereteink szerint az a téridő, amelyben élünk, és amely a fizikai történések egyedüli színtere, ebben a globális topológiai értelemben egyszerű. Ezért az általános relativitáselméletnek, amely a téridő geometriájának a tudománya, nem az a legfőbb dolga, hogy a topológiailag bonyolult hipotetikus téridők kezelésére alkalmas technikákat dolgozzon ki. A feladata enélkül is éppen elég nehéz. Azt kell ugyanis megértenie, hogyan lehet „kitalálni” például a Napot körülvevő tér valódi geometriáját (görbültségét), és hogyan lehet a testek – bolygók és űrhajók – haladó és forgó mozgása, valamint a fény terjedése alapján meggyőződni róla, hogy igaz-e az, amit kitaláltunk. A modern differenciálgeometria természetesen ennek a sajátosan fizikai problematikának a kifejtésében is nyújt előnyöket, de ezek az előnyök nem olyan mértékűek, amelyek indokolnák, hogy egy bevezető kurzusban a matematikai előkészítő részt még a differenciális formák és a nyalábok elméletével is megterheljük.

A könyvben fontos szerep jut a feladatoknak, amely mind megoldott feladat. A feladatok zöme az alapszövegbe illeszkedő állításra vagy tételre vonatkozik. Azzal, hogy ezeket feladat formájában kérdésként fogalmazzuk meg, bátorítani akarjuk az olvasót, hogy próbálja maga megtalálni a választ. Biztos, hogy a felvetett problémát még akkor is jobban megérti, ha végül meg kell néznie a megoldást. A feladatok nem mellékes gyakorlatok. A gondolatmenet szerves részét képezik, amelyekre később éppúgy történik hivatkozás, mint a szöveg bármely más részére.

A jegyzetek a könyv végén olyan ismereteket tartalmaznak, amelyek – a feladatoktól eltérően – nem nélkülözhetetlenek a megértéshez. Elsősorban a történeti jellegű információk kerültek ide.

A könyv azoknak a kurzusoknak az anyagára épül, amelyeket néhány év óta tartok az általános relativitáselméletről a Budapesi Műszaki Egyetemen mérnök-fizikus hallgatók számára. Ezúton mondok köszönetet műegyetemi barátaimnak – Kálmán Péternek, Orosz Lászlónak és Zawadowsi Alfrédnak – a támogatásukért, és természetesen a hallgatóknak, akik az előadásokat látogatták.

Hraskó Péter

A második kiadásról

Az átdolgozással elsősorban az volt a célom, hogy ott, ahol képes vagyok rá, világosabbá és teljesebbé tegyem az érvelést. Elég sok helyen volt erre szükség és lehetőség. Néhány kérdéskört, ahol erre sor került, nem én, hanem az „élet” jelölt ki. Amikor az első változaton dolgoztam, még nem realizáltam, milyen mélységűek azok a félreértések, amelyekkel a relativitáselmélet kapcsán gyakran még a hozzáértőknél is találkozni lehet. Magam is osztoztam néhányukban. Itt elsősorban a tömeg-energia reláció érvényességi körének pontos meghatározására és származtatási módjára gondolok. Ebben az új változatban a levezetés több módját is ismertetem a formális lagrange-i megközelítésen kezdve Einstein gondolatkísérletén keresztül az általános relativitáselmélet által lehetővé tett fundamentális térelméleti bizonyításig.

A másik kérdéskör a relativisztikus precesszió jelensége, amelyet az első kiadás megjelenése után néhány évvel a NASA GP-B kísérlete állított egy időre a figyelem középpontjába. Amikor a könyvön dolgoztam, még nem tudtam erről a készülő kísérletről, a geodetikus precessziót és a forgó csillag körül létrejövő „dreget”, amelynek mérését célozta ez a kísérlet, azonban tárgyaltam a könyvben. Ebben az új változatban a pörgettyű relativisztikus mozgását leíró egyenlet új formáját használva, a tárgyalást egyszerűbbé és ugyanakkor általánosabbá tettem. Magát a „relativisztikus precesszió” elnevezést is azért kezdtem használni, mert az új tárgyalásban a speciális relativitáselmélet körébe tartozó Thomas-precesszió és az általános relativitáselméletben fellépő geodetikus precesszió egyetlen formula két speciális eseteként jelenik meg.

Az első fejezetbe beiktattam egy új szakaszt a testekhez rögzített koordináta-rendszerekről. Ez a fogalom alkalmas keretet nyújt például annak az állandóan vissza-vissszatérő kérdésnek a megvitatására, hogy a Lorentz-kontrakció „állapot-e vagy folyamat”, valamint a deszinkronizáció kevéssé ismert jelenségének a megvilágítására.

A könyv komoly hiányosságának tartottam, hogy egyáltalán nem esett benne szó a kozmológiáról. Ezt a hiányt most egy új fejezettel pótoltam. A jegyzetek közül egyeseket kihagytam, de újakat is beiktattam közéjük. A feladatok között is vannak újak.

Hraskó Péter

1. fejezet

Speciális relativitáselmélet (téridő-geometria)

1.1. Vonatkoztatási rendszerek

A newtoni mechanika, a relativisztikus mechanika és az általános relativitáselmélet kiindulópontjában egy-egy olyan gondolatkísérlet áll, amelyben valamilyen *vonatkoztatási rendszer* játszik alapvető szerepet. A newtoni mechanika esetében ez Galilei hajója, a speciális relativitáselmélet és az általános relativitáselmélet esetében pedig egy vonat és egy szabadon eső lift – mindkettő Einstein nevéhez fűződik. Mindhárom esetben szerephez jut még egy negyedik vonatkoztatási rendszer is – a földfelület egy darabja.

Vonatkoztatási rendszeren olyan valóságosan létező – vagy legalábbis ténylegesen realizálható – objektumokat értünk, amelyek alapvető funkciója az, hogy a természeti törvényeket őhozzájuk viszonyítva („bennük") fogalmazzuk meg. A realizálhatóság azért fontos, mert enélkül nem lehetne közvetlenül ellenőrizni a megfogalmazott törvények *érvényességét*.

Einstein vonatjáról és liftjéről később lesz szó. Ami pedig Galilei hajóját illeti, átadjuk a szót Salviatinak, aki a *Dialogo*-ban Galilei szócsöve:

> ...Zárkózzál be egy barátod társaságában egy nagy hajó fedélzete alatt egy meglehetősen nagy terembe. Vigyél oda szúnyogokat, lepkéket és egyéb röpködő állatokat, gondoskodjál egy apró halakkal teli vizesedényről is, azonkívül akassz fel egy kis vödröt, melyből a víz egy alája helyezett szűknyakú edénybe csöpög. Most figyeld meg gondosan, hogy a repülő állatok milyen sebességgel röpködnek a szobában minden irányba, míg a hajó áll. Meglátod azt is, hogy a halak egyformán úszkálnak minden irányban, a lehulló vízcseppek mind a vödör alatt álló edénybe esnek. Ha társad felé hajítasz egy tárgyat, mind az egyik, mind a

> másik irányba egyforma erővel kell hajítanod, feltéve, hogy azonos távolságról van szó. Ha, mint mondani szokás, páros lábbal ugrasz, minden irányba ugyanolyan messzire jutsz. Jól vigyázz, hogy mindezt gondosan megfigyeld, nehogy bármi kétely támadhasson abban, hogy az álló hajón mindez így történik. Most mozogjon a hajó tetszés szerinti sebességgel: azt fogod tapasztalni – ha a mozgás egyenletes és nem ide-oda ingadozó –, hogy az említett jelenségekben semmiféle változás nem következik be. Azoknak egyikéből sem tudsz arra következtetni, hogy mozog-e a hajó, vagy sem. Ha ugrasz, ugyanakkora távolságra fogsz jutni, mint az előbb, és bármily gyorsan mozog a hajó, nem tudsz nagyobbat ugrani hátrafelé, mint előre: pedig az alattad levő hajópadló az alatt az idő alatt, míg a levegőben vagy, ugrásoddal ellenkező irányban elmozdul előre. Ha társad felé egy tárgyat hajítasz, nem kell nagyobb erővel hajítanod, ha barátod a hajó elején tartózkodik, mint akkor, amikor hátul van. A cseppek éppúgy bele fognak hullani az alsó edénybe, mint előbb, egyetlenegy sem fog az edény mögé esni, pedig az, míg a csepp a levegőben van, több hüvelyknyi utat tesz meg. A halaknak sem kell az edényben nagyobb erőt kifejteni, hogy az edény elejére úszhassanak, és ugyanolyan könnyedséggel fognak a táplálék után menni, ha az edény bármely részén van is. Végül a szúnyogok és a lepkék is különbség nélkül fognak bármely irányba repkedni. Sohasem fog előfordulni, hogy a hátsó falhoz nyomódnak, mintegy elfáradva a gyorsan haladó hajó követésétől, pedig míg a levegőben tartózkodnak, el vannak választva tőle. Ha egy szem tömjént elégetünk, egy kevés füst képződik, mely felszáll a magasba és kis felhő gyanánt lebeg ott, és nem mozdul el sem az egyik, sem a másik irányba. A jelenségek ez egyformaságának az az oka, hogy a hajó mozgásában minden rajta levő tárgy részt vesz, beleértve a levegőt is. Azért is mondtam, hogy a fedélzet alatt kell elhelyezkednetek, mert fent, a szabad levegőn, mely nem kíséri a hajó mozgását, az említett jelenségektől többé-kevésbé észrevehető eltéréseket tapasztalhatnátok. Így például a füst éppúgy elmaradna, mint a levegő. A szúnyogok és a lepkék sem tudnák követni a hajót a levegő ellenállása miatt...
>
> M. Zemplén Jolán fordítása

Salviati érzékletes leírásában könnyű felismerni két szorosan összefüggő állítást, amelyeket ma a következőképpen fogalmaznánk meg:

1. A hajó és a part két egyenértékű vonatkoztatási rendszer.
2. Mindkettő *inerciarendszer*, mivel érvényes bennük a *tehetetlenség elve*: a szabadon mozgó testek mindkettőhöz viszonyítva megtartják egyenletes egyenesvonalú mozgásukat (vagy nyugalomban maradnak).

Nem minden vonatkoztatási rendszer inerciarendszer. A széllökéseknek kitett, változó sebességgel mozgó hajó nem az, és – szigorúan véve – a Föld sem az forgása és keringése miatt.

Azokat a vonatkoztatási rendszereket, amelyek nem inerciarendszerek, *gyorsuló* vonatkoztatási rendszereknek nevezzük.

Ha a Newton-egyenletek jobb oldalán az erők között elegendő csak azokat az erőket feltüntetnünk, amelyeknek jól azonosítható forrása van (ezeket *valódi erőknek* nevezzük), akkor a vonatkoztatási rendszerünk inerciarendszer. Ha ugyanis az erők forrásai olyan messze vannak, hogy a hatásuk elhanyagolható, akkor a mozgásegyenletek jobb oldalán nulla áll, ezért a gyorsulások is nullák és a tehetetlenség elve teljesül. Gyorsuló vonatkoztatási rendszerben a jobb oldalon a valódi erők mellett a *tehetetlenségi erőket* is figyelembe kell venni.

A Newton-egyenletek tényleges felírásához *koordináta-rendszert* kell választanunk. Milyen kapcsolatban van a koordináta-rendszer a vonatkoztatási rendszerrel? Ahhoz, hogy a Newton-egyenletek által meghatározott mozgást a kijelölt vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva írjuk le, szükséges, hogy a vonatkoztatási rendszert képező objektum minden darabja rögzített koordinátákkal rendelkezzen. Röviden: a vonatkoztatási rendszernek nyugodnia kell a koordináta-rendszerben. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a koordináta-rendszer a vonatkoztatási rendszerhez van *rögzítve*.

A vonatkoztatási rendszer és a koordináta-rendszer között van egy alapvető különbség. A vonatkoztatási rendszer vagy reálisan létezik, vagy ha nem, megvalósíthatónak kell lennie, és a gondolatkísérletekben is csak így szabad elképzelni. A koordináta-rendszerek ezzel szemben kizárólag a képzeletünkben léteznek, sohasem realizáljuk őket, és erre általában nincs se szükség, se lehetőség. Háromdimenziós terünk esetében a koordináta-rendszernek egyedül azt kell tudnia, hogy a tér pontjaihoz kölcsönösen egyértelmű módon rendeljen egy valós számhármast. Gondoljuk csak meg: Amikor az ágyúgolyó röppályáját számoljuk, azt mondjuk ugyan, hogy „a koordináta-rendszert úgy vesszük fel, hogy a z tengely függőlegesen fölfele mutasson és a talajon legyen $z = 0$" – de eszünk ágában sincs ezt a koordináta-rendszert valóságosan „fölvenni".

Áttérünk az inerciarendszerek térbeli kiterjedésének a kérdésére. Ezen a következő kérdést értjük: Igaz-e, hogy a természet *bármely* objektumáról eldönthető, hogy egy adott inerciarendszerhez – például Galilei hajójához – képest nyugszik-e vagy sem? A hajón vagy a parton lévő tárgyakra vonatkozóan a válasz nyilván az, hogy igen, eldönthető, de vajon mi a helyzet – mondjuk – a Szíriusszal?

Pontosítsuk a kérdést. Vegyünk egy inerciarendszert és rögzítsünk hozzá egy Descartes-féle koordináta-rendszert, amelynek origója valahol az inerciarendszeren (hajón, vasúti kocsin, liften) belül van, tengelyei pedig meghatározott pontokban döfik át a falakat. Ezt a koordináta-rendszert – mivel úgyis csak a képzeletünkben létezik – akadálytalanul kiterjeszthetjük úgy, hogy lefedje egész euklidészi terünket. Akármilyen messze van is a vonatkoztatási rendszertől egy tömegpont (a Szíriusz középpontja például), ha ebben a koordináta-rendszerben a koordinátái konstansok, akkor nyugszik ahhoz az inerciarendszerhez képest, amelyhez a koordináta-rendszert rögzítettük. De nyilván nem szükséges a nyugalomra korlátozódni: Az inerciarendszerhez rögzített koordináta-rendszer segítségével bármilyen távoli testről megállapítható, hogyan mozog az inerciarendszerhez képest. Ezt a tulajdonságot röviden úgy fejezzük ki, hogy a newtoni mechanika inerciarendszerei *globálisak*. Mivel azonban koordináta-rendszer bármely vonatkoztatási rendszerhez rögzíthető, a globalitás érvényes a gyorsuló vonatkoztatási rendszerekre is.

Ha nem így lenne, a bolygómozgást nem lehetne a Newton-egyenletek alapján tárgyalni. A Naprendszer égitesteire vonatkozó Newton-egyenleteket felírhatjuk úgy, hogy a jobb oldalon csak az égitestek között ható gravitációs erő szerepeljen. Ez valódi erő,[1] ezért az egyenletek ebben a formában csakis inerciarendszerben érvényesek. A bolygórendszer kozmikus méretei miatt azonban ennek az inerciarendszernek globálisnak kell lennie. A newtoni mechanika inerciarendszereinek globalitása mellett éppen az a legerősebb érv, hogy ez az elmélet a bolygórendszer leírásában érte el a legnagyobb sikereit.

1.2. A Galilei-transzformáció és a Galilei-féle sebesség-összeadási törvény

Mindeddig nem foglalkoztunk a különböző inerciarendszerekhez rögzített koordináta-rendszerek közötti kapcsolattal. Most erre térünk rá.

Tekintsünk egy tömegpontot, amely egy adott pillanatban a tér P pontjában van. Legyenek ennek a pontnak a koordinátái a $\mathcal{K}$ inerciarendszerhez rögzített $OXYZ$ Descartes-rendszerben x, y, z, a $\mathcal{K}$' inerciarendszerhez rögzített $O'X'Y'Z'$-höz képest x', y', z'. A kérdés az, hogy milyen képletek adják meg a kapcsolatot a P vesszős és vesszőtlen koordinátái között.

A koordináta-rendszereket mindig megválaszthatjuk úgy, hogy megfelelő tengelyeik legyenek párhuzamosak egymással, és két inerciarendszer esetében azt is mindig elérhetjük, hogy közös x tengelyük mentén mozogjanak. A továbbiakban tekintsünk el attól, hogy egy adott inerciarendszerhez rögzített Descartes-rendszer origója feltétlenül legyen az inerciarendszert meghatározó objektum belsejében. Ekkor az is megvalósítható, hogy egy adott időpillanatban – mondjuk $t = 0$-ban – a két koordináta-rendszer éppen fedje egymást. Az inerciarendszereknek ezt a speciális konfigurációját *standard elrendezésnek* fogjuk hívni.

Nyilvánvalónak látszik, hogy standard elrendezésben a vesszős és a vesszőtlen koordinátákat az

$$x' = x + Vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z \tag{1.2.1}$$

[1]Ez a newtoni gravitáció-elméletben van így. Az általános relativitáselmélet a Kepler-törvényeket gravitációs erőhatás nélkül magyarázza meg (ld. a 3. fejezetet).

Galilei-transzformáció köti össze egymással. A képletben V a $\mathcal{K}$' – az O' origó – sebessége a $\mathcal{K}$-hoz képest. Az (1.2.1) inverze az

$$x' = x - Vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z \tag{1.2.2}$$

transzformáció, amelyben $-V$ a $\mathcal{K}$ – az O origó – sebessége $\mathcal{K}$'-ben.

A Galilei-transzformációból t szerinti deriválással kapjuk a *Galilei-féle sebesség-összeadási törvényt* (standard elrendezés mellett):

$$v'_x = v_x + V, \qquad v'_y = v_y, \qquad v'_z = v_z, \tag{1.2.3}$$

amelyben

$$\begin{aligned} (v_x,\, v_y,\, v_z) &= \left(\frac{dx}{dt},\, \frac{dy}{dt},\, \frac{dz}{dt}\right), \\ (v'_x,\, v'_y,\, v'_z) &= \left(\frac{dx'}{dt},\, \frac{dy'}{dt},\, \frac{dz'}{dt}\right). \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

1.3. A fénysebesség problémája és az egyidejűség relativitása

A Galilei-féle sebességöszeadási törvény érvényessége nyilvánvalónak látszik, de a fénysebességre történő alkalmazása felvet egy súlyos problémát: amennyiben érvényes a fénysebességre is, a Maxwell-egyenletek nem lehetnek igazak minden inerciarendszerben. A Maxwell-egyenletek szerint ugyanis a fénysebesség minden irányban ugyanaz a $c = 2,99792458 \cdot 10^8\ m/s$ érték, és ha ez minden inerciarendszerben így van, akkor (1.2.3) nem vonatkozhat a fénysebességre. Ezt a súlyos dilemmát oldja fel a *speciális relativitáselmélet*, amely abból az alapfeltevésből indul ki, hogy az inerciarendszerek nemcsak a mechanikai jelenségekre nézve egyenértékűek (*Galilei-féle relativitási elv*), hanem *minden* természeti jelenség ugyanúgy történik bennük (*Einstein-féle relativitási elv*). A természeti jelenségek között természetesen ott vannak az elektrodinamikai jelenségek, amelyeket a Maxwell-egyenletek minden jel szerint helyesen írnak le. Ezért Einstein széles értelemben vett relativitási elve csak akkor lehet igaz, ha a Galilei-féle sebesség-összeadási törvényt valamilyen új sebesség-összeadási törvénnyel helyettesítjük, amely összefér azzal, hogy a fény sebessége minden inerciarendszerben legyen minden irányban ugyanakkora. Mivel azonban (1.2.3) a Galilei-transzformáció egyenes következménye, első lépésként ez utóbbit kell egy másik, az Einstein-féle relativitási elvvel összeférő transzformációval helyettesíteni.

A Galilei-transzformáció azonban annyira egyszerű és nyilvánvaló, hogy egészen 1905-ig, Einstein fellépéséig senki sem gondolt rá, hogy fel lehetne váltani valami mással, pedig a fénysebesség és a relativitási elv konfliktusa addigra már teljesen köztudottá vált.[1] Einstein gondolkozott el először azon, hogy az inerciarendszerekkel kapcsolatos vizsgálódások során nem fordítottak kellő figyelmet az idő szerepére: Egy test sebességét a $\mathcal{K}$-beli dx, dy, dz és a $\mathcal{K}$'-beli dx', dy', dz' alapján az (1.2.4) képlet szerint úgy számították ki, hogy mindkét esetben *ugyanazzal* a dt időkülönbséggel osztottak. Ezzel hallgatólagosan azt tételezték föl, hogy a test pályájának két adott pontja között ugyanannyi idő telik el, akármelyik inerciarendszerre vonatkoztassuk is a mozgást.

Pusztán logikai szempontból ebben az eljárásban nincs semmi kivetnivaló, de a ténylegesen használatos sebességmeghatározási eljárás más lehetőséget is megenged. Amikor ugyanis valamilyen vonatkoztatási rendszerben (hajóban, vonatban, liftben, földi laboratóriumban) sebességet mérünk, mindig olyan időmérő eszközöket (órákat) használunk, amelyek *nyugszanak* az adott vonatkoztatási rendszerben (rajta vannak a hajón, a vonaton, a liften, vagy ott ketyegnek a laboratórium falán). Egy adott óra azonban egyszerre csak egy vonatkoztatási rendszerben nyugodhat, ezért a pálya két pontja között eltelt időt a különböző vonatkoztatási rendszerekhez viszonyítva más és más óráról olvassuk le, és nincs semmiféle logikai lehetetlenség abban, hogy a különböző órák különböző időtartamokat mutassanak ($dt \neq dt'$).

Fogalmazzuk meg ezt a lehetőséget egy kissé általánosabb formában. Legyen E_1 és E_2 két pontszerűnek és pillanatszerűnek tekinthető *esemény*. Az E_1 koordinátái $\mathcal{K}$-ban legyenek x_1, y_1, z_1, $\mathcal{K}$'-ben x_1', y_1', z_1', a két vonatkoztatási rendszerben mért időpontja pedig legyen t_1 és t_1'. Az E_2 eseményre vonatkozóan a koordináták x_2, y_2, z_2, x_2', y_2', z_2', az időpontok pedig t_2 és t_2'. Az órákat ideálisan pontosnak képzeljük el. A Galilei-transzformáció és a hozzá tartozó sebesség-összeadási törvény felírásánál természetesnek tekintették, hogy a $(t_1 - t_2)$ és a $(t_1' - t_2')$ időkülönbség egyforma, de Einstein észrevétele alapján ennek nem kell feltétlenül így lennie. Ha pedig igaz az, hogy a fény sebessége minden inerciarendszerben minden irányban c, akkor nem is lehet így. Einstein ezt annak a „vonatos” gondolatkísérletnek a segítségével mutatta be, amelyre az 1. fejezet bevezető soraiban utaltunk.

Legyen a vasútállomás az egyik inerciarendszer, az egyenes pályán egyenletes sebességgel mozgó vonat a másik. Tegyük fel továbbá, hogy érvényes az Einstein-féle relativitási elv, vagyis a természeti törvények – közöttük a Maxwell-egyenletek – mindkét inerciarendszerben egyformán érvényesek. Akkor a fény terjedési sebessége az állomáshoz (a földhöz) képest is és a vonathoz képest is ugyanakkora minden irányban. Az „állomáshoz képest” kifejezésen azt értjük, hogy ezt a sebességet a földön nyugvó méterrudak és órák segítségével állapítják meg az állomáson várakozók, míg a vonathoz viszonyított fénysebesség az, amelyet a vonaton nyugvó méterrudak és órák segítségével mérnek az utasok.

Tegyük fel, hogy a vonat középpontjában (ezt a pontot az utasok jelölik ki) fényfelvillanás történik, amelynek hatása a vonat elején és végén egy-egy robbanást vált ki. Egyidejű-e ez a két robbanás? Ha a fény mindkét inerciarendszerben ugyanúgy viselkedik, akkor erre a kérdésre nincs egyértelmű válasz – a vonattal együtt mozgó órák és a földön nyugvó órák mutatóállásai alapján eltérő konklúzióra jutunk.

A vonaton nyugvó órák alapján a robbanások egyidejűek. Az Einstein-féle relativitási elv szerint ugyanis a fény sebessége a vonatban mért távolságok és időtartamok alapján c, akár a vonat eleje, akár a vége irányába mozog a fénysugár.

A földön nyugvó megfigyelők azonban a saját mérőeszközeik szerint azt állapítják meg, hogy a vonat végén a robbanás előbb következik be, mint az elején. Ennek az az oka, hogy a két fényjel hozzájuk képest is ugyanazzal a c sebességgel terjed mindkét irányban, de a vonat vége elébe megy a fényjelnek, az eleje pedig szalad előle.

A relativitáselmélet szerint mind a két állítás korrekt, és nem mondanak ellent egymásnak. Az ugyan ténykérdés, hogy a robbanások időpontjában a robbanások helyén lévő órák mutatóállása azonos-e vagy különböző, és egy adott órapárra nem lehet egyszerre ez is, az is. Mivel azonban *különböző* órapárok mutatóállása alapján jutottunk ellentétes konklúzióra, következtetésünkben nincs semmilyen logikai lehetetlenség.

Az 1.5 szakaszban látni fogjuk, hogy ha l_0 a vonat hossza az utasok mérései alapján, akkor a földi órák szerint a robbanás a vonat végén

$$\Delta t = \frac{V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \cdot l_0 \tag{1.3.1}$$

idővel hamarabb történik, mint az elején. A képletben V a vonat sebessége. Amikor V és l_0 „ésszerű" hétköznapi érték, a Δt praktikusan zérus – ez a magyarázata annak, miért nem figyelmeztet rá a közvetlen tapasztalat, hogy az egyidejűség relatív.

Egyetlen kérdést kell még megbeszélnünk: Miért tekinthető általános érvényűnek a „vonatos kísérlet" konklúziója? Azért, mert két távoli esemény egyidejűségét kizárólag csak akkor tudjuk megállapítani, ha fizikai folyamatok segítségével egy adott helyen történő két esemény egyidejűségére vezethetjük vissza őket. Röviden szólva: a távoli események egyidejűsége nem az eseménypár *belső tulajdonsága.* A newtoni fizikában azonban a testek sebességére nincs felső korlát, ezért a „vonatos kísérletet" fényjelek helyett határesetben végtelen sebességgel mozgó lövedékekkel is elképzelhetjük. Mivel pedig a végtelen nagy sebesség minden inerciarendszerben végtelen nagy marad, ezért a robbanások vagy minden inerciarendszerben egyidőben történnek, vagy egyikben sem. A newtoni fizikában a távoli események egyidejűsége ezért a vonatkoztatási rendszer választásától független abszolút tulajdonságnak tekinthető.

Az egyidejűség relativitása súlyos következményekkel jár a távolhatáson alapuló newtoni dinamikára nézve. Nézzünk például két égitestet, amelyek az űrben véletlenül egymás közelében haladnak el és a pályájuk a tömegvonzás következtében elhajlik. Newton elmélete szerint az elhajlás mértékét a GM_1M_2/r^2 gravitációs erő segítségével lehet kiszámítani. De amikor az

1. égitest éppen *itt* van, az r nagysága attól függ, hogy *ugyanabban a pillanatban* hol van a 2. számú. Vagyis a newtoni mozgásegyenlet tényleges alkalmazásánál ki kell tudnunk jelölni a két égitest pályáján az egyidejű pontokat (eseményeket). De ha az egyidejűség nem abszolút (nem állapítható meg magából a jelenségből), akkor ez a feladat teljesen értelmetlen.

A newtoni mechanika azonban közelítően érvényben marad az olyan feladatokban, amelyek szempontjából a fénysebesség végtelen nagynak tekinthető. A bolygómozgás ebbe a kategóriába tartozik. Amikor azonban ez a feltétel nem teljesül (vagy egyszerűen csak pontosan akarunk számolni), a newtoni mechanikát térelmélettel kell helyettesíteni, amelyben közelhatás érvényesül: A tömegpontokra gyakorolt hatást a térmennyiségnek a tömegpont helyén felvett értéke határozza meg. A newtoni bolygóelméletnek ilyen típusú általánosítása az általános relativitáselmélet.

1.4. Az inerciarendszerek közötti transzformáció általános alakja

A Lorentz-transzformáció levezetésénél a fénysebesség állandósága általában a kiinduló posztulátum szerepét játssza. Ebben a szakaszban azonban más gondolatmenetet követünk. A levezetést az inerciarendszerek közötti transzformációval szemben támasztható legáltalánosabb követelmények kihasználására alapozzuk, amelyek között a fénysebesség állandósága természetesen nem szerepel. A transzformáció képlete, amelyet ezzel a gondolatmenettel kapunk, szükségképpen tartalmazni fog egy sebességdimenziójú univerzális állandót. A newtoni fizikában, ahol csak a végtelen sebesség univerzális, ezt végtelennek *kell* választanunk. Ekkor a Galilei-transzformációt kapjuk eredményül. Ha pedig a fénysebességgel azonosítjuk, a Lorentz-transzformációra jutunk.

Mindazt, amit a vonatkoztatási rendszerekről az 1.1 szakaszban elmondtunk, továbbra is változatlanul fenntartjuk: Az inerciarendszereket ugyan véges méretű fizikai objektumokkal azonosítjuk, de globálisaknak tekintjük őket abban az értelemben, hogy a hozzájuk rögzített Descartes-féle koordinátarendszert az egész térre kiterjesztjük. Ezt a konstrukciót azonban kiegészítjük azzal, hogy az inerciarendszerben ténylegesen alkalmazott időmérési eljárást is kiterjesztjük az egész térre: Feltesszük, hogy a határtalanul meghosszabbított koordináta-hálózat pontjaiban azonos szerkezetű, pontszerű, megfelelően szinkronizált órák nyugszanak sűrűn egymás mellett, amelyek lehetővé teszik, hogy az eseményeknek ne csak az x, y, z koordinátáját olvashassuk le, hanem az időpontját is az adott inerciarendszerben. Ezek az órák természetesen a valóságban éppen úgy „nincsenek ott”, mint a koordináta-hálózat, de ez utóbbival együtt lehetővé teszik az inerciarendszeren belül ténylegesen alkalmazott helymeghatározási és időmérési eljárás logikus gondolati kiterjesztését az egész euklidészi térre. Ezt szinte kötelező megtenni, hiszen az inerciarendszert meghatározó objektum méretének elvben nincs felső határa.

A két inerciarendszert, amelyek között a transzformációt keressük, ugyanabban a standard elrendezésben képzeljük el, amelyet az 1.2 szakaszban írtunk le, de természetesen ki kell egészítenünk az órákra vonatkozó alkalmas megállapodással. Annyit bizonyosan feltehetünk, hogy amikor a koordinátatengelyek éppen fedik egymást, a $\mathcal{K}$ és a $\mathcal{K}$' *origójában* nyugvó órák mutassák ugyanazt az időpontot (amit nullának fogunk tekinteni). Azt már nem követelhetjük meg, hogy a fedés pillanatában minden egyes $\mathcal{K}$'-beli óra mutassa pontosan ugyanazt az időt, amit a vele éppen fedésben lévő $\mathcal{K}$-beli óra mutat. Ha ezt is előírnánk, eleve kizárnánk azt a lehetőséget, hogy két adott esemény – mondjuk – a $\mathcal{K}$-beli órák alapján legyen egyidejű, a $\mathcal{K}$'-beli órák alapján azonban történjen különböző időben, vagy – általában – két esemény között különböző idő telhessen el az egyik és a másik koordináta-rendszerhez viszonyítva.

Meg kell még állapodnunk abban is, hogyan kell egy adott inerciarendszerhez rögzített koordináta-rendszerben nyugvó órákat szinkronba hozni az origóban elhelyezett órával (és ezáltal egymással is). Ez csak úgy tehető meg, ha ki lehet választani olyan eseménypárokat, amelyekről *tudjuk*, hogy az adott inerciarendszerben egyidejűek. A gondolatmenet jelen stádiumában nem tudunk rámutatni konkrét eljárásra, de feltételezzük, hogy van ilyen, és minden inerciarendszerben egyöntetűen ezzel szinkronizáltuk a koordinátarendszerben nyugvó órákat. Erre a tényre röviden úgy fogunk utalni, hogy az órák *szinkronizálva vannak.*

A megválaszolandó kérdés tehát a következő: Ha egy E esemény időpontja és koordinátái a $\mathcal{K}$ inerciarendszerhez rögzített $OXYZ$ Descartes-rendszerben és az abban nyugvó órák alapján t, x, y, z, akkor mi lesz ugyanezen esemény t' időpontja és x', y', z' koordinátája a $\mathcal{K}$'-hez rögzített $O'X'Y'Z'$ Descartes-rendszerhez és a benne nyugvó órákhoz viszonyítva?

Induljunk ki abból, hogy ez a kapcsolat

$$\begin{aligned} t' &= f(t, x; V) \\ x' &= g(t, x; V) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

alakú, ahol az $f(t, x; V)$ és a $g(t, x; V)$ függvényeket úgy kell megválasztanunk, hogy (1.4.1) valóban standard elrendezésben egymáshoz képest V sebességgel mozgó inerciarendszerek közötti transzformációt határozzon meg.

Mint látjuk, eleve feltesszük, hogy a relatív mozgásra merőleges OY, OZ irány megtartja ugyanazt a „semlegességét”, amivel a Galilei-transzformációban is rendelkezik. Ez a feltevés azon alapul, hogy ha Einstein vonatkísérletében a fényjelek a vonatban a menetirányra merőlegesen haladnak, akkor az általuk kiváltott robbanások a vonathoz viszonyítva is és az állomáshoz viszonyítva is egyidejűek. Ez a korlátozott kiindulási forma is elég ahhoz, hogy kielégíthessük az összes olyan általános követelményt, amely a keresett transzformációval szemben támasztható.

1. követelmény.

Legyen E az az esemény, amely $\mathcal{K}$ origójában ($x = y = z = 0$) következik be akkor, amikor az origóban nyugvó óra éppen nullát mutat ($t = 0$). A standard elrendezés szerint a $\mathcal{K}$' ekkor éppen fedi $\mathcal{K}$-t és a $\mathcal{K}$' origójában nyugvó óra is nullát mutat. Ezért az f és a g függvénynek teljesítenie kell az

$$f(0,0;V) = 0 \qquad g(0,0;V) = 0 \tag{1.4.2}$$

feltételt.

2. követelmény.

Ha a $\mathcal{K}$' nyugszik ($V = 0$), akkor az 1. követelmény figyelembevételével (1.4.1)-nek az azonos transzformációra kell redukálódnia:

$$\begin{aligned} f(t,\, x;\, 0) &= t \\ g(t,\, x;\, 0) &= x. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

3. követelmény.

A keresett transzformációnak összhangban kell lennie a térnek, valamint az időnek azzal a tulajdonságával, hogy bennük minden pont, illetve időpont egyenértékű (a tér és az idő *homogén*). Milyen korlátozást ró ez a feltétel az f-re és a g-re? A szakaszhoz csatolt függelékben megmutatjuk, hogy a feltétel a transzformáció *linearitását* követeli meg:

$$\begin{aligned} f(t,x;V) &= \alpha(V)\cdot x + \beta(V)\cdot t \\ g(t,x;V) &= \gamma(V)\cdot x + \delta(V)\cdot t. \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

A 2. követelményt kifejező (1.4.3) következtében teljesülnie kell az

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \delta(0) = 0 \\ \beta(0) &= \gamma(0) = 1 \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

egyenlőségeknek.

Az (1.4.4) transzformációból könnyen megkapható a sebesség transzformációs szabálya is. Tekintsünk egy mozgó tömegpontot, amelynek $\mathcal{K}$-beli koordinátái a t pillanatban x, y, z. Akkor a

$$t' = f(t,x;V) = \alpha(V)\cdot x + \beta(V)\cdot t \tag{1.4.6}$$

pillanatban a test $\mathcal{K}$'-beli koordinátáit (1.4.1) és (1.4.4) alapján az

$$\begin{aligned} x' = g(t,x;V) &= \gamma(V)\cdot x + \delta(V)\cdot t \\ y' = y \qquad & z' = z \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

egyenletek határozzák meg. A sebesség $\mathcal{K}$-beli komponensei a

$$(v_x,\, v_y,\, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

deriváltak. A $\mathcal{K}$'-beli komponenseket ugyanígy kell képezni:

$$(v'_x,\, v'_y,\, v'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right).$$

Az (1.4.6), (1.4.7) alapján azonban

$$\begin{aligned} dt' &= \alpha(V)\cdot dx + \beta(V)\cdot dt \\ dx' &= \gamma(V)\cdot dx + \delta(V)\cdot dt \\ dy' &= dy \qquad dz' = dz, \end{aligned}$$

ezért (a V argumentumot a rövidség kedvéért elhagyva)

$$v'_x = \frac{\gamma v_x + \delta}{\alpha v_x + \beta} \quad v'_y = \frac{v_y}{\alpha v_x + \beta} \quad v'_z = \frac{v_z}{\alpha v_x + \beta}. \tag{1.4.8}$$

Ez a formula a *sebesség-összeadás képlete*, amelynek nagyon egyszerű Galilei-féle speciális esetével (1.2.3)-ban találkoztunk.

Ha a vizsgált test sebessége $\mathcal{K}$-ban konstans, akkor (1.4.8) szerint a $\mathcal{K}$'-beli sebesség is állandó érték. Ez annyit jelent, hogy az (1.4.4) transzformáció, amelyből a sebesség-összeadás képletét származtattuk, *inerciarendszerek között* létesít átmenetet. Mint látjuk, a tér és az idő homogenitásának figyelembevételével ezt a követelményt automatikusan teljesítettük.[2]

4. követelmény.

Az (1.4.1) olyan transzformáció, amely két egymáshoz képest V sebességgel mozgó rendszer között történik. Ezt a tulajdonságot a sebesség-összeadás törvényének felhasználásával fogalmazhatjuk meg a legegyszerűbben.

A sebesség-összeadás törvénye természetesen akkor is érvényes, amikor a tömegpont a $\mathcal{K}$' origójában nyugszik. Ekkor $(v'_x,\, v'_y,\, v'_z) = (0,\, 0,\, 0)$, és – mivel $\mathcal{K}$' V sebességgel mozog $\mathcal{K}$-hoz képest – $(v_x\, v_y,\, v_z) = (V,\, 0,\, 0)$. Ha ezeket (1.4.8)-ba írjuk, a $0 = \gamma V + \delta$ feltételre jutunk.

Amikor – megfordítva – a tömegpont $\mathcal{K}$ origójában nyugszik, azaz $(v_x,\, v_y,\, v_z) = (0,\, 0,\, 0)$ és $(v'_x,\, v'_y,\, v'_z) = (-V,\, 0,\, 0)$, az (1.4.8) szerint $-V = \delta/\beta$.

A két feltétel a

$$\beta = \gamma \qquad \delta = -\gamma V \tag{1.4.9}$$

formában is felírható. Ennek felhasználásával az (1.4.4) transzformációs törvény és a sebesség-összeadás törvénye a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} t' &= \alpha x + \gamma t \qquad x' = \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \qquad z' = z \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

$$
\begin{aligned}
v'_x &= \frac{\gamma(V)(v_x - V)}{\alpha(V)v_x + \gamma(V)} \\
v'_y &= \frac{v_y}{\alpha(V)v_x + \gamma(V)} \\
v'_z &= \frac{v_z}{\alpha(V)v_x + \gamma(V)}.
\end{aligned}
\tag{1.4.11}
$$

5. követelmény.

A két inerciarendszert (hajó és hajóállomás, vonat és pályaudvar stb.) két különböző módon lehet úgy ellátni koordinátatengelyekkel, hogy az elrendezés standard legyen. Tegyük fel ugyanis, hogy a koordináta-rendszert megválasztottuk a standard elrendezésnek megfelelően, és ezután forgassuk el mindkét koordináta-rendszert a z irány körül 180°-kal. Nyilván újra standard elrendezést kapunk, amely az eredetivel egyenértékű, ezért a keresett transzformációs törvény nem tehet különbséget közöttük.[2]

Amikor a jelzett 180°-os forgatásokat elvégezzük, a sebesség-összeadás törvényében szereplő v_x és v_y, valamint v'_x és v'_y sebességkomponensek – amelyek valamilyen mozgó tömegpont sebességkomponensei – előjelet váltanak, és előjelet vált a képletben szereplő V is. A v_z és a v'_z azonban változatlan marad. Az (1.4.11) csak akkor fér össze ezekkel a változásokkal, ha a $\gamma(V)$ függvény, valamint a nevező – amely mindhárom képletben azonos – változatlan marad, azaz ha

$$
\gamma(-V) = \gamma(V) \qquad\qquad \alpha(-V) = -\alpha(V). \tag{1.4.12}
$$

Látjuk, hogy a $\gamma(V)$ függvénynek páros, az $\alpha(V)$-nek páratlan függvénynek kell lennie (ez a követelmény összefér (1.4.5)-tel).

6. követelmény.

Mivel $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}$' két egyenértékű inerciarendszer, a $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ áttérés szabályának meg kell egyeznie a $\mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$ áttérés szabályával, ha a V előjelét megváltoztatjuk benne.

A $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ áttérés szabályát (1.4.10) rögzíti:

$$
\begin{aligned}
t' &= \alpha(V)x + \gamma(V)t \\
x' &= \gamma(V)(x - Vt),
\end{aligned}
\tag{1.4.13}
$$

amelyben V a $\mathcal{K}$' sebessége $\mathcal{K}$-hoz viszonyítva. A $\mathcal{K}' \longrightarrow \mathcal{K}$ áttérés szabálya ugyancsak (1.4.13), de figyelembe kell venni, hogy a két koordináta-rendszer relatív sebessége most $-V$:

$$
\begin{aligned}
t &= \alpha(-V)x' + \gamma(-V)t' \\
x &= \gamma(-V)(x' + Vt'),
\end{aligned}
$$

[2] A két koordináta-rendszert a közös x tengely körül is elfordíthatjuk egy tetszőleges szöggel, de ez a lehetőség nem szorítja meg az $\alpha(V)$, $\gamma(V)$ függvények alakját.

amely az (1.4.12) következtében a

$$\begin{aligned} t &= -\alpha(V)x' + \gamma(V)t' \\ x &= \gamma(V)(x' + Vt') \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

formában is írható.

Ha azonban az (1.4.13)-at megoldjuk t-re és x-re, csak akkor kapjuk megoldásként (1.4.14)-et, ha az egyenlet determinánsa 1-gyel egyenlő:

$$\gamma^2 + \alpha\gamma V = 1.$$

Ebből az egyenletből kifejezhetjük α-t a γ-n keresztül:

$$\alpha = \frac{1-\gamma^2}{V\cdot\gamma}.$$

Ennek következtében az (1.4.10) transzformációs törvény és a sebesség-összeadás (1.4.11) törvénye a következő alakot veszi fel:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t + \frac{1-\gamma^2}{V\cdot\gamma}x \\ x' &= -\gamma V t + \gamma x \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{(v_x - V)\cdot V\cdot\gamma^2}{v_x + (V - v_x)\cdot\gamma^2} \\ v'_y &= \frac{v_y\cdot V\cdot\gamma}{v_x + (V - v_x)\cdot\gamma^2} \\ v'_z &= \frac{v_z\cdot V\cdot\gamma}{v_x + (V - v_x)\cdot\gamma^2}. \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

7. követelmény.

Az inerciarendszerek feltételezett egyenértékűsége következtében két standard elrendezésű inerciarendszer közötti transzformáció nem függhet attól, hogy a transzformációt egy vagy több lépésben hajtjuk végre. A $\mathcal{K}$ és a $\mathcal{K}$' mellett tekintsünk egy harmadik inerciarendszert is, amely mind $\mathcal{K}$-hoz, mind $\mathcal{K}$'-höz képest standard elrendezésű. Célszerű az inerciarendszerek jelölését megváltoztatni: A $\mathcal{K}$ legyen $\mathcal{K}_0$, a $\mathcal{K}$' legyen $\mathcal{K}_1$, az új inerciarendszer pedig legyen $\mathcal{K}_2$. A keresett transzformációs törvénynek olyannak kell lennie, hogy ha a $\mathcal{K}_0 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ transzformációt akár egy lépésben, akár két lépésben – a $\mathcal{K}_0 \longrightarrow \mathcal{K}_1$ és a $\mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ egymásutánjaként – végezzük el, ugyanazt az eredményt kapjuk. A függelékben megmutatjuk, hogy ez a követelmény egy előjel és egy (pozitív) u sebességdimenziójú konstans erejéig rögzíti $\gamma(V)$ függvényalakját:

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 \pm \dfrac{V^2}{u^2}}} \tag{1.4.17}$$

A gondolatmenet jelen stádiumában az u konstans tetszőlegesen megválasztható.

Helyettesítsük (1.4.17)-et (1.4.15)-be és (1.4.16)-ba:

$$\left.\begin{aligned} t' &= \frac{1}{\sqrt{1 \pm \dfrac{V^2}{u^2}}} \cdot \left(t \pm \frac{V}{u^2}x\right) \\ x' &= \frac{1}{\sqrt{1 \pm \dfrac{V^2}{u^2}}} \cdot (x - Vt) \\ y' &= y \qquad z' = z. \end{aligned}\right\} \tag{1.4.18}$$

$$\left.\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 \pm \dfrac{v_x V}{u^2}} \\ v'_y &= \frac{v_y \cdot \sqrt{1 \pm \dfrac{V^2}{u^2}}}{1 \pm \dfrac{v_x V}{u^2}} \\ v'_z &= \frac{v_z \cdot \sqrt{1 \pm \dfrac{V^2}{u^2}}}{1 \pm \dfrac{v_x V}{u^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{1.4.19}$$

Ezek a képletek adják meg az (1.4.1) transzformáció és a hozzá tartozó sebesség-összeadási törvény legáltalánosabb alakját, amely eleget tesz az alábbi követelményeknek:

1. Az elrendezés legyen standard (1., 4. és 5. követelmény).

2. A transzformáció tartsa tiszteletben a tér és az idő homogenitását (3.követelmény). Ebből a feltételből automatikusan következik, hogy a transzformáció egyenesvonalú, egyenletes mozgást egyenesvonalú, egyenletes mozgásba visz át, tehát *inerciarendszerek között* történik.

3. $V = 0$-hoz tartozzon az azonos transzformáció (2. követelmény), az inverz legyen szintén megengedett transzformáció, amely $-V$-hez tartozik (6. követelmény), és a $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ transzformáció ne függjön attól, hogy az áttérést milyen közbeeső lépéseken keresztül valósítjuk meg (7. követelmény). Ezt a három követelményt röviden úgy foglalhatjuk össze, hogy a transzformációk *alkossanak csoportot.*

Ezek a nagyon általános követelmények egy előjel és egy sebesség dimenziójú konstans erejéig rögzítik a transzformáció szabályát két inerciarendszer között. A szabály végleges formáját fizikai megfontolások alapján kell meghatározni.

Függelék

A függelék a 3. és a 7. követelmény részletes tárgyalását tartalmazza.

3. követelmény. Legyen E_1 és E_2 két esemény, amelyek $\mathcal{K}$-hoz viszonyított koordinátái és időpontja x_1, y_1, z_1, t_1, illetve x_2, y_2, z_2, t_2. Akkor (1.4.1) alapján a $\mathcal{K}$'-höz viszonyított időpontok és koordináták a következők:

$$\begin{aligned} t_1' &= f(t_1, x_1; V) & t_2' &= f(t_2, x_2; V) \\ x_1' &= g(t_1, x_1; V) & x_2' &= g(t_2, x_2; V) \\ y_1' &= y_1 & y_2' &= y_2 \\ z_1' &= z_1 & z_2' &= z_2 \end{aligned} \tag{1.4.20}$$

Tegyük fel most, hogy az E_1 és az E_2 helyett két olyan $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ eseményt választunk, amelyek koordinátáira és időpontjaira teljesül az

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 - \bar{x}_2 &= x_1 - x_2 \\ \bar{y}_1 - \bar{y}_2 &= y_1 - y_2 \\ \bar{z}_1 - \bar{z}_2 &= z_1 - z_2 \\ \bar{t}_1 - \bar{t}_2 &= t_1 - t_2 \end{aligned} \tag{1.4.21}$$

feltétel. Röviden ezt úgy fejezhetjük ki, hogy az eseménypár tér- és időbeli relatív helyzete változatlan marad, csupán a párt egészben áthelyeztük a tér és az idő egy másik tartományába. Az $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ $\mathcal{K}$'-beli koordinátáját és időpontját nyilván a

$$\begin{aligned} \bar{t}_1{}' &= f(\bar{t}_1, \bar{x}_1; V) & \bar{t}_2{}' &= f(\bar{t}_2, \bar{x}_2; V) \\ \bar{x}_1{}' &= g(\bar{t}_1, \bar{x}_1; V) & \bar{x}_2{}' &= g(\bar{t}_2, \bar{x}_2; V) \\ \bar{y}_1{}' &= \bar{y}_1 & \bar{y}_2{}' &= \bar{y}_2 \\ \bar{z}_1{}' &= \bar{z}_1 & \bar{z}_2{}' &= \bar{z}_2 \end{aligned} \tag{1.4.22}$$

képletek határozzák meg.

A keresett transzformáció akkor lesz összhangban a tér és az idő homogenitásával, ha az áthelyezés során az eseménypár relatív térbeli és időbeli helyzete $\mathcal{K}$'-höz képest sem változik meg, azaz teljesülnek az (1.4.21)-gyel analóg

$$\begin{aligned} \bar{x}_1{}' - \bar{x}_2{}' &= x_1{}' - x_2{}' \\ \bar{y}_1{}' - \bar{y}_2{}' &= y_1{}' - y_2{}' \\ \bar{z}_1{}' - \bar{z}_2{}' &= z_1{}' - z_2{}' \\ \bar{t}_1{}' - \bar{t}_2{}' &= t_1{}' - t_2{}' \end{aligned} \tag{1.4.23}$$

relációk is.

Tegyük fel most, hogy az E_1, $E_2 \longrightarrow \bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ áthelyezés után az $\bar{E}_2$ esemény éppen a $\mathcal{K}$ origójában történik abban a pillanatban, amikor az origóban nyugvó óra éppen nullát mutat ($\bar{x}_2 = \bar{y}_2 = \bar{z}_2 = \bar{t}_2 = 0$). Az 1. követelmény alapján ekkor

$$\bar{x}_2{}' = \bar{y}_2{}' = \bar{z}_2{}' = \bar{t}_2{}' = 0 \tag{1.4.24}$$

is teljesül, az (1.4.21) szerint pedig

$$\bar{x}_1 = x_1 - x_2 \quad \bar{y}_1 = y_1 - y_2 \quad \bar{z}_1 = z_1 - z_2 \quad \bar{t}_1 = t_1 - t_2.$$

Az (1.4.22) szerint ekkor

$$\begin{aligned}
\bar{t}_1{}' &= f(\bar{t}_1, \bar{x}_1; V) = f(t_1 - t_2, x_1 - x_2; V) \\
\bar{x}_1{}' &= g(\bar{t}_1, \bar{x}_1; V) = g(t_1 - t_2, x_1 - x_2; V) \\
\bar{y}_1{}' &= \bar{y}_1 = y_1 - y_2 \\
\bar{z}_1{}' &= \bar{z}_1 = z_1 - z_2.
\end{aligned}$$

Az (1.4.23) és az (1.4.24) segítségével a bal oldalakat kifejezhetjük az eredeti E_1, E_2 esemény vesszős koordinátáin és időpontjain keresztül:

$$\begin{aligned}
t_1' - t_2' &= f(t_1 - t_2, x_1 - x_2; V) \\
x_1' - x_2' &= g(t_1 - t_2, x_1 - x_2; V) \\
y_1' - y_2' &= y_1 - y_2 \\
z_1' - z_2' &= z_1 - z_2.
\end{aligned}$$

Végül a bal oldalon (1.4.20) segítségével E_1, E_2 vesszős koordinátáit vesszőtlenekkel helyettesítjük:

$$\begin{aligned}
f(t_1, x_1; V) - f(t_2, x_2; V) &= f(t_1 - t_2, x_1 - x_2; V) \\
g(t_1, x_1; V) - g(t_2, x_2; V) &= g(t_1 - t_2, x_1 - x_2; V).
\end{aligned} \tag{1.4.25}$$

Ezeket az egyenlőségeket kell az f és a g függvénynek kielégítenie ahhoz, hogy a tér és az idő homogenitását kifejező (1.4.23) egyenletek teljesüljenek.

Ismeretes, hogy az (1.4.25) egyenletek legáltalánosabb megoldásai a *homogén lineáris függvények*:

$$\begin{aligned}
f(t, x; V) &= \alpha(V) \cdot x + \beta(V) \cdot t \\
g(t, x; V) &= \gamma(V) \cdot x + \delta(V) \cdot t,
\end{aligned}$$

ahol a kis görög betűs mennyiségek a V tetszőlegesen választható függvényei.

7. követelmény. Adjuk meg a relatív sebességeket. A $\mathcal{K}_1$ ($\equiv \mathcal{K}'$) sebességét $\mathcal{K}_0$ ($\equiv \mathcal{K}$)-ban, amelyet eddig V-vel jelöltünk, mostantól nevezzük V_{01}-nek, a $\mathcal{K}_2$ sebességét $\mathcal{K}_0$-hoz képest pedig V_{02}-nek. Ezeket nyilván önkényesen megadhatjuk. De vajon mennyi lesz a $\mathcal{K}_2$ sebessége $\mathcal{K}_1$-hez képest (amit V_{12}-vel fogunk jelölni)?

Ezt a sebességet az (1.4.16) sebesség-összeadási törvény alapján kell kiszámítani V_{01}-ből és V_{02}-ből. Ez a képlet ugyanis éppen azt mondja meg, hogy ha egy tárgy sebessége $\mathcal{K}$-hoz viszonyítva (v_x, v_y, v_z), a $\mathcal{K}$' sebessége pedig ugyancsak $\mathcal{K}$-hoz viszonyítva (a standard elrendezésben) V, akkor mennyi lesz a tárgy $\mathcal{K}$'-höz viszonyított (v'_x, v'_y, v'_z) sebessége. Mivel a $\mathcal{K}_2$ inerciarendszer maga is egy tárgy (objektum), ez a törvény rá is vonatkozik, ha elvégezzük benne az alábbi átjelöléseket:

$$V \longrightarrow V_{01} \qquad (v_x, v_y, v_z) \longrightarrow (V_{02}, 0, 0) \qquad (v'_x, v'_y, v'_z) \longrightarrow (V_{12}, 0, 0).$$

Az (1.4.16) első egyenlete a következő lesz:

$$V_{12} = \frac{(V_{02} - V_{01}) \cdot V_{01} \cdot \gamma_{01}^2}{V_{02} + (V_{01} - V_{02}) \cdot \gamma_{01}^2}, \tag{1.4.26}$$

ahol $\gamma_{01}^2 = \big(\gamma(V_{01})\big)^2$.

Alkalmazzuk most (1.4.15)-öt a $\mathcal{K}_0 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ átmenetre. A $\mathcal{K}_0$-beli és a $\mathcal{K}_2$-beli időt és koordinátát jelöljük t_0, x_0-lal és t_2, x_2-vel, a $\gamma(V_{02})$-re pedig használjuk a γ_{02} jelölést:

$$\begin{aligned} t_2 &= \gamma_{02} t_0 + \frac{1 - \gamma_{02}^2}{V_{02} \cdot \gamma_{02}} x_0 \\ x_2 &= -\gamma_{02} V_{02} t_0 + \gamma_{02} x_0. \end{aligned} \tag{1.4.27}$$

De $\mathcal{K}_0$-ból úgy is eljuthatunk $\mathcal{K}_2$-be, hogy előbb $\mathcal{K}_1$-be megyünk, majd innen $\mathcal{K}_2$ -be:

$$\begin{aligned} t_1 &= \gamma_{01} t_0 + \frac{1 - \gamma_{01}^2}{V_{01} \cdot \gamma_{01}} x_0 \\ x_1 &= -\gamma_{01} V_{01} t_0 + \gamma_{01} x_0 \end{aligned} \tag{1.4.28}$$

és

$$\begin{aligned} t_2 &= \gamma_{12} t_1 + \frac{1 - \gamma_{12}^2}{V_{12} \cdot \gamma_{12}} x_1 \\ x_2 &= -\gamma_{12} V_{12} t_1 + \gamma_{12} x_1, \end{aligned} \tag{1.4.29}$$

ahol $\gamma_{12} = \gamma(V_{12})$, a $\mathcal{K}_1$-beli idő és koordináta pedig t_1 és x_1.

Ha (1.4.29)-ben (1.4.28) segítségével t_1-et és x_1-et kifejezzük t_0-n és x_0-n keresztül, kis átalakítás után a következő transzformációt nyerjük:

$$\begin{aligned} t_2 = {}& \left(\gamma_{12} \cdot \gamma_{01} - \frac{1 - \gamma_{12}^2}{V_{12} \cdot \gamma_{12}} \gamma_{01} V_{01}\right) t_0 + \\ &+ \left(\gamma_{12} \cdot \frac{1 - \gamma_{01}^2}{V_{01} \cdot \gamma_{01}} + \frac{1 - \gamma_{12}^2}{V_{12} \cdot \gamma_{12}} \gamma_{01}\right) x_0 \\ x_2 = {}& (-\gamma_{12} \cdot V_{12} \cdot \gamma_{01} - \gamma_{12} \cdot \gamma_{01} \cdot V_{01})\, t_0 + \\ &+ \left(-\gamma_{12} \cdot V_{12} \cdot \frac{1 - \gamma_{01}^2}{V_{01} \cdot \gamma_{01}} + \gamma_{12} \cdot \gamma_{01}\right) x_0. \end{aligned} \tag{1.4.30}$$

Az (1.4.27) és az (1.4.30) ugyanazt a $\mathcal{K}_0 \longrightarrow \mathcal{K}_2$ transzformációt fejezi ki – az első egy lépésben, a második kettőben, a $\mathcal{K}_1$-en keresztül. Követelményünk szerint azonban a transzformációt egyedül $\mathcal{K}_0$ és $\mathcal{K}_2$ határozza meg, $\mathcal{K}_1$-nek nincs köze hozzá. Ezért a két képletnek meg kell egyeznie egymással, ami annyit jelent, hogy a megfelelő koefficiensek egyenlők:

$$\begin{gathered}
\gamma_{12} \cdot \gamma_{01} - \frac{1-\gamma_{12}^2}{V_{12} \cdot \gamma_{12}} \gamma_{01} V_{01} = \gamma_{02} \\
\gamma_{12} \cdot \frac{1-\gamma_{01}^2}{V_{01} \cdot \gamma_{01}} + \frac{1-\gamma_{12}^2}{V_{12} \cdot \gamma_{12}} \cdot \gamma_{01} = \frac{1-\gamma_{02}^2}{V_{02} \cdot \gamma_{02}} \\
-\gamma_{12} \cdot V_{12} \cdot \gamma_{01} - \gamma_{12} \cdot \gamma_{01} \cdot V_{01} = -\gamma_{02} \cdot V_{02} \\
-\gamma_{12} \cdot V_{12} \cdot \frac{1-\gamma_{01}^2}{V_{01} \cdot \gamma_{01}} + \gamma_{12} \cdot \gamma_{01} = \gamma_{02}.
\end{gathered} \tag{1.4.31}$$

Ezekben az egyenletekben V_{01}, V_{02} és V_{12} szerepel. Közülük kettő szabadon választható, a harmadikat (1.4.26) alapján kell belőlük kiszámítani. A kérdés az, milyen lehet az a $\gamma(V)$ függvény, amelynek V_{01}-nél, V_{02}-nél és V_{12}-nél kiszámított értékeit (1.4.31)-be írva azonosságokra jutunk.

Az (1.4.31) első és negyedik egyenletét összehasonlítva látjuk, hogy

$$\frac{1-\gamma_{12}^2}{V_{12} \cdot \gamma_{12}} \cdot \gamma_{01} \cdot V_{01} = \gamma_{12} \cdot V_{12} \cdot \frac{1-\gamma_{01}^2}{V_{01} \cdot \gamma_{01}}. \tag{1.4.32}$$

Kis átrendezés után

$$\frac{1-\gamma_{12}^2}{\gamma_{12}^2 \cdot V_{12}^2} = \frac{1-\gamma_{01}^2}{\gamma_{01}^2 \cdot V_{01}^2}.$$

A bal oldal csak V_{12}-től, a jobb oldal csak V_{01}-től függ. Ezek bármilyen értéket fölvehetnek, ezért egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha az

$$\frac{1-\big(\gamma(V)\big)^2}{\big(\gamma(V)\big)^2 \cdot V^2}$$

kifejezés nem függ V-től, vagyis konstans (ami lehet nulla is). Mivel $\gamma(0) = 1$, ezért $\gamma(V)$ dimenziója 1, és a tört dimenzióját a nevezőbeli V^2 határozza meg. A konstansnak tehát, amivel a tört egyenlő, inverz sebesség négyzet dimenziójúnak kell lennie:

$$\frac{1-\big(\gamma(V)\big)^2}{\big(\gamma(V)\big)^2 \cdot V^2} = \pm\frac{1}{u^2}. \tag{1.4.33}$$

A jobb oldalon az u egy sebességdimenziójú (pozitív) konstans, a $\pm$ pedig azt veszi figyelembe, hogy a tört értéke bármilyen előjelű lehet. A tört nulla értéke nyilván $u = \infty$-nek felel meg. Az egyenletből a

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 \pm \dfrac{V^2}{u^2}}} \tag{1.4.17}$$

kifejezést nyerjük a $\gamma(V)$ függvényre (a $\gamma(0) = 1$ feltétel miatt csak a pozitív gyök vehető figyelembe).

Ha $\gamma(V)$-nek ezt az alakját a sebesség-összeadás (1.4.26) képletébe helyettesítjük, egyszerű átalakítás után a

$$V_{12} = \frac{V_{02} - V_{01}}{1 \pm \dfrac{V_{01} \cdot V_{02}}{u^2}} \tag{1.4.34}$$

képletre jutunk, amelynek V_{01}-re és V_{02}-re megoldott alakjai a következők:

$$V_{01} = \frac{V_{02} - V_{12}}{1 \pm \dfrac{V_{02} \cdot V_{12}}{u^2}} \qquad V_{02} = \frac{V_{01} + V_{12}}{1 \mp \dfrac{V_{01} \cdot V_{12}}{u^2}}. \tag{1.4.35}$$

Az (1.4.17) megoldást az (1.4.31) egyenletrendszer egy speciális következményéből, (1.4.32)-ből vezettük le, ezért vissza kell helyettesíteni (1.4.31) mindegyik egyenletébe, hogy meggyőződjünk róla, valóban kielégíti-e őket.

Vegyük az első egyenletet, amely (1.4.33) segítségével

$$\gamma_{12} \cdot \gamma_{01} \mp \frac{1}{u^2} \cdot \gamma_{12} \cdot V_{12} \cdot \gamma_{01} \cdot V_{01} = \gamma_{02}$$

alakra hozható. Helyettesítsük itt a γ-kat az (1.4.17)-ben adott alakjukkal:

$$\frac{1 \mp \dfrac{V_{12} \cdot V_{01}}{u^2}}{\sqrt{\left(1 \pm \dfrac{V_{12}^2}{u^2}\right)\left(1 \pm \dfrac{V_{01}^2}{u^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \pm \dfrac{V_{02}^2}{u^2}}}. \tag{1.4.36}$$

Emeljük az egyenlet reciprokát négyzetre:

$$\frac{\left(1 \pm \dfrac{V_{12}^2}{u^2}\right)\left(1 \pm \dfrac{V_{01}^2}{u^2}\right)}{\left(1 \mp \dfrac{V_{12} \cdot V_{01}}{u^2}\right)^2} = 1 \pm \frac{V_{02}^2}{u^2},$$

ahonnan

$$V_{02}^2 = \left[\frac{V_{01} + V_{12}}{1 \mp \dfrac{V_{01} \cdot V_{12}}{u^2}}\right]^2.$$

Ez az egyenlet (1.4.35) következtében valóban teljesül.

Térjünk át (1.4.31) második egyenletére. Ez (1.4.33) felhasználásával a következő alakra hozható:

$$\gamma_{12} \cdot \gamma_{01} \cdot V_{01} + \gamma_{12} \cdot V_{12} \cdot \gamma_{01} = \gamma_{02} \cdot V_{02},$$

ahonnan

$$V_{02} = \frac{\gamma_{12} \cdot \gamma_{01}}{\gamma_{02}} \cdot (V_{01} + V_{12}).$$

A (1.4.36) azonban (1.4.17) segítségével a

$$\frac{\gamma_{02}}{\gamma_{12} \cdot \gamma_{01}} = 1 \mp \frac{V_{12} \cdot V_{01}}{u^2}$$

alakra hozható, amelynek segítségével az előző egyenlet megint (1.4.35)-re vezet, tehát teljesül. Hasonlóan igazolható (1.4.31) harmadik és negyedik egyenlete is.

1.5. A Lorentz-transzformáció és a relativisztikus sebesség-összeadási törvény

A fizikai probléma az, hogy létezik-e a természetben olyan sebességdimenziójú konstans, amely az (1.4.33) jobb oldalán állhat és felléphet az (1.4.18) transzformációs törvényben. A newtoni mechanikában csak a végtelen nagy sebesség univerzális ($u = \infty$), ezért (1.4.18) és (1.4.19) a

$$t' = t \qquad x' = x - Vt$$

Galilei-transzformációra (és a hozzá tartozó sebesség-összeadási törvényre) redukálódik, kiegészítve azzal az explicit állítással, hogy az időt nem kell transzformálni (az idő abszolút).

Ahhoz, hogy egyéb lehetőségeket is figyelembe tudjunk venni, tisztázni kell az (1.4.18) transzformáció egy fontos sajátosságát $u \neq \infty$-nél. Legyen E_1 és E_2 két esemény, amelyek $\mathcal{K}$-beli időpontjai és koordinátái t_1, x_1, y_1, z_1 és t_2, x_2, y_2, z_2. Ha (1.4.18) segítségével kiszámítjuk az események $\mathcal{K}$'-beli időpontjait és koordinátáit, könnyen igazolhatjuk, hogy teljesül a

$$(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \pm u^2(\Delta t')^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \pm u^2(\Delta t)^2 \tag{1.5.1}$$

egyenlőség, amelyben $\Delta x = x_2 - x_1$ stb. Az u mindkét előjelnél sebességdimenziójú konstans, de a konstans fizikai jelentése a felső és az alsó előjel esetében gyökeresen különböző.

Tegyük fel először, hogy a természetben létezik olyan hatás, amely univerzálisan (minden inerciarendszerben) a transzformációban szereplő u sebességgel terjed. Ha E_1 a hatás előidézése, E_2 pedig az észlelése, akkor azt a tényt, hogy $\mathcal{K}$-ban is, $\mathcal{K}$'-ben is u sebességgel terjed, a

$$\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{(\Delta t)^2} = u^2 \qquad \frac{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}{(\Delta t')^2} = u^2$$

egyenlőségek fejezik ki, amelyek következtében

$$\begin{aligned} &(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - u^2(\Delta t')^2 = \\ &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - u^2(\Delta t)^2 \quad (= 0). \end{aligned} \tag{1.5.2}$$