BRIAN CLEGG

A VÉGTELEN RÖVID TÖRTÉNETE

KÜLÖNLEGES SZÁMOK NYOMÁBAN

SOROZATSZERKESZTŐ ※ BOKOR NÁNDOR

A VÉGTELEN RÖVID TÖRTÉNETE

BRIAN CLEGG

ELKÉPZELNI
AZ ELKÉPZELHETETLENT

FORDÍTOTTA ※ KOVÁCS JÓZSEF

TYPOTEX

Lektorálta
Bokor Nándor

ISBN 978 963 493 340 3
ISSN 3004-2208

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesületének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Felelős szerkesztő: Balázs Péter
Szerkesztette: Peiker Éva
Tördelés: Juhász Lehel
Borítóterv: Somogyi Péter
Nyomta és kötötte: Generál Nyomda Kft., Szeged
Felelős vezető: Hunya Ágnes

Tartalom

Gilliannek, Rebeccának és Chelsea-nek, valamint Neil Sheldonnak, a Manchester Grammar School tanárának, türelméért, amelyet a békák és a tavirózsák dolgában tanúsított

1
A VÉGTELENBE ÉS TOVÁBB

Ebben a valószerűtlen univerzumban, amelyben élünk, nincsenek abszolútumok. A végtelenben még a párhuzamos vonalak is találkoznak.

Pearl S. Buck: *A Bridge for Passing*

A végtelen olyan figyelemre méltó, annyira furcsa elképzelés, hogy tanulmányozása legalább két nagy matematikust is az őrületbe kergetett.

Douglas Adams a *Galaxis útikalauz stopposoknak* című könyvében leírta, hogy képzeletbeli útikönyve szerzői milyen elragadtatással beszélnek a bevezető szövegben az univerzumról:

> „Az űr – írja – nagy. Tényleg nagy. El se hinnéd milyen hatalmasan, terjedelmesen, észbontóan nagy. Úgy értem, az ember azt gondolná, a patikushoz hosszú az út, de ez csak egy szem mogyoró az űrhöz képest. Figyelj…" és így tovább.
>
> (Egy idő után persze megállapodik a stílus, s a könyv olyan dolgokat is közölni kezd, melyekre tényleg szükség van. […])[1]

A végtelen mellett azonban még a világűr is eltörpül.

Ez a látszólag kezelhetetlen fogalom mégis a mindennapi életünk része. A lányaim még hatévesek sem voltak, amikor először elkezdtek számolni, a szavak végét elharapva, egyre gyorsabban és gyorsabban, hogy a végén diadalittasan felkiáltsanak:

végtelen! Bár a végtelen mellett még a világűr is eltörpül, ha olyan hatalmas valamire gondolunk, mint az univerzum, mégiscsak a végtelen fogalma az, amellyel legjobban leírhatjuk.

Aki sikerrel vette az általános iskolai matematika támasztotta akadályokat, azt követően biztosan találkozott a ∞ szimbólummal (bár látni fogjuk majd, hogy a csatornába esett részeges nyolcas nem a valódi végtelen, csak egy kísérteties szélhámos). A matematikusok rosszallását gyakran kiváltó módon a fizikusok némileg lazábban bánnak a fogalommal. Amikor utolsó iskolás éveimben fizikát tanultam, gyakran hangzott el, hogy a „pirítóstartó a végtelenben van”. Ez a kijelentés a Manchester Catering College egyik közeli épületére utalt, amelynek alakja hatalmas pirítóstartóra emlékeztet. (A hasonlóság szándékos, ritka példája az építészeti humornak. Az út másik oldalán álló társépület pedig úgy néz ki a levegőből, mint egy tükörtojás.) Ennek a fantáziadús építménynek a tégláit használtuk az optikai eszközeink fókuszálásához. A végtelen alatt valójában azt értettük, hogy az épület „elég messze van ahhoz, hogy úgy tegyünk, mintha végtelenül messze lenne”.

A végtelen lenyűgöz, mert lehetőséget ad arra, hogy mindennapi gondjainkon túllépve messze, mindenen túlra tekintsünk, szó szerint kitágítja elménket. Amint azonban a végtelen színre lép, a józan ész megbicsaklik. Íme egy mennyiség, amely a feje tetejére állítja a matematikánkat, ugyanakkor teljességgel megvalósíthatóvá teszi azt, hogy $1 = 0$ legyen. Egy mennyiség, amely lehetővé teszi, hogy egy megtelt szállodába annyi további vendéget zsúfoljunk be, amennyit csak akarunk. A legfurább azonban az, hogy elég könnyű kimutatni, kell lennie valaminek, ami még a végtelennél is nagyobb, ami minden bizonnyal a legnagyobb dolog, ami csak létezhet.

Bár nincs a matematikánál elvontabb tudomány, a végtelen szóba kerülésekor nehéz kizárni a spirituális megfontolásokat.

Amikor az emberek a végtelenről gondolkodnak, szinte lehetetlen kikerülni a teológiát, akár cáfolni, akár bizonyítani akarjuk a fizikai univerzumnál nagyobb valaminek a létezését. A végtelen különös képessége, hogy egyszerre sok minden lehet. Praktikus és titokzatos is egyben. A tudósok és a mérnökök boldogan használják, mert működik, de valójában egy feketedoboznak tekintik, amelyhez a viszonyuk nagyjából olyan, mint legtöbbünknek a számítógépekhez vagy a mobiltelefonokhoz. Eszközök, amelyek akkor is végzik a dolgukat, ha nekünk halványlila gőzünk sincs arról, hogyan működnek.

A matematikusok helyzete teljesen más. A végtelen modern fogalma az ő hagyományos, kényelmes világukat ugyanúgy felforgatta, mint a kvantummechanika a fizikusoknak a világ működéséről alkotott, klasszikus elképzelését. A vonakodó tudósoknak olyan új elképzelésekkel kellett megbarátkozniuk, mint az időben visszafelé mozgó, vagy az egyszerre két állapotban is található részecskék lehetősége. Egyszerű halandóként nem értik, miért létezhetnek ilyesmik, kutatóként azonban tudják, hogy ha elfogadják ezeket az elképzeléseket, könnyebben írhatják le a valóságot. A híres 20. századi fizikus, Richard Feynman így foglalta össze ezt egy laikus közönség előtt tartott előadásában:

> Meg kell győznöm önöket, hogy nem szabad elcsüggedniük csak azért, mert egy szót sem értenek. Higgyék el nekem, hogy fizikus hallgatóim sem értenek az egészből semmit. Sőt, én sem értem. Senki sem érti.[2]

A végtelen a megszokott és az azzal szöges ellentétben álló dolgok hasonlóan izgalmas keverékét nyújtja.

A végtelen lenyűgöző, megfoghatatlan valami. Mint egy szarvas, amelyet a sűrű erdő mélyén pillantunk meg. Szépsége egy pillanatra megállít, de a következőben már abban sem vagyunk biztosak, láttunk-e egyáltalán valamit. Aztán teljesen váratlanul néhány röpke másodpercre a csodálatos állat előlép, és teljesen kitölti a látómezőnket.

A végtelennel kapcsolatos igazi probléma mindig is az volt, hogy áthatoljunk a matematikusok által alkotott szimbólumok és szakzsargon sűrű szövedékén. Ezek használata azonban nagyon is indokolt: a mágikus varázsigék mellőzése még inkább nehezítené a probléma kezelését. Lehetséges azonban annyira elvékonyítani a szövetüket, hogy végül már ne akadályozzák a megértést. Így talán tiszta képet kaphatunk erről a különleges matematikai fogalomról, amely messze túlmutat a puszta számokon, és arra kényszerít bennünket, hogy megkérdőjelezzük a valóságról alkotott elképzeléseinket.

Üdv a végtelen világában!

2
SZÁMOLÁS AZ UJJAINKKAL

Amikor Alexandrosz hallotta Anaxarkhoszt, amint az a világok végtelen számáról beszélt, sírva fakadt és barátai kérdésére, hogy mi érte, így válaszolt:

„Vajon nem érdemes sírni, ha, ámbár a világok száma végtelen, még egyiknek sem vagyunk urai?”

Plutarkhosz: *Az elme nyugalmáról*[a]

A számok egymás utáni sorolása olyan gyakorlat, amely már gyerekkorunkban belénk ivódik. Az egymást követő számok egyszerű sorában annyira erős a kapocs, hogy meglepően nehéz megtörni a sorozatot. Próbáljunk meg hangosan elszámolni egytől tízig olyan gyorsan, ahogyan csak tudunk, például franciául (vagy olyan nyelven, amelynek az alapjaival tisztában vagyunk, de nem beszéljük folyékonyan). Most pedig ugyanilyen sebességgel számoljunk visszafelé, tíztől egyig. Az eredmény jellemzője általában a tétovázás: a ritmust megtöri, ahogyan a következő számon gondolkodunk. Botladozunk, miközben megpróbáljuk megfordítani a mélyen gyökerező sorrendet.

A számok sorozatai kultúránk szerves részét képezik, már a gyerekkori mondókákkal magunkba szívjuk azokat. A leg-

[a]Lautner Péter fordítása.

alapvetőbbek egyszerű, az első számolási kísérleteinket segítő memóriagyakorlatok:[b]

> One, two, buckle my shoe,
> Three, four, knock on the door,
> Five, six, pick up sticks,
> Seven, eight, lay them straight,
> Nine, ten, a big, fat hen,
> Eleven, twelve, dig and delve,
> Thirteen, fourteen, maids a'courting,
> Fifteen, sixteen, maids in the kitchen,
> Seventeen, eighteen, maids in waiting,
> Nineteen, twenty, my plate's empty.

A sorozat utolsó sorainak rímeiben érződik némi melankólia, de a versike egy letűnt világ lenyűgöző lenyomata is egyben a cipőcsatok és szobalányok megidézésével. Az ismétlődő, hipnotikus ritmus segít a számok helyes sorrendjének megjegyzésében.

Más versikék inkább az énekléshez igazodnak, mint a „one, two, buckle my shoe" monoton kántálása, erre példa a következő:

> One, two, three, four, five,
> Once I caught a fish alive,
> Six, seven, eight, nine, ten,
> Then I let it go again.

---

[b]A versikék gyakorlatilag lefordíthatatlanok úgy, hogy eredeti „mondandójuk" is megmaradjon – amire ráadásul a szövegben utalások is vannak –, és a rímek is üljenek, ezért inkább az eredeti angol szöveg megtartása mellett döntöttünk, remélve, hogy a tisztelt olvasónak – aki minden bizonnyal sok hasonló számolós versikét ismer magyar nyelven – nem okoz gondot az alapvető megértésük – *a ford.*

Ugyanilyen hasznosak a számolás gyakorlásához az olyan dalocskák, mint a *Ten Green Bottles*, amelyek visszafelé haladva segítik rugalmasabbá tenni a gyermekek számolási készségét.

A számrímek azonban nem csak a számolás alapjainak elsajátításában segítenek. A kifinomultabb versek szimbolikával egészítik ki a sorrendet. Nehéz nem érezni a számok átütő erejét egy olyan formában, mint a „szarkajóslás”. Ezzel a hagyományos versformával a korabeli brit tévénéző gyerekek az 1970-es években sugárzott *Magpie* című magazinműsor főcímdalában találkozhattak, amely az egyszerre látott szarkák (vagy esetenként varjak) számát köti össze egy jövőre vonatkozó jóslattal. Itt azonban nem annyira a számolás, inkább a jóslás a lényeg.

A tévéműsor a gyerekbarát változat első versszakát használta:

One for sorrow, two for joy,
Three for a girl and four for a boy,
Five for silver, six for gold,
Seven for a secret, never to be told,
Eight for a wish and nine for a kiss,
Ten for a marriage never to be old.[3]

Ebben a korai lancashire-i változatban azonban több a földhözragadt realizmus:

One for anger, two for mirth,
Three for a wedding and four for a birth,
Five for rich, six for poor,
Seven for a bitch [vagy witch], eight for a whore
Nine for a burying, ten for a dance,
Eleven for England, twelve for France. [4]

Sok gyermekben kialakul egyfajta vonzódás a számlálás alapvető sorrendjéhez. Amint a kicsik elsajátították a számok megnevezésének szabályait, a szüleiknek gyakran könyörögniük kell, hogy hagyják már abba, mert túl sok időt töltenek a számok sorolásával. Talán az a céljuk, hogy a végére érjenek, és megnevezzék a „legnagyobb számot”. Ekkor még nem tudják, hogy ez lehetetlen feladat, vágyuk soha nem fog teljesülni. Akár életük végéig folytathatnák a számolást, semennyivel nem csökkenne a felsorolandók száma. Úgy tűnik, a gyerekeket a sorrend, a számok egymásutánjának egyszerű mintázata nyűgözi le.

Az emberi természet része a rend szeretete, a minták „felismerése” még ott is, ahol azok valójában nincsenek. Amikor a csillagokat nézzük, azt képzeljük, hogy azok csillagképekbe – fényes pontokból álló vázszerű alakzatokba – rendeződnek, holott a valóságban nincs ilyen kapcsolat közöttük. Nézzük a déli égbolton megfigyelhető Kentaur csillagképet. Legfényesebb csillaga, az alfa Centauri egyben a hozzánk legközelebbi is, távolsága valamivel nagyobb négy fényévnél.[c] A második legfényesebb csillag, a béta Centauri (vagy Agena) azonban már 190 fényévre, azaz 45-ször nagyobb távolságra van tőlünk. Tévesen kapcsolunk össze két objektumot, amelyek távolsága egymástól 1 797 552 000 000 000 kilométer.

Saját csillagunk, a Nap sokkal közelebb van az alfa Centaurihoz, mint az Agena, mégsem gondolnánk, hogy a Nap és az alfa Centauri egy mintázat részei. Az alfa és a béta Centauri

[c] Az alfa Centauri valójában egy hármas csillagrendszer, amelyet egy szoros kettős (A és B komponens), illetve az ezek körül nagyobb távolságban keringő vörös törpe, a Proxima Centauri (C komponens) alkot. Ahogyan a neve is jelzi, ez a hozzánk legközelebbi csillag, távolsága 4,25 fényév. A fényév az a távolság, amelyet az elektromágneses sugárzás egy év alatt megtesz, értéke nagyjából tízezer milliárd kilométer – *a ford.*

nem kötődnek jobban egymáshoz, mint Houston és Kairó, pusztán azért, mert nagyjából ugyanazon a szélességi körön helyezkednek el. Szemünk és az égbolt sok-sok pislákoló pontjában mindenáron mintázatokat kereső agyunk egyszerűen megtéveszt bennünket.

A mintákat elsősorban a felismerés megkönnyítése érdekében keressük. Agyunk egy ragadozó vagy egy másik ember arcának összetett alakját mintázatokká egyszerűsíti, hogy azokat különböző irányokban és távolságokban is felismerhessük. Ahogyan a környezetünket alkotó fizikai tárgyakban mintázatokat keresünk, ugyanúgy tesszük ezt a számok esetében is, ezen mintázatok közül pedig legegyszerűbb az egész számok 1, 2, 3, 4, 5, 6, … sorozata.

A sorozat végén a három pont egy rövidítés, amely túlmutat a matematikán, bár itt kicsit óvatosnak kell lennünk a használatával kapcsolatban. Alapesetben egyszerűen azt jelenti, „és így tovább”, azaz folytatódik, amit elkezdtünk, a legtöbbünknél kényesebb matematikusok azonban kifejezetten úgy értelmezik, „és így tovább, vég nélkül”. Nincs olyan pont, ahol azt mondhatnánk, hogy a sorozat megáll, az folytatódik, halad előre. Egyre tovább és tovább.

A számok sorozatának tanulmányozása már környezetünk és gondolkodásunk tudományos igényű vizsgálatának kezdetei előtt is lelkesedéssel töltött el bennünket. A matematika birodalmának legfontosabb lakói ők, gazdagságuk és változatosságuk vetekszik a bioszféra bármely csoportjának gazdagságával és változatosságával. Néhány számsorozat majdnem olyan egyszerű, mint az alapszámok sorozata, ilyen például a megelőző szám kétszerezésével adódó sorozat:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \ldots$$

Nem kell azonban a sorozatnak ilyen szépen rendezettnek lennie. Folyamatos növekedés helyett lehet benne csökkenés is, így olyan lesz, mint a tánclépések sora, kettőt előre, egyet hátra:

$$1, 3, 2, 4, 3, 5, 4, 6, 5, 7, \ldots$$

Vagy mindegyik tagja lehet a megelőző kettő összege, ilyen a Fibonacci-sorozat:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

De az összeadástól és a kivonástól továbbléphetünk a „vadabb" műveletek, például a szorzás felé, a tavon megzavart madárrajhoz hasonlóan felröppentve számainkat: szorozzunk meg egytől kezdődően minden számot önmagával, azaz vegyük a négyzetüket, így az

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots$$

sorozatot kapjuk, vagy ha még gyorsabban növekvő sorozatot szeretnénk, akkor minden tag legyen a megelőző kettő szorzata:

$$1, 2, 2, 4, 8, 32, 256, 8192, \ldots$$

A legtöbb ilyen típusú sorozatot már a görög filozófusok is ismerték, akik először elmélkedtek a számok természetéről. Úgy tűnik, egy bizonyos osztály különösen lenyűgözte őket. Ezek nem az egész számok, hanem a törtek sorozatai voltak.

Törtszámok legegyszerűbb sorozatát úgy kapjuk, ha vesszük a pozitív egész számok reciprokát:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

Ez a számsorozat nem igazán különleges. Ha minden tagot hozzáadnánk az előtte állók összegéhez, az korlátlanul növekedne. A görög filozófusok azonban észrevették, hogy egy apró változtatás után kapott sorozat – bizarr módon – teljesen eltérően viselkedik. Ne a pozitív egész számok, hanem azok kétszeresének reciprokaiból képzett sorozatot vegyük. Az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

eredménysorozatnak nagyon furcsa tulajdonsága van, elég furcsa ahhoz, hogy a filozófus Zénón két híres paradoxonát is erre alapozza.

Zénón tevékenységéről nagyon kevés közvetlen ismeretünk van. Írásai néhány száz szó kivételével mind elvesztek (de az is kérdéses, hogy ezek tényleg neki tulajdoníthatók-e). Csak másodkézből származó információk maradtak fenn, például Platón és Arisztotelész kommentárjai, akik viszont nem voltak Zénón eszméinek lelkes hívei. Azt tudjuk, hogy Zénón Parmenidész tanítványa volt, aki Kr. e. 539 körül született. Parmenidész a dél-itáliai Elea településen élt. A föníciai kolónia romjai még ma is láthatók az olasz város, Castellammare di Velia határában. Az itt kialakult eleai iskola az állandó, változatlan egység filozófiáját tanította, amely szerint az univerzumban minden olyan, amilyen, a változás, a mozgás pedig csak illúzió.

Zénón valószínűleg sok mindennel hozzájárulhatott az eleai filozófiai iskola tanaihoz, ma már azonban inkább csak érdekes matematikai okfejtései miatt emlékezünk rá. Mások kommentárjaiban megjelenő halvány tükröződésként leginkább a mozgásról való gondolkodásunk szétzilálására irányuló vonzalma jutott el hozzánk. Ez az eleatikusok egyik alapvető meggyőződését, a változás tagadását mutatja be, de még ebben a közvetett formájában is felderenghet előttünk a metaforikus csillogás Zénón szemében, amint elővezeti érveit. A paradoxonokat továbbadó későbbi szerzők rámutatnak, hogy azok ifjonti lelkesedés eredményei, és a leírásukban ugyan tetten érhető a gúny szándéka, az elképzelésekben tényleg az ifjúkori törekvés nagyon is pozitív eleme jelenik meg.