Hompola István

Háromszögek

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Hompola István

Háromszögek

Elmélet és feladatgyűjtemény megoldásokkal

Emelt szint

TYPOTEX

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Ez a mű a Creative Commons 4.0 Magyarország Nevezd meg! – Ne add el! – Ne változtasd! licencfeltételeinek megfelelően felhasználható.



Szerkesztette: Horváth István András, dr. Csépány Gergely

Lektorálta: Knopp Ferenc, Holló Gábor

ISBN 978 963 493 359 5

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról, akcióinkról a *www.typotex.hu*
és a *facebook.com/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Felelős szerkesztő: Erő Zsuzsa
Tördelés: dr. Csépány Gergely
Borítóterv: Szalay Éva

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Tartalom

Amiről ez a könyv szól **9**

Előszó **11**

Bevezetés **13**

Elméleti ismeretek **17**

1. Összefüggés a háromszög oldalai között, a háromszög-egyenlőtlenség 17
2. Összefüggés a háromszög oldalai és szögei között 19
3. Bevezetés az egyenlő szárú, az egyenlő oldalú és a derékszögű háromszögek meghatározásába 19
4. Szinuszok egyenlőtlensége 21
5. Magasságok egyenlőtlensége 22
6. Súlyvonalak egyenlőtlensége 23
7. Kapcsolat az öt kör sugara között 24
8. Korlátos számhalmazok 25
9. Trigonometrikus Pitagorasz-tétel, addíciós tételek, trigonometrikus azonosságok . 26
10. Szög kiszámítása sin, cos, tg, ctg-ből, az inverz trigonometriai függvények 31
11. A szinusztétel 33
12. A koszinusztétel 35
13. A tangenstétel 37
14. Mollweide-féle formulák, avagy Gauss ikertételei 38
15. A négy nevezetes közép közötti egyenlőtlenség 40
16. Terület és a kerület egyenlőtlensége 40
17. A sugáregyenlőtlenség 41
18. J. J. Sylvester tétele 42
19. Kerület és a sugarak (R, r) egyenlőtlensége 43
20. Terület és a sugarak (R, r) egyenlőtlensége 44
21. Az öt kör sugara közötti egyenlőtlenség 46
22. Hozzáírt körök sugarai közötti egyenlőtlenség 46
23. Magasság, szögfelező és a súlyvonal közötti egyenlőtlenség 47
24. Súlyvonal hosszának kiszámítása az oldalakból 48
25. Belső szögfelező tétel 49
26. Külső szögfelező tétel 49
27. A szögfelezőtétel 50
28. Belső szögfelező hosszának kiszámítása két oldalból és a közbezárt szögből 51
29. Belső szögfelező hosszának kiszámítása az oldalakból 51
30. Külső szögfelező hosszának kiszámítása két oldalból és a közbezárt szögből 52
31. Külső szögfelező hosszának kiszámítása az oldalakból 53
32. Beírt kör sugarának kiszámítása 55
33. Belső érintőszakaszok 55
34. Hozzáírt körök sugarának kiszámítása 56
35. Külső érintőszakaszok 57
36. Terület kiszámítása az oldalakból, a Héron-képlet 58
37. Síkgörbe egyenlete, a függvény görbéje 58

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A háromszög meghatározásának különböző esetei **61**

1. Három oldal . . . 61
2. Két oldal és a közbezárt szög . . . 64
3. Két oldal és a nagyobbikkal szemben levő szög . . . 65
4. Két egyenlő oldal és az alapon fekvő egyik szög . . . 66
5. Két oldal és a kisebbikkel szemben levő szög . . . 66
6. Egy oldal és két szög . . . 67
7. Két oldal összege és két szög . . . 69
8. Két oldal különbsége és két szög . . . 70
9. Két oldal és a velük szemben lévő szögek összege . . . 70
10. Két oldal és a velük szemben lévő szögek különbsége . . . 71
11. Két oldal aránya, a harmadik oldal és a szemben lévő szögek különbsége . . . 72
12. A kerület és két szög . . . 73
13. A terület és két szög . . . 74
14. Egy magasság és két szög . . . 75
15. Egy súlyvonal és két szög . . . 75
16. Egy belső szögfelező és két szög . . . 77
17. Egy külső szögfelező és két szög . . . 77
18. A körülírt kör sugara és két szög . . . 79
19. A beírt kör sugara és két szög . . . 80
20. Egy hozzáírt kör sugara és két szög . . . 81
21. A három magasság . . . 82
22. A három súlyvonal . . . 83
23. A három hozzáírt kör sugara . . . 84
24. Két oldal és a terület . . . 86
25. Két oldal és a kerület . . . 86
26. Két szög szinusza, a szögek kiszámítása . . . 87
27. Két oldal és a harmadikhoz tartozó magasság 1. . . . 88
28. Két oldal és a harmadikhoz tartozó magasság 2. . . . 89
29. Két oldal és az egyikhez tartozó magasság . . . 90
30. Két oldal és a harmadikhoz tartozó súlyvonal . . . 91
31. Két oldal és az egyikhez tartozó súlyvonal . . . 92
32. Két oldal és a harmadikhoz tartozó belső szögfelező 1. . . . 93
33. Két oldal és a harmadikhoz tartozó belső szögfelező 2. . . . 94
34. Két oldal és az egyikhez tartozó belső szögfelező . . . 94
35. Két oldal és a harmadikhoz tartozó külső szögfelező . . . 99
36. Két oldal és az egyikhez tartozó külső szögfelező . . . 100
37. Két oldal és a körülírt kör sugara . . . 102
38. Két oldal és a beírt kör sugara, 1. . . . 104
39. Két oldal és a beírt kör sugara, 2. . . . 106
40. Két oldal és a harmadikhoz tartozó hozzáírt kör sugara . . . 109
41. Két oldal és az egyikhez tartozó hozzáírt kör sugara . . . 112
42. Egy oldal, a szemben levő szög és a kerület . . . 116
43. Egy oldal, a szemben levő szög és a terület, 1. . . . 117
44. Egy oldal, a szemben levő szög és a terület, 2. . . . 119
45. Egy oldal, a szemben levő szög és a hozzájuk tartozó magasság, 1. . . . 122
46. Egy oldal, a szemben levő szög és a hozzájuk tartozó magasság, 2. . . . 123
47. Egy oldal, a szemben levő szög és egy másik oldalhoz tartozó magasság . . . 125
48. Egy oldal, a szemben levő szög és a hozzájuk tartozó súlyvonal . . . 127
49. Egy oldal, a szemben levő szög és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonal . . . 129

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

50. Egy oldal, a szemben levő szög és a hozzájuk tartozó belső szögfelező 132
51. Egy oldal, a szemben levő szög és egy másik oldalhoz tartozó belső szögfelező . . 135
52. Egy oldal, a szemben levő szög és az oldalhoz tartozó külső szögfelező 138
53. Egy oldal, a szemben levő szög és egy másik oldalhoz tartozó külső szögfelező . . 143
54. Egy oldal, a szemben levő szög és a beírt kör sugara 149
55. Egy oldal, a szemben levő szög és ezen oldalhoz a hozzáírt kör sugara 153
56. Egy oldal, a szemben levő szög és egy másik oldalhoz a hozzáírt kör sugara 156
57. Egy oldal, a szemben levő szög és a másik két oldal összege 161
58. Egy oldal, a szemben levő szög és a másik két oldal különbsége 164
59. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és a terület 166
60. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és a kerület 166
61. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és ezen oldalhoz tartozó magasság 169
62. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz tartozó magasság 169
63. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és ezen oldalhoz tartozó súlyvonal 172
64. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonal, 1. 174
65. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonal, 2. 176
66. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és ezen oldalhoz tartozó belső szögfelező 178
67. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz tartozó belső szögfelező, 1. 179
68. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz tartozó belső szögfelező, 2. 182
69. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és ezen oldalhoz tartozó külső szögfelező, 1. 183
70. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és ezen oldalhoz tartozó külső szögfelező, 2. 186
71. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és a körülírt kör sugara 189
72. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és a beírt kör sugara 190
73. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és ezen oldalhoz a hozzáírt kör sugara 193
74. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz a hozzáírt kör sugara, 1. 197
75. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz a hozzáírt kör sugara, 2. 201
76. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és a másik két oldal összege 204
77. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és a másik két oldal különbsége 206
78. Terület, kerület és egy szög 209
79. Terület, kerület és egy oldal 212
80. Terület, kerület és egy magasság 217
81. Terület, kerület és egy súlyvonal 219
82. Terület, kerület és egy belső szögfelező 221
83. Terület, kerület és egy külső szögfelező 224
84. Terület, kerület, és a háromszög egyenlő szárú 229
85. Terület, kerület és a körülírt kör sugara 230
86. Terület, kerület és a beírt kör sugara 233
87. Terület, kerület és egy hozzáírt kör sugara 234
88. Terület, kerület és két oldal összege 236
89. Terület, kerület és két oldal különbsége 238
90. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy oldal 242
91. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy szög 247
92. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és a terület 247

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

93. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és a kerület . . . 251
94. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy magasság . . . 252
95. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy súlyvonal . . . 257
96. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy belső szögfelező . . . 262
97. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy külső szögfelező . . . 265
98. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy hozzáírt kör sugara . . . 271
99. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és két oldal összege . . . 274
100. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és két oldal különbsége . . . 279
101. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és a háromszög egyenlő szárú . . . 283
102. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és még egy oldal . . . 285
103. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és az oldalon fekvő egyik szög . . . 285
104. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és ezen oldallal szemben fekvő szög . . . 285
105. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a terület . . . 285
106. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a kerület . . . 285
107. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és még egy magasság . . . 286
108. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a hozzá tartozó súlyvonal . . . 287
109. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és egy másik súlyvonal . . . 288
110. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a hozzá tartozó belső szögfelező . . . 289
111. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és egy másik belső szögfelező . . . 292
112. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a hozzá tartozó külső szögfelező . . . 294
113. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és egy másik oldalhoz tartozó külső szögfelező . . . 297
114. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a körülírt kör sugara . . . 302
115. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a beírt kör sugara . . . 303
116. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és ezen oldalhoz a hozzáírt kör sugara . . . 305
117. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és egy másik oldalhoz a hozzáírt kör sugara . . . 306
118. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a másik két oldal összege . . . 309
119. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a másik két oldal különbsége . . . 311
120. Egy játékos feladat . . . 314

Jelölések **317**

A matematikában használatos betűk **323**

Irodalom **325**

Köszönetnyilvánítás **327**

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Amiről ez a könyv szól

Összehasonlítás más feladatgyűjteményekkel:

Először is meg kell említeni, hogy ez a feladatgyűjtemény, az utolsó feladatot kivéve, kizárólag háromszögfeladatokkal foglalkozik, és egy rövid elméleti összefoglalóval kezdődik. A feladatok, néhány egyszerűbb esettől eltekintve, ábrákkal és a felírható egyenletekkel, egyenletrendszerekkel kezdődnek, számításos úton folytatódnak, a szerkeszthetőség csak egy, két egyszerűbb esetben kerül említésre. A nehezebb feladatokat példák és vizsgálatok követik, néhány esetben grafikus vizsgálat, esetleg grafikus megoldás is előfordul. Az egyszerűbb feladatok inkább diákoknak szólnak, a nehezebbek az alkalmazóknak adnak iránymutatást. A4 nyomtatás esetén az ábrák mm-ben mért hosszúságai megegyeznek a kapcsolódó példák számaival, ami emeli a könyv hitelességét.

Ami kimaradt belőle:

Kimaradtak az elméletből ismertnek tekintett alapvető háromszögtételek, például a Pitagorasz-tétel, Thalész-tétele stb., ugyanis ezek a középiskolai tananyagban megtalálhatók. Továbbá kimaradtak még a kotangensegyenlőtlenség, Erdős–Mordell-egyenlőtlenség stb. Ez azonban elsősorban egy feladatgyűjtemény, és így nem is volt cél az elmélet átfogó ismertetése. Említésre mindenekelőtt azok a tételek, összefüggések kerültek, melyek egy-egy feladat megoldása során leginkább használhatók. További tájékozódásra a könyv végén található irodalom ad lehetőséget.

Ami egyedi, újszerű benne:

Például az egyes feladatoknál a megoldhatóság, a megoldások számának vizsgálata (diszkusszió). Vagy néhány nehezebb feladatnál a kettőnél magasabb fokú paraméteres egyenletek megoldása a valós számok halmazán, ami a felsőfokú algebra körébe tartozik. Előfordul még a kapott síkgörbék felrajzolása, függvényekre bontása, majd ezen függvények vizsgálata, ami már a felsőfokú analízis körébe tartozik. Egyedinek tekinthetők még az egyes analízisjelölések is, melyek egyszerűbbé teszik a tárgyalást.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Előszó

Az emberben eredendően ott van a kíváncsiság, hogy felfedezze az ismeretlent.

A háromszög három egyenes által határolt legegyszerűbb síkidom, amely az ókor óta foglalkoztatja a matematikusokat.

„Descartes óta tudjuk, hogy a geometriai problémák mögött egyenletek állnak” –
Pogáts Ferenc

Ma is emlékszem 56 év távolából, ahogy kezemben tartom a levelet: „Mint a Budapesti Matematika Verseny ötödik helyezettje felvételt nyert a Fazekas Mihály Gimnáziumba”. Apám ennek ellenére a Kossuth Lajos Gépipari Technikumba íratott, később gépészmérnök lettem. 1989-ben tértem vissza, amikor egy engedélyt kértem, és ezután harminc évig matematikát tanítottam mint magántanár. Ez a könyv, amiről írok, az utolsó hat év alatt született, és négy év alatt sikerült digitalizálni.

Tartalmát tekintve egy bevezetésből, néhány elméleti ismeretből, az ezt követő 119 háromszögfeladatból és egy játékos feladatból áll. Ennél azonban sokkal több háromszögfeladat létezik, illetve lehet kitalálni. A fontosabb fogalmak, definíciók, illetve tételek dőlt betűvel vannak szedve. A feladatokat igyekeztem úgy sorba rakni, hogy könnyű legyen tájékozódni közöttük. A megoldás több esetben magasabb fokú algebrai egyenletekig vezet, majd feltételezem az olvasó részéről ezen egyenletek kézi vagy gépi közelítő megoldását. A megoldás során hasznos az ötlet, amelyik más hasonló feladatok megoldását segíti. A nehezebb feladatokat példák és vizsgálatok követik. A vizsgálatokhoz programok készültek. A megértéshez az olvasónak ismernie kell az emelt szintű középfokú matematikát, az algebra és az analízis alapjait. Elsősorban azoknak készült, akik szeretnek elmélyedni egy feladatban, versenyre készülő diákoknak és tanáraiknak, illetve akik munkájuk során gyakran találkoznak geometriai problémákkal, háromszögfeladatokkal. Használhatják hajósok, csillagászok, tervezőmérnökök, geometria- és geodézia-tanszékek, térképészek, katonai főiskolák. A példákhoz HP 49G, HP 50g gépet, a vizsgálatokhoz RPL programnyelvet használtam. A szerkesztés LaTeX-ben készült. Javasolt nyomtatási méret A4. Ekkor az ábrák mm-ben mért hosszúságai megegyeznek a kapcsolódó példák számaival. Az olvasáshoz jó munkát kívánok.

Olvasói észrevételeket, hozzászólásokat a szerző e-mail címén fogadunk. A könyv magyar nyelvű változatának letöltése a világhálóról („World Wide Web”) ingyenes. A tudás közkincs.

A könyv megjelenésével egyidejűleg a vételár helyett adományokat gyűjtünk a Böjte Csaba ferences rendi szerzetes vezette Dévai Szent Ferenc Alapítvány – Budapest javára. Az alapítvány az erdélyi árva gyerekeket támogatja. További tájékoztatás és számlaszám az alapítvány honlapján található.

Az utolsó oldal a köszöneté, azoknak, akiknek a segítsége nélkül nem születhetett volna meg ez a könyv.

A szerző

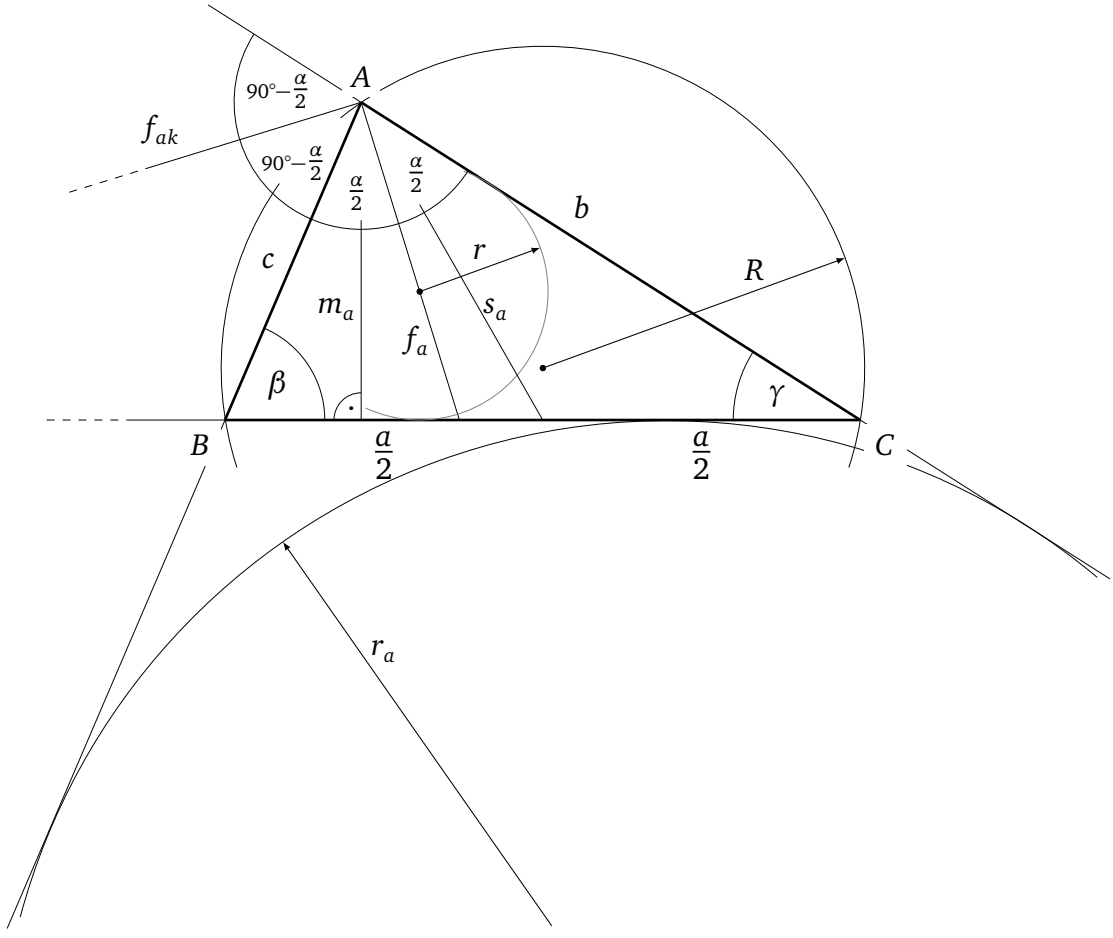
hompola.istvan@gmail.com

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Bevezetés

A háromszög három nem egy egyenesen fekvő pont, valamint az őket összekötő szakaszok által határolt konvex síkidom. A pontok a háromszög csúcsai, a szakaszok az oldalai. Az oldalak által bezárt (konvex) szögek a háromszög (belső) szögei. Az elfajuló esetektől, amikor két, esetleg mindhárom pont egybeesik, vagy a három pont egy egyenesre illeszkedik, eltekintünk. A háromszögeket csoportosíthatjuk szögeik és oldalaik szerint. Szögei szerint egy háromszög lehet ***hegyesszögű***, ha minden szöge hegyesszög, ***derékszögű***, ha van derékszöge, és ***tompaszögű***, ha van tompaszöge. Oldalai szerint egy háromszög lehet ***általános***, ha minden oldala különböző, ***egyenlő szárú***, ha van két egyenlő oldala, és ***egyenlő oldalú*** *(szabályos)*, ha minden oldala egyenlő.



1. ábra

Az A, B, C csúcsokkal rendelkező háromszög jelölése $ABC\triangle$, a hosszúságokat a latin ábécé, a szögeket pedig a görög ábécé kisbetűivel jelöljük (lásd a mellékletben). A jelölés iránya az óramutató járásával ellentétes, ez a pozitív körüljárási irány. A szokásos jelöléseket lásd az 1. ábrán. Ha csak egy feladat választott kiinduló adatairól, esetleg adatok egy sorrendjéről beszélünk, ennek jelölése (a, b, c), (b, c, α) stb. lesz. *A háromszög hosszúságadatai pozitív valós számok, a szögeket fokokban mérjük, a trigonometrikus függvények ábráin pedig radiánban. A szögekre vonatkozóan feltesszük:* $0° < \alpha,\ \beta,\ \gamma < 180°$ *és* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$*, ez utóbbi bizonyítható.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Egy belső szög mellékszögét külső szögnek nevezzük, 180°*-ra egészítik ki egymást. Ha mást nem mondunk, szög alatt belső szöget fogunk érteni.*

Az ELTE egykori tanára, Hajós György írja *Bevezetés a geometriába* c. tankönyvében:

> „Ha mindenféle háromszöget tekintünk, megállapíthatjuk, hogy alakjuk ismeretéhez három *független* valós számadat, pl. két oldal és az általuk közrefogott szög ismeretére van szükség. Ezt a tényt úgy szokás kifejezni, hogy »a háromszögek három paraméteresen végtelen sokaságot alkotnak« vagy, hogy »háromszorosan végtelen sok háromszög van«. Adatokat függetleneknek akkor mondunk, ha nincs olyan összefüggés, amelyet ezeknek az adatoknak teljesíteniük kell."

Például α, β, γ vagy a, m_a, t nem három független adat, ugyanis van olyan összefüggés, nevezetesen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, illetve $t = a \cdot m_a/2$, amelyet ezeknek az adatoknak teljesíteniük kell. Az adathármas *megfelelő* is kell legyen, vagyis bizonyos feltételeknek kell megfeleljen. Például két oldal és az általuk közrefogott szög esetén ez a szög kisebb kell legyen 180°-nál, vagy három oldal esetén, amikor is ezen oldalakra teljesülnie kell a *háromszög-egyenlőtlenségnek,* stb. Ha az adathármas független és megfelelő, és egy megoldás van, akkor azt mondjuk, a *feladat megoldása egyértelmű*. Az *alapadatok*, az *oldalak* és a *belső szögek* felhasználásával egy háromszög egyértelműen négyféleképpen adható meg:

1. Három oldal, ha rájuk teljesül a háromszög-egyenlőtlenség.
2. Két oldal és az általuk közrefogott szög, ha ez a szög kisebb 180°-nál.
3. Egy oldal és két szög, ha ezek összege kisebb 180°-nál.
4. Két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög, ha ez a szög kisebb 180°-nál.

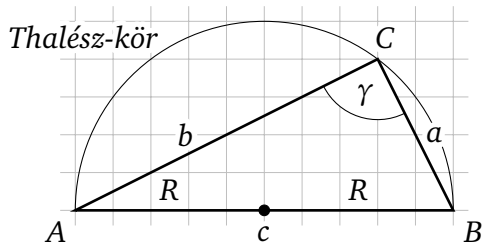
Mivel a megadott induló adatoknak csak egy háromszög felel meg, az említett négy eset értelemszerűen megegyezik két háromszög *egybevágósági alapeseteivel*. Hajós így folytatja a gondolatmenetet:

> „A háromszög alakjára vonatkozó bármilyen adat egy egyenlet fennállását jelenti a háromszöget meghatározó három adat között"

Ha például tudjuk, hogy a háromszög derékszögű, és a, b két ismert befogót jelöl, akkor a háromszöget meghatározó három adat, most a, b, c között fennálló összefüggés $a^2 + b^2 = c^2$, a *Pitagorasz-tétel*. Ha a két befogó közül csak az egyiket ismerjük, például a b-t, de ismerjük a körülírt kör R sugarát, akkor a *Thalész-tétel megfordítása* miatt $c = 2R$, és a három ismert adat $\gamma = 90°, b, R$ lesz, így:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ c = 2R. \end{cases}$$

Tehát két független egyenletből álló kétismeretlenes (a, c) egyenletrendszerhez jutottunk. Ennek megoldása:



2. ábra

$$a = \sqrt{(2R)^2 - b^2} = \sqrt{(2R + b) \cdot (2R - b)},$$
$$c = 2R.$$

Látható, hogy b, illetve $2R$ megfelelő, ha $b < 2R$, és ekkor a *feladat megoldása egyértelmű* (2. ábra). Más esetben egy n független egyenletből álló n ismeretlenes egyenletrendszerhez jutunk.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Hajós így folytatja:

> „Általában igaz az, hogy n számra vonatkozó n független egyenlet együttes teljesülése esetén az n szám csak véges sokféle értéket vehet fel, $n-1$ független egyenlet együttes teljesülése esetén viszont az n szám még végtelenül sokféle értéket vehet fel... A mondottakból következik, hogy egy háromszögre vonatkozó három független adat ismeretében általában tudjuk, hogy a háromszög alakja csak véges sokféle lehet, ezt röviden így szokták kifejezni: »a háromszöget három adat meghatározza«."

Előfordulhat, hogy a felírható egyenlet (pl. a 34. feladat) vagy trigonometrikus egyenletrendszer (pl. a 39. feladat) a megoldás során magasabb fokú paraméteres algebrai egyenletre vezet. Az algebra alaptételéből azonban tudjuk: *Az n-ed fokú algebrai egyenletnek a komplex számok körében, ha a többszörös gyököket is számoljuk, n db gyöke van.*

Az azonos (egyenértékű, ekvivalens) átalakítások nem változtatják meg a megoldások halmazát, nem lép föl hamis gyök, és nem lesz gyökvesztés sem. Ellenkező esetben a vizsgálatra ki fogunk térni.

A megoldások száma függhet az adatok felvételétől is. Például két oldal és a kisebbikkel szemben fekvő szög esetén a megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet. Ha az adathármas megfelelő, akkor 1 vagy 2 (5. feladat).

Egy háromszög meghatározása alatt (tágabb értelemben) tehát egy olyan számításos utat értünk, melynek során a háromszög három tetszőleges adatából (pl. R, r, c) és a rájuk vonatkozó feltételekből (most $2r \le R$, $c \le 2R$) meghatározzuk a hiányzó alapadatokat, az oldalakat és a belső szögeket.

Előfordulhat, hogy a kiinduló adatokra (pl. R, r, c) tett feltételek csak szükségesek, de nem elégségesek, és a feladat megoldása során, esetleg a feladat végén kell további feltételeket tenni (90. feladat).

Egy feladat végén több megoldás is adódhat, melyek között lehetnek egybevágó megoldások is (pl. $c = 40, \alpha = 30°, \beta = 60°$, illetve $c = 40, \alpha = 60°, \beta = 30°$, ha $\overline{AB}$ egybeesik, szimmetrikus pár). Bár síkgeometriai szempontból két egybevágó háromszög ugyanazt a síkidomot jelenti (transzformációval fedésbe hozhatók), mi ebben a könyvben, ha előfordul, a szimmetrikus párokat (pl. 42. feladat) vagy a permutált oldalak eseteit (pl. 85. feladat) külön megoldásként fogjuk említeni.

Az ábrákon rácsháló csak akkor jelenik meg, ha vannak kapcsolódó példák és a csúcsok, vagy egy részük rácspontba esik, vagy grafikonról van szó, és ez előnyös.

Ha *irodalmi utalás* (lásd a mellékletben) vagy hivatkozás az *Elméleti ismeretekre* nincs, az említett definíciók, tételek és képletek megtalálhatók a középiskolai matematika tananyagban.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

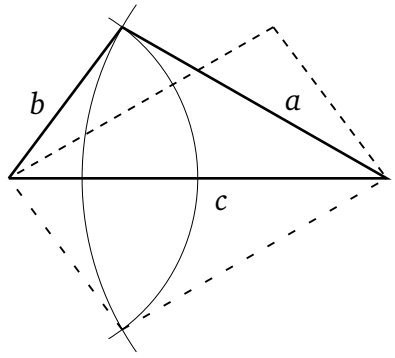
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Elméleti ismeretek

Ebben a részben a háromszögre vonatkozó néhány fontos, de ritkábban említett tételt és összefüggést fogunk ismertetni a teljesség igénye nélkül.

1. Összefüggés a háromszög oldalai között, a háromszög-egyenlőtlenség

Egy háromszög bármely két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál. Ez közvetlenül belátható, hiszen a síkon bármely két pont között a legrövidebb út az összekötő szakasz. Ebből következik, hogy *bármely két oldal különbsége kisebb a harmadiknál, illetve bármely oldal nagyobb a másik kettő különbségének abszolút értékénél*:



1-1. ábra

$$a+b>c, \qquad a+c>b, \qquad b+c>a,$$
$$a>|b-c|, \qquad b>|a-c|, \qquad c>|a-b|.$$

Bizonyítás: Például a $c>|a-b|$-ra:

$$\left.\begin{aligned} b+c>a &\Rightarrow c>a-b \\ a+c>b &\Rightarrow c>b-a=-(a-b) \end{aligned}\right\} \Rightarrow c>|a-b|,$$

ami az abszolút érték definíciójából következik. A bizonyítás a másik két esetben hasonló.

Ha három szakaszra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, abból csak egy háromszög szerkeszthető az egybevágó párokat nem számítva (1-1. ábra).

Összefoglalva:

Ha egy háromszög ($a,b,c\in\mathbf{R}^+$, $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$) két oldalának hosszát (például a, b) ismerjük, akkor a harmadik oldal hosszára (most c) teljesülnie kell, hogy:

$$|a-b|<c<a+b \quad\Leftarrow\quad a<b+c,\ b<a+c,\ c<a+b, \tag{1}$$

és fordítva, ha (1) bal oldala teljesül, akkor teljesül mindhárom háromszög-egyenlőtlenség is:

$$|a-b|<c<a+b \quad\Rightarrow\quad a<b+c,\ b<a+c,\ c<a+b. \tag{2}$$

Ez utóbbit még bizonyítani kell:

Ha $a\geq b$, akkor $|a-b|=a-b<c \Rightarrow a<b+c$ és $b<a+c$,

ha pedig $a<b$, akkor $|a-b|=b-a<c \Rightarrow b<a+c$ és $a<b+c$,

míg $c<a+b$ adott volt.

A háromszög-egyenlőtlenség végső alakja:

$$\boxed{|a-b|<c<a+b \iff a<b+c,\ b<a+c,\ c<a+b \iff (a,b,c)\text{ egy }\triangle.} \tag{3}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

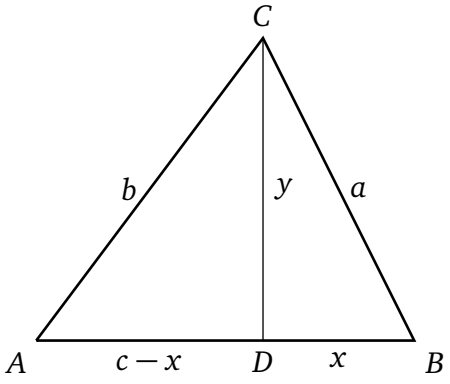
Megjegyzés: Az oldalak permutálásával (a,b,c) helyére (b,c,a) helyére (c,a,b) kerül, ez azonban nem változtat a (3) egyenlőtlenségen.

Bizonyítható, hogy ha $a,b,c \in \mathbf{R}$, és teljesül rájuk a háromszög-egyenlőtlenség, akkor a,b,c pozitív valós számok kell legyenek. Fordítva azonban nem igaz. Ha $a,b,c \in \mathbf{R}^+$, akkor még nem biztos, hogy teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. Például $a=2$, $b=3$, $c=6$.

Egy feladat végére érve tehát mondhatjuk: *Ha $a,b,c \in \mathbf{R}^+$, és teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, az a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Példa: Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és legyen D az $\overline{AB}=c$ oldal egy belső pontja (1-2. ábra).

Írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget a BCD $\triangle$-ben a-ra és az ACD $\triangle$-ben b-re:



1-2. ábra

$$\begin{gathered} a < x+y, \qquad b < c-x+y, \\ a+b < x+y+c-x+y, \\ a+b-c < 2y, \\ \frac{a+b-c}{2} < y, \\ s-c < y. \end{gathered} \tag{4}$$

Most írjuk fel a háromszög-egyenlőtlenséget a BCD $\triangle$-ben és az ACD $\triangle$-ben is y-ra:

$$\begin{gathered} y < a+x, \qquad y < b+c-x, \\ 2y < a+x+b+c-x, \\ 2y < a+b+c = 2s, \\ y < s. \end{gathered} \tag{5}$$

A $\overline{CD}$ szakasz hosszára tehát a D pont felvételétől függetlenül igaz, hogy:

E. 1(3)

$$\boxed{0 < s-c < \overline{CD} < s.} \tag{6}$$

Megjegyzés: Ha D pont egybeesik A-val vagy B-vel (ez külön-külön előfordulhat), (6) egyenlőtlenség akkor sem változik.

Az egyenlőtlenség nem változik akkor sem, ha D-t egy másik csúccsal szemben lévő oldalon vesszük fel.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

2. Összefüggés a háromszög oldalai és szögei között

Ha egy háromszögben két oldal egyenlő, akkor a velük szemben levő szögek is egyenlők, és fordítva, ha egy háromszög két szöge egyenlő, akkor a szemközti oldalai is egyenlők.

Például:

$$a = b \iff \alpha = \beta < 90^\circ, \tag{1}$$

hiszen egy háromszögben két (egyenlő) tompaszög vagy két derékszög nem lehet a szögösszeg 180° miatt.

Fontos következmény: Mivel a szögek összege 180°, ezért az egyenlő oldalú háromszög szögei 60°-osak, az egyenlő szárú és derékszögű háromszög hegyesszögei pedig 45°-osak.

Egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, és fordítva, nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

Például:

$$a < b \iff \alpha < \beta,$$

$$\begin{aligned}
&\text{ha } \beta < 90^\circ \text{ és } \alpha < \beta, \text{ akkor } \alpha < 90^\circ,\\
&\text{ha } \beta = 90^\circ \text{ és } \alpha < \beta, \text{ akkor } \alpha < 90^\circ,\\
&\text{ha } \beta > 90^\circ \text{ és } \alpha < \beta, \text{ akkor } \alpha < 90^\circ.
\end{aligned}$$

Ugyanis egy háromszögnek csak egy derékszöge vagy egy tompaszöge lehet a szögösszeg 180° *miatt, és ekkor a másik kettő osztozik a maradék derékszögön vagy hegyesszögön, következésképpen mindkettő hegyesszög kell legyen.* Ezért igaz, hogy:

$$a < b \iff \alpha < \beta \implies \alpha < 90^\circ. \tag{2}$$

A szögösszeg 180° miatt pedig:

$$a < b \iff \alpha < \beta < 180^\circ - \alpha \implies \alpha < 90^\circ, \tag{3}$$

vagy

$$a > b \iff 180^\circ - \beta > \alpha > \beta \implies \beta < 90^\circ. \tag{4}$$

Ajánlott irodalom:
[8] Hajnal Imre: Matematika 245–248. oldal
[17] Juhász István: Matematika 9. 62. oldal

3. Bevezetés az egyenlő szárú, az egyenlő oldalú és a derékszögű háromszögek meghatározásába

Azt tudjuk, hogy egy háromszög meghatározásához három független, megfelelő, valós számadat szükséges, továbbá annyi független egyenletet kell felírni, mint ahány ismeretlen van. Ismeretlennek választani célszerű az alapadatokat (oldalak és belső szögek), és törekedni kell a feladatot visszavezetni a bevezetésben említett négy egybevágósági eset valamelyikére. Lásd később: *A háromszög meghatározásának különböző esetei* 1., 2., 3., 4. és 6. feladatot.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az a tény, hogy egy háromszög egyenlő szárú (pl. $a = b$), egy egyenletet jelent a háromszöget meghatározó három adat között. Ha például ismerjük még a szárak hosszúságát, és az általuk bezárt szöget ($a = b$, $a = 5$, $\gamma = 50°$), akkor van egy egyenletünk és két számadat, és visszajutunk két oldal és a közbezárt szög esetére. Más esetben ($a = b$, $\alpha = 70°$) a szögek könnyen kiszámíthatók ($\beta = 70°$, $\gamma = 40°$), vagyis hasonló háromszögek halmazából kell majd kiválasztanunk a második számadat ismeretében (pl. $R = 10$) az egyetlen megoldást. Lásd még a 4. feladatot.

Az egyenlő szárú háromszög meghatározásához tehát két (független) számadat szükséges és elegendő.

Ha egyenlő oldalú (szabályos) háromszögről van szó, azt úgy is tekinthetjük, hogy két egyenletet ismerünk (ugyanis $a = b$ és $b = c$). Mivel a szögek ekkor kiszámíthatók ($\alpha = \beta = \gamma = 60°$), ezek nem tekinthetők független adatnak, ezért most is hasonló háromszögek halmazából kell majd kiválasztanunk egy számadat ismeretében (pl. $R = 10$ vagy $t = 20$) az egyetlen megoldást. Előfordulhat olyan adatpárosítás (pl. R, r vagy t, s), hogy az őket tartalmazó egyetlen egyenletből ($2r = R$ lásd E. 17(1) vagy $t = s^2/3\sqrt{3}$ lásd E. 16(4)) is következik az egyenlőoldalúság.

Ha tudjuk, hogy a háromszög egyenlő oldalú, meghatározásához egyetlen számadat (hosszúság vagy terület) szükséges és elegendő.

Ha a háromszög derékszögű, az azt jelenti, hogy pontosan egy szöge derékszög (90°), így a másik kettő kisebb derékszögnél a szögösszeg 180° miatt, vagyis hegyesszög. A két rövidebbik oldal neve *befogó*, a leghosszabb oldal neve *átfogó*. A derékszögű háromszögben érvényes a *Pitagorasz-tétel*: *A befogók négyzetösszege megegyezik az átfogó négyzetével*. Igaz a tétel megfordítása is: *Ha egy háromszögben a két rövidebb oldal négyzetösszege megegyezik a leghosszabb oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű, és a derékszög a leghosszabb oldallal szemben levő szög*.

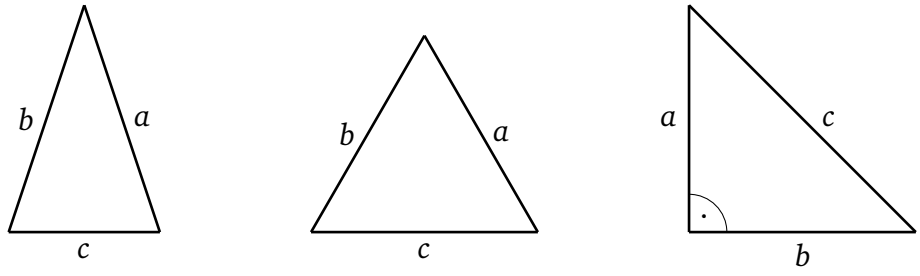
A derékszögű háromszög meghatározásához tehát két (független) számadat szükséges és elegendő.

Ha egy háromszög derékszögű és egyenlő szárú is, az azt jelenti, hogy van egy számadatunk és egy egyenletünk. Például $\gamma = 90°$, $a = b$. Mivel a szögek ekkor könnyen kiszámíthatók, $\alpha = \beta = 45°$, hasonló háromszögek végtelen halmazából kell majd kiválasztani egy további számadat (pl. $a = 10$ vagy $t = 20$) ismeretében az egyetlen megoldást.

A derékszögű, egyenlő szárú háromszögek meghatározásához tehát egy számadat (hosszúság vagy terület) szükséges és elegendő.

Egy háromszög derékszögű és egyenlő oldalú egyszerre nem lehet.

Egy egyenlet függetlensége a már megválasztott egyenletektől azt jelenti, hogy azoknak nem következménye, azokból nem származtatható. Például az $a = b$ és $b = c$-ből származtatható az $a = c$ az egyenlőség tranzitivitása miatt, tehát nem független. Adatokat pedig függetlennek akkor mondunk, ha nincs olyan összefüggés, amit ezeknek az adatoknak teljesíteniük kell (3-1. ábra).



$a = b$ $a = b = c$ $a = b$

3-1. ábra

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

4. Szinuszok egyenlőtlensége

Ha egy háromszög három szöge közül kettőt kiválasztunk (legyen például α, β), akkor a szögösszeg 180° miatt vagy

- mindkettő hegyesszög: $\alpha = \beta < 90°$, $\alpha < \beta < 90°$, vagy $\beta < \alpha < 90°$,
- egyik hegyesszög, másik derékszög: $\alpha < \beta = 90°$, vagy $\beta < \alpha = 90°$,
- egyik hegyesszög, másik tompaszög: $\alpha < 90° < \beta < 180° - \alpha$, vagy $\beta < 90° < \alpha < 180° - \beta$.

A példánál maradva:

Ezért ha

$$\alpha = \beta < 90° \iff \sin\alpha = \sin\beta < 1, \tag{1}$$

ha pedig

$$\alpha < \beta < 180° - \alpha \iff \sin\alpha < \sin\beta \leq 1. \tag{2}$$

(1) és (2) kibővítve együtt:

$$a \leq b \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \sin\alpha \leq \sin\beta, \qquad \alpha + \beta < 180°. \tag{3}$$

Vagy

$$\beta < \alpha < 180° - \beta \iff \sin\beta < \sin\alpha \leq 1. \tag{4}$$

(1) és (4) kibővítve együtt:

$$b \leq a \Leftrightarrow \beta \leq \alpha \Leftrightarrow \sin\beta \leq \sin\alpha, \qquad \alpha + \beta < 180°. \tag{5}$$

Az egyenlőség (3)-ban és (5)-ben egyszerre lép föl mindhárom helyen.

Igaz továbbá minden háromszögben:

Bármelyik két szög szinuszának összege nagyobb a harmadik szög szinuszánál.

Bizonyítás: Például

$$\begin{aligned} &\sin\alpha + \sin\beta > \sin\gamma, \qquad \Big| : \sin\gamma > 0, \\ &\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} > 1, \end{aligned} \tag{6}$$

a *szinusztétel* miatt pedig (lásd később)

E. 11(12)

$$\begin{aligned} &\frac{a}{c} + \frac{b}{c} > 1, \qquad \Big| \cdot c \\ &a + b > c, \end{aligned}$$

ami a *háromszög-egyenlőtlenség* miatt teljesül. Más esetben a bizonyítás hasonlóképpen megy.

Igaz továbbá minden háromszögben:

$$\boxed{0 < \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},} \tag{7}$$

ahol az egyenlőség csakis az egyenlő oldalú (szabályos) háromszögben áll fönn.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Bizonyítás:

E. 11(12) $$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{s}{R},$$

E. 19(8) $$\frac{s}{R}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ajánlott irodalom:
[9] Reiman István: Fejezetek az elemi geometriából 20. o.

5. Magasságok egyenlőtlensége

Legyen az ABC háromszög három magassága: m_a, m_b, m_c. A területek felírása után fejezzük ki az oldalakat:

$$t=\frac{a\cdot m_a}{2},\qquad t=\frac{b\cdot m_b}{2},\qquad t=\frac{c\cdot m_c}{2},$$
$$a=\frac{2t}{m_a},\qquad b=\frac{2t}{m_b},\qquad c=\frac{2t}{m_c}.$$

Írjuk föl a *háromszög-egyenlőtlenséget,* és helyettesítsük a, b, c-t:

E. 1(3) $$|a-b|<c<a+b, \tag{1}$$

$$\left|\frac{2t}{m_a}-\frac{2t}{m_b}\right|<\frac{2t}{m_c}<\frac{2t}{m_a}+\frac{2t}{m_b},\qquad \Big/:2t$$

$$\boxed{\left|\frac{1}{m_a}-\frac{1}{m_b}\right|<\frac{1}{m_c}<\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}.} \tag{2}$$

Mivel azonos átalakítás történt, (2)-ből is következik (1), tehát:

$$\boxed{|a-b|<c<a+b\iff\left|\frac{1}{m_a}-\frac{1}{m_b}\right|<\frac{1}{m_c}<\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}.} \tag{3}$$

Mivel az oldalak permutálása nem változtat a háromszög-egyenlőtlenségen, így kimondható:

Ha három szakasz reciprokára teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, akkor létezik olyan háromszög, amelyiknek ezek voltak a magasságai.

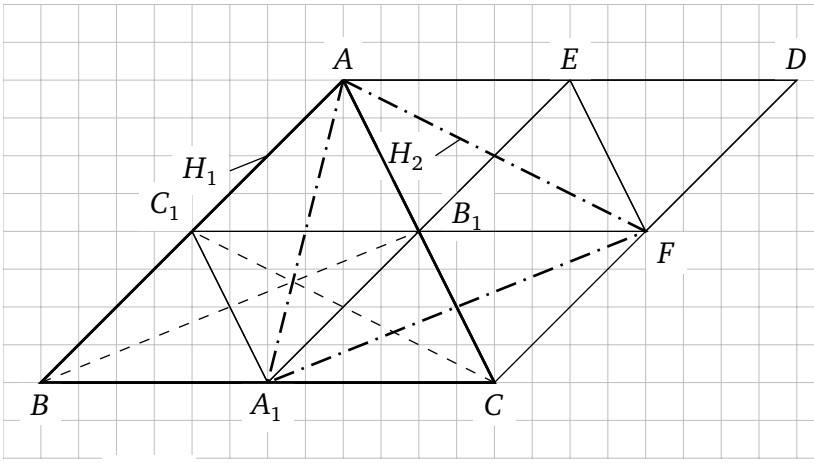
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

6. Súlyvonalak egyenlőtlensége

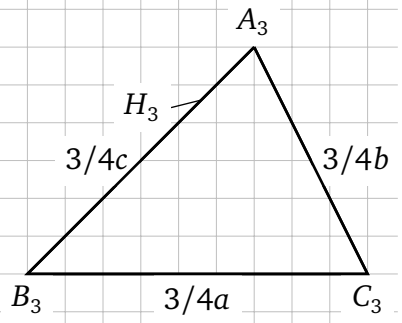
Ez az alfejezet [4] Hajós György: *Matematikai versenytételek* II. rész 98. oldal 1940/3 feladat átdolgozása.

Minden háromszög súlyvonalaiból mint oldalakból háromszög alkotható, így a súlyvonalakra is fennáll a háromszög-egyenlőtlenség. Továbbá ha egy H_1 háromszög súlyvonalaiból H_2 háromszög alakítható, és ennek súlyvonalaiból H_3 háromszög, akkor H_1 és H_3 hasonló háromszögek.

Bizonyítás:
a) Legyenek az adott H_1 háromszög csúcsai A, B, C, a $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ oldalak felezőpontjai rendre A_1, B_1, C_1. Egészítsük ki a háromszöget az $ABCD$ paralelogrammává. Ennek középvonalai legyenek $\overline{A_1E}$ és $\overline{C_1F}$ (6-1. ábra). Megmutatjuk, hogy az AA_1F háromszög oldalai a H_1 háromszög súlyvonalaival egyenlők. $\overline{AA_1}$-re ez igaz, a többi oldalra pedig abból következik, hogy az AC_1CF és A_1BB_1F négyszögek paralelogrammák.



6-1. ábra



6-2. ábra

Jelöljük: $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$, $\overline{AA_1}=s_a$, $\overline{BB_1}=s_b$, $\overline{CC_1}=s_c$.

Mivel (a,b,c) háromszöget alkot, teljesül a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3)
$$|a-b|<c<a+b, \tag{1}$$

és így a súlyvonalakra is teljesül, hogy:

$$\boxed{|s_a-s_b|<s_c<s_a+s_b.} \tag{2}$$

Bizonyítás:
b) A 6-1. ábrából az is közvetlenül kiolvasható, hogy az AA_1F háromszög súlyvonalai az eredeti ABC háromszög oldalainak háromnegyedei. Ez abból következik, hogy az A_1B_1FC, AB_1FE, $AB_1A_1C_1$ paralelogrammák átlói felezik egymást, így B_1 az AA_1F háromszög súlypontja. Ezek szerint a H_3 háromszög valóban hasonló H_1-hez, mégpedig abból háromnegyedszeresre való kicsinyítéssel származtatható (6-2. ábra).

Ez azt is jelenti, hogy (2)-ből is következik (1), tehát:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\boxed{|a-b|<c<a+b \iff |s_a-s_b|<s_c<s_a+s_b.} \tag{3}$$

Mivel az oldalak permutálása nem változtat a háromszög-egyenlőtlenségen, így kimondható:

Ha három szakaszra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, akkor létezik olyan háromszög, amelyiknek ezek voltak a súlyvonalai.

7. Kapcsolat az öt kör sugara között (R, r, r_a, r_b, r_c)

A háromszög *beírt körének* r sugara és a *hozzáírt körök* r_a, r_b, r_c sugarai közötti kapcsolat, ahol s a félkerületet fogja jelölni, $s=(a+b+c)/2$:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{s-a}{t}+\frac{s-b}{t}+\frac{s-c}{t}=\frac{3s-(a+b+c)}{t}=\frac{3s-2s}{t}=\frac{s}{t}=\frac{1}{r},$$

$$\boxed{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}.} \tag{1}$$

Lásd még Elméleti ismeretek:
32. Beírt kör (belső érintőkör) sugarának kiszámítása (4).
34. Hozzáírt körök (külső érintőkörök) sugarának kiszámítása (3).
Ajánlott irodalom:
[6] Reiman István: Matematika 222., 223. o.

A kapcsolat az öt kör sugara között a következő:

$$4tR=abc=s(s-b)(s-c)+s(s-c)(s-a)+s(s-a)(s-b)-(s-a)(s-b)(s-c)=$$
$$=\frac{t^2}{s-a}+\frac{t^2}{s-b}+\frac{t^2}{s-c}-\frac{t^2}{s}=t\cdot(r_a+r_b+r_c-r),$$

$$\boxed{4R=r_a+r_b+r_c-r.} \tag{2}$$

Lásd még Elméleti ismeretek:
11. A szinusztétel (17).
36. A Héron-képlet (4).
Ajánlott irodalom az öt kör sugarához:
[2] H.S.M. Coxeter: A geometriák alapjai 31. oldal, 1.55
[22] Holló Gábor: Geometria a matematikaversenyeken

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

8. Korlátos számhalmazok

Az idézőjelbe tett részek [11] Császár Ákos: *Valós Analízis I.* c. munkájából, a 91–99. oldalról lettek átvéve.

„Egy A **számhalmaz felső korlát**jának mondjuk a $c \in \mathbf{R}$ számot, ha $x \in A$ esetén $x \leq c$, **alsó korlát**jának pedig az olyan $b \in \mathbf{R}$ számot, hogy $x \in A$ esetén $x \geq b$. Egy A számhalmaz **felülről (alulról) korlátos**, ha van felső (alsó) korlátja, és **korlátos**, ha felülről is, alulról is korlátos.

Egy A számhalmaz pontosan akkor korlátos, ha van olyan $k \in \mathbf{R}$ szám, hogy $x \in A$ esetén $|x| \leq k$.

Ha az A számhalmaznak van legnagyobb eleme, ezt A **maximum**ának mondjuk, és $\max A$-val jelöljük, legkisebb elemét pedig – ha van – A **minimum**ának mondjuk, és $\min A$-val jelöljük."

Például:

$$a, b \in \mathbf{R}, \quad a < b, \quad \max(a, b] = \max\{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\} = b,$$

és

$$a, b \in \mathbf{R}, \quad a < b, \quad \min[a, b) = \min\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\} = a.$$

„Ha $A \neq \emptyset$ felülről korlátos számhalmaz, mindig van a felső korlátjai között legkisebb, ha pedig A alulról korlátos, van az alsó korlátok között legnagyobb.

Az $A \neq \emptyset$ számhalmaz legkisebb felső korlátját az A halmaz **felső határ**ának vagy **szuprémum**ának nevezzük, és $\sup A$-val jelöljük, legnagyobb alsó korlátját pedig az A halmaz **alsó határ**ának vagy **infimum**ának nevezzük, és $\inf A$-val jelöljük."

Például: $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén

$$\begin{aligned} \sup(a, b] &= \sup\{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\} = b, \\ \sup[a, b) &= \sup\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\} = b, \\ \inf[a, b) &= \inf\{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\} = a, \\ \inf(a, b] &= \inf\{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\} = a. \end{aligned}$$

„Legyen $\emptyset \neq A \subseteq \mathbf{R}$. Ha A nem korlátos felülről, akkor $\sup A = +\infty$, ha A nem korlátos alulról, akkor $\inf A = -\infty$."

Például:
A pozitív valós számok halmaza nem korlátos felülről, $\sup \mathbf{R}^+ = +\infty$, de korlátos alulról, $\inf \mathbf{R}^+ = 0$.

Megjegyzés:
Ha az intervallum felülről/alulról zárt, a max/min jelölést fogjuk használni. Ha pedig az intervallum felülről/alulról nyílt, a sup/inf jelölést fogjuk használni.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Például: $a,b,c \in \mathbf{R}^+, \quad A=\{a \,|\, |b-c|<a<b+c\},$

$$\inf A = |b-c| < a < b+c = \sup A.$$

Ha az értelmezési tartomány D_f, és az értékkészlet R_f is a valós számhalmaz összefüggő részhalmazai, intervallumok, akkor velük kapcsolatban is használhatók a max/min, ill. a sup/inf jelölések.

Átvétel [7] Kósa András: *Útban a felsőbb matematikához* című munkájából, 417. oldal:

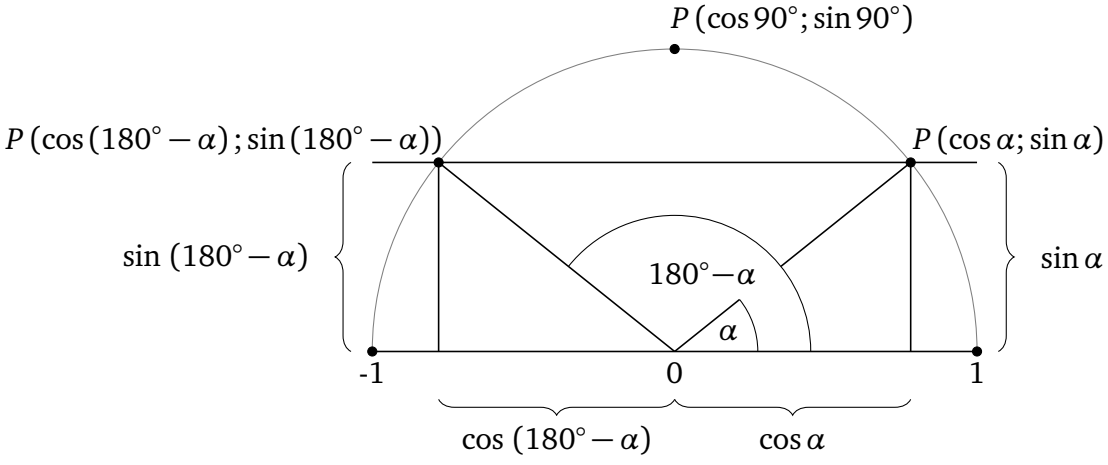
> „Legyen f valós függvény. Igazolja, hogy f-nek pontosan akkor van minimuma, ha R_f-nek van minimuma, és f minimuma $\min R_f$-fel egyenlő. Ez az alapja $\min f := \min R_f$, és hasonlóképpen $\max f := \max R_f$ jelölésnek."

9. Trigonometrikus Pitagorasz-tétel, addíciós tételek, trigonometrikus azonosságok

A *hegyesszögek szögfüggvény fogalmának* kiterjesztése,

$$0^\circ \le \alpha \le 360^\circ,$$

a $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ függvények definíciói: Legyen α az egységsugarú kör P pontjához húzott sugár és az x tengely pozitív ágának hajlásszöge (9-1. ábra).



9-1. ábra

$\sin\alpha :=$ az egységsugarú körön lévő P futópont második koordinátája,

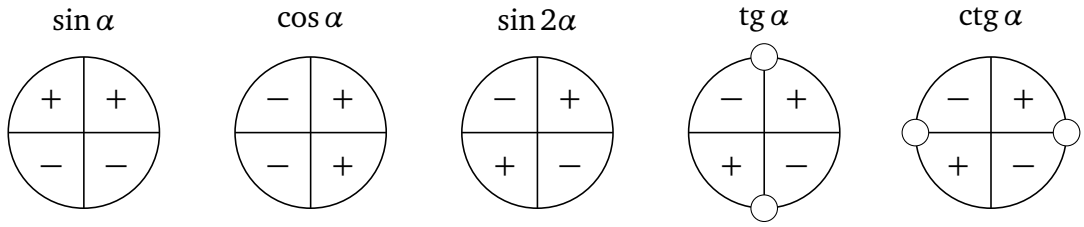
$\cos\alpha :=$ az egységsugarú körön lévő P futópont első koordinátája,

$$\operatorname{tg}\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \cos\alpha \neq 0,$$

$$\operatorname{ctg}\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \sin\alpha \neq 0.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az előjelek a következőképpen alakulnak:



9-2. ábra

Írjuk föl a *Pitagorasz-tételt* az egységsugarú körben (9-1. ábra).

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \tag{1}$$

A szögfüggvényeket kifejezhetjük az α ($0^\circ<\alpha<90^\circ$) hegyesszögekkel. A II. síknegyedben:

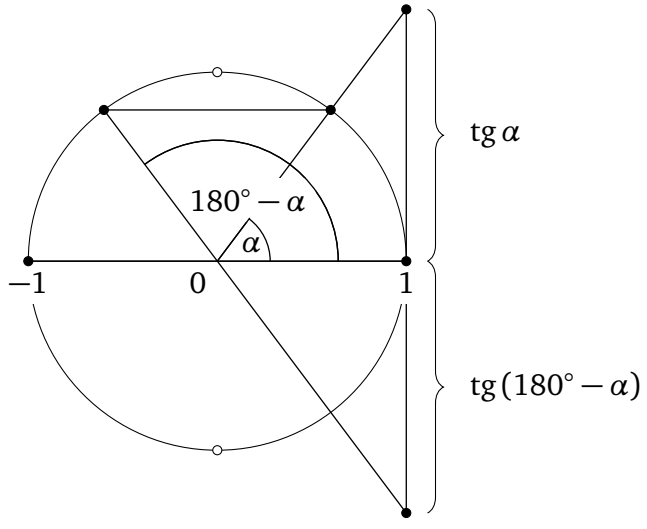
$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha, \tag{2}$$

$$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha, \tag{3}$$

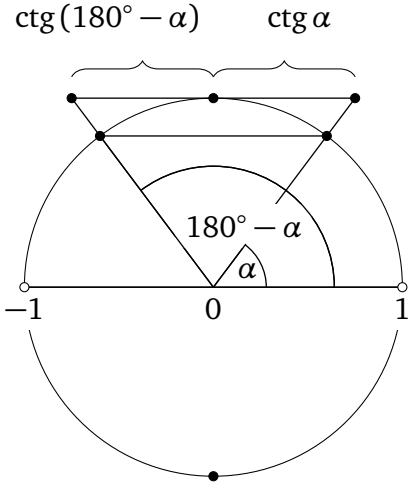
$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \tag{4}$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha. \tag{5}$$

Ezután $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)$ és $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)$ hosszúságait is berajzolhatjuk.



9-3. ábra



9-4. ábra

Megjegyzés: A tompaszög jelölése esetén ($90^\circ<\alpha<180^\circ$), (2), (3), (4) és (5) nem változik, derékszög jelölése esetén ($\alpha=90^\circ$) pedig (2), (3) és (5) triviális, (4) pedig nem értelmezett.

A *forgásszögek* (pozitív és negatív) bevezetésével a szögfüggvények fogalma kiterjeszthető 360°-nál nagyobb és 0°-nál kisebb szögekre is:

$$\sin\alpha=\sin(\alpha+k\cdot 360^\circ),\quad k\in\mathbf{Z}, \tag{6}$$

$$\cos\alpha=\cos(\alpha+k\cdot 360^\circ),\quad k\in\mathbf{Z}, \tag{7}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+k\cdot 180^\circ),\quad \alpha\neq 90^\circ+k\cdot 180^\circ,\ k\in\mathbf{Z}, \tag{8}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}(\alpha+k\cdot 180^\circ),\quad \alpha\neq k\cdot 180^\circ,\quad k\in\mathbf{Z}. \tag{9}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Most a negatív szögek szögfüggvényei is értelmezhetők, és a hozzájuk kapcsolódó azonosságok:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \tag{10}$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \tag{11}$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \alpha \neq 90^\circ + k\cdot 180^\circ, \qquad k \in \mathbf{Z}, \tag{12}$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \alpha \neq k\cdot 180^\circ, \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{13}$$

Megjegyzés: Csak a $\cos x$ függvény páros, a többi páratlan.

Az (1), (2), (3), (4) és (5) azonosságok az α hegyesszögnél nagyobb, illetve negatív szögek, vagyis tetszőleges forgásszögek esetén is érvényben maradnak, feltéve, hogy $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ értelmezett:

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \alpha \neq 90^\circ + k\cdot 180^\circ, \qquad k \in \mathbf{Z}, \tag{14}$$
$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \qquad \alpha \neq k\cdot 180^\circ, \qquad k \in \mathbf{Z}. \tag{15}$$

Ajánlott irodalom a forgásszögekhez:
[18] Juhász István: Matematika 10. 223.o.

A *pótszögekre* vonatkozó azonosságok pedig:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \tag{16}$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \tag{17}$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, \tag{18}$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha. \tag{19}$$

Bizonyítás nélkül közöljük az *addíciós tételeket*:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta, \tag{20}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta. \tag{21}$$

Ajánlott irodalom az addíciós tételekhez:
[19] Juhász István: Matematika 11. 78. oldal

Ha a bal oldalon az összeadást választjuk, és $\beta = \alpha$, akkor kapjuk, hogy:

$$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha, \tag{22}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \tag{23}$$

A szögfüggvények összegét és különbségét szorzattá alakíthatjuk, ugyanis:

$$\sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta) = 2\cdot\sin\gamma\cdot\cos\delta, \Leftrightarrow$$

$$\sin\gamma\cdot\cos\delta + \cancel{\cos\gamma\cdot\sin\delta} + \sin\gamma\cdot\cos\delta - \cancel{\cos\gamma\cdot\sin\delta} = 2\cdot\sin\gamma\cdot\cos\delta.$$

Most $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $\delta = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ helyettesítése után kapjuk:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{24}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Hasonlóképpen igazolható, hogy:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{25}$$

Ezeket az eredményeket a *tangenstétel* bizonyításánál is felhasználjuk.

További azonosságok:

$$\sin 2\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}, \tag{26}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{27}$$

Az igazolást az első egyenlőségre végezzük el, tételezzük fel, hogy $\operatorname{tg}\alpha$ értelmezett ($\cos\alpha\neq 0$).

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}, \qquad \operatorname{tg}^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha},$$

$$(1-\sin^2\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=0, \qquad \cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha-1+\cos^2\alpha=0,$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=0, \qquad \cos^2\alpha\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha+1)-1=0,$$

$$\sin^2\alpha\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha+1)=\operatorname{tg}^2\alpha, \qquad \cos^2\alpha\cdot(\operatorname{tg}^2\alpha+1)=1,$$

$$\sin^2\alpha=\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{28}$$

Hasonlóképpen igazolható, ha $\operatorname{ctg}\alpha$ értelmezett ($\sin\alpha\neq 0$):

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}, \qquad \cos^2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}, \tag{29}$$

$$\sin^2 2\alpha=4\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\frac{4\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}=\frac{4\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha}{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)^2}.$$

Mivel $\sin 2\alpha$ a $\operatorname{tg}\alpha$ és a $\operatorname{ctg}\alpha$ előjele minden síknegyedben megegyezik és periódusuk π, 180° (9-2. ábra), ezért négyzetgyökvonás után (26)-ot kapjuk.

További azonosságok:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \tag{30}$$

Most (28) és (29) felhasználásával:

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}, \qquad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}+1}. \tag{31}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Most (27) és (31) felhasználásával:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}. \tag{32}$$

Félszögek szinuszának és koszinuszának négyzete kifejezhető a szög koszinuszával:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}. \tag{33}$$

Félszögek tangense és kotangense kifejezhető a szög szinuszával és koszinuszával:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}. \tag{34}$$

Az igazolást a bal oldal első egyenlőségére végezzük el.

Helyettesítsünk az α helyébe 2α-t, ekkor a jobb oldal:

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Háromszögeknél igaz a következő azonosság ($\alpha+\beta+\gamma=180°$):

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{35}$$

Bizonyítás:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{36}$$

$$\sin\gamma=\sin(180°-(\alpha+\beta))=\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

$$\sin\gamma=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{37}$$

Most (36) és (37) jobb és bal oldalának összeadása, majd kiemelés után:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\sin\left(\frac{180°-\gamma}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}+\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}\right)=$$

$$=2\cdot\sin\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\cdot 2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=4\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

10. Szög kiszámítása sin, cos, tg, ctg-ből, az inverz trigonometriai függvények

A $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ függvények periodikusak, ezért teljes értelmezési tartományukon nem invertálhatók. Alkalmasan választott intervallumokon azonban ezek szigorúan monoton függvények, tehát invertálhatók is. Az ilyen korlátozással értelmezett inverz függvényeket *inverz trigonometriai függvényeknek* nevezzük.

Mérjük a szögeket radiánban. Tudjuk, hogy szigorúan monoton növekvő a

$$\sin x : a \qquad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{zárt intervallumon,} \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} x : a \qquad \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{nyílt intervallumon.} \tag{2}$$

Szigorúan monoton csökkenő a

$$\cos x : a \qquad \left[0; \pi\right] \qquad \text{zárt intervallumon,} \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg} x : a \qquad \left(0; \pi\right) \qquad \text{nyílt intervallumon.} \tag{4}$$

Ezeknek a függvényeknek a megjelölt intervallumokra korlátozott inverzét rendre $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x$, és $\operatorname{arcctg} x$-szel jelöljük és így olvassuk: „árkuszszinusz x” stb.

Definíció szerint tehát:

$$y := \arcsin x, \quad \text{ha } \sin y = x, \quad x \in [-1;1], \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \tag{5}$$

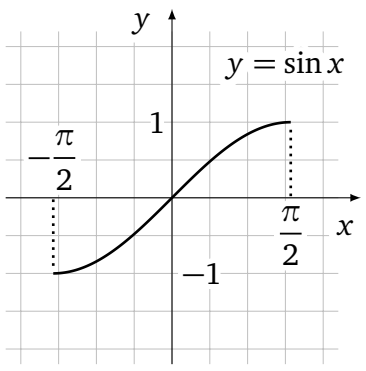
$$y := \arccos x, \quad \text{ha } \cos y = x, \quad x \in [-1;1], \quad y \in [0;\pi], \tag{6}$$

$$y := \operatorname{arctg} x, \quad \text{ha } \operatorname{tg} y = x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \tag{7}$$

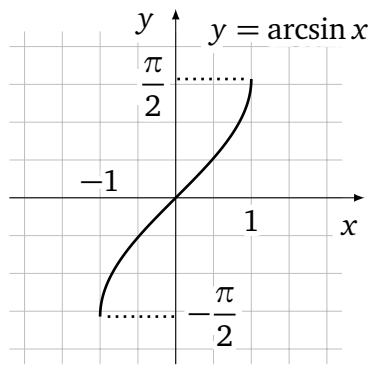
$$y := \operatorname{arcctg} x, \quad \text{ha } \operatorname{ctg} y = x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad y \in (0;\pi). \tag{8}$$

Lásd a számozás szerint kapcsolódó ábrákat.

A szög kiszámítására régebben táblázatokat használtak, az árkuszfüggvények beépített függvényként ma már megtalálhatók a legtöbb kalkulátoron és számítógépen.

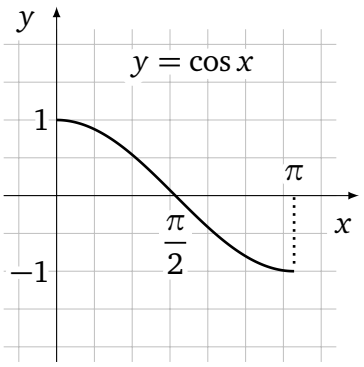


10-1. ábra

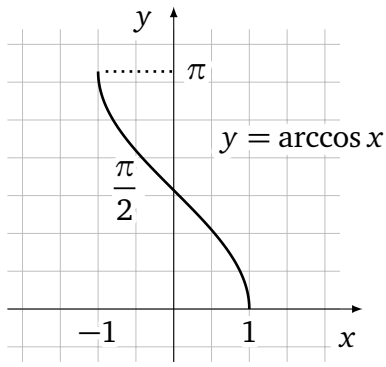


10-5. ábra

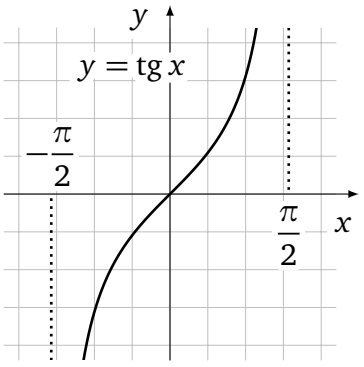
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



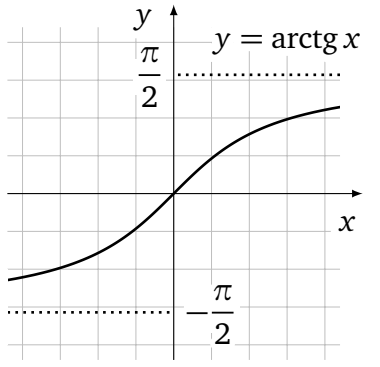
10-3. ábra



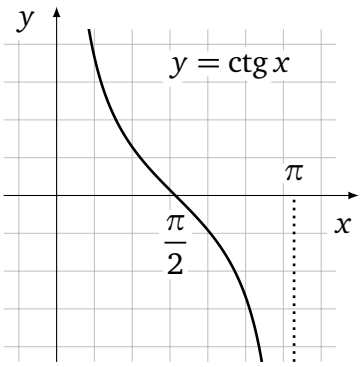
10-6. ábra



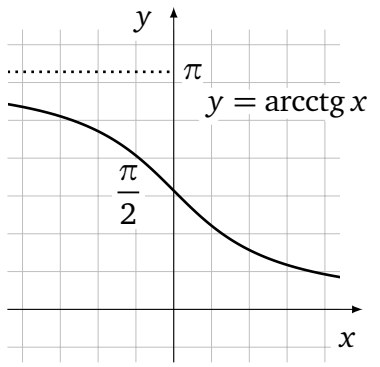
10-2. ábra



10-7. ábra



10-4. ábra



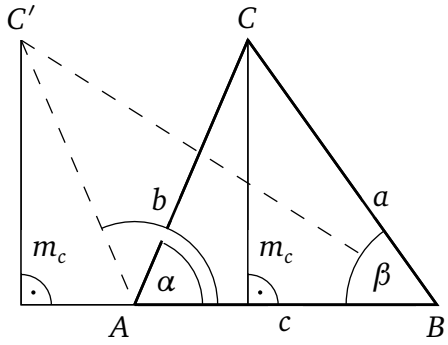
10-8. ábra

Ajánlott irodalom az inverz trigonometriai függvényekhez:
[5] Szász Gábor: Matematika I. 282–284. oldal

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

11. A szinusztétel (első bizonyítás)

Induljunk el egy ABC általános háromszögből (11-1. ábra, 11-2. ábra).



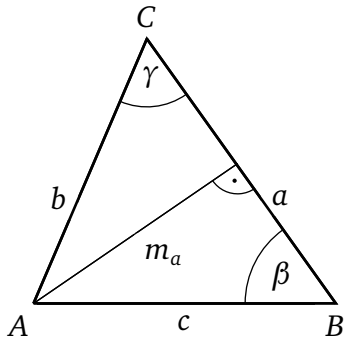
11-1. ábra

$$\sin\alpha = \frac{m_c}{b}, \qquad m_c = b\cdot\sin\alpha, \tag{1}$$

$$\sin\beta = \frac{m_c}{a}, \qquad m_c = a\cdot\sin\beta, \tag{2}$$

$$b\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\beta, \tag{3}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}. \tag{4}$$



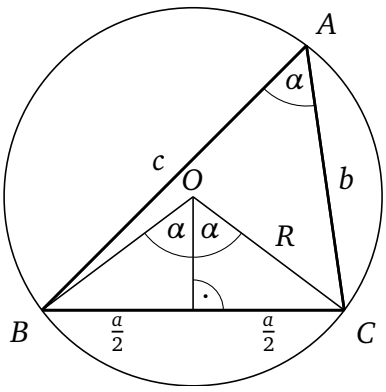
11-2. ábra

$$\sin\beta = \frac{m_a}{c}, \quad m_a = c\cdot\sin\beta, \tag{5}$$

$$\sin\gamma = \frac{m_a}{b}, \quad m_a = b\cdot\sin\gamma, \tag{6}$$

$$c\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\gamma, \tag{7}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{8}$$



11-3-1. ábra

A *középponti és kerületi szögek tételének* ismeretében:

$$\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}.$$

Az összefüggés azonban a másik két oldalra is igaz marad, amiből kapjuk a, b, c oldalak, a velük szemben lévő szög szinuszát is tartalmazó új képleteit:

$$a = 2R\cdot\sin\alpha, \tag{9}$$

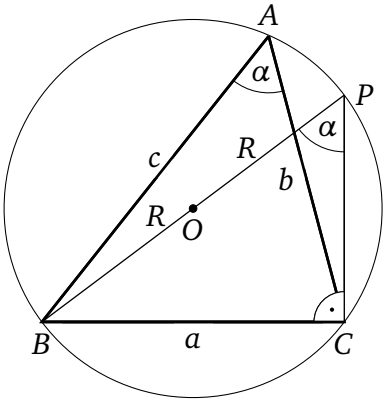
$$b = 2R\cdot\sin\beta, \tag{10}$$

$$c = 2R\cdot\sin\gamma. \tag{11}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Végül pedig ezekből kapjuk a szinusztétel $2R$-rel kibővített alakját:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.} \tag{12}$$



11-3-2. ábra

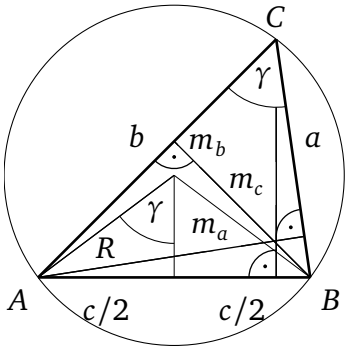
A *kerületi szögek tétele* és a *Thalész-tétel* ismeretében is levezethető a szinusztétel.
Írjuk fel $\sin\alpha$-t a $PBC\triangle$-ben:

$$\sin\alpha=\frac{a}{2R},$$
$$\frac{a}{\sin\alpha}=2R.$$

Mivel bármely oldal és a szemben lévő szög szinuszából elindulhatunk, így ezután szintén (12) szinusztételt kapjuk.

Ha a háromszög derékszögű vagy tompaszögű, pl. $\alpha>90°$, akkor $\sin\alpha=\sin(180°-\alpha)$, és a szinusztétel nem változik (E. 9(2), 11-1. ábra).

A szinusztétel (második bizonyítás)



11-4. ábra

A *trigonometrikus területképlet* (15) könnyen levezethető:

$$t=\frac{a\cdot m_a}{2}=\frac{b\cdot m_b}{2}=\frac{c\cdot m_c}{2}, \tag{13}$$

$$\sin\alpha=\frac{m_c}{b};\quad \sin\beta=\frac{m_a}{c};\quad \sin\gamma=\frac{m_b}{a}, \tag{14}$$

$$t=\frac{b\cdot c\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{a\cdot c\cdot\sin\beta}{2}=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}. \tag{15}$$

Most (15)-ből és a 11-4. ábrából a középponti szög felének (γ) berajzolása után következik a szinusztétel:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.} \tag{16}$$

(16)-ot felírhatjuk hármas aránnyal is:

$$a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma.$$

A szinusztétel megfogalmazható szavakban is:

Minden háromszögben az oldalak aránya egyenlő a szemben lévő szögek szinuszainak arányával.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Végül $\sin\alpha$-t (15)-ből kifejezve és (16)-ba helyettesítve kapjuk R új képletét:

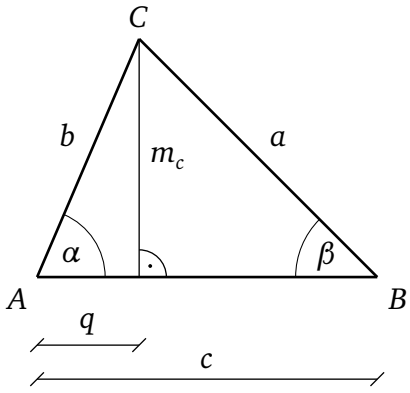
$$R=\frac{abc}{4t}. \tag{17}$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon a négy változóból csak három független. Például a,b,c felvétele után a t terület már az oldalaktól függ. Lásd még később E. 36(4) a *Héron-képletet*.

Ajánlott irodalom a középponti és kerületi szögek tételéhez:
[13] Kosztolányi József: Sokszínű matematika 10. 109–113. oldal.

12. A koszinusztétel (első bizonyítás)

Induljunk el egy ABC hegyesszögű (derékszögű) háromszögből ($0°<\alpha\le 90°$) (12-1. ábra):



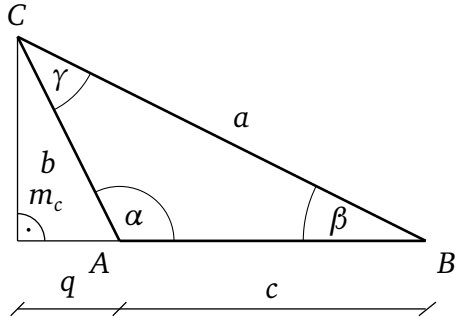
12-1. ábra

$$m_c^2=b^2-q^2, \tag{1}$$
$$m_c^2=a^2-(c-q)^2, \tag{2}$$
$$b^2-q^2=a^2-(c-q)^2, \tag{3}$$
$$b^2-q^2=a^2-c^2+2cq-q^2, \tag{4}$$
$$b^2=a^2-c^2+2cq, \tag{5}$$
$$q=b\cdot\cos\alpha. \tag{6}$$

Behelyettesítés és rendezés után kapjuk a koszinusztételt az a oldalra:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha. \tag{7}$$

A koszinusztétel tompaszögű háromszögre is érvényes ($90°<\alpha<180°$) (12-2. ábra):



12-2. ábra

$$m_c^2=b^2-q^2, \tag{8}$$
$$m_c^2=a^2-(c+q)^2, \tag{9}$$
$$b^2-q^2=a^2-(c+q)^2, \tag{10}$$
$$b^2-q^2=a^2-c^2-2cq-q^2, \tag{11}$$
$$b^2=a^2-c^2-2cq, \tag{12}$$
$$q=b\cdot\cos(180°-\alpha)=-b\cdot\cos\alpha. \tag{13}$$

Behelyettesítés és rendezés után kapjuk a koszinusztételt az a oldalra, és hasonló gondolatmenettel a b és a c oldalra ($0°<\alpha,\beta,\gamma<180°$):

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma. \end{aligned} \tag{14}$$

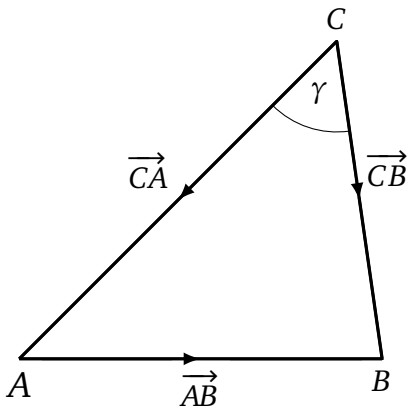
Vegyük észre, hogy a képletben a változók permutálódnak, (a, b, c) *helyére rendre* (b, c, a)*, majd* (c, a, b) *kerül.*

Megjegyzés: Látszik, hogy a képlettel két oldal és a közbezárt szög ismeretében számolhatjuk a harmadik oldalt (lásd a 2. feladatot), vagy átrendezés után az oldalak ismeretében a szögeket (lásd az 1. feladatot). Ha a közbezárt szög derékszög (90°), akkor a koszinusztétel speciális esetét, a *Pitagorasz-tételt* kapjuk.

A koszinusztétel (vektoros bizonyítás)

Indítsunk vektorokat a C csúcsból az A és B csúcsokba (12-3. ábra).

A vektorok összeadási, kivonási és (skaláris) szorzási szabálya szerint írhatjuk:



12-3. ábra

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}, \tag{15}$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)^2, \tag{16}$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CA}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}, \tag{17}$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos 0° = c^2, \tag{18}$$

$$\overrightarrow{CA}^2 = \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \cos 0° = b^2, \tag{19}$$

$$\overrightarrow{CB}^2 = \left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \cos 0° = a^2, \tag{20}$$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \left|\overrightarrow{CB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \cos\gamma = a \cdot b \cdot \cos\gamma. \tag{21}$$

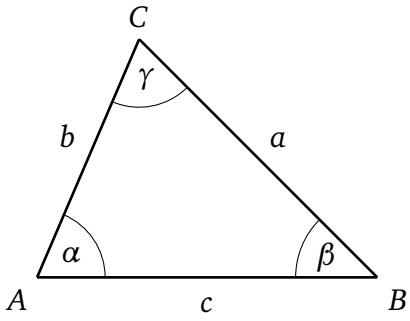
Végül (18), (19), (20), (21)-et (17)-be helyettesítve négyzetgyökvonás után kapjuk a koszinusztételt a c oldalra, amit hasonló gondolatmenettel felírhatunk a b és az a oldalra is:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}, \\ b &= \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}, \\ a &= \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}. \end{aligned} \tag{22}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

13. A tangenstétel

Induljunk el egy ABC általános háromszögből, és írjuk föl a *szinusztételt* az a, b oldalakra (13-1. ábra).



13-1. ábra

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \qquad \frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \tag{1}$$

$$\frac{a}{b}+1=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+1, \qquad \frac{a}{b}-1=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-1, \tag{2}$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta}, \qquad \frac{a-b}{b}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\beta}. \tag{3}$$

Most osszuk el egymással (3) két egyenletét,

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}, \tag{4}$$

majd alakítsuk át a jobb oldalt az E. 9(24) és E. 9(25) figyelembevételével:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cdot\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}. \tag{5}$$

Végül kapjuk a tangenstételt:

$$\boxed{\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}.} \tag{6}$$

Vizsgáljuk meg a két oldal előjelét:

$$0^\circ<\alpha<180^\circ,$$

$$-\beta<\alpha-\beta<180^\circ-\beta, \qquad \Big|:2$$

$$-90^\circ<-\frac{\beta}{2}<\frac{\alpha-\beta}{2}<90^\circ-\frac{\beta}{2}<90^\circ,$$

$$0^\circ\le\Big|\frac{\alpha-\beta}{2}\Big|<90^\circ,$$

$$0^\circ<\frac{\alpha+\beta}{2}<90^\circ.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A nevezők előjele tehát egyezik és pozitív, a számlálók előjele pedig:

- ha $a > b$, $a-b>0$, akkor $\alpha-\beta>0°$,
  ugyanis nagyobb oldallal szemben nagyobb szög kell legyen, és ekkor
  $0° < \frac{\alpha-\beta}{2} < 90°$, és $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} > 0$,

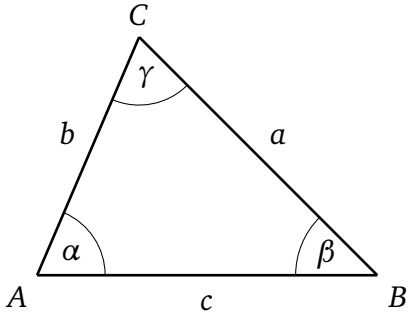
- ha $a = b$, $a-b=0$, akkor $\alpha-\beta=0°$,
  ugyanis egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek kell legyenek, és ekkor
  $\frac{\alpha-\beta}{2} = 0°$, és $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$,

- ha $a < b$, $a-b<0$, akkor $\alpha-\beta<0°$,
  ugyanis kisebb oldallal szemben kisebb szög kell legyen, és ekkor
  $-90° < \frac{\alpha-\beta}{2} < 0°$, és $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} < 0$.

A tangenstétel a változók permutálásával értelemszerűen felírható bármelyik két oldalra és a velük szemben levő szögekre.

14. Mollweide-féle formulák, avagy Gauss ikertételei

Induljunk el egy ABC általános háromszögből, és írjuk föl a *szinusztételt* az a, b és a b, c oldalakra (14-1. ábra).



14-1. ábra

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \tag{1}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + 1, \tag{2}$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}. \tag{3}$$

Most szorozzuk meg egymással (3) két egyenletét:

$$\frac{a+b}{b}\cdot\frac{b}{c} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \tag{4}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}, \qquad \sin\gamma = \sin(180°-\gamma) = \sin(\alpha+\beta). \tag{5}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Most alakítsuk át a jobb oldalt az E. 9(24) figyelembevételével:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}, \tag{6}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\left(2 \cdot \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{7}$$

Végül kapjuk az első Mollweide-féle formulát:

$$\boxed{\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.} \tag{8}$$

Megjegyzés:
$$-90^\circ < \frac{\alpha-\beta}{2} < 90^\circ,$$

így koszinusza pozitív, lásd még a *tangenstételt*.

Folytassuk a gondolatmenetet a második Mollweide-féle formula levezetésével:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \tag{9}$$

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - 1, \tag{10}$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\beta}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}. \tag{11}$$

Most szorozzuk meg egymással (11) két egyenletét:

$$\frac{a-b}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \tag{12}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\gamma}, \qquad \sin\gamma = \sin(180^\circ - \gamma) = \sin(\alpha+\beta). \tag{13}$$

Most alakítsuk át a jobb oldalt az E. 9(25) figyelembevételével:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin(\alpha+\beta)}, \tag{14}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\left(2 \cdot \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{15}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Végül kapjuk a második Mollweide-féle formulát:

$$\boxed{\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.} \tag{16}$$

Ha $a=b \Leftrightarrow \alpha=\beta$, ekkor mindkét oldal 0, ez az egyenlő szárú (esetlegesen egyenlő oldalú) eset.

Ha $a<b \Leftrightarrow \alpha<\beta$, ekkor mindkét oldal negatív.

A tétel a változók permutálásával értelemszerűen felírható bármelyik két oldalra (a harmadik a nevezőben van) és a velük szemben lévő szögekre.

15. A négy nevezetes közép közötti egyenlőtlenség

A harmonikus (H), a geometriai (mértani) (G), az aritmetikai (számtani) (A) és a négyzetes (Q) közepek között a következő egyenlőtlenségek állnak fenn három elemre:

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}, \qquad a,b,c \in \mathbf{R}^+. \tag{1}$$

$$H \le G \le A \le Q. \tag{2}$$

Az egyenlőség mindegyik esetben csak az $a=b=c$-re áll fenn.

Ezeket az eredményeket később fogjuk felhasználni, E. 16-nál, E. 19-nél és E. 20-nál is.

16. Terület és a kerület egyenlőtlensége

Ebben a részben [9] Reiman István: *Fejezetek az elemi geometriából* című könyvéből a 20. oldalon található bizonyítás kerül ismertetésre részletesebben.

Alkalmazzuk a *számtani* és a *mértani közép* közötti egyenlőtlenséget az $s-a$, $s-b$, $s-c$ pozitív valós számokra, jelöljük $a+b+c=2s$:

E. 15(1)
$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \le \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}, \qquad \big/(\ )^3 \tag{1}$$

$$(s-a)(s-b)(s-c) \le \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27}, \tag{2}$$

$$s(s-a)(s-b)(s-c) \le \frac{s^4}{27}. \tag{3}$$

Most a bal oldal t^2-tel egyenlő (lásd később a *Héron-képletet*).

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

E. 36(4)
$$t^2 \le \frac{s^4}{27}, \qquad \left|\sqrt{\ }\right.$$

$$\boxed{t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}.} \tag{4}$$

Az egyenlőség csak akkor áll fönn, ha $s-a = s-b = s-c$, azaz ha $a = b = c$, vagyis a háromszög szabályos, így kimondható:

Adott területű háromszögek közül a szabályos háromszög a legkisebb kerületű, vagy fordítva, adott kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög a legnagyobb területű.

17. A sugáregyenlőtlenség

Ebben a részben [9] Reiman István: *Fejezetek az elemi geometriából* című könyvéből a 12. oldalon található bizonyítás kerül ismertetésre részletesebben.

A háromszög beírt körének sugara legfeljebb akkora, mint a köré írt kör sugarának a fele, és csak akkor egyenlő vele, ha a háromszög szabályos.

Induljunk el a bizonyítandó állításból:

$$\boxed{2r \le R.} \tag{1}$$

E. 32(4)
$$r = \frac{t}{s}, \tag{2}$$

E. 11(17)
$$R = \frac{abc}{4t}. \tag{3}$$

Helyettesítsük (1)-be a (2) és (3) képleteket:

$$\frac{2t}{s} \le \frac{abc}{4t},$$

$$8t^2 \le s \cdot abc.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Helyettesítsük a *Héron-képletből* (lásd később):

E. 36(4) $$t^2 = s\cdot(s-a)(s-b)(c-c) \qquad \text{felhasználásával}$$

$$8\cdot s\cdot(s-a)(s-b)(s-c) \le s\cdot abc, \qquad \Big/ : s$$

$$(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c) \le abc,$$

$$(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c) \le abc.$$

A *háromszög-egyenlőtlenség* miatt a bal oldali tényezők mind pozitívak, ezért a kapott egyenlőtlenséggel egyenértékűt nyerünk, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük:

$$(-a+b+c)^2\cdot(a-b+c)^2\cdot(a+b-c)^2 \le a^2b^2c^2,$$

$$\underbrace{((b+c)-a)}_{1}\underbrace{((b+c)-a)}_{2}\underbrace{((a+c)-b)}_{3}\underbrace{((a+c)-b)}_{4}\underbrace{((a+b)-c)}_{5}\underbrace{((a+b)-c)}_{6} \le a^2b^2c^2,$$

$$\underbrace{(a+(b-c))}_{6}\underbrace{(a-(b-c))}_{3}\underbrace{(b+(c-a))}_{2}\underbrace{(b-(c-a))}_{5}\underbrace{(c+(a-b))}_{4}\underbrace{(c-(a-b))}_{1} \le a^2b^2c^2,$$

$$(a^2-(b-c)^2)\cdot(b^2-(c-a)^2)\cdot(c^2-(a-b)^2) \le a^2b^2c^2.$$

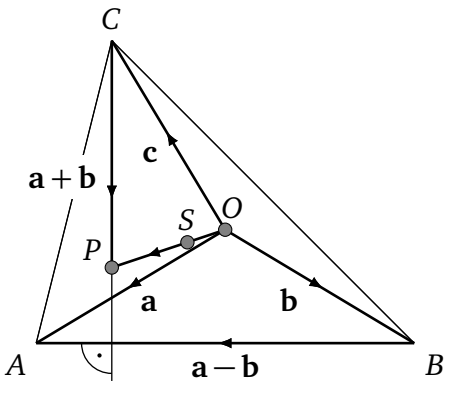
Ez viszont valóban fennáll, hiszen a bal oldal tényezői rendre nem nagyobbak a jobb oldal tényezőinél, például:

$$a^2-(b-c)^2 \le a^2, \quad \text{ui.} \quad -(b-c)^2 \le 0 \quad \text{és} \quad (b-c)^2 \ge 0.$$

Az egyenlőség mindhárom esetben csak ha $a=b=c$, vagyis szabályos háromszög esetén áll fenn. Bizonyítási lépéseink megfordíthatók, az egész bizonyítást visszafelé olvasva éppen a $2r \le R$ egyenlőtlenséget kapjuk.

18. J. J. Sylvester tétele

Ennek a tételnek [6] Reiman István: *Matematika* c. könyvéből a 283., 284. oldalon a 6. feladatban található bizonyítása kibővítve kerül most ismertetésre.



18-1. ábra

Az ABC háromszög köré írt körének O a középpontja. Bizonyítsuk be, hogy az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ vektorok eredője olyan $\overrightarrow{OP}$ vektor, amely O-ból a háromszög M magasságpontjába mutat. Legyen $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ és $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$. Elegendő megmutatni, hogy $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ végpontját (legyen ez most P) a csúcsokkal összekötő vektorok merőlegesek a szemközti háromszögoldalra, sőt, elegendő ezt egyetlen csúccsal összekötő vektorra igazolnunk, mert a többire ugyanúgy menne az igazolás. Mutassuk meg pl., hogy $\overrightarrow{CP}$ merőleges $\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$-re.

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \mathbf{c} = \mathbf{a}+\mathbf{b}. \tag{1}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A vektor definíciójából következik, hogy *egyenlő vektorok eltolással fedésbe hozhatók*. Viszont $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ valóban merőlegesek egymásra, hiszen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egyenlő hosszú (egyenlő abszolút értékű) vektorok, és így összegüknek és különbségüknek skaláris szorzata nulla, ugyanis:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0, \tag{2}$$

mert

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{a}|\cdot\cos(\mathbf{a},\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2\cdot\cos 0 = |\mathbf{a}|^2, \tag{3}$$

$$\mathbf{b}^2 = |\mathbf{b}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\mathbf{b},\mathbf{b}) = |\mathbf{b}|^2\cdot\cos 0 = |\mathbf{b}|^2,$$

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|, \tag{4}$$

és így négyzeteik különbsége nulla. *Két vektor (most egy összegvektor és egy különbségvektor) skaláris szorzata akkor és csak akkor nulla, ha a két vektor merőleges egymásra.* Vagyis az a P pont, ahová $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ mutat, az M magasságpont kell legyen, tehát:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \overrightarrow{OM} = \mathbf{m}. \tag{5}$$

Ajánlott irodalom J. J. Sylvester tételéhez:
[14] Kosztolányi József: Sokszínű matematika 11., 122. oldal 3. példa és 128. oldal 5. példa
[10] Pogáts Ferenc: Vektorok, koordinátageometria, trigonometria 82., 83. o.

19. Kerület és a sugarak (R, r) egyenlőtlensége

Ebben a részben [9] Reiman István: *Fejezetek az elemi geometriából* c. könyvéből a 19. oldalon található bizonyítás kerül ismertetésre részletesebben.

Indítsunk vektorokat a háromszög köré írt kör O középpontjából a csúcsokba. Legyenek ezek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, ahol $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R$. $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{m}$ a magasságpontba mutat, és $\mathbf{m}$ akkor és csak akkor nullvektor, ha a magasságpont és a köré írt kör középpontja egybeesik, azaz szabályos háromszög esetén. Lásd E. 18. J. J. Sylvester tétele (18-1. ábra). Mivel $|\mathbf{m}|^2 \geq 0$, ezért:

$$0 \leq (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2, \tag{1}$$

és egyenlőség csakis szabályos háromszög esetén áll fenn.

$$0 \leq \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\,\mathbf{ab} + 2\,\mathbf{ac} + 2\,\mathbf{bc}, \tag{2}$$

$$0 \leq 3R^2 + 2\,\mathbf{ab} + 2\,\mathbf{ac} + 2\,\mathbf{bc}. \tag{3}$$

Mivel $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = c$, ezért $c^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = 2R^2 - 2\,\mathbf{ab}$,

majd $2\,\mathbf{ab} = 2R^2 - c^2$.

Hasonlóan $2\,\mathbf{ac} = 2R^2 - b^2$,

$2\,\mathbf{bc} = 2R^2 - a^2$.

Helyettesítsük ezeket (3)-ba:

$$0 \leq 3R^2 + 2R^2 - c^2 + 2R^2 - b^2 + 2R^2 - a^2, \tag{4}$$

$$0 \leq 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\boxed{a^2+b^2+c^2 \le 9R^2.} \tag{5}$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \le \sqrt{3}R. \tag{6}$$

Alkalmazzunk most a háromszög oldalaira a *számtani* és a *négyzetes közép* közötti egyenlőtlenséget, majd (6) figyelembevételével:

E. 15(1)
$$\frac{k}{3} = \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \le \sqrt{3}R, \tag{7}$$

$$k = 2s \le 3\sqrt{3}R, \tag{8}$$

és E. 20(4) figyelembevételével:

$$\boxed{6\sqrt{3}\,r \;\le\; k \;\le\; 3\sqrt{3}R.} \tag{9}$$

Az egyenlőség csakis $a=b=c$, azaz szabályos háromszög esetén áll fenn, tehát:

Adott kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög köré írt kör a legkisebb, a beírt kör pedig a legnagyobb sugarú.

20. Terület és a sugarak (R, r) egyenlőtlensége

Ez a rész [9] Reiman István: *Fejezetek az elemi geometriából* c. könyvében a 25. oldalon található 19. feladat kibővített megoldása.

Induljunk el az E. 19(7)-nél kapott eredményből:

E. 19(7)
$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{3}R.$$

Most a *számtani* és a *mértani közép* közötti egyenlőtlenség felhasználásával:

E. 15(1)
$$\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{3}R,$$

$$\sqrt[3]{abc} \le \sqrt{3}R, \qquad /(\ )^3$$

$$abc \le 3\sqrt{3}R^3.$$

E. 11(17)
$$R = \frac{abc}{4t} \qquad \text{felhasználásával}$$

$$4t \cdot R \le 3\sqrt{3}R^3, \qquad \Big| : 4R$$

$$t \le \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}. \tag{1}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Folytassuk a terület és a kerület egyenlőtlenségével:

E. 16(4) $$t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}.$$

E. 32(4) $s = \frac{t}{r}$ helyettesítésével

$$t \le \frac{\left(\frac{t}{r}\right)^2}{3\sqrt{3}},$$

$$t \le \frac{t^2}{r^2 \cdot 3\sqrt{3}}, \qquad \Big/ \cdot \frac{r^2 \cdot 3\sqrt{3}}{t}$$

$$r^2 \cdot 3\sqrt{3} \le t. \tag{2}$$

Végül (1)-et is felhasználva kapjuk a keresett egyenlőtlenséget:

$$\boxed{3\sqrt{3}\, r^2 \le t \le \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2.} \tag{3}$$

Az egyenlőség csakis $a = b = c$, azaz szabályos háromszög esetén áll fenn, tehát:

Adott területű háromszögek közül a szabályos háromszög köré írt kör a legkisebb, a beírt kör pedig a legnagyobb sugarú.

Folytassuk a gondolatmenetet. Osszuk el (3) bal oldali egyenlőtlenségét r-rel:

E. 32(4) $$\frac{3\sqrt{3} \cdot r^2}{r} \le \frac{t}{r},$$

$$3\sqrt{3} \cdot r \le s, \quad \Big/ \cdot 2$$

$$6\sqrt{3}\, r \le 2s = k. \tag{4}$$

Ezt az eredményt E. 19(9)-nél használtuk fel.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

21. Az öt kör sugara közötti egyenlőtlenség (R, r, r_a, r_b, r_c)

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből*:

E. 17(1)
$$2r \le R. \tag{1}$$

Most *Kapcsolat az öt kör sugara között* felhasználásával:

E. 7(2)
$$4R = r_a + r_b + r_c - r. \tag{2}$$

$$2r = 2r_a + 2r_b + 2r_c - 8R \le R, \tag{3}$$

$$2r_a + 2r_b + 2r_c \le 9R. \tag{4}$$

Másfelől

$$2r \le \frac{r_a + r_b + r_c - r}{4} = R, \tag{5}$$

$$2r + \frac{r}{4} \le \frac{r_a + r_b + r_c}{4}, \qquad / \cdot 4 \tag{6}$$

$$9r \le r_a + r_b + r_c, \tag{7}$$

$$\boxed{9\,r \;\le\; r_a + r_b + r_c \;\le\; \frac{9}{2}R.} \tag{8}$$

Egyenlőség mind a két helyen egyszerre lép föl, és csakis $a = b = c$, azaz szabályos háromszög esetén áll fenn.

22. Hozzáírt körök sugarai közötti egyenlőtlenség (külső érintőkörök)

Folytassuk az előző gondolatmenetet:

$$\frac{9}{\frac{1}{r}} \le r_a + r_b + r_c,$$

E. 7(1)
$$\boxed{\frac{3}{\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}} \le \frac{r_a + r_b + r_c}{3},} \tag{1}$$

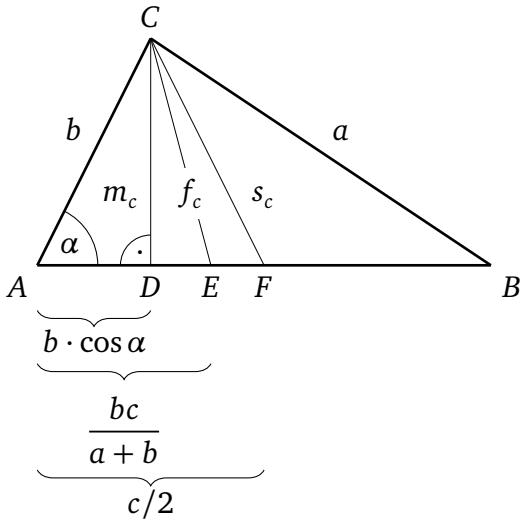
ami nem más, mint a *harmonikus közép* és az *aritmetikai közép* közötti egyenlőtlenség, amiről tudjuk, hogy minden pozitív r_a, r_b, r_c esetén fennáll. Lásd még E. 15(1)-et.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

23. Magasság, szögfelező és a súlyvonal közötti egyenlőtlenség

Ez a rész [9] Reiman István: *Fejezetek az elemi geometriából* c. könyvében a 25. oldalon található 15. feladat kibővített megoldása.

Induljunk el a 23-1. ábrából. Legyen $b \le a$.



23-1. ábra

$m_c \le f_c$, ui. m_c C-nek $\overline{AB}$ egyenesétől mért távolsága a lehetséges összekötő szakaszok közül a legrövidebb.

$f_c \le s_c$, ui. f_c b/a arányban osztja c-t két részre (E. 25(1)), és így ha

$$b \le a, \text{ akkor } bc \le ac,$$

$$2bc = bc + bc \le ac + bc = c \cdot (a+b),$$

$$\frac{bc}{a+b} \le \frac{c}{2},$$

$$\overline{AE} \le \overline{AF},$$

$$\overline{AE} - b \cdot \cos\alpha \le \overline{AF} - b \cdot \cos\alpha,$$

$$\overline{DE} \le \overline{DF},$$

$$\overline{DE}^2 + m_c^2 \le \overline{DF}^2 + m_c^2,$$

$$f_c^2 \le s_c^2, \qquad \Big|\sqrt{\ }$$

mivel $f_c, s_c > 0$, ezért

$$f_c \le s_c.$$

Végül E. 1(6) figyelembevételével kapjuk a keresett egyenlőtlenséget:

$$\boxed{0 < s - c < m_c \le f_c \le s_c < s.} \tag{1}$$

Az (1) egyenlőtlenség $b \ge a$ esetén sem változik, $a = b$ esetén pedig:

$$s - c < m_c = f_c = s_c < s,$$

ez az egyenlő szárú (esetlegesen egyenlő oldalú) eset.

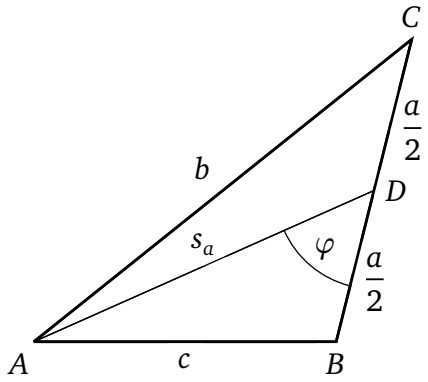
Az egyenlőtlenség nem változik akkor sem, ha egy másik oldalhoz tartozó magasságból, szögfelezőből és súlyvonalból indulunk el.

Megjegyzés: Az említett egyenlőtlenségek hasznos segítséget nyújtanak majd később: *A háromszög meghatározása* során az egyes induló adathármasok adatainak összehasonlításánál.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

24. Súlyvonal hosszának kiszámítása az oldalakból

Induljunk el egy ABC általános háromszögből (24-1. ábra).



24-1. ábra

Írjuk föl a *koszinusztételt* az $ABD\triangle$-ben c-re, majd az $ACD\triangle$-ben b-re, és használjuk föl, hogy *kiegészítő szögpárokra* teljesül:

E. 9(3) $$\cos(180^\circ-\varphi)=-\cos\varphi. \tag{1}$$

E. 12(14) $$c^2=s_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2s_a\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos\varphi, \tag{2}$$

E. 12(14) $$b^2=s_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2s_a\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos(180^\circ-\varphi). \tag{3}$$

Egyszerűbb alakra hozva:

$$c^2=s_a^2+\frac{a^2}{4}-s_a\cdot a\cdot\cos\varphi, \tag{4}$$

$$b^2=s_a^2+\frac{a^2}{4}+s_a\cdot a\cdot\cos\varphi. \tag{5}$$

Adjuk össze (4) és (5) egyenleteket, majd rendezzük s_a^2-re:

$$c^2+b^2=2s_a^2+\frac{a^2}{2}, \qquad \Big|\cdot 2 \tag{6}$$

$$s_a^2=\frac{2c^2+2b^2-a^2}{4}. \tag{7}$$

Négyzetgyökvonás után kapjuk a keresett összefüggést s_a-ra és hasonló gondolatmenettel s_b-re, illetve s_c-re:

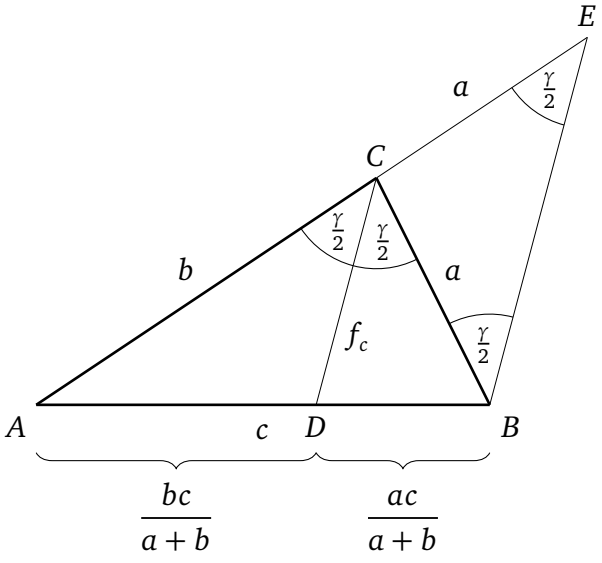
$$\boxed{\begin{aligned} s_a&=\frac{\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}}{2},\\ s_b&=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2},\\ s_c&=\frac{\sqrt{2b^2+2a^2-c^2}}{2}. \end{aligned}} \tag{8}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

25. Belső szögfelező tétel

Minden háromszögben bármely belső szögfelező a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre.

Bizonyítás: Hosszabbítsuk meg az $\overline{AC}$ oldalt C-n túl a-val, a kapott pont legyen E. Mivel a $BCE\triangle$ egyenlő szárú, így $CBE\sphericalangle = CEB\sphericalangle$, mert egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek kell legyenek. Viszont $BCE\triangle$-nek $BCA\sphericalangle$ külső szöge, amiről tudjuk, hogy megegyezik a nem mellette fekvő másik két szög összegével. Mivel CD szögfelező, így $CBE\sphericalangle = CEB\sphericalangle = BCD\sphericalangle$, ami azt jelenti, hogy $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$-vel, hiszen $BCD\sphericalangle$ és $CBE\sphericalangle$ váltószögek (25-1. ábra).



25-1. ábra

A párhuzamos szelők tételéből:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} = \frac{b}{a},$$

$$\boxed{\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{b}{a}.} \tag{1}$$

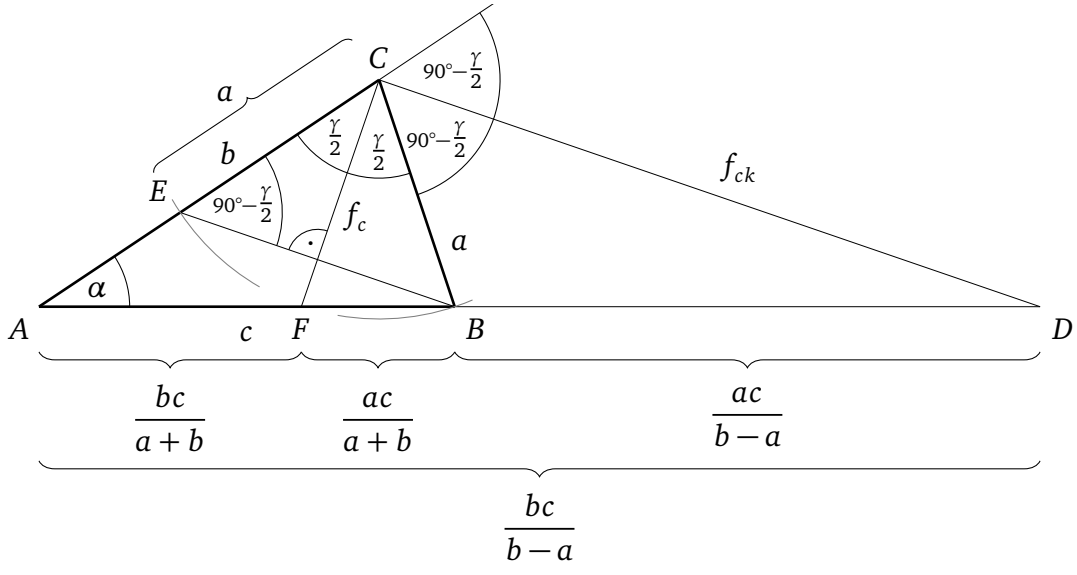
$$\overline{AD} + \overline{BD} = c. \tag{2}$$

Az $\overline{AD}$ és $\overline{BD}$ szakaszok hosszát pedig *arányos osztással* vagy az (1), (2) egyenletrendszerből kapjuk:

$$\overline{AD} = \frac{bc}{a+b}, \qquad \overline{BD} = \frac{ac}{a+b}. \tag{3}$$

26. Külső szögfelező tétel

Ha a háromszög egyik oldalának egyenesét a szemközti csúcsból induló külső szögfelezővel metsszük, akkor a metszéspontnak az oldal végpontjaitól mért távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti csúcsból ezekhez a végpontokhoz vezető oldalak (26-1. ábra).



26-1. ábra

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Bizonyítás: Legyen például $a < b$. Mérjük föl az $\overline{AC} = b$ oldalra a-t C-ből az A csúcs felé, jelöljük a kapott pontot E-vel. Mivel a $BCE\triangle$ egyenlő szárú, így a C-ből induló belső szögfelezője merőleges $\overline{BE}$-re. Mivel a külső és belső szögfelező merőleges egymásra, így $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$-vel, ezért a *párhuzamos szelők tételéből*:

$$\boxed{\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{b}{a}.} \tag{1}$$

$$\overline{AD} - \overline{BD} = c. \tag{2}$$

Az $\overline{AD}$ és $\overline{BD}$ szakaszok hosszát pedig az (1), (2) egyenletrendszerből kapjuk:

$$\overline{AD} = \frac{bc}{b-a}, \qquad \overline{BD} = \frac{ac}{b-a}. \tag{3}$$

Megjegyzés:

$a > b$ esetén $\overline{AD} < \overline{BD}$, és ugyanezt az eredményt kapjuk, pontosabban:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{b}{a}, \tag{4}$$

$$\overline{BD} - \overline{AD} = c, \tag{5}$$

$$\overline{AD} = \frac{bc}{a-b}, \qquad \overline{BD} = \frac{ac}{a-b}. \tag{6}$$

$a = b$ esetén a C csúcshoz tartozó külső szögfelező párhuzamos a szemben lévő oldallal, c-vel, és ezért metszéspont sincs.

Megjegyzés: Bizonyítható, hogy akár $a < b$, akár $a > b$, az alább felírt két hosszúság összegének négyzete egyenlő, és a Pitagorasz-tétel miatt megegyezik a c oldalhoz tartozó belső és külső szögfelező négyzetének összegével:

$$\left(\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b-a}\right)^2 = \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a-b}\right)^2 = f_c^2 + f_{ck}^2. \tag{7}$$

27. A szögfelezőtétel

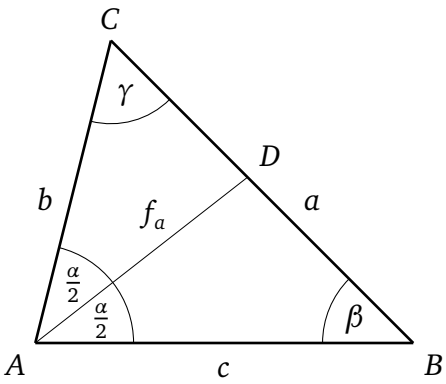
Mint ahogy az a kapott eredményekből is látszik, a belső és külső szögfelező tétele egy tételben is kimondható (átvétel [1] Hajós György: *Bevezetés a geometriába* című munkájából, 123. oldal):

> *„Ha a háromszög egyik oldalának egyenesét a szemközti csúcsból induló (belső vagy külső) szögfelezővel metsszük, akkor a metszéspontnak az oldal végpontjaitól mért távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti csúcsból ezekhez a végpontokhoz vezető oldalak."*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

28. Belső szögfelező hosszának kiszámítása két oldalból és a közbezárt szögből

Írjuk föl a területeket az ABD és az ACD háromszögekre, majd ezek összegét az ABC háromszögre. Lásd E. 11(15)-öt (28-1. ábra).



28-1. ábra

$$\frac{c\cdot f_a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}+\frac{b\cdot f_a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2}=\frac{b\cdot c\cdot\sin\alpha}{2},$$

$$c\cdot f_a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}+b\cdot f_a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=2bc\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2},\quad \Big/:\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$c\cdot f_a+b\cdot f_a=2bc\cdot\cos\frac{\alpha}{2},$$

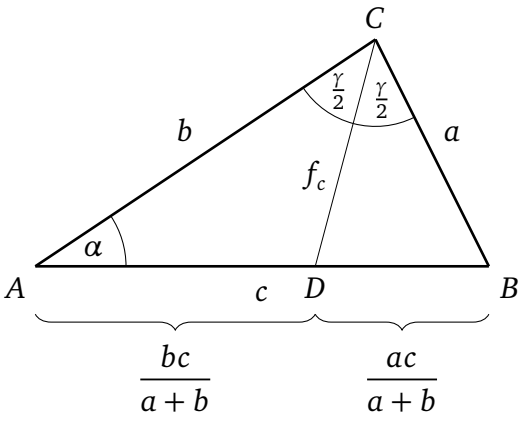
$$f_a\cdot(b+c)=2bc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Végül kapjuk a keresett összefüggést f_a-ra, és hasonló gondolatmenettel f_b-re, illetve f_c-re:

$$\boxed{\begin{aligned} f_a&=\frac{2bc}{b+c}\cdot\cos\frac{\alpha}{2},\\ f_b&=\frac{2ac}{a+c}\cdot\cos\frac{\beta}{2},\\ f_c&=\frac{2ab}{a+b}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}. \end{aligned}} \tag{1}$$

29. Belső szögfelező hosszának kiszámítása az oldalakból

Írjuk föl a *koszinusztételt* az $ACD\triangle$-ben f_c-re, az E. 25-nél kapott eredmények fölhasználásával (29-1. ábra).



29-1. ábra

$$f_c^2=b^2+\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2-2b\cdot\left(\frac{bc}{a+b}\right)\cdot\cos\alpha. \tag{1}$$

A $\cos\alpha$-t azonban kifejezhetjük az oldalakkal:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \tag{2}$$

Ezt (1)-be visszahelyettesítve:

$$f_c^2=b^2+\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2-2b\cdot\left(\frac{bc}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right),$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$f_c^2 = \frac{b^2 \cdot (a+b)^2 + (bc)^2 - b \cdot (a+b) \cdot (b^2 + c^2 - a^2)}{(a+b)^2}.$$

A jobb oldal átalakítása és összevonás után kapjuk a keresett összefüggést f_c^2-re, majd négyzetgyökvonás után f_c-re, és hasonló gondolatmenettel f_b-re, illetve f_a-ra:

$$\boxed{\begin{aligned} f_c &= \sqrt{ab \cdot \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}, \\ f_b &= \sqrt{ac \cdot \left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right)}, \\ f_a &= \sqrt{bc \cdot \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)}. \end{aligned}} \tag{3}$$

Ajánlott irodalom a belső-külső szögfelezők hosszának kiszámításához:
[16] Göndör András: Nagy Tételkönyv 176. oldal

30. Külső szögfelező hosszának kiszámítása két oldalból és a közbezárt szögből

Induljunk el az E. 31-nél kapott eredményekből, és a 26-1. ábrából:

E. 31(3) $$f_{ck}^2 = ab \cdot \left(\frac{c^2}{(a-b)^2} - 1\right), \qquad a \neq b. \tag{1}$$

Írjuk föl a *koszinusztételt* a c oldalra:

E. 12(14) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma. \tag{2}$$

Helyettesítjük (2)-t (1)-be:

$$f_{ck}^2 = ab \cdot \left(\frac{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}{(a-b)^2} - 1\right).$$

Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$f_{ck}^2 = \frac{4 \cdot (ab)^2 \cdot \frac{1 - \cos\gamma}{2}}{(a-b)^2}. \qquad \Big/\sqrt{\ }$$

Vegyük figyelembe, hogy:

E. 9(33) $$\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}} = \left|\sin\frac{\gamma}{2}\right| = \sin\frac{\gamma}{2}, \qquad 0° < \gamma < 180°.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Végül kapjuk a keresett összefüggést f_{ck}-ra, és hasonló gondolatmenettel f_{bk}-ra, illetve f_{ak}-ra:

$$\boxed{\begin{aligned} f_{ck} &= \frac{2ab}{|a-b|}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \qquad a\neq b,\\ f_{bk} &= \frac{2ca}{|a-c|}\cdot\sin\frac{\beta}{2} \qquad a\neq c,\\ f_{ak} &= \frac{2bc}{|b-c|}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} \qquad b\neq c. \end{aligned}} \tag{3}$$

31. Külső szögfelező hosszának kiszámítása az oldalakból

Írjuk föl a *Pitagorasz-tételt* az $FCD\triangle$-ben. Lásd a 26-1. ábrát és az ottani megjegyzést.

E. 26(7)
$$f_c^2+f_{ck}^2=\left(\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{b-a}\right)^2, \qquad a\neq b. \tag{1}$$

Helyettesítsük az E. 29(3)-nál kapott eredményt f_c^2 helyére:

$$f_{ck}^2=\left(\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{b-a}\right)^2-ab\cdot\left(1-\frac{c^2}{(a+b)^2}\right). \tag{2}$$

Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$f_{ck}^2=\left(\frac{ac\cdot(b-a)+ac\cdot(a+b)}{(b+a)\cdot(b-a)}\right)^2-\frac{ab\cdot(b+a)^2}{(b+a)^2}+\frac{abc^2}{(b+a)^2},$$

$$f_{ck}^2=\frac{a^2c^2\cdot(b-a+b+a)^2}{(b+a)^2\cdot(b-a)^2}-\frac{(ab\cdot(b+a)^2-abc^2)\cdot(b-a)^2}{(b+a)^2\cdot(b-a)^2},$$

$$f_{ck}^2=\frac{4a^2b^2c^2-ab\cdot(b^2-a^2)^2+abc^2\cdot(b^2-2ab+a^2)}{(b^2-a^2)^2},$$

$$f_{ck}^2=\frac{4a^2b^2c^2-ab\cdot(b^4-2a^2b^2+a^4)+ab^3c^2-2a^2b^2c^2+a^3bc^2}{(b^2-a^2)^2},$$

$$f_{ck}^2=\frac{4a^2b^2c^2-ab^5+2a^3b^3-a^5b+ab^3c^2-2a^2b^2c^2+a^3bc^2}{(b^2-a^2)^2},$$

$$f_{ck}^2=\frac{2a^2b^2c^2-ab^5+2a^3b^3-a^5b+ab^3c^2+a^3bc^2}{(b^2-a^2)^2},$$

$$f_{ck}^2=\frac{ab\cdot(2abc^2-b^4+2a^2b^2-a^4+b^2c^2+a^2c^2)}{(b^2-a^2)^2},$$

$$f_{ck}^2=\frac{ab\cdot(c^2\cdot(2ab+b^2+a^2)-b^4+2a^2b^2-a^4)}{(b^2-a^2)^2},$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$f_{ck}^2 = \frac{ab\cdot(c^2\cdot(a+b)^2-(b^2-a^2)^2)}{(b+a)^2\cdot(b-a)^2},$$

$$f_{ck}^2 = \frac{ab\cdot(c^2\cdot(a+b)^2-(b+a)^2\cdot(b-a)^2)}{(b+a)^2\cdot(b-a)^2}.$$

Egyszerűsítsük a jobb oldalt $(b+a)^2=(a+b)^2$-nel, továbbá $(b-a)^2=(a-b)^2$ figyelembevételével.

$$f_{ck}^2 = \frac{ab\cdot(c^2-(a-b)^2)}{(a-b)^2},$$

$$f_{ck}^2 = ab\cdot\left(\frac{c^2}{(a-b)^2}-1\right).$$

Végül négyzetgyökvonás után kapjuk a keresett összefüggést f_{ck}-ra, és hasonló gondolatmenettel f_{bk}-ra, illetve f_{ak}-ra:

$$\boxed{\begin{aligned} f_{ck} &= \sqrt{ab\cdot\left(\frac{c^2}{(a-b)^2}-1\right)} \qquad a\neq b,\\ f_{bk} &= \sqrt{ac\cdot\left(\frac{b^2}{(a-c)^2}-1\right)} \qquad a\neq c,\\ f_{ak} &= \sqrt{bc\cdot\left(\frac{a^2}{(b-c)^2}-1\right)} \qquad b\neq c. \end{aligned}} \tag{3}$$

Megjegyzés: Vizsgáljuk meg az f_{ck} külső szögfelező képletének jobb oldalát.

A *háromszög-egyenlőtlenségből*:

E. 1(3) $$c>|a-b|>0, \qquad a\neq b,$$

ennek átrendezéséből

$$\frac{c^2}{(a-b)^2}-1>0,$$

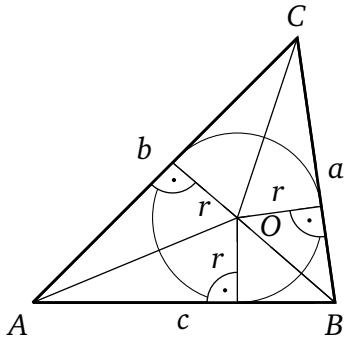
tehát a négyzetgyök alatt akár $a>b$, akár $b>a$ pozitív kifejezés áll.

Ugyanerre az eredményre jutunk f_{bk} és f_{ak} képleteinek vizsgálatánál is.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

32. Beírt kör sugarának kiszámítása
(belső érintőkör)

Induljunk el egy ABC általános háromszögből (32-1. ábra).



32-1. ábra

Bontsuk föl az ABC háromszöget a BOC, AOC és az AOB háromszögre, a beírt kör sugara legyen r. Most:

$$t_{ABC\triangle} = t_{BOC\triangle} + t_{AOC\triangle} + t_{AOB\triangle}, \tag{1}$$

$$t_{ABC\triangle} = \frac{a\cdot r}{2} + \frac{b\cdot r}{2} + \frac{c\cdot r}{2} = r\cdot\frac{a+b+c}{2}. \tag{2}$$

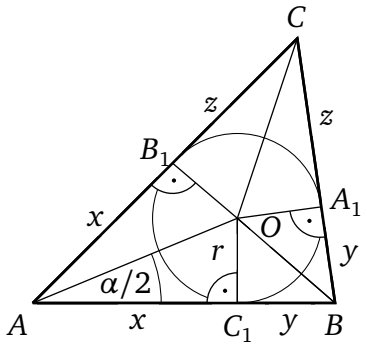
Ha az $\dfrac{a+b+c}{2} = s$ jelölést használjuk, akkor

$$t_{ABC\triangle} = r\cdot s, \tag{3}$$

$$\boxed{r = \frac{t}{s}.} \tag{4}$$

33. Belső érintőszakaszok

Folytassuk a 32. pont gondolatát (33-1. ábra).



33-1. ábra

Jelölje az $ABC\triangle$ oldalainak és beírt körének érintési pontjait rendre A_1, B_1, C_1. *Adott körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő.*

Legyen: $\overline{AB}_1 = \overline{AC}_1 = x$, (1)

$\overline{BA}_1 = \overline{BC}_1 = y$, (2)

és $\overline{CB}_1 = \overline{CA}_1 = z$. (3)

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Azonban:

$$y+z=a, \tag{4}$$
$$x+z=b, \tag{5}$$
$$x+y=c. \tag{6}$$

A (4), (5) és (6) egyenleteket összeadva kapjuk, hogy:

$$2\cdot(x+y+z)=a+b+c. \tag{7}$$

A félkerület s jelölésével:

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}=s. \tag{8}$$

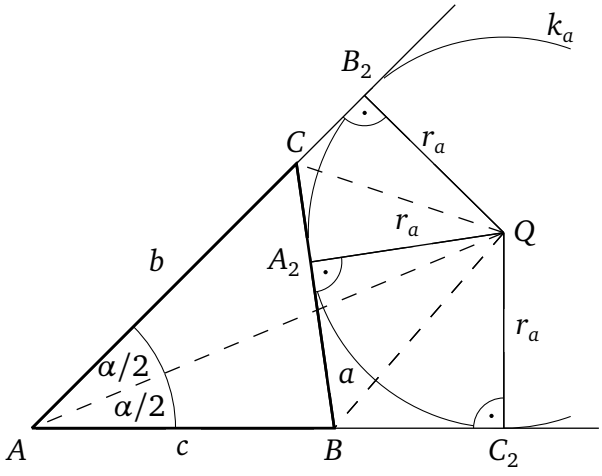
$$\boxed{\begin{aligned} x&=s-(y+z)=s-a, &(9)\\ y&=s-(x+z)=s-b, &(10)\\ z&=s-(x+y)=s-c. &(11)\end{aligned}}$$

Ezek felhasználásával kapjuk a félszögek tangensét (33-1. ábra).

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}&=\frac{r}{s-a},\\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}&=\frac{r}{s-b},\\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}&=\frac{r}{s-c}.\end{aligned}} \tag{12}$$

34. Hozzáírt körök sugarának kiszámítása (külső érintőkörök)

Induljunk el egy ABC általános háromszögből (34-1. ábra).



34-1. ábra

A k_a hozzáírt kör sugarának kiszámításánál abból indulunk ki, hogy az $ABC\triangle$ területét megkapjuk, ha az $ABQ\triangle$ és $ACQ\triangle$ területeinek összegéből kivonjuk a $BCQ\triangle$ területét:

$$t=\frac{1}{2}\cdot(c\cdot r_a+b\cdot r_a-a\cdot r_a), \tag{1}$$

$$t=r_a\cdot\frac{b+c-a}{2}=r_a\cdot(s-a). \tag{2}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Végül kapjuk a keresett összefüggést r_a-ra, és hasonló gondolatmenettel r_b-re, illetve r_c-re:

$$\boxed{r_a = \frac{t}{s-a}; \qquad r_b = \frac{t}{s-b}; \qquad r_c = \frac{t}{s-c}.} \tag{3}$$

35. Külső érintőszakaszok

Folytassuk a 34. pont gondolatát (34-1. ábra).

A külső érintőszakaszok kiszámításánál abból indulunk el, hogy:

Adott körhöz adott külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők. Így:

$$\overline{AC}_2 = \overline{AB}_2, \quad \overline{BC}_2 = \overline{BA}_2 \text{ és } \overline{CA}_2 = \overline{CB}_2,$$

$$\overline{AB}_2 = \overline{AC} + \overline{CB_2} = \overline{AC} + \overline{CA}_2, \tag{1}$$

$$\overline{AC}_2 = \overline{AB} + \overline{BC_2} = \overline{AB} + \overline{BA}_2. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenleteket összeadva:

$$\overline{AB}_2 + \overline{AC}_2 = \underbrace{\overline{AC}}_{b} + \underbrace{\overline{AB}}_{c} + \underbrace{\overline{CA}_2 + \overline{BA}_2}_{a} = a + b + c. \tag{3}$$

Azonban:

$$\overline{AB}_2 = \overline{AC}_2 = \frac{a+b+c}{2} = s, \tag{4}$$

így

$$\boxed{\overline{AB}_2 = \overline{AC}_2 = s,} \tag{5}$$

továbbá (2) és (5)-ből

$$\boxed{\overline{BA}_2 = \overline{BC}_2 = s - c,} \tag{6}$$

végül (1) és (5)-ből

$$\boxed{\overline{CA}_2 = \overline{CB}_2 = s - b.} \tag{7}$$

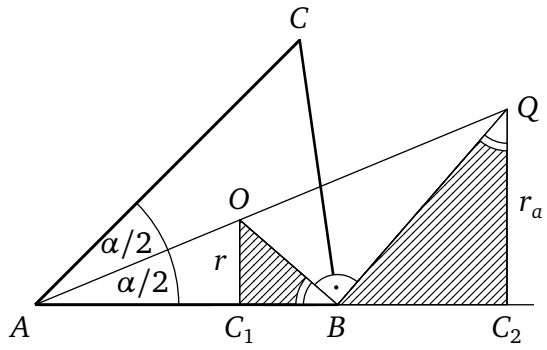
Az (5) felhasználásával kapjuk $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ -et (34-1. ábra), és hasonló gondolatmenettel a másik két félszög tangensét is:

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \frac{r_a}{s}, \\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} &= \frac{r_b}{s}, \\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{r_c}{s}. \end{aligned}} \tag{8}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

36. Terület kiszámítása az oldalakból, a Héron-képlet

Induljunk el egy ABC általános háromszögből (36-1. ábra).



36-1. ábra

Legyen BO a B csúcsból induló belső, BQ pedig a külső szögfelező.
Mivel $OBC_1\sphericalangle = BQC_2\sphericalangle$ *merőleges szárú szögek* (mindkettő hegyesszög, így egyenlők), ezért $OBC_1\triangle \sim BQC_2\triangle$-höz, tehát:

$$\frac{\overline{OC_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{BC_2}}{\overline{QC_2}}, \text{ azaz } \frac{r}{s-b} = \frac{s-c}{r_a}. \qquad (1)$$

Lásd az E. 33(10)-et és E. 35(6)-ot.

$$r \cdot r_a = (s-b)(s-c), \qquad (2)$$

E. 32(4), E. 34(3)
$$\frac{t}{s} \cdot \frac{t}{s-a} = (s-b)(s-c), \qquad (3)$$

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{ez Héron képlete.} \qquad (4)$$

Megjegyzés: Érdemes megvizsgálni a képlet előjeleit, ami a későbbiek során hasznos lesz. Tegyük fel, hogy a terület (t), a félkerület (s) és az oldalak (a, b, c) pozitívak, mivel az elfajuló esetektől eltekintünk. A négyzetgyök alatti három zárójeles tényezőből vagy valamelyik kettő negatív, vagy mindegyik pozitív. Az előbbi esetben azonban ellentmondásra jutunk. Ezért:

$$s-a > 0, \qquad s-b > 0, \qquad s-c > 0 \qquad (5)$$

kell legyen. Ez azonban megegyezik a háromszög-egyenlőtlenséggel, hiszen (5)-ből rendre kapjuk:

E. 1(3)
$$b+c > a, \qquad a+c > b, \qquad a+b > c. \qquad (6)$$

37. Síkgörbe egyenlete, a függvény görbéje

A koordináta-rendszerben az egyeneshez hasonlóan kört, parabolát, ellipszist, hiperbolát stb. is vizsgálhatunk. Egy megadott síkgörbéhez kereshetünk olyan egyenletet, melyet a megadott síkgörbe pontjainak és csak a megadott síkgörbe pontjainak koordinátái elégítenek ki. Egy síkgörbe egyenletének keresésekor a síkgörbét meghatározó paraméterek és a síkgörbe futópontjának x, y koordinátái között kell kapcsolatot keresnünk. Ez a kapcsolat vezet el a síkgörbe egyenletéhez.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

És fordítva, ha ismerünk egy egyenletet, és meg tudjuk mondani, melyek lesznek a paraméterek és melyek a futópont koordinátái, akkor felrajzolhatjuk az egyenletnek megfelelő síkgörbét. Ezt a síkgörbét függvényekre bonthatjuk, és ezután függvény(ek) görbéjéről beszélhetünk. Ha a síkgörbéhez kerestük az egyenletet, akkor azt a *síkgörbe paraméteres egyenletének* nevezzük.

Például egy *origó középpontú ellipszis* esetén:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{1}$$

ahol x, y a futópont-koordináták, a, b az ellipszis féltengelyei, paraméterei. Ezt az ellipszist két függvényre lehet bontani:

$$y(x)=\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cdot b^2}, \tag{2}$$

$$y(x)=-\sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cdot b^2}. \tag{3}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

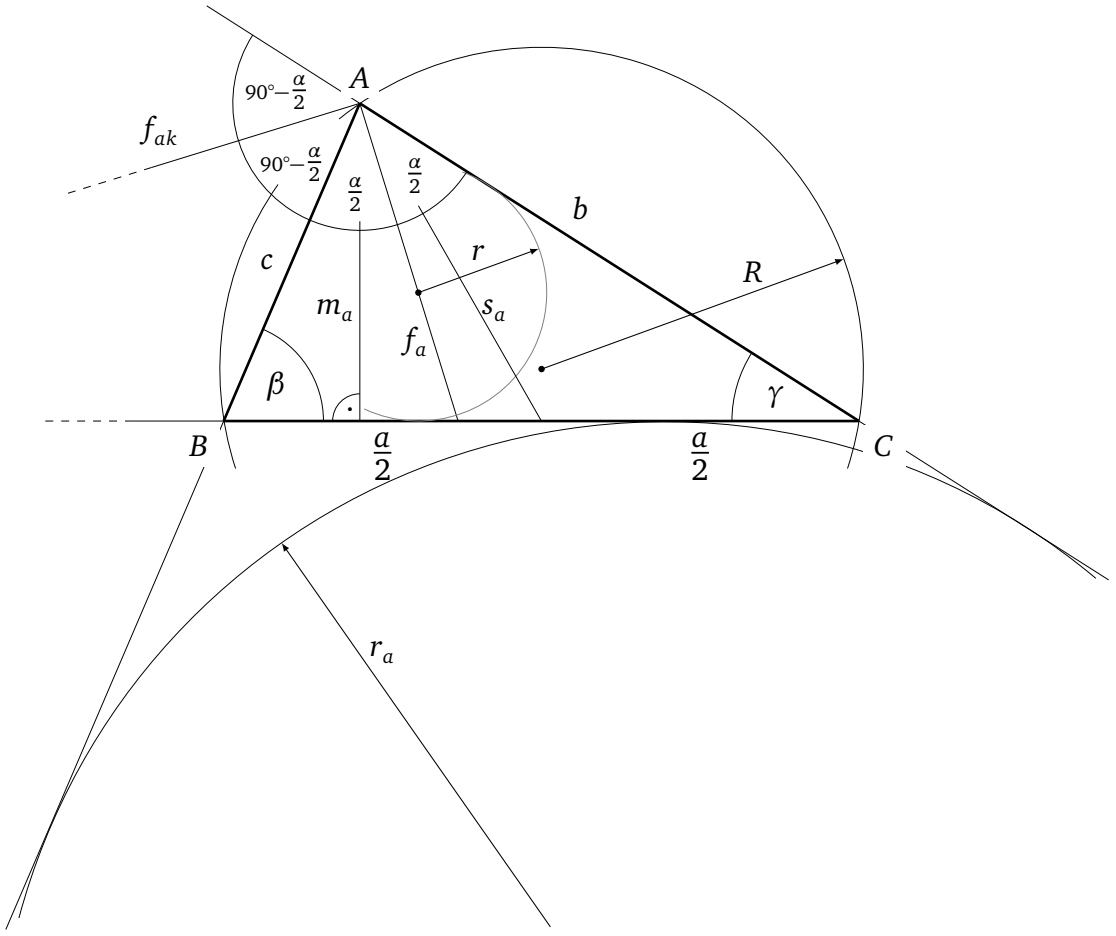
A háromszög meghatározásának különböző esetei

A továbbiakban, ha mást nem mondunk, a kiinduló adatok pozitív valós számok.
A szögek pedig: $0° < \alpha, \beta, \gamma < 180°$ *és* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

1. **Három oldal** (egyértelmű)

$$(a, b, c) \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma, k, t, m_a, m_b, m_c, s_a, s_b, s_c, f_a, f_b, f_c, f_{ak}, f_{bk}, f_{ck}, R, r, r_a, r_b, r_c, R_F$$

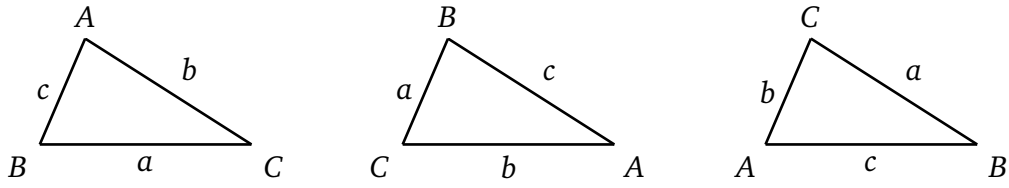
Legyen adott egy általános háromszög három oldala (a, b, c), és legyen bármelyik kettő összege nagyobb a harmadiknál *(háromszög-egyenlőtlenség)*. Számítsuk ki a többi adatát (1-1. ábra).



1-1. ábra

Ha ugyanaz a $\triangle$*, de más a jelölés, mint ami az 1-1. ábrán látható, a feladatot az adatok permutálásával kell értelemszerűen átalakítani (1-2. ábra).*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



1-2. ábra

Megoldás:

A belső szögek kiszámítására használjuk a *koszinusztételt*:

E. 12(14) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha, \tag{1}$$

E. 12(14) $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta, \tag{2}$$

E. 12(14) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma. \tag{3}$$

Átrendezés után pedig:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right), \quad 0° < \alpha < 180°, \tag{4}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right), \quad 0° < \beta < 180°, \tag{5}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right), \quad 0° < \gamma < 180°. \tag{6}$$

A harmadik szög kiszámítása történhet a szögösszegből is, hiszen $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. (7)

A kerület, illetve a félkerület:

$$k = a + b + c, \qquad s = \frac{a + b + c}{2}. \tag{8}$$

A terület:

E. 36(4) $$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad \text{Héron-képlet.} \tag{9}$$

A magasságok:

$$m_a = \frac{2t}{a}, \tag{10}$$

$$m_b = \frac{2t}{b}, \tag{11}$$

$$m_c = \frac{2t}{c}. \tag{12}$$

A súlyvonalak hossza:

E. 24(8) $$s_a = \frac{\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}{2}, \tag{13}$$

E. 24(8) $$s_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}, \tag{14}$$

E. 24(8) $$s_c = \frac{\sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}}{2}. \tag{15}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A belső szögfelezők hossza:

E. 29(3)
$$f_a = \sqrt{bc \cdot \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)}, \tag{16}$$

E. 29(3)
$$f_b = \sqrt{ac \cdot \left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right)}, \tag{17}$$

E. 29(3)
$$f_c = \sqrt{ab \cdot \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}. \tag{18}$$

A külső szögfelezők hossza:

E. 31(3)
$$f_{ak} = \sqrt{bc \cdot \left(\frac{a^2}{(b-c)^2} - 1\right)} \qquad b \neq c, \tag{19}$$

E. 31(3)
$$f_{bk} = \sqrt{ac \cdot \left(\frac{b^2}{(a-c)^2} - 1\right)} \qquad a \neq c, \tag{20}$$

E. 31(3)
$$f_{ck} = \sqrt{ab \cdot \left(\frac{c^2}{(a-b)^2} - 1\right)} \qquad a \neq b. \tag{21}$$

A körülírt kör sugara:

E. 11(17)
$$R = \frac{abc}{4t}. \tag{22}$$

A beírt kör (belső érintőkör) sugara:

E. 32(4)
$$r = \frac{t}{s}. \tag{23}$$

A hozzáírt körök (külső érintőkörök) sugarai:

E. 34(3)
$$r_a = \frac{t}{s-a}, \tag{24}$$

E. 34(3)
$$r_b = \frac{t}{s-b}, \tag{25}$$

E. 34(3)
$$r_c = \frac{t}{s-c}. \tag{26}$$

A Feuerbach-féle kör (Euler-féle kör, „kilenc pontú kör”) sugara:

$$R_F = \frac{R}{2}. \tag{27}$$

A háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

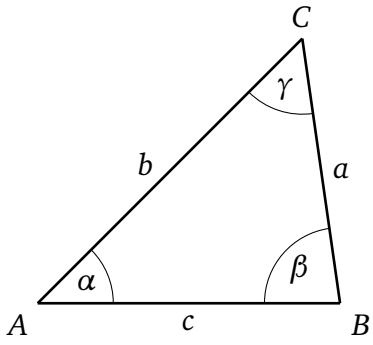
A koncepció az elkövetkezendő feladatoknál az, hogy törekszünk a három oldal kiszámítására, majd ezekből az itt megismert úton számolhatjuk a háromszög többi adatát.

A címben pedig fel fogjuk tüntetni zárójelben, ha a feladat megoldása egyértelmű, és kiemelten minden alkalommal egy lehetséges adatfelvételt.

2. Két oldal és a közbezárt szög (egyértelmű) (a, b, γ)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (2-1. ábra).

A harmadik oldal kiszámítására (most c) használjuk a *koszinusztételt*, amely minden háromszögben érvényes:



2-1. ábra

E. 12(22) $$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}. \qquad (1)$$

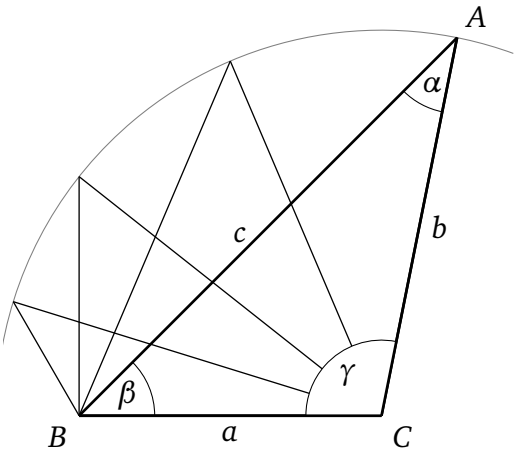
Mindig van egy megoldás. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

3. Két oldal és a nagyobbikkal szemben levő szög $(a < b, \beta)$ (egyértelmű)

Rajzoljunk fel egy ilyen ABC háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (3-1. ábra).



3-1. ábra

Írjuk föl a *szinusztételt* az ABC háromszögben:

E. 11(12) $$\sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\beta}{b}. \tag{1}$$

Mivel

E. 2(3) $$a < b \iff \alpha < \beta \Rightarrow \alpha < 90^\circ, \tag{2}$$

ezért

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a\cdot\sin\beta}{b}\right) < 90^\circ, \tag{3}$$

és

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta). \tag{4}$$

A hiányzó c oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22) $$\boxed{c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}.} \tag{5}$$

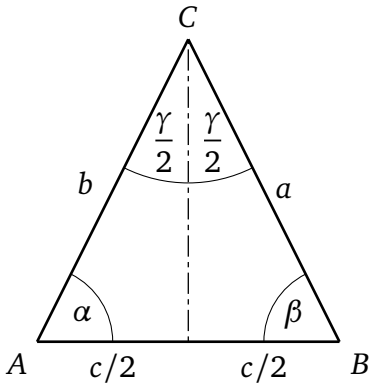
Mindig van egy megoldás. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

4. Két egyenlő oldal és az alapon fekvő egyik szög $(a = b, \beta)$ (egyértelmű)

Rajzoljunk fel egy ilyen ABC háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (4-1. ábra).



4-1. ábra

Mivel az alapon fekvő két szögre igaz, hogy

E. 2(1) $$a = b \iff \alpha = \beta < 90°, \tag{1}$$

ezért

$\beta < 90°$, *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Ezután:

$$\alpha = \beta, \tag{2}$$

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 2\beta, \tag{3}$$

és

$$\boxed{c = 2a \cdot \cos\beta.} \tag{4}$$

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

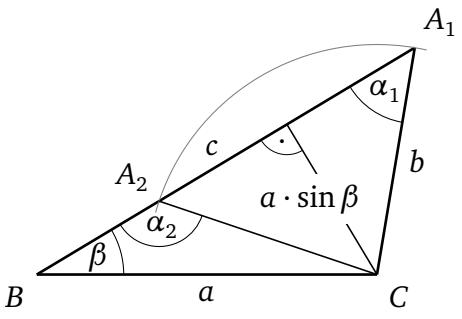
Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

5. Két oldal és a kisebbikkel szemben levő szög $(a > b, \beta)$

Rajzoljunk fel egy ilyen ABC háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (5-1. ábra).

E. 2(4) $$a > b \Leftrightarrow 180° - \beta > \alpha > \beta \Rightarrow \beta < 90°, \tag{1}$$

vagyis $\beta < 90°$ *kell legyen, ami a megoldás szükséges feltétele.*



5-1. ábra

Írjuk föl a *szinusztételt* az ABC háromszögben, és fejezzük ki $\sin\alpha$-t:

E. 11(12) $$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}, \tag{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b}. \tag{3}$$

Most a jobb oldalon minden ismert, keressük α-t.

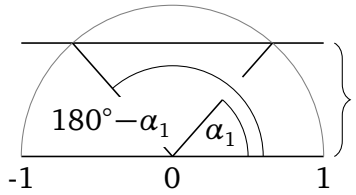
A következő esetek fordulhatnak elő:

- $b < a$ és $\beta \geq 90°$ esetén nincs megoldás.
- $b < a \cdot \sin\beta$, átalakítás után $\dfrac{a \cdot \sin\beta}{b} = \sin\alpha > 1$, nincs megoldás.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

1. $b = a \cdot \sin\beta$, átalakítás után $\dfrac{a \cdot \sin\beta}{b} = \sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90°$, ekkor egy megoldás van, és a háromszög derékszögű.

2. $b > a \cdot \sin\beta$, de $b < a$, átalakítás után $\dfrac{a \cdot \sin\beta}{b} = \sin\alpha < 1$, ekkor két megoldás van (5-1. ábra), (5-2. ábra):



$$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \arcsin\left(\dfrac{a \cdot \sin\beta}{b}\right) < 90°, \\ \alpha_2 = 180° - \alpha_1 > 90°. \end{cases}$$

5-2. ábra

A folytatás minden esetben a γ szög kiszámításával történik:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta). \tag{4}$$

Derékszögű lehet még $\gamma_1 = 90°$ esetén is.

A hiányzó c oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)
$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}.} \tag{5}$$

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet.
Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

Megjegyzés: A 3., 4. és 5. feladatok mindegyikénél a háromszöget meghatározó három adat a, b, β volt. Látszik, hogy nemcsak a háromszögek milyensége (hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű, általános, egyenlő szárú, egyenlő oldalú), hanem a megoldások száma is az induló adatok fölvételétől függ.

6. Egy oldal és két szög (egyértelmű) (c, α, β)

Most $\alpha + \beta < 180°$ *a megoldás szükséges és elégséges feltétele, és*

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta). \tag{1}$$

A hiányzó a és b oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)
$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot c, \\ b &= \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot c. \end{aligned}} \tag{2}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

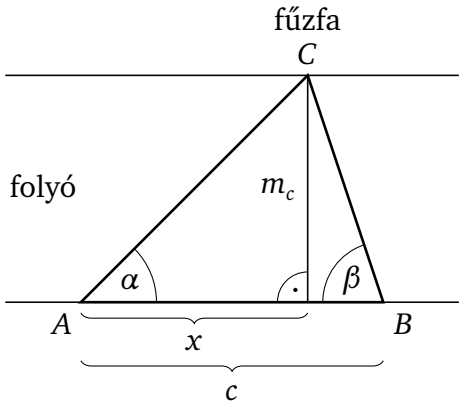
Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.
Most három oldal $(a,b,c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

Előfordul, hogy az adatok felvétele után valamelyik magasságra vagyunk kíváncsiak. Jelöljük a keresett magasságot m_c-vel (6-1. ábra).

1. példa:

Számítsuk ki a 6-1. ábrán látható folyó szélességét. Első lépésben keressünk egy fix pontot a folyó túlsó partján, pl. egy fűzfát, jelöljük C-vel. Ezután az A, majd a B ponton elhelyezkedve mérjük meg a c távolságot, illetve az α, β szögeket *teodolittal* úgy, hogy $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$ legyen.

Teodolit: Függőleges vagy vízszintes szögek mérésére alkalmas optikai földmérő műszer.



6-1. ábra

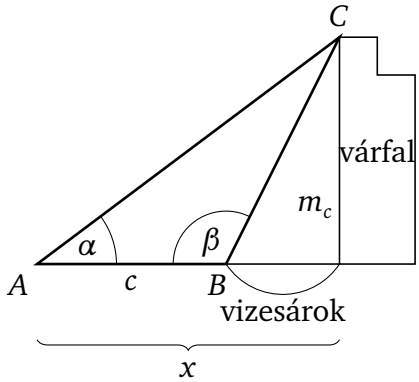
Ekkor:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_c}{x}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{m_c}{c-x},$$
$$x = m_c \cdot \operatorname{ctg}\alpha, \qquad c - x = m_c \cdot \operatorname{ctg}\beta,$$
$$c - m_c \cdot \operatorname{ctg}\alpha = m_c \cdot \operatorname{ctg}\beta,$$
$$c = m_c \cdot \operatorname{ctg}\alpha + m_c \cdot \operatorname{ctg}\beta = m_c \cdot (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta).$$

$$\boxed{m_c = \frac{c}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}.} \tag{3}$$

2. példa:

Számítsuk ki a 6-2. ábrán látható vizesárok túlsó partján lévő várfal magasságát. Első lépésben helyezkedjünk el A, majd B ponton, mérjük meg c távolságot és α, β szögeket teodolittal. A feladat most is ugyanaz, m_c kiszámítása. Mivel az induló adatok ugyanazok, egy oldal és a rajta fekvő két szög, m_c képlete megegyezik (3)-mal. Még meg kell mutatnunk, hogy $90° < \beta < 180° - \alpha$, ezért $\operatorname{ctg}\beta < 0$ ellenére (3) nevezőjének előjele pozitív marad:



6-2. ábra

$$-90° > -\beta > -180° + \alpha, \qquad \Big| +180°$$
$$90° > 180° - \beta > \alpha,$$
$$0° < \alpha < 180° - \beta < 90°,$$

E. 10-4. $\quad 0 < \operatorname{ctg}(180° - \beta) < \operatorname{ctg}\alpha < +\infty,$

E. 9(5). $\quad 0 < -\operatorname{ctg}\beta < \operatorname{ctg}\alpha < +\infty,$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta > 0.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Megjegyzés:

Ha $\alpha = 90°$, vagy $\beta = 90°$ (ez külön-külön előfordulhat, pl. a 6-1. ábránál), (3)-as képlet akkor sem változik, ugyanis, pl. $\beta = 90°$ esetén:

$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg} 90° = \frac{\cos 90°}{\sin 90°} = 0, \qquad m_c = c \cdot \operatorname{tg}\alpha. \tag{4}$$

Az α és β egyszerre nem lesz 90°, ugyanis a szögösszeg 180° miatt $\alpha + \beta < 180°$ kell legyen.

7. Két oldal összege és két szög (egyértelmű) $(a+b, \alpha, \beta)$

Most $\alpha + \beta < 180°$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele, és

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta). \tag{1}$$

Induljunk el a *szinusztételből*:

E. 11(12)

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{(a+b)-a} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \tag{2}$$

Átalakítás után:

$$a \cdot \sin\beta + a \cdot \sin\alpha = (a+b) \cdot \sin\alpha, \tag{3}$$

$$a \cdot (\sin\alpha + \sin\beta) = (a+b) \cdot \sin\alpha, \tag{4}$$

$$\boxed{a = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta} \cdot (a+b).} \tag{5}$$

A b oldal $(a+b)$-ből, a c oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)

$$\boxed{\begin{aligned} b &= (a+b) - a, \\ c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}. \end{aligned}} \tag{6}$$

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

8. Két oldal különbsége és két szög (egyértelmű) $(a-b, \alpha, \beta)$

Most $a-b>0, \alpha-\beta>0$ vagy $a-b<0, \alpha-\beta<0$, és mindkét esetben $\alpha+\beta<180^\circ$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta). \tag{1}$$

Induljunk el a *szinusztételből:*

E. 11(12)
$$\frac{a}{b} = \frac{a}{a-(a-b)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \tag{2}$$

Átalakítás után:

$$a\cdot\sin\alpha - a\cdot\sin\beta = (a-b)\cdot\sin\alpha, \tag{3}$$

$$a\cdot(\sin\alpha-\sin\beta) = (a-b)\cdot\sin\alpha, \tag{4}$$

E. 4(2), E. 4(4)
$$\boxed{a = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha-\sin\beta}\cdot(a-b).} \tag{5}$$

- Ha $a-b=0$ és $\alpha=\beta<90^\circ$, ekkor a háromszög egyenlő szárú (esetlegesen egyenlő oldalú), de ebből nincs egyértelmű megoldás, mert nincs három független adat.
- Más esetben ellentmondó, nincs megoldás.

A b oldal $(a-b)$-ből, a c oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)
$$\boxed{\begin{aligned} b &= a-(a-b),\\ c &= \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}. \end{aligned}} \tag{6}$$

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

9. Két oldal és a velük szemben lévő szögek összege (egyértelmű) $(a, b, \alpha+\beta)$

Most $\alpha+\beta<180^\circ$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele, és

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta). \tag{1}$$

A hiányzó c oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

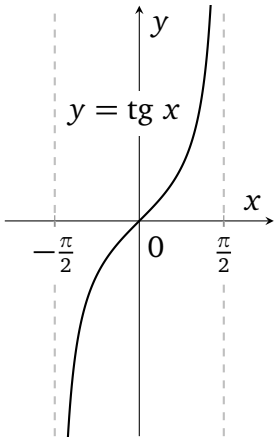
E. 12(22)
$$\boxed{c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}.} \tag{2}$$

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

10. Két oldal és a velük szemben lévő szögek különbsége $(a, b, \alpha-\beta)$ (egyértelmű)



10-1. ábra

Induljunk el a *tangenstételből*:

E. 13(6)
$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{1}$$

Ebben csak $\alpha+\beta$ ismeretlen, keressük α-t:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{arctg}\left(\frac{a+b}{a-b}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\right),\qquad 0^\circ<\frac{\alpha+\beta}{2}<90^\circ, \tag{2}$$

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\boxed{\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{a+b}{a-b}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\frac{\alpha-\beta}{2}.} \tag{3}$$

1. Ha $a-b<0$, akkor $-90^\circ<\dfrac{\alpha-\beta}{2}<0^\circ$ kell legyen.
2. Ha $a-b>0$, akkor $0^\circ<\dfrac{\alpha-\beta}{2}<90^\circ$ kell legyen.

- Ha $a=b$, és $\alpha-\beta=0$, ekkor a háromszög egyenlő szárú (esetlegesen egyenlő oldalú), de ebből nincs egyértelmű megoldás, mert nincs három független adat.
- Más esetben ellentmondó, nincs megoldás.

1. vagy 2. teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

$$\boxed{\begin{aligned}\beta&=\alpha-(\alpha-\beta),\\ \gamma&=180^\circ-(\alpha+\beta).\end{aligned}} \tag{4}$$

A hiányzó c oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)
$$\boxed{c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}.} \tag{5}$$

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a,b,c)\overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

11. Két oldal aránya, a harmadik oldal és a szemben lévő szögek különbsége (egyértelmű) $(a/b, c, \alpha-\beta)$

Induljunk el a *tangenstételből:*

E. 13(6)
$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{1}$$

Osszuk el a bal oldali tört számlálóját és nevezőjét b-vel:

$$\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{2}$$

Ebben csak $\alpha+\beta$ ismeretlen, keressük α-t:

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\right),\qquad 0^\circ<\frac{\alpha+\beta}{2}<90^\circ, \tag{3}$$

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\boxed{\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\frac{\alpha-\beta}{2}.} \tag{4}$$

1. Ha $\frac{a}{b}-1<0$, akkor $-90^\circ<\frac{\alpha-\beta}{2}<0^\circ$ kell legyen.
2. Ha $\frac{a}{b}-1>0$, akkor $0^\circ<\frac{\alpha-\beta}{2}<90^\circ$ kell legyen.

- Ha $\frac{a}{b}=1$, és $\alpha-\beta=0$, ekkor a háromszög egyenlő szárú (esetlegesen egyenlő oldalú), de ebből nincs egyértelmű megoldás, mert nincs három független adat.
- Más esetben ellentmondó, nincs megoldás.

1. vagy 2. teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

$$\boxed{\begin{aligned}\beta&=\alpha-(\alpha-\beta),\\ \gamma&=180^\circ-(\alpha+\beta).\end{aligned}} \tag{5}$$

A b oldal a *szinusztétellel*, majd ezután az a oldal (a/b)-ből számolható:

E. 11(12)
$$\boxed{\begin{aligned}b&=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c,\\ a&=\left(\frac{a}{b}\right)\cdot b.\end{aligned}} \tag{6}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

12. A kerület és két szög (egyértelmű) (k,α,β)

Most $\alpha+\beta<180^\circ$ *a megoldás szükséges és elégséges feltétele, és*

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta). \tag{1}$$

Induljunk el a *szinusztételből:*

E. 11(12)

$$\frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad \frac{c}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}, \tag{2}$$

$$k = a+b+c = a+\left(\frac{b}{a}\right)\cdot a+\left(\frac{c}{a}\right)\cdot a. \tag{3}$$

(3)-ba való behelyettesítés után:

$$k = a+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot a+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a, \tag{4}$$

$$k = a\cdot\left(1+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right), \tag{5}$$

$$k = a\cdot\left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha}\right), \tag{6}$$

$$\boxed{a=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\cdot k.} \tag{7}$$

A hiányzó b és c oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)

$$\boxed{\begin{aligned} b &= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot a,\\ c &= \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a. \end{aligned}} \tag{8}$$

Mivel α,β adott, γ pedig kiszámítható, ezért α,β,γ ismert, így hasonló háromszögek végtelen halmazából kell majd kiválasztanunk azt az egyet, amelyiknek a kerülete k. Ilyen háromszög mindig lesz, és mindig csak egy, ezért *a feladat megoldása egyértelmű.*

Most három oldal $(a,b,c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

13. A terület és két szög (egyértelmű) (t, α, β)

Most $\alpha+\beta<180^\circ$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele, és

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta). \tag{1}$$

Induljunk el a *trigonometrikus területképletből:*

E. 11(15)
$$t = \frac{1}{2}\cdot a\cdot m_a = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma. \tag{2}$$

Ha γ tompaszög:

E. 9(2)
$$\sin\gamma = \sin(180^\circ-\gamma). \tag{3}$$

Alakítsuk át (2)-t:

$$t = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)\cdot a\cdot\sin\gamma. \tag{4}$$

Írjuk föl a *szinusztételt*:

E. 11(12)
$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}. \tag{5}$$

(4)-be való behelyettesítés után:

$$t = \frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma, \tag{6}$$

$$\boxed{a = \sqrt{2t\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}}.} \tag{7}$$

A hiányzó b és c oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)
$$\boxed{\begin{aligned} b &= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot a,\\ c &= \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a. \end{aligned}} \tag{8}$$

Mivel α,β adott, γ pedig kiszámítható, ezért α,β,γ ismert, így hasonló háromszögek végtelen halmazából kell majd kiválasztanunk azt az egyet, amelyiknek a területe t. Ilyen háromszög mindig lesz, és mindig csak egy, ezért *a feladat megoldása egyértelmű.*

Most három oldal $(a,b,c)\overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

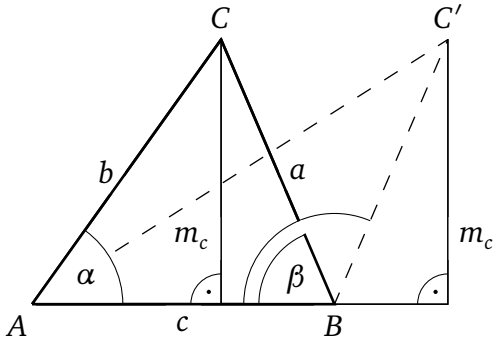
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

14. Egy magasság és két szög (egyértelmű) (m_c, α, β)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (14-1. ábra).

Most $\alpha+\beta<180°$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele, és

$$\gamma = 180° - (\alpha+\beta). \tag{1}$$



14-1. ábra

Ha α vagy β közül valamelyik derékszög (90°) vagy tompaszög, például a β, akkor:

E. 9(2) $\quad \sin\beta = \sin(180° - \beta).$

Írjuk fel a *trigonometrikus magasságképletet* az a majd a b oldalra:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{m_c}{\sin\beta}, \\ b &= \frac{m_c}{\sin\alpha}. \end{aligned}} \tag{2}$$

A hiányzó c oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22) $\qquad \boxed{c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}.}$ (3)

Mivel α, β adott, γ pedig kiszámítható, ezért α, β, γ ismert, így hasonló háromszögek végtelen halmazából kell majd kiválasztanunk azt az egyet, amelyiknek adott a magassága, most m_c. Ilyen háromszög mindig lesz, és mindig csak egy, ezért *a feladat megoldása egyértelmű.*

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

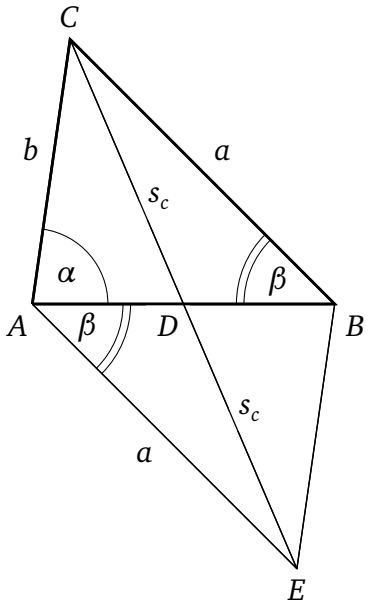
15. Egy súlyvonal és két szög (egyértelmű) (s_c, α, β)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (15-1. ábra).

Most $\alpha+\beta<180°$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele, és

$$\gamma = 180° - (\alpha+\beta). \tag{1}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



15-1. ábra

Tükrözzük az ABC háromszöget az $\overline{AB}$ oldal D felezőpontjára:

$$\overline{CE} = 2s_c. \tag{2}$$

Írjuk fel a *koszinusztételt* az ACE háromszögben a $2s_c$ oldalra:

E. 12(14)
$$(2s_c)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\alpha+\beta), \tag{3}$$

$$q = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad \text{(ismert)}, \tag{4}$$

E. 11(12)
$$b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot a = q \cdot a, \tag{5}$$

$$4s_c^2 = a^2 + q^2 \cdot a^2 - 2a \cdot q \cdot a \cdot \cos(\alpha+\beta), \tag{6}$$

$$4s_c^2 = a^2 \cdot \left(1 + q^2 - 2q \cdot \cos(\alpha+\beta)\right). \tag{7}$$

Fejezzük ki a^2-et, majd négyzetgyökvonás után kapjuk a-t:

$$\boxed{a = \frac{2s_c}{\sqrt{1+q^2-2q\cdot\cos(\alpha+\beta)}}.} \tag{8}$$

$$\boxed{b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot a = q \cdot a.} \tag{9}$$

A hiányzó c oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)
$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}.} \tag{10}$$

Mivel α, β adott, γ pedig kiszámítható, ezért α, β, γ ismert, így hasonló háromszögek végtelen halmazából kell majd kiválasztanunk azt az egyet, amelyiknek adott a súlyvonala, most s_c. Ilyen háromszög mindig lesz, és mindig csak egy, ezért *a feladat megoldása egyértelmű.*

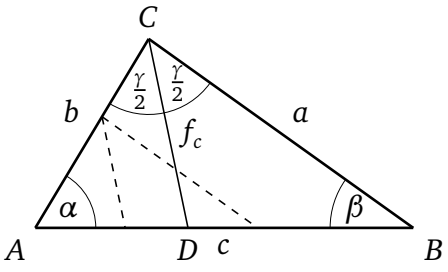
Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

16. Egy belső szögfelező és két szög (egyértelmű) (f_c, α, β)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (16-1. ábra).

Most $\alpha+\beta<180°$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele, és



16-1. ábra

$$\gamma = 180° - (\alpha+\beta). \tag{1}$$

Írjuk föl a *szinusztételt* a BCD háromszögben:

$$\frac{f_c}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\left(180° - \left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)\right)} = \frac{a}{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{2}$$

Ebben csak az a oldal az ismeretlen, keressük a-t:

E. 11(12)
$$\boxed{a = \frac{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\beta}\cdot f_c.} \tag{3}$$

Most írjuk föl a *szinusztételt* az ACD háromszögben:

E. 11(12)
$$\boxed{b = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\alpha}\cdot f_c.} \tag{4}$$

A hiányzó c oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)
$$\boxed{c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}.} \tag{5}$$

Mivel α, β adott, γ pedig kiszámítható, ezért α, β, γ ismert, így hasonló háromszögek végtelen halmazából kell majd kiválasztanunk azt az egyet, amelyiknek adott a belső szögfelezője, most f_c. Ilyen háromszög mindig lesz, és mindig csak egy, ezért *a feladat megoldása egyértelmű.*

Most három oldal $(a,b,c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

17. Egy külső szögfelező és két szög (egyértelmű) (f_{ck}, α, β)

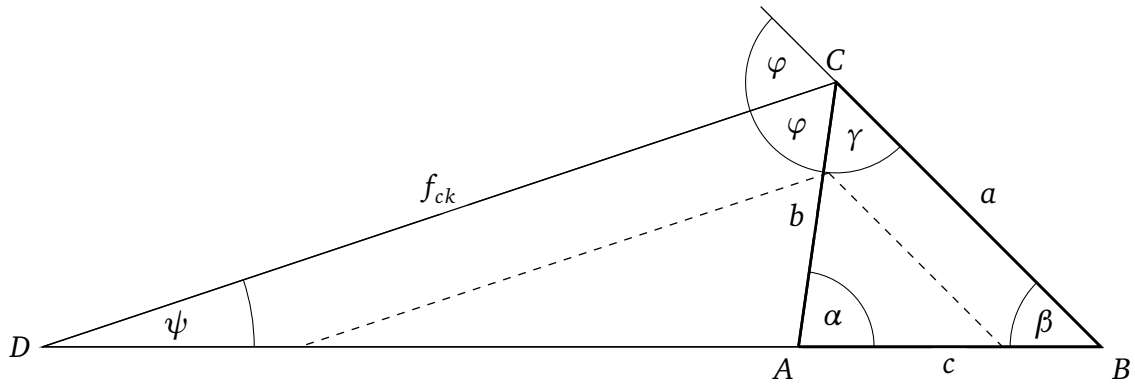
Rajzoljunk fel egy ABC háromszöget úgy, hogy:

E. 2(4)
$$a>b \iff 180°-\beta>\alpha>\beta \Rightarrow \beta<90°, \tag{1}$$

és jelöljük a választott adatokat (17-1. ábra).

Most $\alpha+\beta<180°$, és $\alpha\neq\beta$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



17-1. ábra

A szögeket könnyen kiszámolhatjuk:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta), \tag{2}$$
$$2\varphi = 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta,$$
$$\varphi = \frac{\alpha + \beta}{2},$$
$$\psi = 180^\circ - (\beta + \gamma + \varphi) = \frac{\alpha - \beta}{2}. \tag{3}$$

Írjuk föl a *szinusztételt* a BCD háromszögben:

E. 11(12)
$$\frac{a}{f_{ck}} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}. \tag{4}$$

Ebben csak az a oldal az ismeretlen, rendezzük a-ra:

$$\boxed{a = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\beta} \cdot f_{ck}.} \tag{5}$$

A hiányzó b és c oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)
$$\boxed{\begin{aligned} b &= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot a, \\ c &= \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot a. \end{aligned}} \tag{6}$$

Mivel α, β adott, γ pedig kiszámítható, ezért α, β, γ ismert, így hasonló háromszögek végtelen halmazából kell majd kiválasztanunk azt az egyet, amelyiknek adott a külső szögfelezője, most f_{ck}. Ilyen háromszög mindig lesz, és mindig csak egy, ezért *a feladat megoldása egyértelmű.*

Megjegyzés: Az $a < b$ esetén (lásd E. 2(3)-at) helyet cserél a (3), (4), (5) és (6) egyenletekben a a b-vel és α a β-val.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

18. A körülírt kör sugara és két szög (egyértelmű) (R, α, β)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (E. 11-3-1. ábra).

Most $\alpha + \beta < 180°$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele, és

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta). \tag{1}$$

Első megoldás (szinusszal)

E. 11(9) E. 11(10) E. 11(11)

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 2R \cdot \sin\alpha, \\ b &= 2R \cdot \sin\beta, \\ c &= 2R \cdot \sin\gamma. \end{aligned}} \tag{2}$$

Második megoldás (koszinusztétellel)

E. 12(14)

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 2\alpha, \tag{3}$$

$$a^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos 2\alpha. \tag{4}$$

Kiemelés a jobb oldalon, majd négyzetgyökvonás után kapjuk a-t, és hasonló gondolatmenettel b-t és c-t:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= R\sqrt{2 \cdot (1 - \cos 2\alpha)}, \\ b &= R\sqrt{2 \cdot (1 - \cos 2\beta)}, \\ c &= R\sqrt{2 \cdot (1 - \cos 2\gamma)}. \end{aligned}} \tag{5}$$

Mivel α, β adott, γ pedig kiszámítható, ezért α, β, γ ismert, így hasonló háromszögek végtelen halmazából kell majd kiválasztanunk azt az egyet, amelyiknél a körülírt kör sugara R. Ilyen háromszög mindig lesz, és mindig csak egy, ezért *a feladat megoldása egyértelmű.*

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

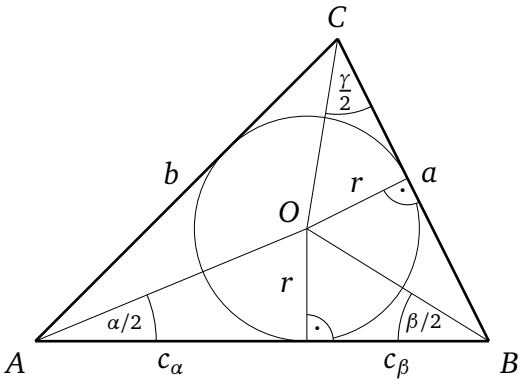
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

19. A beírt kör sugara és két szög (egyértelmű) (r, α, β)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (19-1. ábra).

Most $\alpha+\beta<180^\circ$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele, és

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta). \tag{1}$$



19-1. ábra

A szögek és r ismeretében a következőket írhatjuk:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{c_\alpha}; \quad c_\alpha = r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{c_\beta}; \quad c_\beta = r\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}. \tag{3}$$

A (2) és (3) összeadása, majd kiemelés után kapjuk c-t, és hasonló gondolatmenettel b-t és a-t:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= r\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right),\\ b &= r\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right),\\ c &= r\cdot\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right). \end{aligned}} \tag{4}$$

Mivel α,β adott, γ pedig kiszámítható, ezért α,β,γ ismert, így hasonló háromszögek végtelen halmazából kell majd kiválasztanunk azt az egyet, amelyiknél a beírt kör sugara r. Ilyen háromszög mindig lesz, és mindig csak egy, ezért *a feladat megoldása egyértelmű.*

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

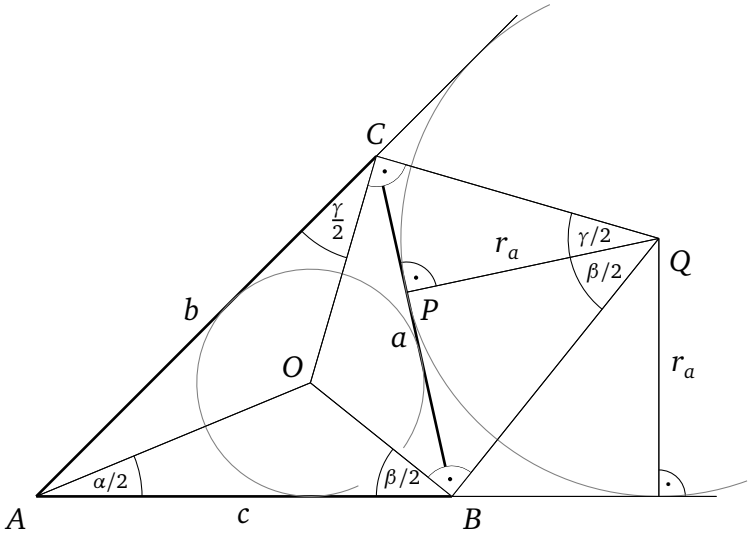
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

20. Egy hozzáírt kör sugara és két szög (egyértelmű) (r_a, α, β)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (20-1. ábra).

Most $\alpha+\beta<180°$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele, és

$$\gamma = 180° - (\alpha+\beta). \tag{1}$$



20-1. ábra

Vegyük észre, hogy

$$PCO\measuredangle = PQC\measuredangle = \gamma/2 \quad \text{és} \tag{2}$$
$$PBO\measuredangle = PQB\measuredangle = \beta/2 \tag{3}$$

merőleges szárú szögek, és mivel mindkét pár mindkét szöge kisebb 90°-nál, ezért páronként egyenlők.

Az a oldalt a BPQ és CPQ derékszögű háromszögekből számolhatjuk:

$$a = r_a \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + r_a \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}, \tag{4}$$

$$\boxed{a = r_a \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right).} \tag{5}$$

A hiányzó b és c oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)

$$\boxed{\begin{aligned} b &= \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot a, \\ c &= \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a. \end{aligned}} \tag{6}$$

Mivel α, β adott, γ pedig kiszámítható, ezért α, β, γ ismert, így hasonló háromszögek végtelen halmazából kell majd kiválasztanunk azt az egyet, amelyiknél adott a hozzáírt kör sugara, most r_a. Ilyen háromszög mindig lesz, és mindig csak egy, ezért *a feladat megoldása egyértelmű.*

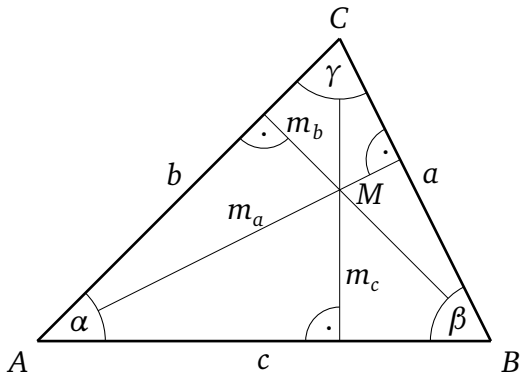
Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

21. A három magasság (egyértelmű) (m_a, m_b, m_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (21-1. ábra).

Teljesülnie kell a magasságokra vonatkozó egyenlőtlenségnek, ami a megoldás szükséges és elégséges feltétele. Lásd E. 5(3)-at. Induljunk el a terület három képletéből:



21-1. ábra

$$t = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}, \tag{1}$$

$$a = \frac{m_c}{m_a} \cdot c = x \cdot c, \tag{2}$$

$$b = \frac{m_c}{m_b} \cdot c = y \cdot c. \tag{3}$$

A *koszinusztételek* (lásd E. 12(14)-et) az a, b, c oldalakra:

$$x^2 \cdot c^2 = y^2 \cdot c^2 + c^2 - 2yc \cdot c \cdot \cos\alpha, \tag{4}$$

$$y^2 \cdot c^2 = x^2 \cdot c^2 + c^2 - 2xc \cdot c \cdot \cos\beta, \tag{5}$$

$$c^2 = x^2 \cdot c^2 + y^2 \cdot c^2 - 2xc \cdot yc \cdot \cos\gamma. \tag{6}$$

Végigosztva ezeket c^2-tel:

$$x^2 = y^2 + 1 - 2y \cdot \cos\alpha, \tag{7}$$

$$y^2 = x^2 + 1 - 2x \cdot \cos\beta, \tag{8}$$

$$1 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos\gamma. \tag{9}$$

$$x = \frac{m_c}{m_a}; \quad y = \frac{m_c}{m_b}; \qquad \text{(ismert)}, \tag{10}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(\frac{-x^2 + y^2 + 1}{2y}\right), \\ \beta &= \arccos\left(\frac{x^2 - y^2 + 1}{2x}\right), \\ \gamma &= \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{2xy}\right). \end{aligned}} \tag{11}$$

$$\boxed{a = \frac{m_c}{\sin\beta}, \qquad b = \frac{m_a}{\sin\gamma}, \qquad c = \frac{m_b}{\sin\alpha}.} \tag{12}$$

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

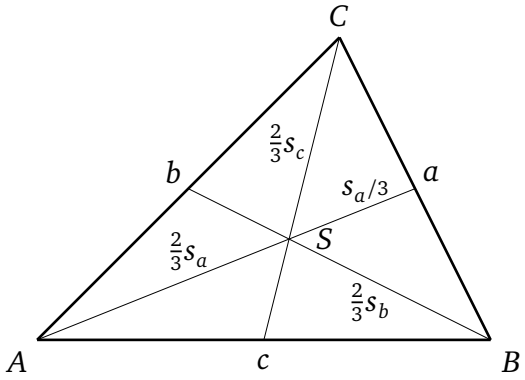
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

22. A három súlyvonal (egyértelmű) (s_a, s_b, s_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (22-1. ábra).

A háromszög bármely két súlyvonalának összege nagyobb kell legyen a harmadiknál, ami a megoldás szükséges és elégséges feltétele. Lásd E. 6(3)-at.

Induljunk el a súlyvonalak képleteiből, lásd E. 24(8)-at, és alakítsuk át őket:



22-1. ábra

$$s_a = \frac{\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}}{2}, \tag{1}$$

$$s_b = \frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2}, \tag{2}$$

$$s_c = \frac{\sqrt{2b^2+2a^2-c^2}}{2}, \tag{3}$$

$$4s_a^2 = 2c^2+2b^2-a^2, \tag{4}$$

$$4s_b^2 = 2a^2+2c^2-b^2, \tag{5}$$

$$4s_c^2 = 2b^2+2a^2-c^2. \tag{6}$$

Most alkalmazzuk ezeket az összefüggéseket a BSC, ASC és ASB háromszögekre:

$$4\cdot\left(\frac{s_a}{3}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{2}{3}s_b\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{2}{3}s_c\right)^2 - a^2, \tag{7}$$

$$4\cdot\left(\frac{s_b}{3}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{2}{3}s_c\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{2}{3}s_a\right)^2 - b^2, \tag{8}$$

$$4\cdot\left(\frac{s_c}{3}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{2}{3}s_a\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{2}{3}s_b\right)^2 - c^2. \tag{9}$$

Az oldalak négyzetének kifejezése, majd a négyzetgyökvonás után kapjuk a-t, b-t és c-t:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{2}{3}\sqrt{2s_b^2+2s_c^2-s_a^2}, \\ b &= \frac{2}{3}\sqrt{2s_c^2+2s_a^2-s_b^2}, \\ c &= \frac{2}{3}\sqrt{2s_a^2+2s_b^2-s_c^2}. \end{aligned}} \tag{10}$$

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

23. A három hozzáírt kör sugara (egyértelmű) (r_a, r_b, r_c)

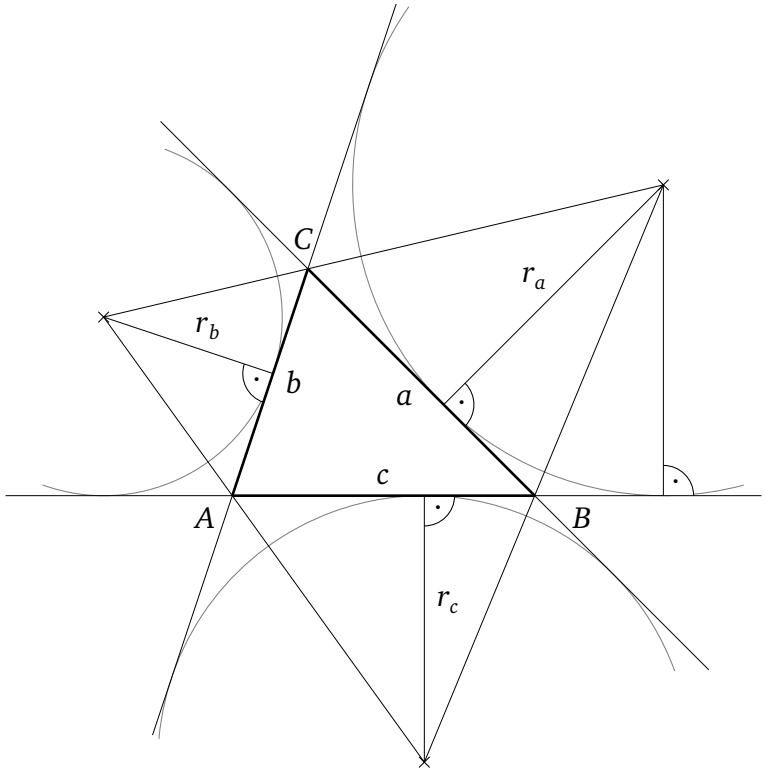
Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (23-1. ábra).

A három hozzáírt kör sugara (r_a, r_b, r_c) szabadon felvehető. Lásd E. 22(1)-et.

Induljunk el a hozzáírt körök sugarainak képleteiből (1), és fejezzük ki az oldalakat, (2):

E. 34(3)
$$r_a = \frac{t}{s-a}, \quad r_b = \frac{t}{s-b}, \quad r_c = \frac{t}{s-c}, \tag{1}$$

$$a = s - \frac{t}{r_a}, \quad b = s - \frac{t}{r_b}, \quad c = s - \frac{t}{r_c}. \tag{2}$$



23-1. ábra

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{t^3}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{s \cdot t^3}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{s \cdot t^3}{t^2} = s \cdot t, \tag{3}$$

E. 32(4)
$$t = r \cdot s \qquad \text{felhasználásával} \tag{4}$$

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c = r \cdot s^2, \tag{5}$$

$$s = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot \frac{1}{r}}, \tag{6}$$

E. 7(1)
$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \quad \text{felhasználásával} \tag{7}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$s=\sqrt{r_a\cdot r_b\cdot r_c\cdot\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)}, \tag{8}$$

$$s=\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}, \tag{9}$$

$$r_a\cdot r_b\cdot r_c=s\cdot t,\qquad t=\frac{r_a\cdot r_b\cdot r_c}{\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}}, \tag{10}$$

$$a=s-\frac{t}{r_a}=\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}-\frac{r_b\cdot r_c}{\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}}=\frac{\cancel{r_br_c}+r_ar_c+r_ar_b-\cancel{r_br_c}}{\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}}, \tag{11}$$

$$b=s-\frac{t}{r_b}=\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}-\frac{r_a\cdot r_c}{\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}}=\frac{r_br_c+\cancel{r_ar_c}+r_ar_b-\cancel{r_ar_c}}{\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}}, \tag{12}$$

$$c=s-\frac{t}{r_c}=\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}-\frac{r_a\cdot r_b}{\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}}=\frac{r_br_c+r_ar_c+\cancel{r_ar_b}-\cancel{r_ar_b}}{\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}}, \tag{13}$$

$$\boxed{\begin{aligned}a&=\frac{r_ar_c+r_ar_b}{\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}},\\ b&=\frac{r_br_c+r_ar_b}{\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}},\\ c&=\frac{r_br_c+r_ar_c}{\sqrt{r_br_c+r_ar_c+r_ar_b}}.\end{aligned}} \tag{14}$$

Ha $r_a=r_b=r_c$, akkor $a=b=c$, a háromszög egyenlő oldalú, lásd (1)-et és (14)-et, és

$$a=\frac{2r_a^2}{\sqrt{3r_a^2}}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot r_a=2\cdot\operatorname{tg}30^\circ\cdot r_a.$$

A (14) eredmények felhasználásával bizonyítható, hogy r_a, r_b, r_c felvételétől függetlenül teljesül a *háromszög-egyenlőtlenség* is.

A megoldások száma mindig 1. A feladat megoldása egyértelmű.

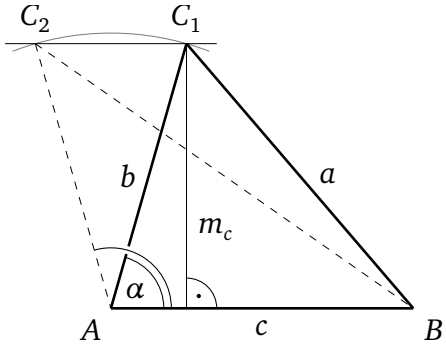
Most három oldal $(a,b,c)\overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

24. Két oldal és a terület (b, c, t)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (24-1. ábra).

Induljuk el a *trigonometrikus területképletből*, lásd (1)-et, fejezzük ki $\sin\alpha$-t, lásd (2)-t, és vizsgáljuk meg a lehetséges értékeket:



24-1. ábra

E. 11(15) $$t = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2}, \tag{1}$$

$$\sin\alpha = \frac{2t}{bc}. \tag{2}$$

- $\frac{2t}{bc} = \sin\alpha > 1$ nincs megoldás.

1. $\frac{2t}{bc} = \sin\alpha = 1$ egy megoldás van, $\alpha = 90°$.

2. $\frac{2t}{bc} = \sin\alpha < 1$ két megoldás van, $\begin{cases} \alpha_1 = \arcsin\frac{2t}{bc} < 90°, \\ \alpha_2 = 180° - \alpha_1 > 90°. \end{cases}$

   Lásd a 24-1. ábrát.

A hiányzó a oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22) $$\boxed{a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}.} \tag{3}$$

A $\frac{2t}{bc} = \sin\alpha \le 1$ *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mint a 24-1. ábrán.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

25. Két oldal és a kerület (egyértelmű) (a, b, k)

Most $k > a + b$ *a megoldás szükséges feltétele, és*

$$c = k - (a + b) > 0. \tag{1}$$

Példa: $a = 2$, $b = 3$, $k = 6$ esetén $c = 1$, még sincs megoldás, tehát:

E. 1(3) $$|a - b| < c < a + b. \tag{2}$$

Vagyis a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

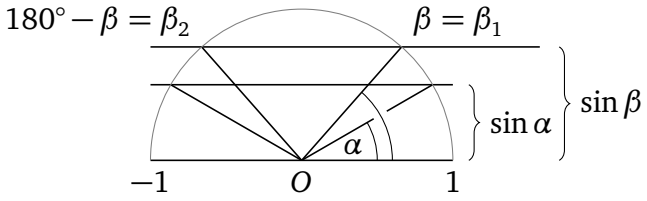
Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

26. Két szög szinusza, a szögek kiszámítása $(\sin\alpha, \sin\beta) \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma$

Induljunk el az adott $\sin\alpha$-ból és $\sin\beta$-ból, és vizsgáljuk meg a lehetséges értékpárokat (26-1. ábra).



26-1. ábra

Szükséges feltételek:

$$0 < x = \sin\alpha \le 1,$$
$$0 < y = \sin\beta \le 1.$$

Jelöljük:

$$\alpha_1 = \arcsin(x) \le 90°, \qquad \beta_1 = \arcsin(y) \le 90°, \tag{1}$$
$$\alpha_2 = 180° - \alpha_1, \qquad \beta_2 = 180° - \beta_1. \tag{2}$$

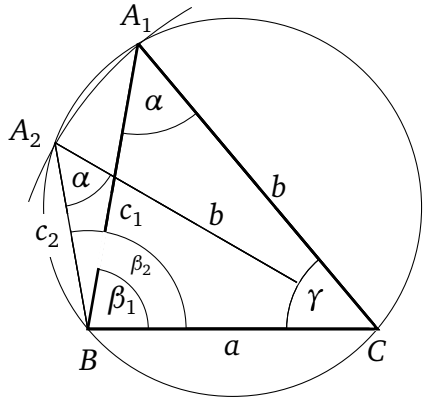
Most olyan α, β párok választhatók, ahol

$$\alpha + \beta < 180°. \tag{3}$$

Itt (3) *szükséges és elégséges feltétel.*

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta). \tag{4}$$

Most ismert α, β, γ, a megoldások száma pedig 0, 1 vagy 2 lehet.
Lássunk egy példát is.



26-2. ábra

Példa: Legyen adott a

$$\sin\alpha < \sin\beta < 1.$$

Mivel hosszúságok most nincsenek, a *kerületi szögek tétele* miatt az ABC háromszögek α szöge egyenlő, és

$$\alpha < \beta.$$

A $180° - \alpha$ (3) miatt nem kerülhet szóba, a $180° - \beta$ azonban igen (26-1. ábra).

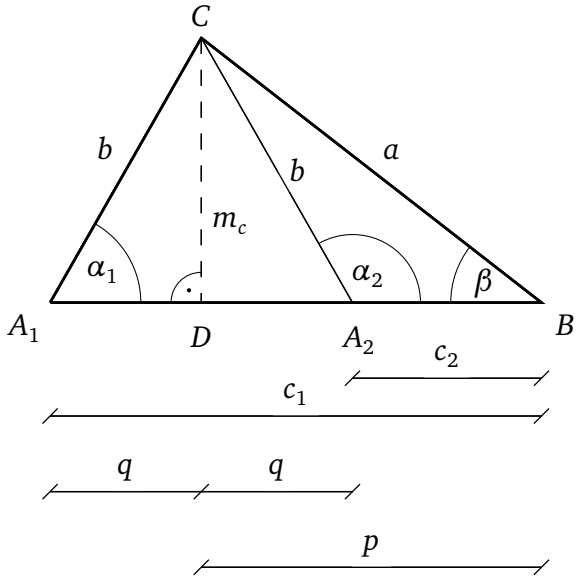
Vegyük észre, hogy β_1 (hegyesszög) az $\widehat{A_1C}$ köríven nyugszik, β_2 (tompaszög) az $\widehat{A_2A_1C}$ köríven nyugszik. A két körív azonban az egyenlő b húrok miatt körré egészíti ki egymást $\left(\widehat{A_1C} = \widehat{A_2BC}\right)$, így $\beta_2 = 180° - \beta_1$. A két megoldás az A_1BC és az A_2BC háromszög (26-2. ábra).

Ajánlott irodalom a körívek jelöléséhez:
[1] Hajós György: Bevezetés a geometriába 31. oldal.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

27. Két oldal és a harmadikhoz tartozó magasság 1. (a,b,m_c)
(trigonometrikus megoldás)

Rajzoljunk fel egy ABC háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (27-1. és 27-2. ábrák).



27-1. ábra

1. Legyen: $a \geq b > m_c$, (1)

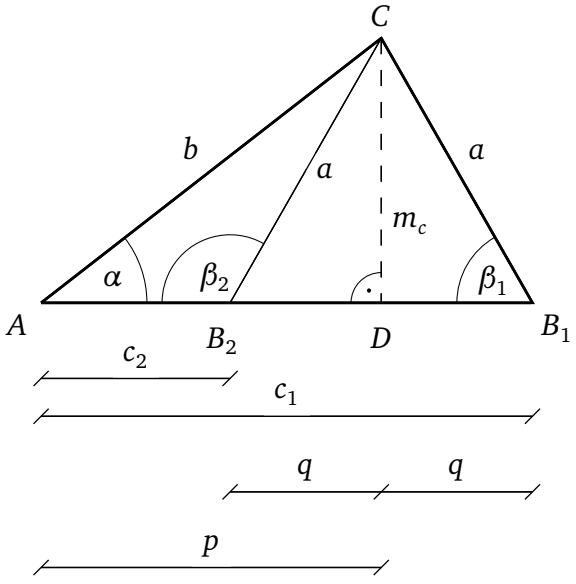
$$a \geq b \Leftrightarrow \alpha \geq \beta \Rightarrow \beta < 90°. \quad (2)$$

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \frac{m_c}{b} < 1,$$
$$\alpha_1 = \arcsin\frac{m_c}{b} < 90°,$$
$$\alpha_2 = 180° - \alpha_1 > 90°,$$
$$\sin\beta = \frac{m_c}{a} < 1,$$
$$\beta = \arcsin\frac{m_c}{a} < 90°,$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha_1, \\ c_2 &= a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha_2. \end{aligned}} \quad (3)$$

E. 9(3) $\cos\alpha_2 = -\cos(180° - \alpha_2) = -\cos\alpha_1.$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



27-2. ábra

2. Legyen: $b \geq a > m_c$, (4)

$$a \leq b \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha < 90°. \tag{5}$$

$$\sin\beta_1 = \sin\beta_2 = \frac{m_c}{a} < 1,$$
$$\beta_1 = \arcsin\frac{m_c}{a} < 90°,$$
$$\beta_2 = 180° - \beta_1 > 90°,$$
$$\sin\alpha = \frac{m_c}{b} < 1,$$
$$\alpha = \arcsin\frac{m_c}{b} < 90°,$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= b\cdot\cos\alpha + a\cdot\cos\beta_1,\\ c_2 &= b\cdot\cos\alpha + a\cdot\cos\beta_2. \end{aligned}} \tag{6}$$

- $a^2 + b^2 = c_1^2$ esetén $\gamma = 90°$ derékszögű,
- $a > b = m_c$ esetén $\alpha_1 = \alpha_2 = 90°$ derékszögű,
- $b > a = m_c$ esetén $\beta_1 = \beta_2 = 90°$ derékszögű,
- $m_c > a$ és/vagy $m_c > b$ esetén nincs megoldás.

A megoldások száma a, b, m_c felvételétől függ, 0, 1 vagy 2 lehet, a 27-1. és a 27-2. ábrán is a két megoldás látható.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

28. Két oldal és a harmadikhoz tartozó magasság 2. (a, b, m_c)

(Egy másik út Pitagorasz-tétellel)

1. $a \geq b > m_c$ esetén (lásd a 27-1. ábrát):

$$\overline{BD} = p = \sqrt{a^2 - m_c^2}, \tag{1}$$
$$\overline{AD} = q = \sqrt{b^2 - m_c^2}, \tag{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= p + q,\\ c_2 &= p - q. \end{aligned}} \tag{3}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

2. $b \geq a > m_c$ esetén (lásd a 27-2. ábrát):

$$\overline{BD} = q = \sqrt{a^2 - m_c^2}, \tag{4}$$

$$\overline{AD} = p = \sqrt{b^2 - m_c^2}, \tag{5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 &= p + q, \\ c_2 &= p - q. \end{aligned}} \tag{6}$$

3. Ha $a = b > m_c$, akkor $c = c_1 - c_2 = 2q$.

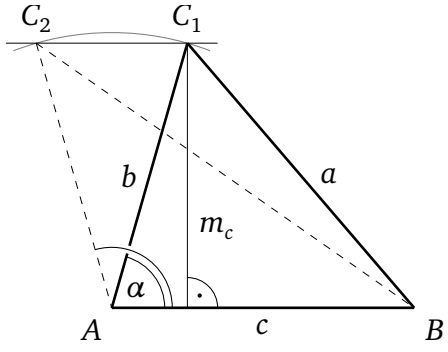
A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

29. Két oldal és az egyikhez tartozó magasság (b, c, m_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (29-1. ábra).

Írjuk fel a $\sin\alpha$-t, és vizsgáljuk meg a lehetséges értékeket:



29-1. ábra

$$\sin\alpha = \frac{m_c}{b}. \tag{1}$$

- $\sin\alpha > 1$. nincs megoldás

1. $\sin\alpha = 1, \quad \alpha = 90°$. egy megoldás

2. $\sin\alpha < 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \arcsin(m_c/b) < 90°, \\ \alpha_2 = 180° - \alpha_1 > 90°. \end{cases}$ két megoldás

A hiányzó a oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)

$$\boxed{a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}.} \tag{2}$$

A $\sin\alpha = (m_c/b) \leq 1$ *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mint a 29-1. ábrán.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

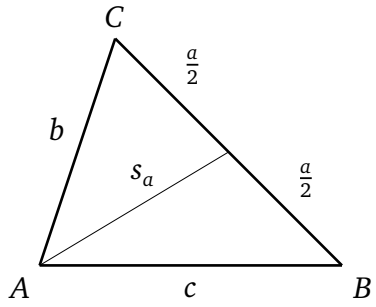
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

30. Két oldal és a harmadikhoz tartozó súlyvonal (b, c, s_a) (egyértelmű)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (30-1. ábra), (30-2. ábra).

Első megoldás

Induljunk el az s_a súlyvonal oldalakkal kifejezett képletéből, lásd (1)-et, és fejezzük ki a-t, lásd (2)-t:



30-1. ábra

E. 24(8) $$s_a = \frac{\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}{2}, \tag{1}$$

$$\boxed{a = \sqrt{2c^2 + 2b^2 - 4s_a^2}.} \tag{2}$$

$$2c^2 + 2b^2 - 4s_a^2 > 0 \quad \textit{szükséges feltétel.} \tag{3}$$

Példa: $b = 2,\ c = 3,\ s_a = 5/2$ és (2)-ből $a = 1$. Most teljesül (3), még sincs megoldás.

E. 1(3) $$|b - c| < a < b + c. \tag{4}$$

A háromszög-egyenlőtlenség teljesülése tehát a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Ebből adódik a feltétel s_a-ra:

$$(b - c)^2 < a^2 < (b + c)^2. \tag{5}$$

Az a^2 (2)-ből történő behelyettesítése után:

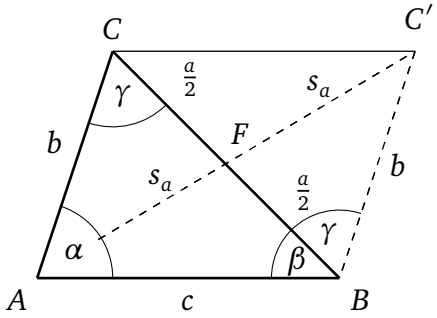
$$\begin{aligned} b^2 - 2bc + c^2 < 2b^2 + 2c^2 - 4s_a^2 < b^2 + 2bc + c^2, &\qquad \big| -(2b^2 + 2c^2) \\ -b^2 - 2bc - c^2 < -4s_a^2 < -b^2 + 2bc - c^2, &\qquad \big| \cdot(-1) \\ (b + c)^2 > 4s_a^2 > (b - c)^2, &\qquad \big| \sqrt{\ } \ \big| : 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\left|\frac{b - c}{2}\right| < s_a < \frac{b + c}{2}.} \tag{6}$$

Megjegyzés: Ha b és c különböző és helyet cserél, ugyanazt az a-t kapjuk, ez azonban nem ugyanaz a háromszög.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Második megoldás



30-2. ábra

Tükrözzük az $ABC\triangle$-et a $\overline{BC}$ oldal F felezőpontjára.

Írjuk fel a *koszinusztételt* az ABC' háromszögben $2s_a$-ra:

$$(2s_a)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\beta + \gamma),$$

$$\beta + \gamma = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - 4s_a^2}{2bc}\right),$$

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma). \tag{7}$$

A hiányzó a oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)

$$\boxed{a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}.} \tag{8}$$

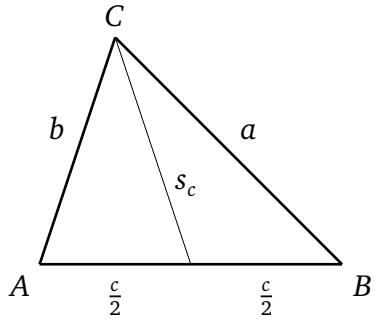
Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

31. Két oldal és az egyikhez tartozó súlyvonal (b, c, s_c) (egyértelmű)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (31-1. ábra).

Induljunk el az s_c súlyvonal oldalakkal kifejezett képletéből, lásd (1)-et, és fejezzük ki a-t, lásd (2)-t:



31-1. ábra

E. 24(8) $$s_c = \frac{\sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}}{2}, \tag{1}$$

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{4s_c^2 - 2b^2 + c^2}{2}}.} \tag{2}$$

$$4s_c^2 - 2b^2 + c^2 > 0 \quad \textit{szükséges feltétel}. \tag{3}$$

Példa: $b = 2,\ c = 3,\ s_c = 1/2$, és (2)-ből $a = 1$. Most teljesül (3), még sincs megoldás.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

E. 1(3) $$|b-c| < a < b+c, \tag{4}$$

vagy

$$\left|b-\frac{c}{2}\right| < s_c < b+\frac{c}{2}. \tag{5}$$

A háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a, b, c vagy s_c, b, c/2 között tehát a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

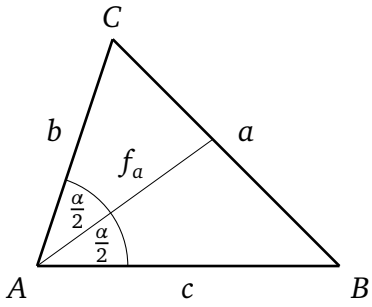
Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

32. Két oldal és a harmadikhoz tartozó belső szögfelező 1. (b, c, f_a) (egyértelmű)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (32-1. ábra).

Induljunk el az f_a belső szögfelező oldalakkal kifejezett képletéből, lásd (1)-et, és fejezzük ki a-t, lásd (2)-t:



32-1. ábra

E. 29(3) $$f_a = \sqrt{bc\cdot\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)}, \tag{1}$$

$$\boxed{a = (b+c)\sqrt{1-\frac{f_a^2}{bc}}.} \tag{2}$$

$$0 < 1-\frac{f_a^2}{bc} < 1,$$

$$0 < f_a < \sqrt{bc} \quad \textit{szükséges feltétel}. \tag{3}$$

Példa: $b=2,\ c=3,\ f_a=12/5$ és (2)-ből $a=1$. Most teljesül (3), még sincs megoldás.

E. 1(3) $$|b-c| < a < b+c. \tag{4}$$

Vagy a-t behelyettesítve (2)-ből:

$$|b-c| < (b+c)\sqrt{1-\frac{f_a^2}{bc}} < b+c, \tag{5}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

átalakítás után pedig

$$0 < f_a < \frac{2bc}{b+c} \le \sqrt{bc}. \tag{6}$$

A háromszög-egyenlőtlenség teljesülése (lásd (4)-et, illetve (6)-ot) tehát a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

33. Két oldal és a harmadikhoz tartozó belső szögfelező 2. (b, c, f_a) (egyértelmű) (egy másik út)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (32-1. ábra).

Induljunk el az f_a belső szögfelező már ismert képletéből, lásd (1)-et, és fejezzük ki $\cos(\alpha/2)$-t, lásd (2)-t:

E. 28(1)
$$f_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}, \tag{1}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{b+c}{2bc} \cdot f_a, \qquad 0° < \frac{\alpha}{2} < 90°, \tag{2}$$

$$0 < \frac{b+c}{2bc} \cdot f_a < 1, \qquad \text{tehát} \tag{3}$$

(3) *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Az α szög (2)-ből, a hiányzó a oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)
$$\boxed{\begin{aligned} \alpha &= 2 \cdot \arccos\left(\frac{b+c}{2bc} \cdot f_a\right), \\ a &= \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}. \end{aligned}} \tag{4}$$

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

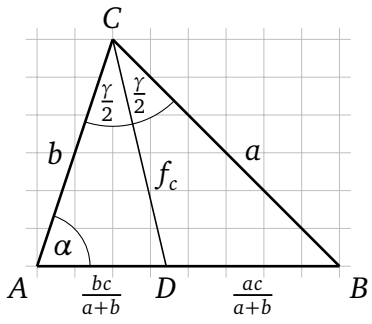
Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

34. Két oldal és az egyikhez tartozó belső szögfelező (b, c, f_c) (egyértelmű)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (34-1. ábra).

Induljunk el az f_c belső szögfelelő oldalakkal kifejezett képletéből, lásd (1)-et. A műveletek elvégzése után egy a-ra nézve harmadfokú egyenlethez jutunk b, c és f_c paraméterekkel, lásd (2)-t:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



34-1. ábra

E. 29(3) $$f_c = \sqrt{ab \cdot \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}, \tag{1}$$

$$\frac{f_c^2}{b} = \frac{a \cdot (a^2 + 2ab + b^2 - c^2)}{(a+b)^2},$$

$$\frac{f_c^2}{b} \cdot (a+b)^2 = a^3 + 2a^2 b + (b^2 - c^2) \cdot a,$$

$$\frac{f_c^2}{b} \cdot a^2 + f_c^2 \cdot 2a + f_c^2 \cdot b = a^3 + 2a^2 b + (b^2 - c^2) \cdot a,$$

$$\boxed{a^3 + \left(2b - \frac{f_c^2}{b}\right) \cdot a^2 + (b^2 - c^2 - 2f_c^2) \cdot a - f_c^2 b = 0.} \tag{2}$$

Az $a \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás szükséges feltétele.*

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség*:

E. 1(3) $$|b - c| < a < b + c. \tag{3}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ *és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Példa. A 34-1. ábra adataiból elindulva:

$$b = 10\sqrt{10} \approx 31{,}6228; \quad c = 40; \quad f_c = 30 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(5 - 2\sqrt{5}\right)} \approx 30{,}8246,$$

$$a^3 + 33{,}1990\, a^2 - 2500{,}31\, a - 30046{,}57 = 0,$$
$$a_1 \approx -10{,}9502; \quad a_2 \approx 42{,}4264; \quad a_3 \approx -64{,}6753.$$

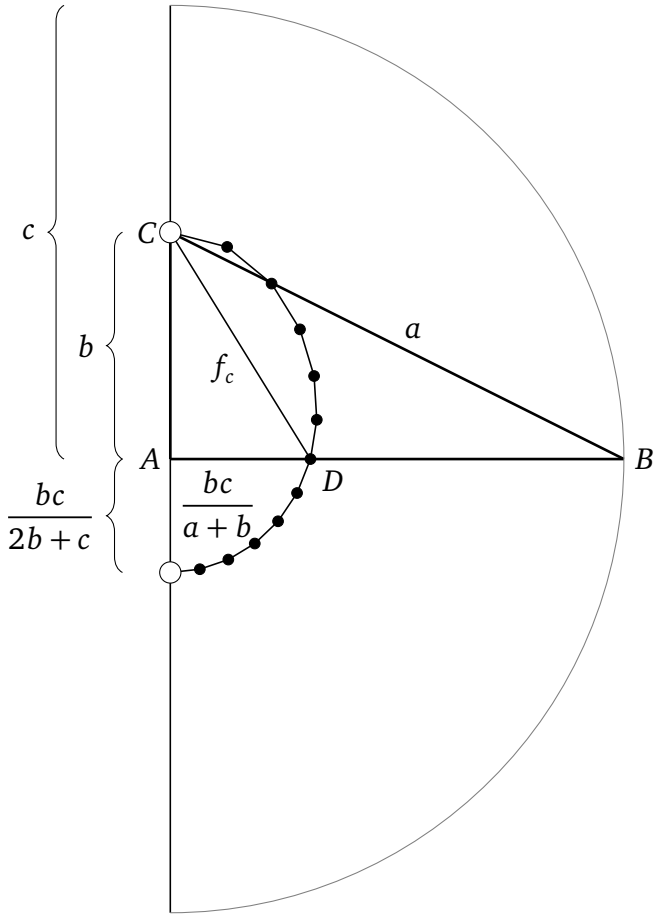
A két negatív érték nyilván nem értelmezett, a megoldások száma a példában 1. A pozitív valós gyök még nem biztos, hogy megoldás, teljesülnie kell a háromszög-egyenlőtlenségnek is.

A részletesebb vizsgálat:

Most lássunk egy grafikus vizsgálatot f_c lehetséges értékeire.

Vegyük föl b-t és c-t mint paramétert, és szerkesszük meg a D pont által leírt görbét (mindkét ábrában fekete pontokkal jelöltük) a $0° < \alpha < 180°$ intervallumon. D pont helyét pontról pontra berajzolhatjuk, ha α felvétele után kiszámítjuk a-t a *koszinusztétellel*, majd az a, b, c oldalak ismeretében f_c-t (1)-ből. Ezt a görbét kell majd metssze valahol egy konkrét (b, c, f_c) esetben az utoljára felvett f_c. Lásd az E. 25. *Belső szögfelező tétel* és a 34-2. és 34-3. ábrákat. Az ábrákba berajzolt $ABC\triangle$-ek az $\alpha = 90°$ derékszögű eseteket mutatják.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



34-2. ábra

A b és c paraméterek felvétele után $0 < b < c$ esetén lásd a 34-2. ábrát:

E. 1(3)
$$0 < |b-c| < a < b+c. \tag{4}$$

$$c-b < a < b+c, \tag{5}$$

$$\frac{bc}{2b+c} < \frac{bc}{a+b} < b, \tag{6}$$

$$0 < f_c < b + \frac{bc}{2b+c}, \tag{7}$$

$$\boxed{0 < f_c < \frac{2b\cdot(b+c)}{2b+c}.} \tag{8}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az f_c (8) intervalluma (1)-ből elindulva (5) felhasználásával is levezethető:

$$\sqrt{(c-b)b\cdot\left(1-\frac{c^2}{((c-b)+b)^2}\right)}<f_c<\sqrt{(b+c)b\cdot\left(1-\frac{c^2}{((b+c)+b)^2}\right)}, \tag{9}$$

$$0<f_c<\sqrt{(b+c)b\cdot\frac{(2b+c)^2-c^2}{(2b+c)^2}}, \tag{10}$$

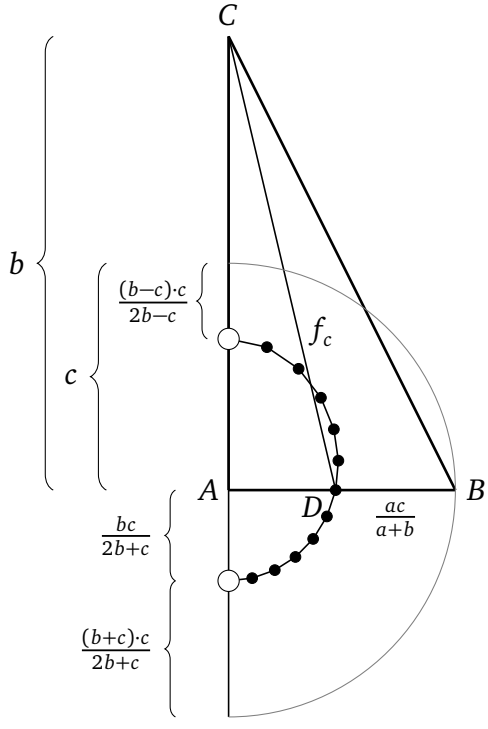
$$0<f_c<\sqrt{\frac{(b+c)b\cdot(2b+c+c)(2b+c-c)}{(2b+c)^2}}, \tag{11}$$

$$0<f_c<\sqrt{\frac{(b+c)b\cdot 2(b+c)\cdot 2b}{(2b+c)^2}}, \tag{12}$$

$$\boxed{0<f_c<\frac{2b\cdot(b+c)}{2b+c}.} \tag{13}$$

$0<b=c$ esetén:

$$\boxed{0<f_c<\frac{4b}{3}.} \tag{14}$$



34-3. ábra

A b és c paraméterek felvétele után $0<c<b$ esetén lásd a 34-3. ábrát:

E. 1(3) $$0<|b-c|<a<b+c. \tag{15}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$b-c<a<b+c, \tag{16}$$

$$\frac{(b-c)\cdot c}{2b-c}<\frac{ac}{a+b}<\frac{(b+c)\cdot c}{2b+c}, \tag{17}$$

$$(b-c)+\frac{(b-c)\cdot c}{2b-c}<f_c<(b+c)-\frac{(b+c)\cdot c}{2b+c}, \tag{18}$$

$$\boxed{\frac{2b\cdot(b-c)}{2b-c}<f_c<\frac{2b\cdot(b+c)}{2b+c}.} \tag{19}$$

Az f_c (19) intervalluma (1)-ből elindulva (16) felhasználásával is levezethető:

$$\sqrt{(b-c)b\cdot\left(1-\frac{c^2}{((b-c)+b)^2}\right)}<f_c<\sqrt{(b+c)b\cdot\left(1-\frac{c^2}{((b+c)+b)^2}\right)}, \tag{20}$$

$$\sqrt{(b-c)b\cdot\frac{(2b-c)^2-c^2}{(2b-c)^2}}<f_c<\sqrt{(b+c)b\cdot\frac{(2b+c)^2-c^2}{(2b+c)^2}}, \tag{21}$$

$$\sqrt{\frac{(b-c)b\cdot(2b-c+c)(2b-c-c)}{(2b-c)^2}}<f_c\sqrt{\frac{(b+c)b\cdot(2b+c+c)(2b+c-c)}{(2b+c)^2}}, \tag{22}$$

$$\sqrt{\frac{(b-c)b\cdot 2b\cdot 2(b-c)}{(2b-c)^2}}<f_c<\sqrt{\frac{(b+c)b\cdot 2(b+c)\cdot 2b}{(2b+c)^2}}, \tag{23}$$

$$\boxed{\frac{2b\cdot(b-c)}{2b-c}<f_c<\frac{2b\cdot(b+c)}{2b+c}.} \tag{24}$$

$0<b=c$ esetén:

$$\boxed{0<f_c<\frac{4b}{3}.} \tag{25}$$

Megjegyzés: b és c nem cserélhet helyet, mert akkor f_c helyett f_b-ről kellene beszélnünk.

Továbbá b és c felvétele után a $0°<\alpha<180°$ intervallumon $a(\alpha)$ szigorúan monoton növekvő függvény lesz (lásd a *koszinusztételt*), (1) miatt $f_c(a)$ is, és így minden f_c-hez egy a tartozik majd.

A 34-2. és 34-3. rajzokból is látszik, ha f_c nincs a kijelölt intervallumban, akkor nincs megoldás, továbbá az is látszik, *ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.*

Most három oldal $(a,b,c)\overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

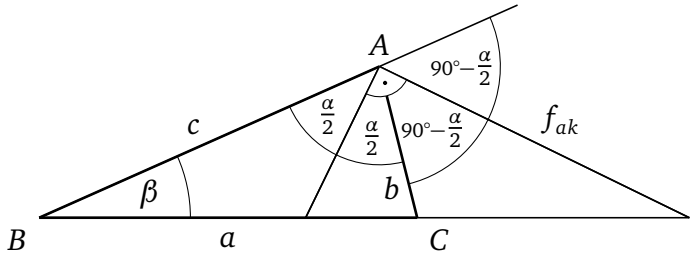
35. Két oldal és a harmadikhoz tartozó külső szögfelező (b, c, f_{ak}) (egyértelmű)

Rajzoljunk fel egy ABC háromszöget úgy, hogy:

E. 2(3) $$b < c \Leftrightarrow \beta < \gamma < 180° - \beta \Rightarrow \beta < 90°, \tag{1}$$

és jelöljük a választott adatokat (35-1. ábra).

Induljunk el az f_{ak} külső szögfelező oldalakkal kifejezett képletéből, lásd (2)-t és fejezzük ki a-t, lásd (3)-at:



35-1. ábra

E. 31(3) $$f_{ak} = \sqrt{bc \cdot \left(\frac{a^2}{(b-c)^2} - 1 \right)}, \qquad b \neq c. \tag{2}$$

$$\boxed{a = |b-c| \cdot \sqrt{1 + \frac{f_{ak}^2}{bc}}}, \qquad a > 0. \tag{3}$$

Példa: $b = 1$, $c = 2$, $f_{ak} = 4$ és (3)-ból $a = 3$. Most $a > 0$, még sincs megoldás.

E. 1(3) $$0 < |b-c| < a < b + c, \qquad b \neq c. \tag{4}$$

Vagy a-t behelyettesítve (3)-ból:

$$|b-c| < |b-c| \cdot \sqrt{1 + \frac{f_{ak}^2}{bc}} < b + c, \tag{5}$$

átalakítás után pedig

$$0 < f_{ak} < \frac{2bc}{|b-c|}. \tag{6}$$

A $b = c$ eset nyilván nem értelmezett, hiszen ekkor $f_{ak} \parallel a$, így metszéspont sincs.

A $b \neq c$, és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése (lásd (4)-et, illetve (6)-ot) a megoldás szükséges és elégséges feltételei. A $b > c$ esetén ugyanerre az eredményre jutunk.

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

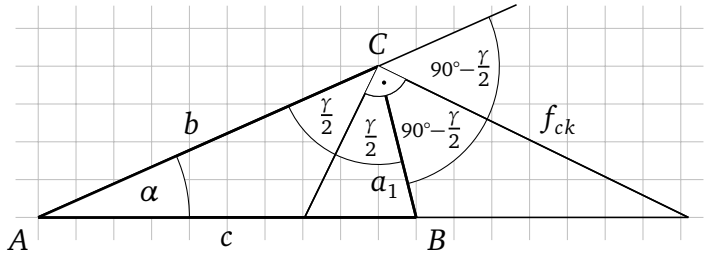
36. Két oldal és az egyikhez tartozó külső szögfelező (b, c, f_{ck})

Rajzoljunk fel egy ABC háromszöget úgy, hogy:

E. 2(3) $$a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta < 180^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha < 90^\circ, \tag{1}$$

és jelöljük a választott adatokat (36-1. ábra).

Induljunk el az f_{ck} külső szögfelező oldalakkal kifejezett képletéből, lásd (2)-t. A műveletek elvégzése után egy a-ra nézve harmadfokú egyenlethez jutunk b, c, f_{ck} paraméterekkel, lásd (3)-at:



36-1. ábra

E. 31(3) $$f_{ck} = \sqrt{ab \cdot \left(\frac{c^2}{(a-b)^2} - 1\right)}, \qquad a \neq b. \tag{2}$$

$$f_{ck}^2 = \frac{ab \cdot (c^2 - a^2 + 2ab - b^2)}{(a-b)^2},$$

$$f_{ck}^2 \cdot (a-b)^2 = abc^2 - a^3 b + 2a^2 b^2 - ab^3,$$

$$f_{ck}^2 a^2 - f_{ck}^2 \cdot 2ab + f_{ck}^2 b^2 - abc^2 + a^3 b - 2a^2 b^2 + ab^3 = 0,$$

$$b \cdot a^3 + (f_{ck}^2 - 2b^2) \cdot a^2 - (f_{ck}^2 \cdot 2b + bc^2 - b^3) \cdot a + f_{ck}^2 \cdot b^2 = 0, \qquad \Big| : b$$

$$\boxed{a^3 + \left(\frac{f_{ck}^2}{b} - 2b\right) \cdot a^2 - \left(2f_{ck}^2 + c^2 - b^2\right) \cdot a + f_{ck}^2 b = 0.} \tag{3}$$

Az $a \in \mathbf{R}^+$ a megoldás szükséges feltétele.

Az $a^3 + pa^2 + qa + r = 0$ valós együtthatós harmadfokú egyenlet valós gyökei (melyek között lehetnek többszörös gyökök is) megegyeznek az $f(a) = a^3 + pa^2 + qa + r$ harmadfokú függvény zérushelyeivel. Mivel ez a függvény folytonos, továbbá $r = f_{ck}^2 b > 0$-nál metszi az y tengelyt és $\lim\limits_{a \to -\infty} f(a) = -\infty$, kell legyen ennek a függvénynek legalább egy negatív zérushelye, vagyis a pozitív zérushelyek száma, (3) pozitív valós gyökeinek száma legfeljebb kettő.

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3) $$|b - c| < a < b + c, \qquad a \neq b. \tag{4}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

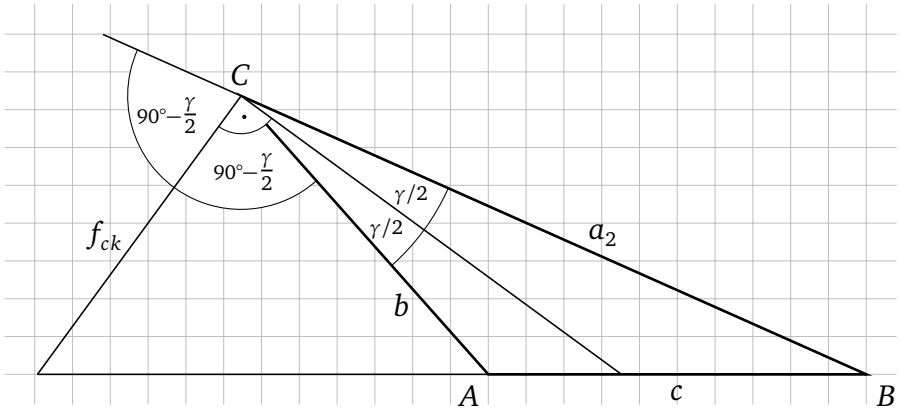
1. példa. A 36-1. ábra adataiból elindulva:

$$b = 5\sqrt{97} \approx 49{,}2443; \quad c = 50; \quad f_{ck} = \frac{5 \cdot \sqrt{3298 + 50 \cdot \sqrt{1649}}}{8} \approx 45{,}6224,$$

$$a^3 - 56{,}2217\, a^2 - 4237{,}8079\, a + 102497{,}2565 = 0,$$

$$a_1 \approx 20{,}6155; \quad a_2 \approx 90{,}5272; \quad a_3 \approx -54{,}9210.$$

Negatív gyök nyilván nem értelmezett. Az a_1 megoldást a 36-1. ábra, az a_2 megoldást pedig a 36-2. ábra mutatja.



36-2. ábra

2. példa:

$$b = 20; \quad c = 50; \quad f_{ck} = 46,$$

$$a_1 \approx 7{,}3; \quad a_2 \approx 47{,}9; \quad a_3 \approx -121{,}0.$$

Látható, hogy a_1-re nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, a_3 pedig negatív, tehát csak egy megoldás van. Előfordulhat, hogy (3)-ra két pozitív gyök adódik, még sincs megoldás, mert a háromszög-egyenlőtlenség egyik esetben sem teljesül. Lássunk erre is egy példát.

3. példa:

$$b = 20; \quad c = 50; \quad f_{ck} = 120,$$

$$a_1 \approx 13{,}3; \quad a_2 = 30; \quad a_3 \approx -723{,}3.$$

A példák megoldása és a vizsgálat programmal készült.

A pozitív a, b, c ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, az 1. példában 2, a 2. példában 1, a 3. példában 0.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

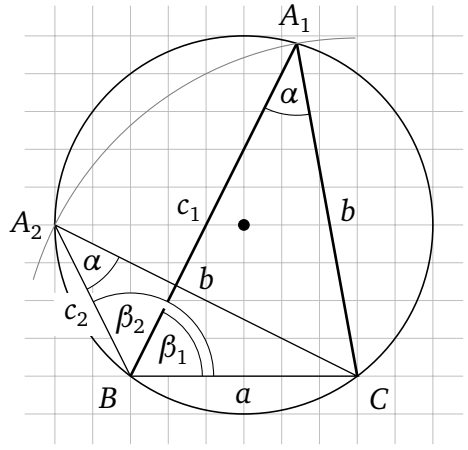
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

37. Két oldal és a körülírt kör sugara (a, b, R)

Induljunk el a könnyen felírható $\sin\alpha$-ból és $\sin\beta$-ból:

E. 11(9), E. 11(10) $$\sin\alpha = \frac{a}{2R}, \quad \sin\beta = \frac{b}{2R}.$$

A következő esetek fordulhatnak elő:

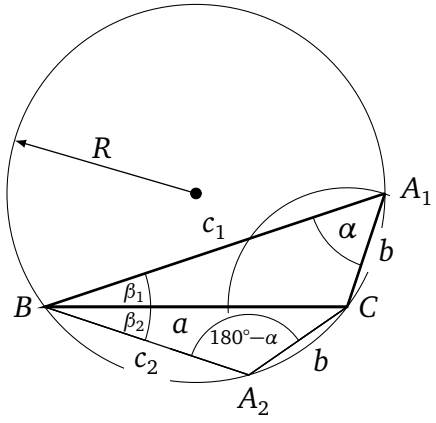


37-1. ábra

- Legyen $a < b < 2R$. (1)

$$\frac{a}{2R} < \frac{b}{2R} < 1,$$
$$\sin\alpha < \sin\beta < 1,$$
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{2R}\right) < 90°;$$
$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{b}{2R}\right) < 90°,$$
$$\beta_2 = 180° - \beta_1 > 90°.$$

Vegyük észre, hogy a β_1 (hegyesszög) az $\widehat{A_1C}$ köríven, a β_2 (tompaszög) pedig az $\widehat{A_2A_1C}$ köríven nyugszik. A két körív azonban az egyenlő b húrok miatt körré egészíti ki egymást $\left(\widehat{A_1C} = \widehat{A_2BC}\right)$, így $\beta_2 = 180° - \beta_1$ (37-1. ábra).



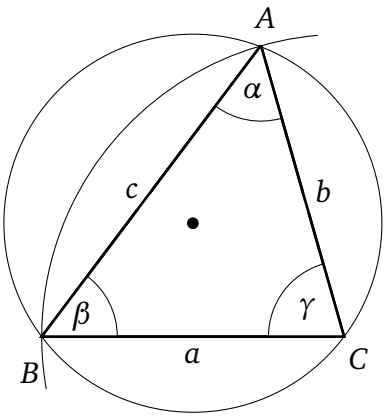
37-2. ábra

- Legyen $b < a < 2R$. (2)

$$\frac{b}{2R} < \frac{a}{2R} < 1,$$
$$\sin\beta < \sin\alpha < 1,$$
$$\beta = \arcsin\left(\frac{b}{2R}\right) < 90°;$$
$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{a}{2R}\right) < 90°,$$
$$\alpha_2 = 180° - \alpha_1 > 90°.$$

Mivel β_1 és β_2 ugyanakkora köríven nyugszik $(\widehat{A_1C} = \widehat{A_2C})$, ezért $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ és $\alpha_1 = \alpha$ (37-2. ábra).

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



37-3. ábra

- Legyen $a = b < 2R$. (3)

$$\frac{a}{2R} = \frac{b}{2R} < 1,$$
$$\sin\alpha = \sin\beta < 1,$$
$$\alpha = \beta = \arcsin\left(\frac{a}{2R}\right) < 90^\circ.$$

A folytatás pedig mindhárom esetben:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta). \tag{4}$$

A hiányzó c oldal ezután a szinusz összefüggéssel számolható:

E. 11(11)

$$\boxed{c = 2R \cdot \sin\gamma.} \tag{5}$$

Előfordulhat még: Az $a = 2R$ esetén $\alpha = 90^\circ$, $b = 2R$ esetén $\beta = 90^\circ$, $c = 2R$ esetén $\gamma = 90^\circ$, ekkor a háromszög derékszögű, az $a = b$, $a = c$ vagy $b = c$ esetén egyenlő szárú, az $a = b = c$ esetén pedig egyenlő oldalú lesz.

Példa. A 37-1. ábra adataiból elindulva:

$$a = 30; \quad b = 20\sqrt{5} \approx 44{,}7214; \quad R = 25,$$
$$\sin\alpha = 0{,}6; \quad \sin\beta \approx 0{,}8944,$$
$$\alpha \approx 36{,}8699^\circ; \quad \beta_1 \approx 63{,}4349^\circ; \quad \beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 116{,}5651^\circ,$$
$$\gamma_1 \approx 79{,}6952^\circ; \quad \gamma_2 \approx 26{,}5651^\circ,$$
$$c_1 \approx 49{,}1935; \quad c_2 \approx 22{,}3607.$$

A megoldás szükséges és elégséges feltétele: $0 < \frac{a}{2R} \le 1$, $0 < \frac{b}{2R} \le 1$, *de egyszerre mindkettő 1 nem lehet, mivel a háromszögnek legfeljebb egy derékszöge lehet. Minden olyan* α, β *pár megoldás lesz, ahol* $\alpha + \beta < 180^\circ$. *Lásd még a 26. feladatot.*

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, a 37-1. ábrán 2, a 37-2. ábrán 2, a 37-3. ábrán 1.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

38. Két oldal és a beírt kör sugara, 1. (b, c, r)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (38-1. ábra).

Keressünk feltételt a b, c, r induló adatokra:

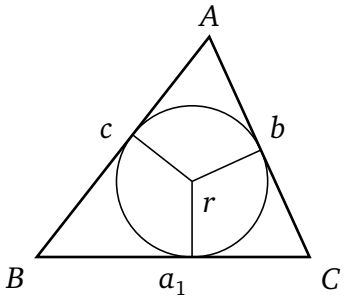
E. 19(9), E. 1(3) $$6\sqrt{3}\cdot r \le a+b+c < 2\cdot(b+c). \tag{1}$$

Egyenlőség csak $a=b=c$ esetén lesz.

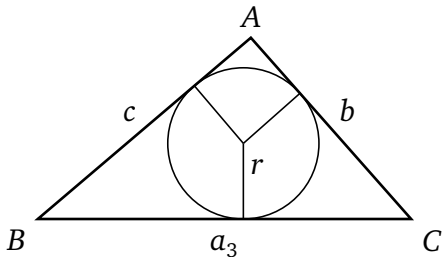
(1) *a megoldás szükséges feltétele.*

Induljunk el a *Héron-képletből*, lásd E. 36(4)-et, a terület képletéből, lásd E. 32(4)-et, mint egy kétismeretlenes $(a,\ t)$ egyenletrendszerből, és küszöböljük ki t-t, lásd (2)-t:

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = (r\cdot s)^2. \tag{2}$$



38-1. ábra



38-2. ábra

Folytassuk (2) átalakításával a megoldást. A műveletek elvégzése után egy a-ra nézve harmadfokú egyenlethez jutunk b, c, r paraméterekkel, lásd (3)-at:

$$(s-a)(s-b)(s-c) = r^2\cdot s,$$

$$\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b-c}{2}\right) = r^2\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}\right),$$

$$(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 4r^2\cdot(a+b+c),$$

$$\boxed{a^3-(b+c)\,a^2-((b-c)^2-4r^2)\,a+(b+c)\cdot((b-c)^2+4r^2)=0.} \tag{3}$$

Az $a\in\mathbf{R}^+$ a megoldás további szükséges feltétele.

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3) $$|b-c| < a < b+c. \tag{4}$$

Az $a, b, c\in\mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

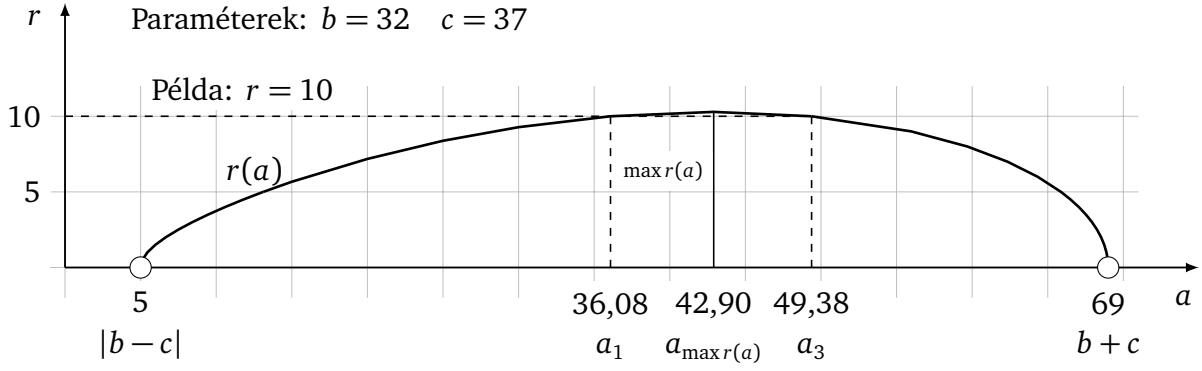
Példa. A 38-1. ábra adataiból elindulva:

$$b = 32; \quad c = 37; \quad r = 10,$$

$$a^3 - 69\,a^2 + 375\,a + 29\,325 = 0,$$

$$a_1 \approx 36{,}08; \quad a_2 \approx -16{,}46; \quad a_3 \approx 49{,}38.$$

Az a_1 megoldást a 38-1. ábra, az a_3 megoldást pedig a 38-2. ábra mutatja. A komplex, illetve negatív gyökök síkgeometriai szempontból nem tekinthetők megoldásnak.



38-3. ábra

A részletesebb vizsgálat:

Vegyük föl b-t és c-t mint paramétert. Ha most α változó, $0° < \alpha < 180°$-ig nő, akkor

E. 12(22) $$a(\alpha) = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot (-\cos\alpha)} \tag{5}$$

miatt a szigorúan monoton nő $|b-c| < a < b+c$ határokon belül, és $r(a)$ függvénynek maximuma lesz ezen az intervallumon (38-3. ábra). Mivel b, c most paraméterek, és (2)-ből

$$r(a) = \frac{t}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} \le \max r(a), \tag{6}$$

ezért r felvételekor

$$r \le \max r(a)$$

kell legyen, ami szintén *a megoldás szükséges és elégséges feltétele*. Mivel (3)-ból kifejezve $r(a)$-t kapjuk:

$$r(a) = \sqrt{\frac{-a^3 + (b+c)a^2 + (b-c)^2 a - (b+c)(b-c)^2}{4 \cdot (a+b+c)}}. \tag{7}$$

Így a $\max r(a)$-hoz tartozó a-t az $r'(a) = 0$-ból nyert

$$a^3 + (b+c)\,a^2 - (b+c)^2 a - (b+c)(b-c)^2 = 0 \tag{8}$$

egyenletből számolhatjuk.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Mivel $r''(a)$ előállítása nehézkes, azt, hogy maximumról van szó, az $r(a)$ függvény néhány ponton történő helyettesítésével is ellenőrizhetjük.

A 38-3. ábra paramétereivel:

$$b = 32; \quad c = 37,$$

(8)-ba történő behelyettesítés után

$$a^3 + 69\,a^2 - 4761\,a - 1725 = 0,$$

és $\max r(a)$ helye:

$$a_1 \approx -0{,}3604; \quad a_2 \approx 42{,}9045; \quad a_3 \approx -111{,}5440,$$

$$a_2 = a_{\max r(a)}.$$

Ezután $\max r(a)$-t (7)-ből számolhatjuk:

$$\max r(a) \approx 10{,}2888.$$

Lásd a 38-3. ábrát. Az ábráról a példa mindkét megoldása is leolvasható.

Igaz az, hogy (3) pozitív valós gyökeinek száma legfeljebb kettő $(b+c)\cdot((b-c)^2+4r^2) > 0$ miatt. Lásd még a 36. feladatot.

Így tehát *a megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet*, a példában 2.

Továbbá az is látható, *ha b, c paraméterek felvétele után* (3)*-nak van pozitív valós gyöke, ott a felvett r,* $r \le \max r(a)$ *kell legyen, vagyis van megoldás, és ez éppen a kapott gyök (gyökök).*

A pozitív a, b, c *ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.*

A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

39. Két oldal és a beírt kör sugara, 2. (b, c, r)
(egy másik út)

Induljunk el az *Elméleti ismereteknél* korábban már megismert három képletből, lásd (1), (2), (3) mint egy háromismeretlenes $(a,\ t,\ \alpha)$ egyenletrendszerből. Az s ismeretlen $2s = a+b+c$ helyettesítés után kiesik:

E. 11(15)
$$t = \frac{bc\cdot\sin\alpha}{2}, \tag{1}$$

E. 32(4)
$$t = r\cdot s = r\cdot\frac{a+b+c}{2}, \tag{2}$$

E. 33(12)
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}. \tag{3}$$

Mivel (1) és (2) jobb oldala egyenlő, így:

$$\frac{bc\cdot\sin\alpha}{r} = b+c+a. \tag{4}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Alakítsuk át (3)-at:

$$\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = s - a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2},$$

$$\frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = b + c - a. \tag{5}$$

Adjuk össze (4)-et és (5)-öt, így a kiesik:

$$\frac{bc \cdot \sin\alpha}{r} + \frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 2 \cdot (b+c). \tag{6}$$

Vonjuk ki (4)-ből (5)-öt, és így $b+c$ kiesik, majd osszuk el 2-vel:

$$\boxed{\frac{bc \cdot \sin\alpha}{2r} - \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = a.} \tag{7}$$

Folytassuk a feladatot (6) átalakításával:

$$bc \cdot \sin\alpha + \frac{2r^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 2r \cdot (b+c).$$

Áttérünk $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-re.

E. 9(27) $$\sin\alpha = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{helyettesítéssel} \tag{8}$$

$$bc \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{2r^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 2r \cdot (b+c),$$

$$0 < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = u \qquad \text{helyettesítéssel} \tag{9}$$

$$bc \cdot \frac{2u}{1+u^2} + \frac{2r^2}{u} = 2r \cdot (b+c), \qquad \Big/ \cdot (1+u^2) \cdot u$$

$$2bc \cdot u^2 + 2r^2 \cdot (1+u^2) = 2r \cdot (b+c) \cdot (1+u^2) \cdot u,$$

$$(bc + r^2) \cdot u^2 + r^2 = r \cdot (b+c) \cdot (u+u^3).$$

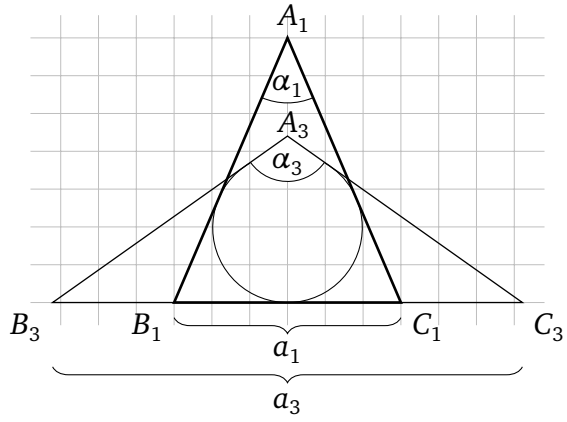
A műveletek elvégzése után rendezzük az egyenletet u fogyó hatványai szerint nullára. Így az u ismeretlen harmadfokú egyenletéhez jutunk b, c, r paraméterekkel:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\boxed{\begin{gathered} r\cdot(b+c)u^3-(bc+r^2)u^2+r\cdot(b+c)u-r^2=0,\\ \alpha=2\cdot\operatorname{arctg}u. \end{gathered}} \tag{10}$$

Az $u\in\mathbf{R}^+ \iff 0°<\alpha<180°$ *a megoldás szükséges feltétele.* (11)

Példa. A 39-1. ábra $A_1B_1C_1$ háromszögének adataiból és a 38. feladat (3) egyenletéből elindulva:



39-1. ábra

$$b=c=5\sqrt{58}\approx 38{,}0789; \qquad r=\frac{-45+15\sqrt{58}}{7}\approx 9{,}8909,$$
$$a^3-76{,}1577\,a^2+391{,}3229\,a+29\,802{,}2668=0,$$
$$a_1=30; \qquad a_2\approx -15{,}9857; \qquad a_3\approx 62{,}1434.$$

Most lássuk a másik utat (10) szerint.

Behelyettesítés után azt kapjuk, hogy:

$$753{,}2685\,u^3-1547{,}8299\,u^2+753{,}2685\,u-97{,}8299=0,$$
$$u_1\approx 0{,}4286; \qquad u_2\approx 0{,}2147; \qquad u_3\approx 1{,}4116;$$
$$\alpha_1\approx 46{,}3968°; \qquad \alpha_2\approx 24{,}2333°; \qquad \alpha_3\approx 109{,}37°.$$

Ezután a-t (7)-ből számolhatjuk:

$$a_1=30; \qquad a_2\approx -15{,}9857; \qquad a_3\approx 62{,}1434.$$

Mivel a_2 nem értelmezett, a megoldás a_1 és a_3 (39-1. ábra).

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Megjegyzés: Bár α_2 kielégíti a (6) trigonometrikus egyenletet, mégsem megoldás, ugyanis (7) bal oldala ekkor negatív, a jobb oldalon azonban a áll, ami pozitív kell legyen.

Látható, hogy $u \in \mathbf{R}^+$ (11) *és* $a \in \mathbf{R}^+$ (7) *együttes teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele*. A megoldások számát a 38. feladatból már tudjuk 0, 1 vagy 2 lehet.

A pozitív a, b, c *ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.*

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

40. Két oldal és a harmadikhoz tartozó hozzáírt kör sugara (b, c, r_a) (egyértelmű)

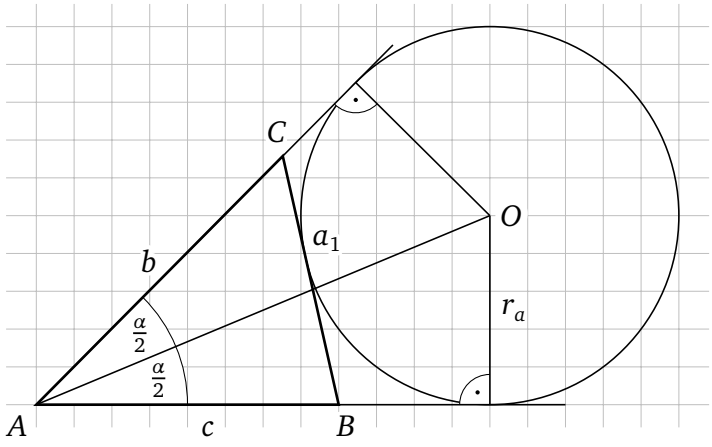
Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (40-1. ábra).

Induljunk el az *Elméleti ismeretekben* korábban már megismert három képletből, lásd (1), (2), (3) mint egy háromismeretlenes $(a,\ t,\ \alpha)$ egyenletrendszerből. Az s ismeretlen $2s = a + b + c$ helyettesítés után kiesik:

E. 36(4) Héron-képlet $$t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \tag{1}$$

E. 34(3) $$t = r_a \cdot (s-a), \tag{2}$$

E. 35(8) $$r_a = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$



40-1. ábra

A területek egyenlősége miatt, lásd (1)-et és (2)-t:

$$t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = r_a^2 \cdot (s-a)^2.$$

Átalakítás után egy a-ra nézve harmadfokú egyenlethez jutunk b, c, r_a paraméterekkel, lásd (4)-et.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$s(s-b)(s-c) = r_a^2 \cdot (s-a),$$

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot \left(\frac{a-b+c}{2}\right) \cdot \left(\frac{a+b-c}{2}\right) = r_a^2 \cdot \left(\frac{-a+b+c}{2}\right),$$

$$(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 4r_a^2 \cdot (-a+b+c),$$

$$\boxed{a^3 + (b+c)\,a^2 - ((b-c)^2 - 4r_a^2)\,a - (b+c) \cdot ((b-c)^2 + 4r_a^2) = 0.} \qquad (4)$$

Az $a \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás szükséges feltétele.*

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3) $$|b-c| < a < b+c. \qquad (5)$$

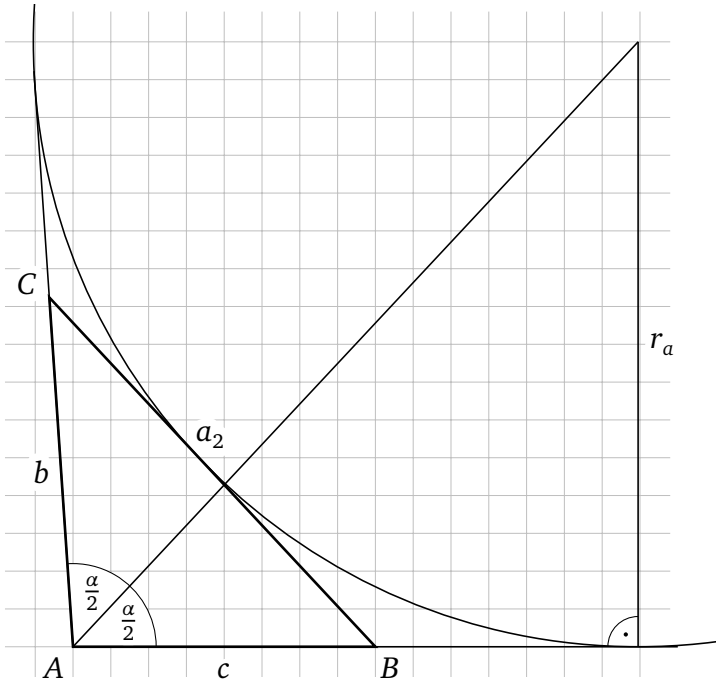
Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ *és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

1. példa. A 40-1. ábra adataiból elindulva:

$$b = 46{,}30; \qquad c = 40; \qquad r_a = 25,$$

$$a^3 + 86{,}30\,a^2 + 2460{,}31\,a - 219\,175{,}25 = 0,$$

$$a_1 \approx 33{,}70; \qquad a_2 = \text{komplex}; \qquad a_3 = \text{komplex}.$$



40-2. ábra

2. példa. A 40-2. ábra adataiból elindulva egy α tompaszögű eset:

$$b = 46{,}30; \qquad c = 40; \qquad r_a = 80.$$

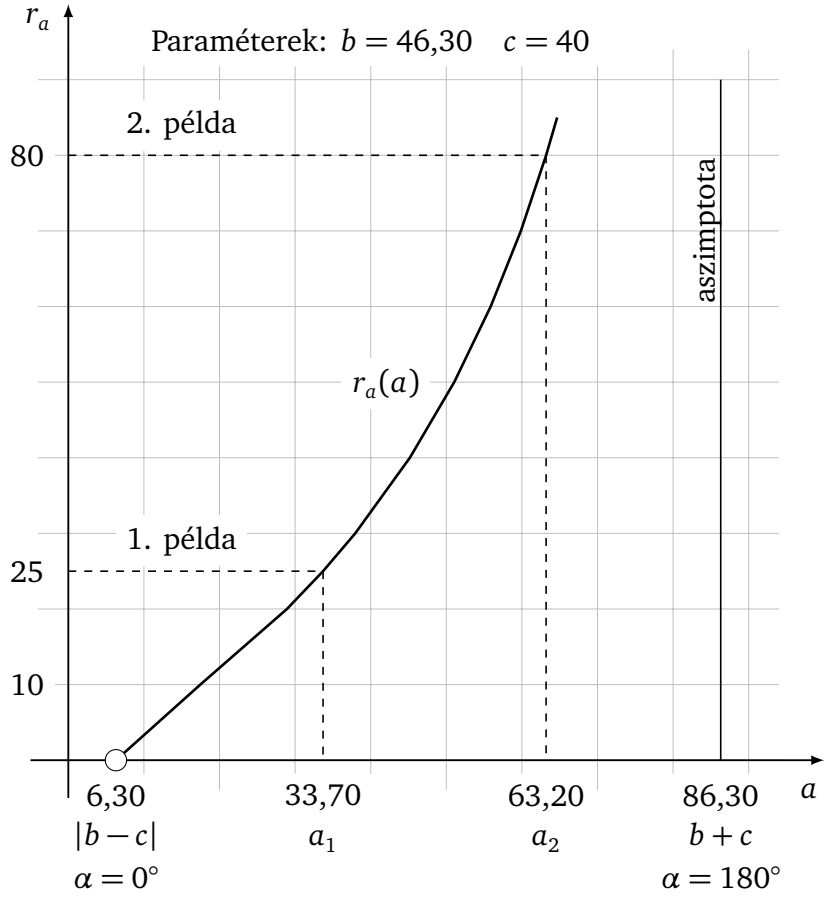
(4)-be való behelyettesítés után:

$$a^3 + 86{,}30\,a^2 + 25\,560{,}31\,a - 2\,212\,705{,}25 = 0,$$

$$a_1 = \text{komplex}; \qquad a_2 \approx 63{,}20; \qquad a_3 = \text{komplex}.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A részletesebb vizsgálat: A b, c, r_a adatok felvétele után kiszámítjuk a-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon, b-t és c-t paraméternek választva, majd felrajzoljuk r_a grafikonját egy a, r_a koordináta-rendszerben. Látható, hogy függvényt kapunk (40-3. ábra).



40-3. ábra

Vegyük föl b-t és c-t mint paramétert. Ha most az α változó $0° < \alpha < 180°$-ig nő, akkor

E. 12(22)
$$a(\alpha) = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot (-\cos\alpha)} \tag{6}$$

miatt a szigorúan monoton nő $|b-c| < a < b+c$ határokon belül.

Továbbá, mivel $0° < \alpha/2 < 90° \Rightarrow$ a pozitív értékű $\operatorname{tg}(\alpha/2)$ is szigorúan monoton nő ezen az intervallumon, ezért s, $\operatorname{tg}(\alpha/2)$, illetve az

$$r_a(a) = s \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2) \tag{7}$$

függvény (lásd (3)-at) szigorúan monoton nő, és $(0; +\infty)$ tartományban $r_a(a)$ egyértelmű.
Így tehát a pozitív b, c, r_a felvétele után *mindig van pozitív valós megoldás, és mindig csak egy.*

A feladat megoldása egyértelmű.

A negatív és a komplex gyökök síkgeometriai szempontból nem tekinthetők megoldásnak, a pozitív valós megoldások száma mindkét példában 1, mint ahogy az várható volt (40-3. ábra). Az ábrából mindkét példa megoldása is leolvasható.

Megjegyzés: Egy másik út, ha a b, c paraméterek felvétele után α-t választjuk független változónak, azonban $r_a(\alpha)$ szintén szigorúan monoton növekvő függvény lesz, így minden r_a-hoz egy α mint megoldás fog tartozni.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

41. Két oldal és az egyikhez tartozó hozzáírt kör sugara (b, c, r_b)

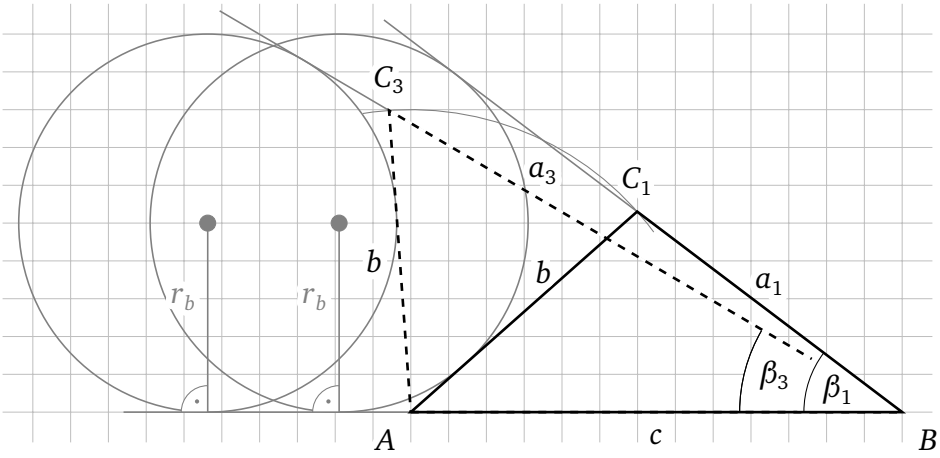
Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (41-1. ábra).

Induljunk el az *Elméleti ismeretekben* korábban már megismert három képletből, lásd (1), (2), (3) mint egy háromismeretlenes $(a,\ t,\ \beta)$ egyenletrendszerből. Az s ismeretlen $2s = a+b+c$ helyettesítés után kiesik:

E. 36(4) Héron-képlet: $$t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), \tag{1}$$

E. 34(3) $$t = r_b \cdot (s-b), \tag{2}$$

E. 35(8) $$r_b = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \tag{3}$$



41-1. ábra

A területek egyenlősége miatt (lásd (1)-et és (2)-t):

$$t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = r_b^2 \cdot (s-b)^2.$$

Átalakítás után egy a-ra nézve harmadfokú egyenlethez jutunk b, c, r_b paraméterekkel, lásd (4)-et.

$$s(s-a)(s-c) = r_b^2 \cdot (s-b),$$

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b-c}{2}\right) = r_b^2 \cdot \left(\frac{a-b+c}{2}\right),$$

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c) = 4r_b^2 \cdot (a-b+c),$$

$$\boxed{a^3 + (b-c)\,a^2 - ((b+c)^2 - 4r_b^2)\,a - (b-c)\cdot((b+c)^2 + 4r_b^2) = 0.} \tag{4}$$

Az $a \in \mathbf{R}^+$ a megoldás szükséges feltétele.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3) $$|b-c| < a < b+c. \tag{5}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Példa. A 41-1. ábra adataiból elindulva:

$$b = 40; \qquad c = 65; \qquad r_b = 25.$$

(4)-be való behelyettesítés után kapjuk:

$$a^3 - 25\,a^2 - 8525\,a + 338\,125 = 0,$$

$$a_1 \approx 43{,}96; \qquad a_2 \approx -97{,}69; \qquad a_3 \approx 78{,}73.$$

A β szög kiszámítása:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2} = \frac{r_b}{s_1} = \frac{2\,r_b}{a_1+b+c} = \frac{2\cdot 25}{43{,}96+40+65} \approx 0{,}3357,$$

$$\beta_1 \approx 2\cdot(\operatorname{arctg}\,0{,}3357) \approx 37{,}11^\circ,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_3}{2} = \frac{r_b}{s_3} = \frac{2\,r_b}{a_3+b+c} = \frac{2\cdot 25}{78{,}73+40+65} \approx 0{,}2721,$$

$$\beta_3 \approx 2\cdot(\operatorname{arctg}\,0{,}2721) \approx 30{,}45^\circ.$$

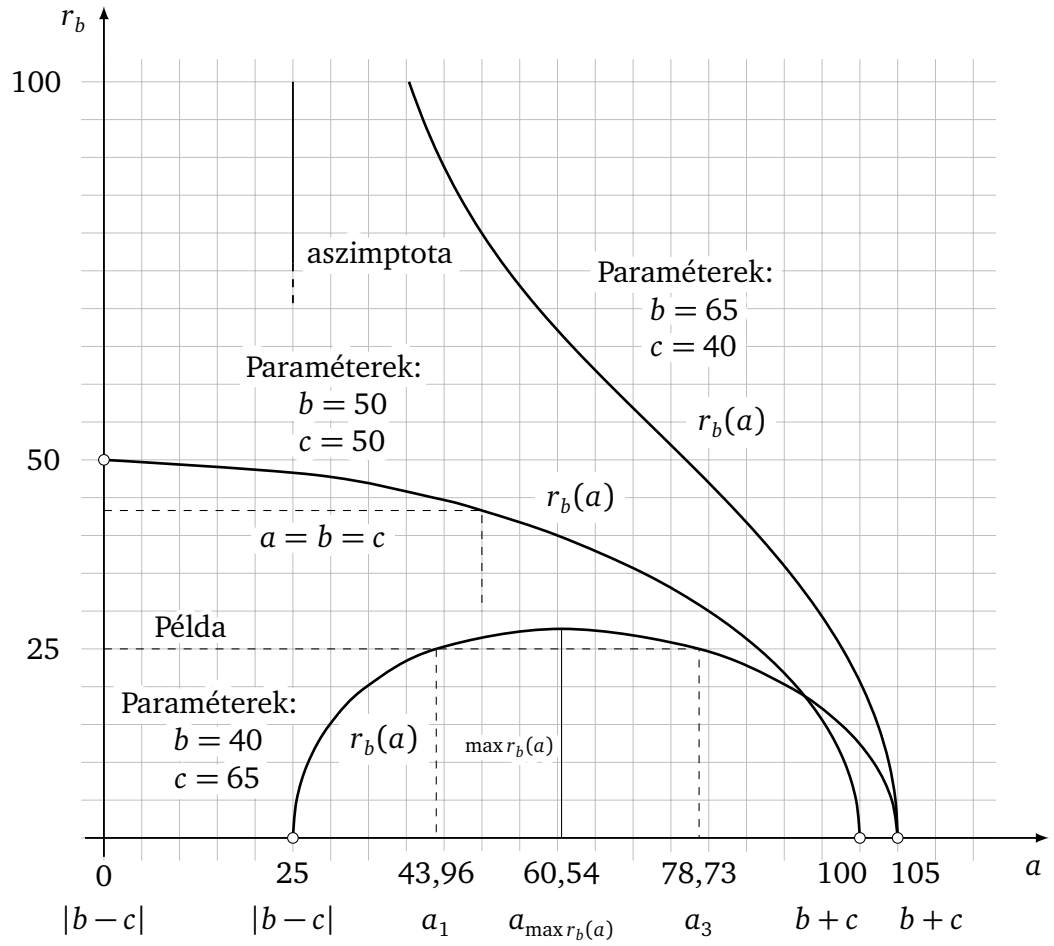
Az a_3, β_3 megoldást a 41-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A részletesebb vizsgálat:

Rajzoljuk föl az $A \subset \mathbf{R}^+$ halmazon értelmezett $A \to \mathbf{R}^+$, $a \mapsto r_b(a)$ függvényeket.

A b, c, r_b adatok felvétele után kiszámítjuk a-t , mint a példában, ezúttal azonban további pontokon, b-t és c-t paraméternek választva, majd felrajzoljuk a kapott $r_b(a)$ függvények grafikonját egy a, r_b koordináta-rendszerben (41-2. ábra).

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



41-2. ábra

Vegyük föl b-t és c-t mint paramétert. Ha most az α változó $0° < \alpha < 180°$-ig nő, akkor

E. 12(22) $$a(\alpha) = \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cdot (-\cos\alpha)} \tag{6}$$

miatt a szigorúan monoton nő az

E. 1(3) $$|b-c| < a < b+c \tag{7}$$

határokon belül.

Most lássuk $r_b(a)$ függvény vizsgálatát:

$$r_b(a) = \frac{t}{s-b} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}. \tag{8}$$

Ha $b < c$, akkor:

$$\lim_{a\to(c-b)+} r_b(a) = 0, \qquad \lim_{a\to(b+c)-} r_b(a) = 0,$$

és $r_b(a)$-nak maximuma lesz a (7) intervallumon, ezért r_b-t utoljára felvéve

$$r_b \le \max r_b(a)$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

kell legyen, ami *a megoldás szükséges és elégséges feltétele* (41-2. ábra).

Mivel (4)-ből:

$$r_b(a) = \sqrt{\frac{-a^3-(b-c)a^2+(b+c)^2a+(b-c)(b+c)^2}{4(a-b+c)}}, \tag{9}$$

így a $\max r_b(a)$-hoz tartozó a-t az

$$r_b'(a) = 0$$

egyenletből nyert

$$a^3-(b-c)\,a^2-(b-c)^2a+(b-c)(b+c)^2 = 0 \tag{10}$$

egyenletből számolhatjuk.

Mivel $r_b''(a)$ előállítása nehézkes, azt, hogy maximumról van szó, az $r_b(a)$ függvény néhány ponton történő helyettesítésével is ellenőrizhetjük.

Ha $b = 40; \qquad c = 65,$

(10)-be történő helyettesítés után

$$a^3+25\,a^2-625\,a-275\,625 = 0,$$

$\max r_b(a)$ helye pedig:

$$a_1 = \text{komplex}; \qquad a_2 \approx 60{,}5363; \qquad a_3 = \text{komplex};$$

$$a_2 = a_{\max r_b(a)}.$$

Ezután $\max r_b(a)$-t (9)-ből számolhatjuk:

$$\max r_b(a) \approx 27{,}6491.$$

A 41-2. ábrából a példa mindkét megoldása is leolvasható.

Ha $b = c$, akkor:

$$\lim_{a\to 0+} r_b(a) = b, \qquad \lim_{a\to(b+c)-} r_b(a) = 0.$$

Ekkor a háromszög egyenlő szárú vagy egyenlő oldalú.

Egyenlő szárú lehet még $a = c$ vagy $a = b$ esetén is, amikor $b < c$ vagy $b > c$.

Az r_b-t utoljára felvéve:

$$r_b < b$$

kell legyen, ami *a megoldás szükséges és elégséges feltétele (41-2. ábra)*.

Ha $b > c$, akkor:

$$\lim_{a\to(b-c)+} r_b(a) = +\infty, \qquad \lim_{a\to(b+c)-} r_b(a) = 0.$$

Ez utóbbi esetben tehát r_b-t utoljára felvéve *mindig van megoldás, és mindig csak 1*.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Ha $b \le c$, a megoldások száma b és c felvétele után r_b-től függ, 0, 1 vagy 2 lehet, és $-(b-c)\cdot((b+c)^2+4r_b^2) \ge 0$ miatt legfeljebb 2. Lásd még a (4) egyenletet, a 36. feladatot és a 41-2. ábrát.

A komplex és negatív gyökök síkgeometriai szempontból nem tekinthetők megoldásnak.

A pozitív a, b, c ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.

A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

42. Egy oldal, a szemben levő szög és a kerület (c, γ, k)

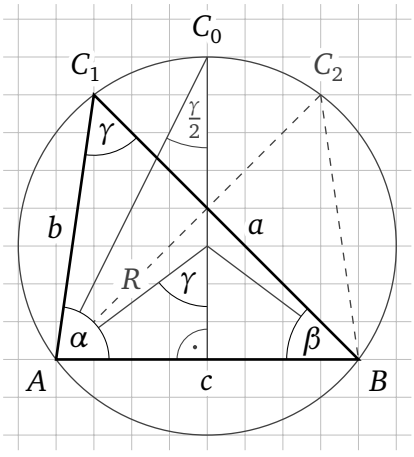
A $c > 0$ és $0° < \gamma < 180°$ felvétele után a C pontok egy *látószögkörívén* ($C \ne A, C \ne B$) helyezkednek el. C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R = c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t és a 42-1. ábrát.

Keressünk feltételt az induló adathármasra.

Mivel a $k - c = a + b =$ állandónak megfelelő C pontok egy *A,B fókuszú ellipszis* vonalon helyezkednek el, ezért:

$$2c < k \le \max k = c + \max(a+b) = c + \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}. \tag{1}$$

(1) *a megoldás szükséges és elégséges feltétele (lásd még az 57. feladatot)*.



42-1. ábra

A 42-1. ábrán választott c és γ esetén $\max(a+b)$ C_0-nál lesz. Írjuk föl az *első Mollweide-féle formulát:*

E. 14(8)
$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{2}$$

$$0° < \frac{\alpha+\beta}{2} < 90°, \qquad \text{ui. } \alpha+\beta < 180°,$$

$$0 < \cos\frac{\alpha+\beta}{2} < 1,$$

$$a+b = k-c, \qquad \alpha+\beta = 180°-\gamma.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Alakítsuk át (2)-t úgy, hogy tartalmazza az induló adatokat:

$$\frac{k-c}{c}=\frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{180^\circ-\gamma}{2}}, \tag{3}$$

$$0^\circ\le\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|<90^\circ,$$

$$0<\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\le 1.$$

Fejezzük ki (3) ismeretlen jobboldali számlálóját:

$$\boxed{\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|=\arccos\underbrace{\left(\frac{k-c}{c}\cdot\cos\frac{180^\circ-\gamma}{2}\right)}_{e}.} \tag{4}$$

Ha $\alpha\ge\beta$ (42-1. ábra), akkor:

$$\alpha_1=\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}=\alpha;\qquad \alpha_2=\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}=\beta;$$

$$\beta_1=180^\circ-(\alpha_1+\gamma)=\beta;\qquad \beta_2=180^\circ-(\alpha_2+\gamma)=\alpha.$$

Az α_2, β_2 megoldást az ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

$$0<e\le 1. \tag{5}$$

(5) *szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

A hiányzó a és b oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)

$$\boxed{\begin{aligned}a&=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c,\\ b&=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c.\end{aligned}} \tag{6}$$

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár (42-1. ábra).

Most három oldal $(a,b,c)\overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

43. Egy oldal, a szemben levő szög és a terület, 1. (c,γ,t)

A $c>0$ és $0^\circ<\gamma<180^\circ$ felvétele után a C pontok egy *látószögköríven* helyezkednek el ($C\ne A$, $C\ne B$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R=c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t és a 43-1. ábrát.

Keressünk feltételt az induló adathármasra:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{c/2}{\max m_c},\qquad 0<m_c\le\max m_c=\frac{c}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$$

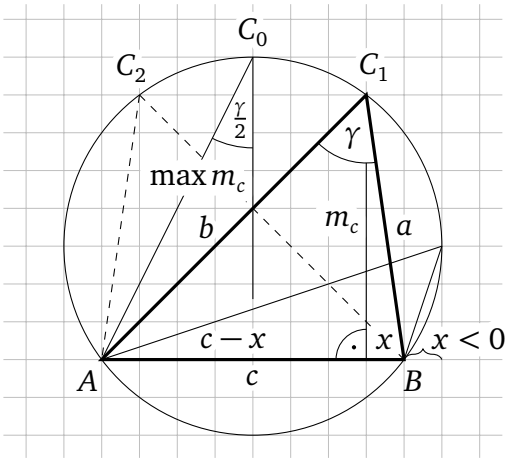
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$m_c = \frac{2t}{c} \le \frac{c}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$$

$$t \le \frac{c^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \max t. \tag{1}$$

(1) *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Első megoldás (egyenlettel)



43-1. ábra

A 43-1. ábrán választott c és γ esetén a $\max m_c$ C_0-nál lesz.

Induljunk el a magasság képletéből (2) és a *trigonometrikus területképletből* (3), majd fejezzük ki ab-t:

$$m_c = \frac{2t}{c}, \tag{2}$$

E. 11(15) $$t = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}, \qquad ab = \frac{2t}{\sin\gamma}. \tag{3}$$

$$a^2 = m_c^2 + x^2, \qquad b^2 = m_c^2 + (c-x)^2, \tag{4}$$

$$(m_c^2 + x^2) \cdot (m_c^2 + (c-x)^2) = \left(\frac{c \cdot m_c}{\sin\gamma}\right)^2.$$

Végezzük el a műveleteket és rendezzük az egyenletet x fogyó hatványai szerint nullára. Így az x ismeretlen negyedfokú egyenletéhez jutunk c, γ, m_c paraméterekkel:

$$x^4 - 2c\,x^3 + (2m_c^2 + c^2)\,x^2 - 2m_c^2 c\,x + m_c^4 + m_c^2 c^2 - \left(\frac{c \cdot m_c}{\sin\gamma}\right)^2 = 0. \tag{5}$$

Az $x \in \mathbf{R}$ *a megoldás további szükséges feltétele.*

Az m_c-t (2)-ből, majd x-et (5)-ből, végül a-t és b-t (4)-ből számolhatjuk.

Példa. A 43-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40,$$

$$\gamma = \arcsin\frac{c}{2R} = \arcsin\frac{40}{50} \approx 53{,}1301^\circ,$$

$$t = 700, \qquad m_c = \frac{2t}{c} = \frac{2 \cdot 700}{40} = 35.$$

Természetesen bármilyen (c, γ, t) adathármasból elindulhatunk, ami megfelel (1)-nek. Behelyettesítés után:

$$x^4 - 80\,x^3 + 4\,050\,x^2 - 98\,000\,x + 398\,125 = 0,$$

$$x_1 = 5; \qquad x_2 = 35; \qquad x_3 = \text{komplex}; \qquad x_4 = \text{komplex};$$

$$a_1 = \sqrt{35^2 + 5^2} \approx 35{,}3553; \qquad a_2 = \sqrt{35^2 + 35^2} \approx 49{,}4975;$$

$$b_1 = \sqrt{35^2 + (40-5)^2} \approx 49{,}4975; \qquad b_2 = \sqrt{35^2 + (40-35)^2} \approx 35{,}3553.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az a_2, b_2 megoldást a 43-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A komplex gyökök síkgeometriai szempontból nem tekinthetők megoldásnak.

Második megoldás (koszinusztétellel)

Írjuk föl a *koszinusztételt* a c oldalra (43-1. ábra).

E. 12(14) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma, \tag{6}$$

(3)-ból kapjuk, hogy $$2ab = \frac{4t}{\sin\gamma}, \tag{7}$$

(6)-ba helyettesítve pedig $$a^2 + b^2 = c^2 + \frac{4t}{\sin\gamma} \cdot \cos\gamma. \tag{8}$$

(8)-hoz (7)-et hozzáadva majd kivonva négyzetgyökvonás után:

E. 9(34) $$a + b = \sqrt{c^2 + \frac{4t}{\sin\gamma} \cdot (1 + \cos\gamma)} = \sqrt{c^2 + 4t \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = p, \tag{9}$$

E. 9(34) $$|a - b| = \sqrt{c^2 - \frac{4t}{\sin\gamma} \cdot (1 - \cos\gamma)} = \sqrt{c^2 - 4t \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = q, \tag{10}$$

$$a_1 = \frac{p-q}{2}; \quad b_1 = \frac{p+q}{2}; \qquad (a < b), \tag{11}$$

$$a_2 = \frac{p+q}{2}; \quad b_2 = \frac{p-q}{2}; \qquad (a \geq b). \tag{12}$$

A megoldás szükséges és elégséges feltételét lásd (1)*-nél.*

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

44. Egy oldal, a szemben levő szög és a terület, 2. (c, γ, t)
(egy másik út)

Induljunk el az (1) *trigonometrikus területképletből*, és fejezzük ki ab-t, lásd (2)-t.

Ezután írjuk föl a *szinusztételt* (3), és fejezzük ki a-t és b-t, lásd (4)-et.

Így egy háromismeretlenes (a, b, α) egyenletrendszerhez jutunk, lásd (2)-t és (4)-et.
A β ismeretlen $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$ helyettesítés után kiesik (44-1. ábra).

E. 11(15) $$t = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}, \tag{1}$$

$$ab = \frac{2t}{\sin\gamma}, \tag{2}$$

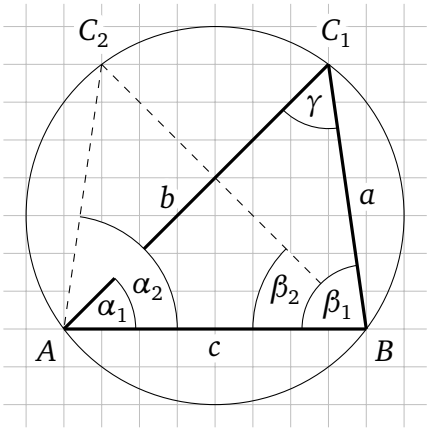
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

E. 11(12)
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}, \tag{3}$$

$$a=\frac{c}{\sin\gamma}\cdot\sin\alpha, \qquad b=\frac{c}{\sin\gamma}\cdot\sin\beta. \tag{4}$$

(2)-be történő behelyettesítés után:

$$\frac{c}{\sin\gamma}\cdot\sin\alpha\cdot\frac{c}{\sin\gamma}\cdot\sin\beta=\frac{2t}{\sin\gamma}, \qquad \beta=180^\circ-(\alpha+\gamma),$$



44-1. ábra

$$\sin\alpha\cdot\sin(180^\circ-(\alpha+\gamma))=\frac{2t}{c^2}\cdot\sin\gamma,$$

$$\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\gamma)=\frac{2t}{c^2}\cdot\sin\gamma, \tag{5}$$

$$0<\frac{2t}{c^2}\cdot\sin\gamma<1. \tag{6}$$

(6) *a megoldás szükséges feltétele.*

Végezzük el az (5)-nél kijelölt műveleteket:

$$\sin\alpha\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\sin\gamma)=\frac{2t}{c^2}\cdot\sin\gamma, \quad \Big|\cdot 2$$

$$2\sin^2\alpha\cdot\cos\gamma+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\gamma=\frac{4t}{c^2}\cdot\sin\gamma,$$

$$2\sin^2\alpha\cdot\cos\gamma+\sin 2\alpha\cdot\sin\gamma=\frac{4t}{c^2}\cdot\sin\gamma.$$

Áttérünk $\operatorname{ctg}\alpha$-ra. Lásd E. 9(29)-et és E. 9(26)-ot.

$$2\cdot\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}\cdot\cos\gamma+\frac{2\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}\cdot\sin\gamma=\frac{4t}{c^2}\cdot\sin\gamma. \tag{7}$$

A műveletek elvégzése után rendezzük az egyenletet $\operatorname{ctg}\alpha$ fogyó hatványai szerint nullára.
Így $\operatorname{ctg}\alpha$ másodfokú egyenletéhez jutunk c,γ,t paraméterekkel, lásd (8)-at.

$$2\cdot\cos\gamma+2\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\gamma-(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\cdot\frac{4t}{c^2}\cdot\sin\gamma=0,$$

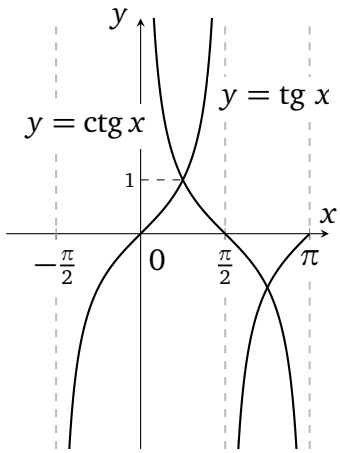
$$2\cdot\cos\gamma+2\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\gamma-\frac{4t}{c^2}\cdot\sin\gamma\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha-\frac{4t}{c^2}\cdot\sin\gamma=0, \qquad \Big|:2$$

$$\left(\frac{2t}{c^2}\cdot\sin\gamma\right)\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha-\sin\gamma\cdot\operatorname{ctg}\alpha+\frac{2t}{c^2}\cdot\sin\gamma-\cos\gamma=0.$$

A pozitív főegyütthatóval történő leosztás után:

$$\boxed{\operatorname{ctg}^2\alpha-\frac{c^2}{2t}\cdot\operatorname{ctg}\alpha+1-\frac{c^2}{2t}\cdot\operatorname{ctg}\gamma=0.} \tag{8}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



44-2. ábra

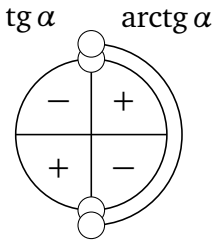
1. Ha $\operatorname{ctg}\alpha = 0$, akkor $\alpha = 90°$.

2. Ha $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, akkor $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}\right)$,

   és $0° < \alpha < 90°$.

3. Ha $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, akkor $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}\right) + 180°$,

   és $90° < \alpha < 180°$.



44-3. ábra

A tg α előjele és inverzének értékkészlete.

Lásd még E. 9. és E. 10.

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma). \tag{9}$$

A hiányzó a és b oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c, \\ b &= \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c. \end{aligned}} \tag{10}$$

Példa. A 44-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \qquad \gamma = \arcsin\frac{c}{2R} = \arcsin\frac{40}{50} \approx 53{,}1301°; \qquad t = \frac{c\cdot m_c}{2} = \frac{40\cdot 35}{2} = 700.$$

(8)-ba történő behelyettesítés után:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha - (8/7)\cdot\operatorname{ctg}\alpha + (1/7) = 0,$$

$$(\operatorname{ctg}\alpha)_1 = 1; \qquad (\operatorname{ctg}\alpha)_2 = 1/7;$$

$$(\operatorname{tg}\alpha)_1 = 1; \qquad (\operatorname{tg}\alpha)_2 = 7;$$

$$\alpha_1 = 45°; \qquad \alpha_2 \approx 81{,}8699°;$$

$$\beta_1 \approx 180° - (45° + 53{,}1301°) \approx 81{,}8699°; \qquad \beta_2 \approx 180° - (81{,}8699° + 53{,}1301°) \approx 45°;$$

$$a_1 \approx 35{,}3553; \quad b_1 \approx 49{,}4975; \qquad a_2 \approx 49{,}4975; \quad b_2 \approx 35{,}3553.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az a_2, b_2 megoldást a 44-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A $c>0$ és $0°<\gamma<180°$ felvétele után $0<t\le\max t=c^2/4\,tg\,(\gamma/2)<c^2/2\sin\gamma$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele. Lásd (6)-ot és a 43. feladatban (1)-et.

A megoldások száma (8) *valós gyökeitől függ, 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.*

Most három oldal $(a,b,c)\overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

45. Egy oldal, a szemben levő szög és a hozzájuk tartozó magasság, 1. (c,γ,m_c)

A $c>0$ és a $0°<\gamma<180°$ felvétele után a C pontok egy *látószögköríven* helyezkednek el ($C\ne A$, $C\ne B$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R=c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t és a 45-1. ábrát.

Keressünk feltételt az induló adathármasra:

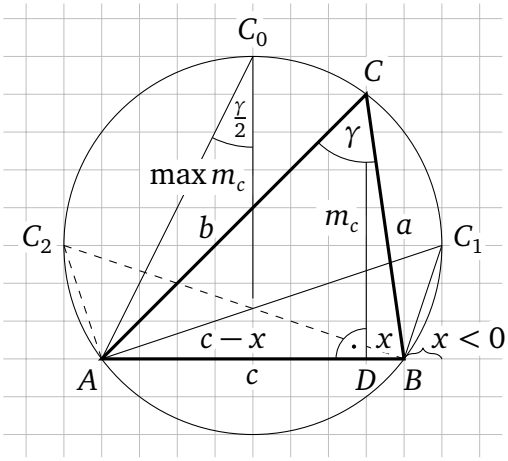
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\frac{c}{2}}{\max m_c},\qquad 0<m_c\le\max m_c=\frac{c}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}. \tag{1}$$

(1) *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

A 45-1. ábrán választott c és γ esetén $\max m_c$ C_0-nál lesz.

Induljunk el a *trigonometrikus területképletből*, fejezzük ki ab-t, majd helyettesítsük t képletét:

E. 11(15) $$t=\frac{ab\cdot\sin\gamma}{2},\qquad ab=\frac{2t}{\sin\gamma}=\frac{c\cdot m_c}{\sin\gamma}. \tag{2}$$



45-1. ábra

Írjuk föl a *Pitagorasz-tételt* a BCD és az ACD háromszögekben:

$$a^2=m_c^2+x^2,\qquad b^2=m_c^2+(c-x)^2. \tag{3}$$

(2)-be történő helyettesítés után:

$$(m_c^2+x^2)\cdot(m_c^2+(c-x)^2)=\left(\frac{c\cdot m_c}{\sin\gamma}\right)^2.$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd rendezzük az egyenletet x fogyó hatványai szerint nullára. Így az x ismeretlen negyedfokú egyenletéhez jutunk c,γ,m_c paraméterekkel:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$x^4 - 2c\ x^3 + (2m_c^2 + c^2)\,x^2 - 2m_c^2 c\,x + m_c^4 + m_c^2 c^2 - \left(\frac{c \cdot m_c}{\sin\gamma}\right)^2 = 0. \tag{4}$$

Az $x \in \mathbf{R}$ a megoldás további szükséges feltétele.

Ezután a és b (3)-ból számolható.

Példa. A 45-1. ábra ABC_1 háromszögének adataiból elindulva:

$$c = 40; \qquad \gamma = \arcsin(4/5) \approx 53{,}1301^\circ; \qquad m_c = 15.$$

(4)-be történő behelyettesítés után:

$$x^4 - 80\,x^3 + 2\,050\,x^2 - 18\,000\,x - 151\,875 = 0,$$

$$x_1 = -5; \qquad x_2 = 45; \qquad x_3 = \text{komplex}; \qquad x_4 = \text{komplex};$$

$$a_1 = \sqrt{15^2 + (-5)^2} \approx 15{,}81; \qquad a_2 = \sqrt{15^2 + 45^2} \approx 47{,}43;$$

$$b_1 = \sqrt{15^2 + (40+5)^2} \approx 47{,}43; \qquad b_2 = \sqrt{15^2 + (40-45)^2} \approx 15{,}81.$$

Az a_2, b_2 megoldást a 45-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A komplex gyökök síkgeometriai szempontból nem tekinthetők megoldásnak.

Megjegyzés: A terület $t = c \cdot \frac{m_c}{2}$, majd ezután a feladat megoldása folytatható a 43. $(c,\ \gamma,\ t)$ második megoldása szerint is.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

46. Egy oldal, a szemben levő szög és a hozzájuk tartozó magasság, 2. (egy másik út) (c, γ, m_c)

Induljunk el a 45-1. ábrából és a 44. feladat (8) egyenletéből.

$$\frac{c^2}{2t} = \frac{c^2}{c \cdot m_c} = \frac{c}{m_c} \tag{1}$$

helyettesítése után, $\operatorname{ctg}\alpha$ másodfokú egyenletéhez jutunk, c, γ, m_c paraméterekkel:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{c}{m_c} \cdot \operatorname{ctg}\alpha + 1 - \frac{c}{m_c} \cdot \operatorname{ctg}\gamma = 0. \tag{2}$$

Ezután α-t, $\operatorname{ctg}\alpha$-ból a 44. feladatnál leírtak szerint számoljuk, majd

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma). \tag{3}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A hiányzó a és b oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c, \\ b &= \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c. \end{aligned}} \tag{4}$$

Példa. A 45-1. ábra ABC_1 háromszögének adataiból elindulva:

$$c = 40; \qquad \gamma = \arcsin(4/5) \approx 53{,}1301^\circ; \qquad m_c = 15.$$

(2)-be való behelyettesítés után:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha - (8/3)\cdot\operatorname{ctg}\alpha - 1 = 0,$$

$$(\operatorname{ctg}\alpha)_1 = 3; \qquad (\operatorname{ctg}\alpha)_2 = -1/3;$$

$$(\operatorname{tg}\alpha)_1 = 1/3; \qquad (\operatorname{tg}\alpha)_2 = -3;$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}(1/3); \qquad \alpha_2 = \operatorname{arctg}(-3) + 180^\circ;$$

$$\alpha_1 \approx 18{,}4349^\circ \approx 18{,}43^\circ; \qquad \alpha_2 \approx 108{,}4349^\circ \approx 108{,}43^\circ;$$

$$\beta_1 \approx 180^\circ - (18{,}43^\circ + 53{,}13^\circ) \approx 108{,}43^\circ; \qquad \beta_2 \approx 180^\circ - (108{,}43^\circ + 53{,}13^\circ) \approx 18{,}43^\circ;$$

$$a_1 \approx 15{,}81; \qquad a_2 \approx 47{,}43;$$

$$b_1 \approx 47{,}43; \qquad b_2 \approx 15{,}81.$$

Az a_2, b_2 megoldást a 45-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A megoldás szükséges és elégséges feltételét lásd a 45. feladatnál (1).

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

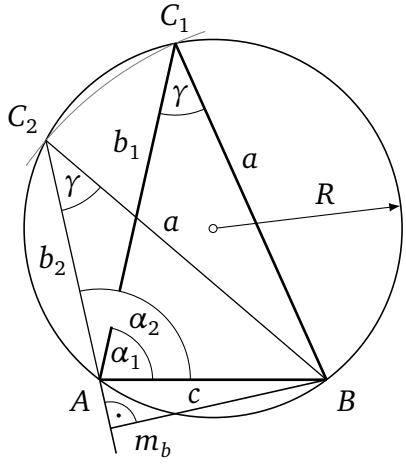
47. Egy oldal, a szemben levő szög és egy másik oldalhoz tartozó magasság (c, γ, m_b)

A $c > 0, 0° < \gamma < 180°, m_b > 0$ felvétele után a C pontok egy *látószögköríven* helyezkednek el ($C \neq A,\ C \neq B$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. Az a-t és $2R$-et könnyen kiszámolhatjuk:

E. 11-4, E. 11(12)
$$a = \frac{m_b}{\sin\gamma}, \qquad 2R = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{1}$$

Ezután az a, c, γ adatoktól függően a következő esetek lehetségesek:

1. Két oldal és a kisebbikkel szemben levő szög: ($a, c, \gamma\ \ a > c$), (47-1. ábra).



47-1. ábra

$$a > c \Longleftrightarrow \alpha > \gamma \Rightarrow \gamma < 90°,$$
$$c < a \leq 2R,$$
$$\sin\alpha = \frac{m_b}{c},$$
$$0 < \frac{m_b}{c} \leq 1,$$
$$\alpha_1 = \arcsin\frac{m_b}{c} \leq 90°,$$
$$\alpha_2 = 180° - \alpha_1 \geq 90°.$$

Az $\alpha_1 \leq 90°$ szög a $\widehat{BC_1}$ köríven, az $\alpha_2 \geq 90°$ szög a $\widehat{BC_1C_2}$ köríven nyugszik. A két körív azonban az egyenlő a húrok miatt körré egészíti ki egymást $\left(\widehat{BC_1} = \widehat{BAC_2}\right)$, így $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$.

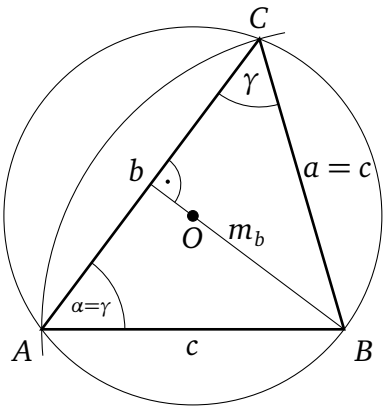
Továbbá $m_{b1} = m_{b2} = m_b$.

- Más esetben nincs megoldás.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet (lásd még az 5. feladatot).

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

2. Két egyenlő oldal és az alapon fekvő egyik szög: $(a, c, \gamma \;\; a = c)$, (47-2. ábra).



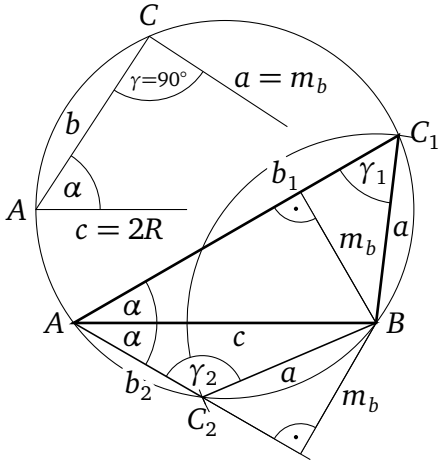
47-2. ábra

$$a = c \Longleftrightarrow \alpha = \gamma \Rightarrow \gamma < 90°,$$
$$a = c < 2R,$$
$$\sin\alpha = \sin\gamma = \frac{m_b}{c},$$
$$0 < \frac{m_b}{c} < 1.$$

- Más esetben nincs megoldás.

A megoldások száma 0 vagy 1 lehet (lásd még a 4. feladatot).

3. Két oldal és a nagyobbikkal szemben levő szög: $(a, c, \gamma \;\; a < c)$, (47-3. ábra).



47-3. ábra

$$a < c \Longleftrightarrow \alpha < \gamma \Rightarrow \alpha < 90°,$$
$$a < c \le 2R,$$
$$\sin\alpha = \frac{m_b}{c} < 1,$$
$$\alpha = \arcsin\frac{m_b}{c} < 90°.$$

(γ_1, γ_2 felvétele vagylagos, az ábrában $\gamma_2 = 180° - \gamma_1$.)

A megoldások száma mindig 1 (lásd még a 3. feladatot).

A folytatás mindhárom esetben a β szög, majd ezután a b oldal kiszámításával történik:

E. 12(22)

$$\boxed{\begin{aligned}\beta &= 180° - (\alpha + \gamma),\\ b &= \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}.\end{aligned}} \qquad (2)$$

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

48. Egy oldal, a szemben levő szög és a hozzájuk tartozó súlyvonal (c, γ, s_c)

A $c > 0$ és a $0° < \gamma < 180°$ felvétele után a C pontok egy *látószögkörívén* helyezkednek el ($C \neq A$, $C \neq B$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R = c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t.

Keressünk feltételt az induló adathármasra.

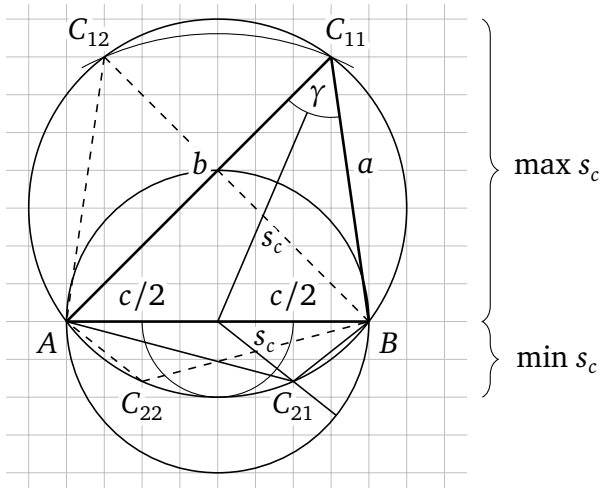
A γ felvételétől függően három eset lehetséges:

- $0° < \gamma < 90°$ $$\frac{c}{2} < s_c \leq \max s_c = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}, \tag{1}$$
- $\gamma = 90°$ $$\frac{c}{2} = s_c, \tag{2}$$
- $90° < \gamma < 180°$ $$\frac{c}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \min s_c \leq s_c < \frac{c}{2}. \tag{3}$$

Egyenlőség (1)-nél vagy (3)-nál csak az $a = b$ egyenlő szárú (esetlegesen egyenlő oldalú) esetben áll fenn (48-1. ábra).

(1) *vagy* (3) *teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele*.

(2) *esetén nincs három független adat, ezért ebből nincs egyértelmű megoldás.*



48-1. ábra

Induljunk el a c oldalra felírt *koszinusztételből* (4) és s_c súlyvonal oldalakból kifejezett képletéből (5) mint egy kétismeretlenes (a, b) egyenletrendszerből:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\begin{cases} c^2 &= a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma, & \text{E. 12(14)} \quad (4)\\ s_c &= \dfrac{\sqrt{2b^2+2a^2-c^2}}{2}, & \text{E. 24(8)} \quad (5)\end{cases}$$

$$a^2+b^2 = c^2+2ab\cdot\cos\gamma, \quad (6)$$

$$-\quad a^2+b^2 = \frac{c^2}{2}+2s_c^2, \quad (7)$$

$$0 = \frac{c^2}{2}+2ab\cdot\cos\gamma-2s_c^2,$$

$$a^2+b^2 = \frac{c^2}{2}+2s_c^2, \quad (8)$$

$$\pm\quad 2ab = \left(-\frac{c^2}{2}+2s_c^2\right)\cdot\frac{1}{\cos\gamma}, \quad (9)$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 &= \dfrac{c^2}{2}+2s_c^2-\dfrac{c^2}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos\gamma}+2s_c^2\cdot\dfrac{1}{\cos\gamma}, & (10)\\ (a-b)^2 &= \dfrac{c^2}{2}+2s_c^2+\dfrac{c^2}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos\gamma}-2s_c^2\cdot\dfrac{1}{\cos\gamma}, & (11)\end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b &= \sqrt{\dfrac{c^2}{2}\cdot\dfrac{\cos\gamma-1}{\cos\gamma}+2s_c^2\cdot\dfrac{\cos\gamma+1}{\cos\gamma}} = p, & (12)\\ |a-b| &= \sqrt{\dfrac{c^2}{2}\cdot\dfrac{\cos\gamma+1}{\cos\gamma}+2s_c^2\cdot\dfrac{\cos\gamma-1}{\cos\gamma}} = q, & (13)\end{cases}$$

$$a_1 = \frac{p-q}{2};\quad b_1 = \frac{p+q}{2};\qquad (a<b), \quad (14)$$

$$a_2 = \frac{p+q}{2};\quad b_2 = \frac{p-q}{2};\qquad (a\geq b). \quad (15)$$

1. példa. A 48-1. ábra adataiból elindulva, a γ hegyesszögű eset:

$$c=40;\qquad \gamma=\arcsin(4/5)\approx 53{,}1301^\circ;\qquad s_c=5\sqrt{58}\approx 38{,}0789,$$
$$p\approx 84{,}8528;\qquad q\approx 14{,}1421;$$
$$a_{11}\approx 35{,}3553;\qquad b_{11}\approx 49{,}4975;$$
$$a_{12}\approx 49{,}4975;\qquad b_{12}\approx 35{,}3553.$$

2. példa. A 48-1. ábra adataiból elindulva, a γ tompaszögű eset:

$$c=40;\quad \gamma=180^\circ-\arcsin(4/5)\approx 126{,}8699^\circ;\quad s_c=5\cdot\left(3\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)\approx 12{,}7520,$$
$$p\approx 43{,}7780;\qquad q\approx 18{,}2740;$$
$$a_{21}\approx 12{,}7520;\qquad b_{21}\approx 31{,}0260;$$
$$a_{22}\approx 31{,}0260;\qquad b_{22}\approx 12{,}7520.$$

Az (12) és a (22) indexszel jelölt második megoldást a 48-1. ábrán mindkét példánál szaggatott vonallal jelöltük.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

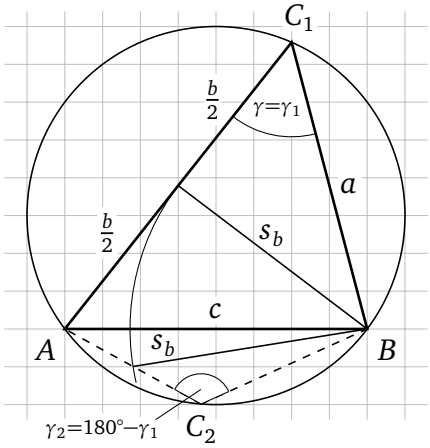
A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, mindkét példában 2.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

49. Egy oldal, a szemben levő szög és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonal (c,γ,s_b)

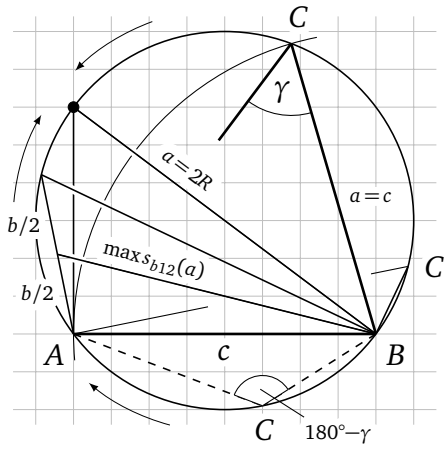
A $c>0$ és a $0°<\gamma<180°$ felvétele után a C pontok egy *látószögköríven* helyezkednek el ($C\neq A$, $C\neq B$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R=c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t, a 49-1. és a 49-2. ábrákat.

Induljunk el az s_b súlyvonal oldalakkal kifejezett képletéből (1), és fejezzük ki b^2-et (2). Írjuk föl a *koszinusztételt* a c oldalra (3), és helyettesítsük (2)-t:



49-1. ábra

A nyíl a növekvő a irányába mutat.



49-2. ábra

E. 24(8)
$$4s_b^2=2a^2+2c^2-b^2, \tag{1}$$

$$b^2=2a^2+2c^2-4s_b^2, \tag{2}$$

E. 12(14)
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma, \tag{3}$$

$$c^2=a^2+2a^2+2c^2-4s_b^2-2a\cdot\cos\gamma\cdot\sqrt{2a^2+2c^2-4s_b^2},$$

$$2a\cdot\cos\gamma\cdot\sqrt{2a^2+2c^2-4s_b^2}=3a^2+c^2-4s_b^2. \quad \big|\,()^2 \tag{4}$$

A négyzetre emelés után alakítsuk át, majd rendezzük az egyenletet a fogyó hatványai szerint 0-ra. Így az a ismeretlen oldal negyedfokú egyenletéhez jutunk c,γ,s_b paraméterekkel, lásd (5)-öt:

$$4a^2\cdot\cos^2\gamma\cdot(2a^2+2c^2-4s_b^2)=9a^4+c^4+16s_b^4+6a^2c^2-24a^2s_b^2-8c^2s_b^2,$$

$$\boxed{\left(9-8\cos^2\gamma\right)a^4-\left((c^2-2s_b^2)\cdot 8\cos^2\gamma-6c^2+24s_b^2\right)a^2+\left(c^2-4s_b^2\right)^2=0.} \tag{5}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az $a \in \mathbf{R}^+$ a megoldás szükséges feltétele.

Az a, c és s_b ismeretében b (2)-ből számolható, és pozitív lesz, ha

$$2a^2 + 2c^2 - 4s_b^2 > 0.$$

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség*:

E. 1(3) $$|a - b| < c < a + b.$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Példa. A 49-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \qquad \gamma = \gamma_1 = \arcsin(4/5) \approx 53{,}1301^\circ; \qquad s_b = \frac{5 \cdot \sqrt{130 + 6\sqrt{21}}}{2} \approx 31{,}3743,$$

$$6{,}12\,a^4 - 12\,962{,}48\,a^2 + 5\,463\,375 = 0,$$

$$a_1 \approx 39{,}21; \qquad a_2 \approx 24{,}10; \qquad a_3 \approx -39{,}21; \qquad a_4 \approx -24{,}10;$$

$$b_1 \approx 48{,}35; \qquad b_2 \approx 20{,}59.$$

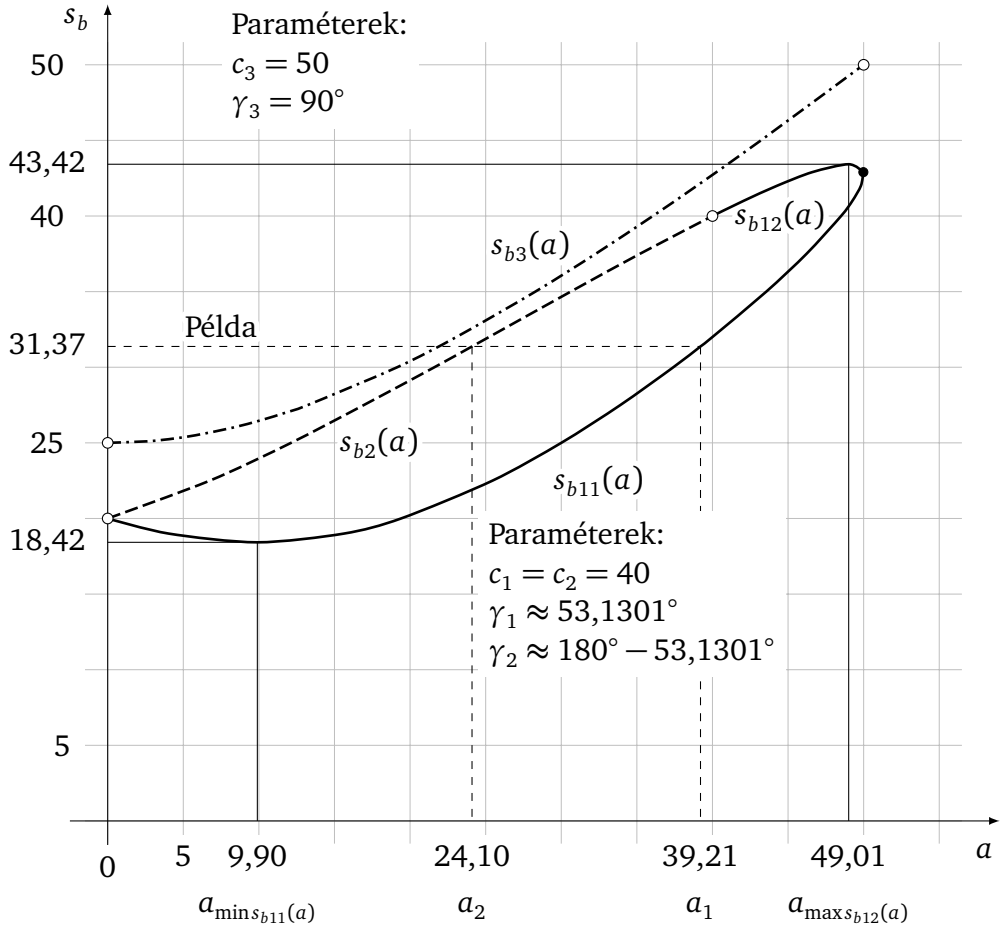
A negatív értékek értelemszerűen nem tekinthetők megoldásnak. A $\gamma = \gamma_1 < 90^\circ$ hegyesszöghöz az a_1 tartozik, ugyanis ekkor (4) mindkét oldala pozitív, a_2 pedig a négyzetre emelés miatt fellépő hamis gyök. A $\gamma = \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1$ tompaszög esetén pedig éppen fordítva. Itt a_2 lesz a megoldás, ugyanis ekkor (4) mindkét oldala negatív, és a_1 a hamis gyök. A két esetet a 49-1. ábra mutatja.

A részletesebb vizsgálat:

Rajzoljuk föl az $A \subset \mathbf{R}^+$ halmazon értelmezett $A \to \mathbf{R}^+$, $a \mapsto s_b(a)$ függvényeket.

A c, γ, s_b adatok felvétele után kiszámítjuk a-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon c-t és γ-t paraméternek választva, majd felrajzoljuk a síkgörbe grafikonját egy a, s_b koordinátarendszerben, amit ezután függvényekre bonthatunk (49-3. ábra).

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



49-3. ábra

A c felvétele után γ felvételétől függően 3 eset lehetséges. Legyen $a, b, c, R \in \mathbf{R}^+$, $2R = c/\sin\gamma$, $0° < \gamma < 180°$ és az értelmezési tartományokat jelöljük A-val.

1. Ha $\gamma_1 < 90°$, akkor $A_{11} = \{a|0 < a \le 2R\}$, $A_{12} = \{a|c < a \le 2R\}$, és $\min s_{b11}(a) \le$ $\le s_b \le \max s_{b12}(a)$ kell legyen, ami *a megoldás szükséges és elégséges feltétele*. Mint látható, ez az eset két függvényből, egy $s_{b11}(a)$ és egy $s_{b12}(a)$-ból tevődik össze. Itt s_b a c, γ után felvett harmadik induló értéket jelenti. A $c_1 = 40$, és $\gamma_1 \approx 53{,}1301°$ esetén $18{,}42 \approx$ $\approx \min s_{b11}(a) \le s_b \le \max s_{b12}(a) \approx 43{,}42$. A $\min s_{b11}(a)$ az $a \approx 9{,}90$-nél, a $\max s_{b12}(a)$ az $a \approx 49{,}01$-nél jelentkezik.

$$\lim_{a\to 0+} s_{b11}(a) = \frac{c}{2} = 20; \qquad \lim_{a\to c+} s_{b12}(a) = c = 40,$$

$$s_{b11}(a)\Big|_{a\,=\,c} = a \cdot \sin\gamma = 40 \cdot \sin 53{,}1301° \approx 32.$$

Ezt a két függvényt a 49-3. ábrán folytonos vonallal és pontelválasztással jelöltük. Lásd a 49-2. ábrát is.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

2. Ha $90° < \gamma_2 < 180°$, akkor $A_2 = \{a|0 < a < c\}$, és $\frac{c}{2} < s_{b2}(a) < c$, és így felvételkor s_b ebben az intervallumban kell legyen, ami *a megoldás szükséges és elégséges feltétele*. A $c_2 = 40$ és $\gamma_2 \approx 180° - 53{,}1301° \approx 126{,}8699°$ esetén $20 < s_{b2}(a) < 40$ lesz.

   Továbbá
   $$\lim_{a\to 0+} s_{b2}(a) = \frac{c}{2} = 20; \qquad \lim_{a\to c-} s_{b2}(a) = c = 40.$$
   Ezt a függvényt a 49-3. ábrán szaggatott vonallal jelöltük. Lásd a 49-2. ábrát is.

3. Ha $\gamma_3 = 90°$, akkor $A_3 = \{a|0 < a < c\}$ és $\frac{c}{2} < s_{b3}(a) < c$, és így felvételkor s_b ebben az intervallumban kell legyen, ami *a megoldás szükséges és elégséges feltétele*. A $c_3 = 50$, $\gamma_3 = 90°$ esetén $25 < s_{b3}(a) < 50$ lesz. Továbbá:
   $$\lim_{a\to 0+} s_{b3}(a) = \frac{c}{2} = 25; \qquad \lim_{a\to c-} s_{b3}(a) = c = 50.$$
   Ezt a függvényt a 49-3. ábrán pontvonallal jelöltük.

A pozitív a, b, c ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.

A megoldások száma (5) *pozitív valós gyökeinek számától függ, ha azok kielégítik a* (4)*-et is.* A példában a γ hegyesszögű esetben 1, a γ tompaszögű esetben szintén 1, általában 0, 1 vagy 2 lehet. Lásd még a 49-3. ábrát. Az ábrából a példa megoldása is leolvasható.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

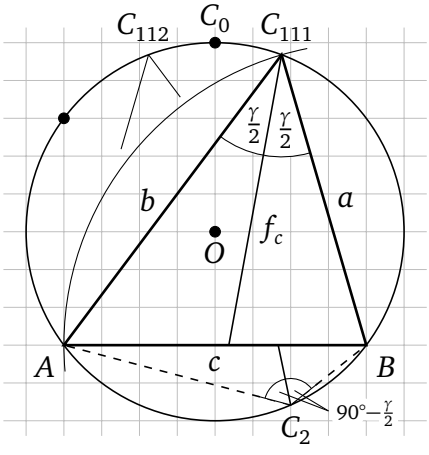
50. Egy oldal, a szemben levő szög és a hozzájuk tartozó belső szögfelező (c, γ, f_c)

A $c > 0$ és $0° < \gamma < 180°$ felvétele után a C pontok egy *látószögköríven* helyezkednek el ($C \neq A$, $C \neq B$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R = c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t.

Keressünk feltételt az induló adathármasra.

Bizonyítható, hogy adott c és γ esetén f_c belső szögfelező az $a = b$ egyenlő szárú (esetlegesen egyenlő oldalú) háromszögnél lesz maximális (E. 28(1)).

Az 50-1. ábrán választott c-nél és γ hegyesszögnél f_c belső szögfelező maximuma C_0-nál lesz.



50-1. ábra

$$0 < f_c \leq \max f_c = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}. \tag{1}$$

(1) *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Írjuk föl az f_c két oldalból és a közbezárt szögből kifejezett képletét, és fejezzük ki ab-t:

E. 28(1)
$$ab = \frac{f_c \cdot (a+b)}{2 \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}. \tag{2}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Írjuk föl az f_c oldalakkal kifejezett képletét, lásd (3)-at, majd helyettesítsük (2)-t:

E. 29(3)
$$f_c^2 = ab \cdot \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right), \tag{3}$$

$$f_c^2 = \frac{f_c \cdot (a+b)}{2 \cdot \cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right),$$

$$f_c \cdot 2 \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = (a+b) - \frac{c^2}{a+b}. \qquad \Big| \cdot (a+b)$$

Átalakítás után ezt rendezzük $a+b$ fogyó hatványai szerint nullára. Így $a+b$ másodfokú egyenletéhez jutunk c, γ, f_c paraméterekkel:

$$\boxed{(a+b)^2 - 2f_c \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot (a+b) - c^2 = 0.} \tag{4}$$

Mivel $D > 0$ és $(a+b)_1 \cdot (a+b)_2 = -c^2$ (lásd *Viète-féle formulák*), ezért a két valós gyök ellentétes előjelű. Az $(a+b)$ azonban negatív nem lehet, ezért a negatív gyök nem értelmezett. A pozitív $(a+b)$ ismeretében ab (2)-ből számolható és szintén pozitív lesz.

$$\boxed{\begin{aligned} &\begin{cases} a+b=p, & b=p-a, \\ ab=q, & a^2-pa+q=0, \end{cases} \\ &a_1 = \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}; \qquad a_2 = \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; \\ &b_1 = \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; \qquad b_2 = \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}. \end{aligned}} \tag{5}$$

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p > 0, \quad q > 0, \quad p^2 - 4q \geq 0. \tag{6}$$

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3)
$$|a-b| < c < a+b. \tag{7}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Példa. Az 50-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \qquad \gamma = \arcsin(4/5) \approx 53{,}1301°; \qquad f_c = \sqrt{\frac{184\,320}{121}} \approx 39{,}0296,$$

$$(a+b)^2 - (768/11)\cdot(a+b) - 1600 = 0,$$

$$\begin{cases} (a+b)_1 = 88 = p, \\ (ab)_1 = 1920 = q, \end{cases} \qquad (a+b)_2 = -(200/11) \approx -18{,}18. \quad \text{A negatív érték nem értelmezett.}$$

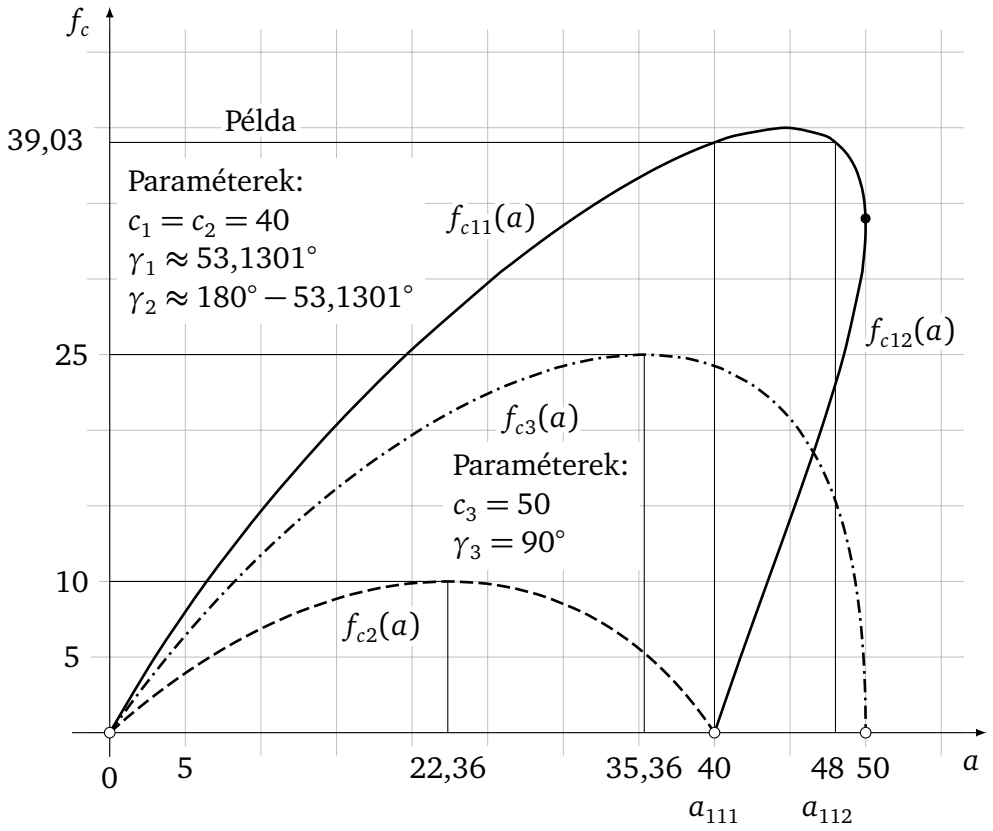
$$a_{111} = 40; \qquad a_{112} = 48;$$

$$b_{111} = 48; \qquad b_{112} = 40.$$

A részletesebb vizsgálat:

Rajzoljuk föl az $A \subset \mathbf{R}^+$ halmazon értelmezett $A \to \mathbf{R}^+$, $a \mapsto f_c(a)$ függvényeket.

A c, γ, f_c adatok felvétele után kiszámítjuk a-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon, c-t és γ-t paraméternek választva, majd felrajzoljuk a síkgörbe grafikonját egy a, f_c koordinátarendszerben, amit ezután függvényekre bonthatunk (50-2. ábra).



50-2. ábra

A c felvétele után γ felvételétől függően három eset lehetséges. Legyen $a, b, c, R \in \mathbf{R}^+$, $2R = c/\sin\gamma$, $0° < \gamma < 180°$, és az értelmezési tartományokat jelöljük A-val.

1. *Ha* $\gamma_1 < 90°$, *akkor* $A_{11} = \{a | 0 < a \le 2R\}$, $A_{12} = \{a | c < a \le 2R\}$, *és* $0 < f_{c11}(a) \le$ $\le \max f_{c11}(a) = \dfrac{c}{2} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\gamma_1}{2}$, *és így felvételkor* f_c *ebben az intervallumban kell legyen, ami a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Mint látható, ez az eset két függvényből, egy $f_{c11}(a)$ és egy $f_{c12}(a)$-ból tevődik össze. A $c_1 = 40$ és $\gamma_1 \approx 53{,}1301°$ esetén $0 < f_{c11}(a) \le 40$.

Ezt a két függvényt az 50-2. ábrán folytonos vonallal és pontelválasztással jelöltük.

Az ábrából a példa mindkét megoldása is leolvasható.

2. *Ha* $90° < \gamma_2 < 180°$, *akkor* $A_2 = \{a|0 < a < c\}$, *és* $0 < f_{c2}(a) \le \max f_{c2}(a) = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma_2}{2}$, *és így felvételkor* f_c *ebben az intervallumban kell legyen, ami a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*
A $c_2 = 40$ és $\gamma_2 \approx 180° - 53{,}1301° \approx 126{,}8699°$ esetén $0 < f_{c2}(a) \le 10$ lesz.
Ezt a függvényt a 50-2. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

3. *Ha* $\gamma_3 = 90°$, *akkor* $A_3 = \{a|0 < a < c\}$ *és* $0 < f_{c3}(a) \le \max f_{c3}(a) = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma_3}{2}$, *és így felvételkor* f_c *ebben a* $0 < f_c \le c/2$ *intervallumban kell legyen, ami a megoldás szükséges és elégséges feltétele.* A $c_3 = 50$, $\gamma_3 = 90°$ esetén $0 < f_{c3}(a) \le 25$ lesz.
Ezt a függvényt a 50-2. ábrán pontvonallal jelöltük.

A pozitív a, b, c ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

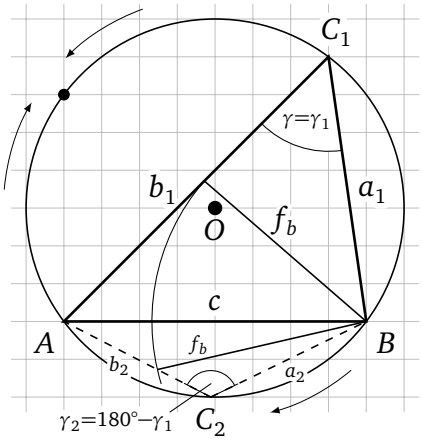
Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

51. Egy oldal, a szemben levő szög és egy másik oldalhoz tartozó belső szögfelező (c, γ, f_b)

A $c > 0$ és a $0° < \gamma < 180°$ felvétele után a C pontok egy *látószögkörívén* helyezkednek el ($C \neq A$, $C \neq B$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R = c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t és az 51-1. ábrát.

Induljunk el az f_b belső szögfelező oldalakkal kifejezett képletéből (1), és fejezzük ki b^2-et (2), illetve b-t (3). Írjuk föl a *koszinusztételt* a c oldalra (4), majd helyettesítsük (2)-t, illetve (3)-at. Így a kapott egyenletben csak az a ismeretlen oldal marad (5). Keressük a-t:

A nyíl a növekvő a irányába mutat.



51-1. ábra

E. 29(3) $$f_b^2 = ac \cdot \left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right), \tag{1}$$

$$b^2 = (a+c)^2 \cdot \left(1 - \frac{f_b^2}{ac}\right), \tag{2}$$

$$b = (a+c) \cdot \sqrt{\frac{ac - f_b^2}{ac}}, \tag{3}$$

$ac - f_b^2 > 0$ *szükséges feltétel.*

E. 12(14) $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma, \tag{4}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$c^2 = a^2 + (a+c)^2 \cdot \left(\frac{ac - f_b^2}{ac}\right) - 2a \cdot (a+c) \cdot \sqrt{\frac{ac - f_b^2}{ac}} \cdot \cos\gamma, \tag{5}$$

amiből átalakítás után (6)-hoz jutunk.

$$2a \cdot (a+c) \cdot \sqrt{\frac{ac - f_b^2}{ac}} \cdot \cos\gamma = (a+c) \cdot (a-c) + (a+c)^2 \cdot \left(\frac{ac - f_b^2}{ac}\right), \quad \Big| : (a+c)$$

$$2a \cdot \sqrt{\frac{ac - f_b^2}{ac}} \cdot \cos\gamma = a - c + (a+c) \cdot \left(\frac{ac - f_b^2}{ac}\right),$$

$$\frac{2a \cdot \sqrt{ac \cdot (ac - f_b^2)}}{ac} \cdot \cos\gamma = a \cdot \left(1 + \frac{ac - f_b^2}{ac}\right) + c \cdot \left(\frac{ac - f_b^2}{ac} - 1\right),$$

$$\frac{2a \cdot \sqrt{ac \cdot (ac - f_b^2)}}{ac} \cdot \cos\gamma = \frac{a \cdot (2ac - f_b^2)}{ac} - \frac{c f_b^2}{ac}, \quad \Big| \cdot (ac)$$

$$2a \cdot \sqrt{ac \cdot (ac - f_b^2)} \cdot \cos\gamma = a \cdot (2ac - f_b^2) - c f_b^2,$$

$$2a \cdot \sqrt{ac \cdot (ac - f_b^2)} \cdot \cos\gamma = 2a^2 c - (a+c) \cdot f_b^2. \quad \Big| ()^2 \tag{6}$$

Emeljük (6)-ot négyzetre, majd rendezzük az egyenletet a fogyó hatványai szerint 0-ra. Így az a ismeretlen oldal negyedfokú egyenletéhez jutunk c, γ, f_b paraméterekkel, lásd (7)-et.

$$4a^2 \cdot (a^2 c^2 - a c f_b^2) \cdot \cos^2\gamma = 4a^4 c^2 - 4a^2 c \cdot (a+c) \cdot f_b^2 + (a+c)^2 \cdot f_b^4,$$

$$4c^2 \cos^2\gamma\, a^4 - 4c f_b^2 \cos^2\gamma\, a^3 = 4c^2 a^4 - 4c f_b^2 a^3 - 4c^2 f_b^2 a^2 + f_b^4 a^2 + 2c f_b^4 a + c^2 f_b^4,$$

$$\boxed{4c^2 \sin^2\gamma\, a^4 - 4c f_b^2 \sin^2\gamma\, a^3 + (f_b^4 - 4c^2 f_b^2) a^2 + 2c f_b^4 a + c^2 f_b^4 = 0.} \tag{7}$$

Az $a \in \mathbf{R}^+$ a megoldás további szükséges feltétele.

Az a, c és f_b adatok ismeretében b (3)-ból számolható és pozitív lesz, ha

$$ac > f_b^2.$$

A pozitív a, b és c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség*:

E. 1(3) $$|a-b| < c < a+b.$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Példa. Az 51-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \quad \gamma = 135° - \operatorname{arctg} 7 \approx 53{,}1301°; \quad f_b = \left(-280 + 200 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{50 + 35\sqrt{2}} \approx 28{,}3556,$$

$$4\,096\,a^4 - 82\,333{,}75\,a^3 - 4\,499\,378{,}11\,a^2 + 51\,718\,490{,}99\,a + 1\,034\,369\,819{,}9 = 0,$$

$$a_1 \approx 35{,}3553; \quad a_2 \approx 22{,}8643; \quad a_3 \approx -26{,}1911; \quad a_4 \approx -11{,}9275;$$

$$b_1 \approx 49{,}4975; \quad b_2 \approx 21{,}8542.$$

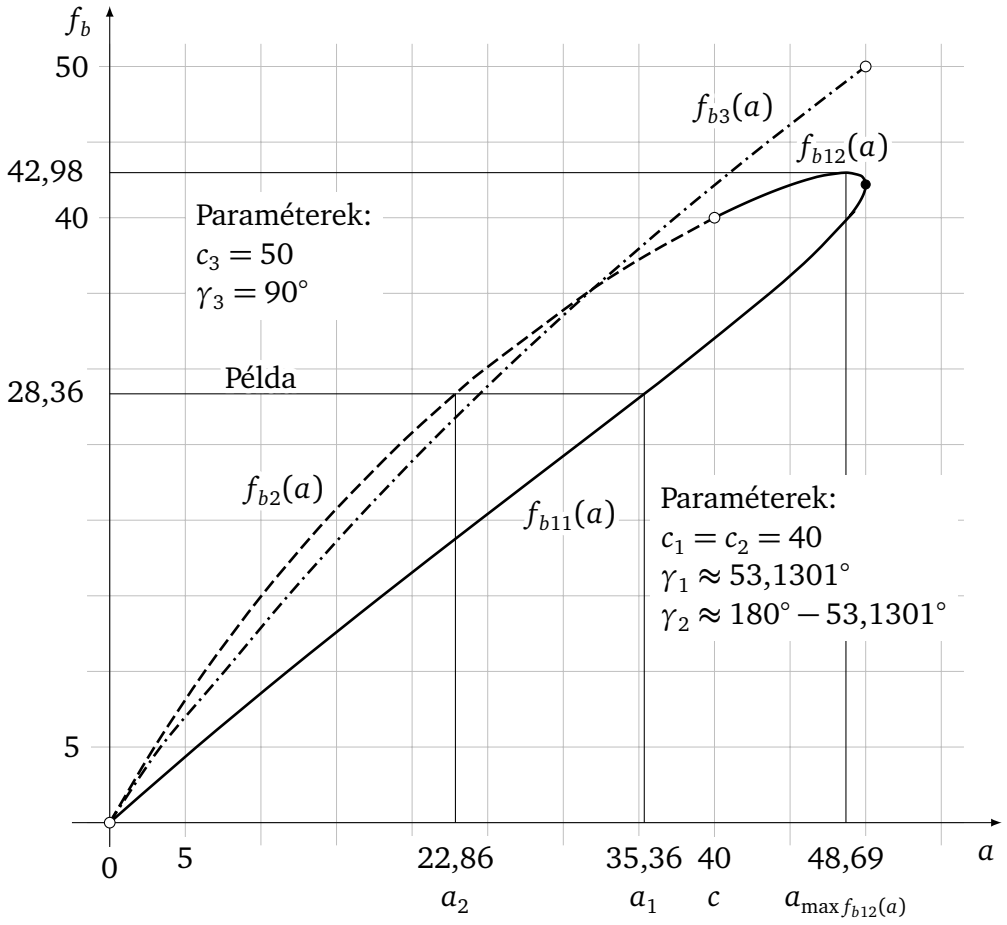
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A negatív értékek értelemszerűen nem tekinthetők megoldásnak. A $\gamma = \gamma_1 < 90°$ hegyesszöghöz az a_1 tartozik, ugyanis ekkor (6) mindkét oldala pozitív, a_2 pedig a négyzetre emelés miatt fellépő hamis gyök. A $\gamma = \gamma_2 = 180° - \gamma_1$ tompaszög esetén pedig éppen fordítva. Itt a_2 lesz a megoldás, ugyanis ekkor (6) mindkét oldala negatív, és a_1 a hamis gyök. A két esetet az 51-1. ábra mutatja.

A részletesebb vizsgálat:

Rajzoljuk föl az $A \subset \mathbf{R}^+$ halmazon értelmezett $A \to \mathbf{R}^+$, $a \mapsto f_b(a)$ függvényeket.

A c, γ, f_b adatok felvétele után kiszámítjuk a-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon, c-t és γ-t paraméternek választva, majd felrajzoljuk a síkgörbe grafikonját egy a, f_b koordinátarendszerben, amit ezután függvényekre bonthatunk (51-2. ábra).



51-2. ábra

A c felvétele után γ felvételétől függően három eset lehetséges. Legyen $a, b, c, R \in \mathbf{R}^+$, $2R = c/\sin\gamma$, $0° < \gamma < 180°$, és az értelmezési tartományokat jelöljük A-val.

1. *Ha* $\gamma_1 < 90°$*, akkor* $A_{11} = \{a | 0 < a \le 2R\}$, $A_{12} = \{a | c < a \le 2R\}$, *és* $0 < f_b \le \max f_{b12}(a)$ *kell legyen, ami a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

   Mint látható, ez az eset két függvényből, egy $f_{b11}(a)$-ból és egy $f_{b12}(a)$-ból tevődik össze. Itt f_b a c, γ után felvett harmadik induló értéket jelenti. A $c_1 = 40$, és $\gamma_1 \approx 53{,}1301°$ esetén $0 < f_b \le \max f_{b12}(a) \approx 42{,}98$. A $\max f_{b12}(a)$ az $a \approx 48{,}69$-nél jelentkezik. Ezt a két függvényt az 51-2. ábrán folytonos vonallal és pontelválasztással jelöltük.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

2. *Ha* $90° < \gamma_2 < 180°$*, akkor* $A_2 = \{a|0 < a < c\}$ *és* $0 < f_{b2}(a) < c$*, és így felvételkor* f_b *ebben az intervallumban kell legyen, ami a megoldás szükséges és elégséges feltétele.* A $c_2 = 40$ és $\gamma_2 \approx 180° - 53{,}1301° \approx 126{,}8699°$ esetén $0 < f_{b2}(a) < 40$ lesz. Ezt a függvényt az 51-2. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

3. *Ha* $\gamma_3 = 90°$*, akkor* $A_3 = \{a|0 < a < c\}$ *és* $0 < f_{b3}(a) < c$*, és így felvételkor* f_b *ebben az intervallumban kell legyen, ami a megoldás szükséges és elégséges feltétele.* A $c_3 = 50$, $\gamma_3 = 90°$ esetén $0 < f_{b3}(a) < 50$ lesz. Ezt a függvényt az 51-2. ábrán pontvonallal jelöltük.

A $c > 0$ és $0° < \gamma < 180°$ felvétele után, ha f_b nincs a kijelölt intervallumban, akkor a negatív valós vagy komplex szám.

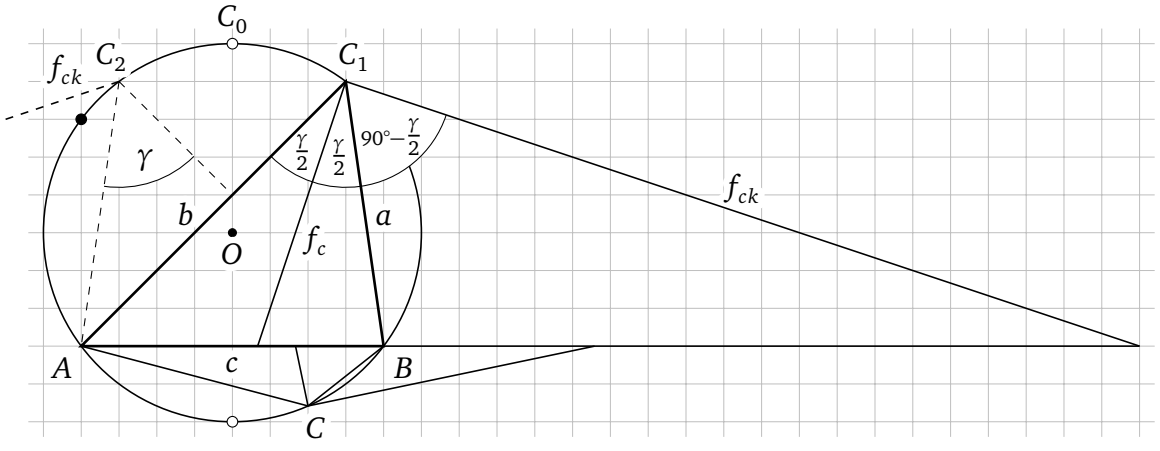
A megoldások száma (7) *pozitív valós gyökeinek számától függ, ha azok kielégítik* (6)*-ot is.* A példában a γ hegyesszögű esetben 1, a γ tompaszögű esetben szintén 1, általában 0, 1 vagy 2 lehet. Lásd még az 51-2. ábrát is.

A pozitív a, b, c *ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.*

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

52. Egy oldal, a szemben levő szög és az oldalhoz tartozó külső szögfelező (c, γ, f_{ck})

A $c > 0$ és a $0° < \gamma < 180°$ felvétele után a C pontok egy *látószögköríven* helyezkednek el ($C \neq A$, $C \neq B$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R = c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t, és az $a = b$ pontok nem értelmezettek (52-1. ábra).



52-1. ábra

Induljunk el f_{ck} külső szögfelező oldalakkal kifejezett képletéből:

E. 31(3)
$$f_{ck}^2 = ab \cdot \left(\frac{c^2}{(a-b)^2} - 1 \right), \qquad a \neq b. \tag{1}$$

Folytassuk f_{ck} két oldalból és a közbezárt szögből kifejezett képletével, és fejezzük ki ab-t:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

E. 30(3)
$$ab = \frac{f_{ck} \cdot |a-b|}{2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}. \tag{2}$$

Helyettesítsük (2)-t (1)-be, így az alábbi egyenlethez jutunk:

$$f_{ck}^2 = \frac{f_{ck} \cdot |a-b|}{2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\frac{c^2}{(a-b)^2} - 1 \right), \qquad (a-b)^2 = |a-b|^2,$$

$$2 f_{ck} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{c^2}{|a-b|} - |a-b|. \qquad \Big| \cdot |a-b| > 0$$

Átalakítás után $|a-b|$ másodfokú egyenletéhez jutunk c, γ, f_{ck} paraméterekkel:

$$\boxed{|a-b|^2 + 2 f_{ck} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot |a-b| - c^2 = 0.} \tag{3}$$

Mivel $D > 0$ és $|a-b|_1 \cdot |a-b|_2 = -c^2$ (lásd *Viète-féle formulák*), ezért a két valós gyök ellentétes előjelű. Az $|a-b|$ azonban negatív nem lehet, ezért a negatív gyök nem értelmezett. A pozitív $|a-b|$ ismeretében ab (2)-ből számolható, és szintén pozitív lesz. Keressük a-t és b-t:

$$\begin{cases} |a-b| = -(a-b) = b-a = p, & \text{ha} \quad 0 < a < b, \\ ab = q, \end{cases}$$

$$b = a + p; \qquad a^2 + pa - q = 0;$$

$$a_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2+4q}}{2}; \qquad a_3 = \frac{-p - \sqrt{p^2+4q}}{2};$$

$$b_1 = \frac{p + \sqrt{p^2+4q}}{2}; \qquad b_3 = \frac{p - \sqrt{p^2+4q}}{2}.$$

$$\begin{cases} |a-b| = a-b = p, & \text{ha} \quad 0 < b < a, \\ ab = q, \end{cases}$$

$$b = a - p; \qquad a^2 - pa - q = 0;$$

$$a_2 = \frac{p + \sqrt{p^2+4q}}{2}; \qquad a_4 = \frac{p - \sqrt{p^2+4q}}{2};$$

$$b_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2+4q}}{2}; \qquad b_4 = \frac{-p - \sqrt{p^2+4q}}{2}.$$

A negatív a és b nem tekinthető megoldásnak, ezért a 3-as és 4-es indexszel jelölt gyökök nem értelmezettek.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3)
$$0 < |a-b| < c < a+b, \qquad a \neq b. \tag{4}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Példa. Az 52-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \qquad \gamma = \arcsin(4/5) \approx 53{,}1301^\circ; \qquad f_{ck} = \sqrt{12\,250} \approx 110{,}6797,$$
$$|a-b|^2 + 98{,}9949 \cdot |a-b| - 1600 = 0,$$
$$|a-b|_1 \approx -113{,}1371; \qquad |a-b|_2 \approx 14{,}1421;$$
$$|a-b| \approx 14{,}1421 = p,$$
$$ab \approx 1750 = q,$$
$$a_1 \approx 35{,}3553; \qquad a_2 \approx 49{,}4975;$$
$$b_1 \approx 49{,}4975; \qquad b_2 \approx 35{,}3553.$$

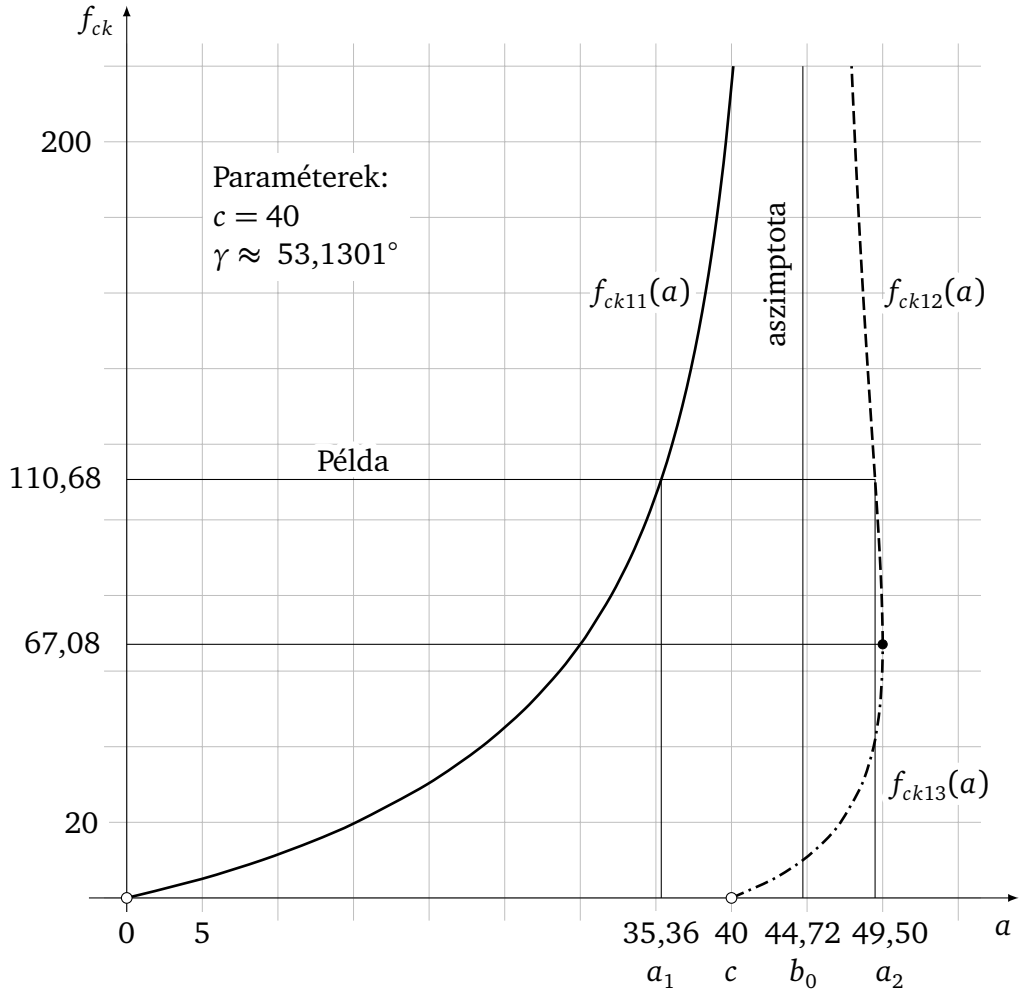
Az a_2, b_2 megoldást az 52-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A részletesebb vizsgálat:

Rajzoljuk föl az $A \subset \mathbf{R}^+$ halmazon értelmezett $A \to \mathbf{R}^+$, $a \mapsto f_{ck}(a)$ függvényeket.

A c, γ, f_{ck} adatok fölvétele után kiszámoljuk a-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon c-t és γ-t paraméternek választva, majd felrajzoljuk a síkgörbe grafikonját egy a, f_{ck} koordinátarendszerben, amit ezután függvényekre bonthatunk (52-2. ábra).

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



52-2. ábra

A c felvétele után γ felvételétől függően három eset lehetséges. Legyen $a, b, c, R \in \mathbf{R}^+$, $a \neq b$, $2R = c/\sin\gamma$, $0° < \gamma < 180°$, és az értelmezési tartományokat jelöljük A-val.

1. Ha $\gamma < 90°$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A_{11} = \left\{a \mid 0 < a < \dfrac{c}{2\sin\frac{\gamma}{2}}\right\}$	$0 < f_{ck11}(a) < +\infty$
$A_{12} = \left\{a \mid \dfrac{c}{2\sin\frac{\gamma}{2}} < a \leq 2R\right\}$	$f_{ck12}(2R) \leq f_{ck12}(a) < +\infty$
$A_{13} = \{a \mid c < a \leq 2R\}$	$0 < f_{ck13}(a) \leq f_{ck13}(2R)$

Mint látható, ez az eset három függvényből, egy $f_{ck11}(a)$-ból, egy $f_{ck12}(a)$-ból, és egy $f_{ck13}(a)$-ból tevődik össze.

A $c = 40$, $\gamma = \arcsin 0{,}8 \approx 53{,}1301°$ paraméterek esetén $a_0 = b_0 = \dfrac{c}{2\sin\frac{\gamma}{2}} \approx 44{,}7214$.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az 52-2. ábrán ezen paraméterek mellett az $f_{ck11}(a)$ függvényt folytonos vonallal, az $f_{ck12}(a)$ függvényt szaggatott vonallal, az $f_{ck13}(a)$ függvényt pedig pontvonallal és pontelválasztással jelöltük.

Az ábrából a példa mindkét megoldása is leolvasható.

2. Ha $90° < \gamma < 180°$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A_{21} = \left\{ a \mid 0 < a < \frac{c}{2\sin\frac{\gamma}{2}} \right\}$	$0 < f_{ck21}(a) < +\infty$
$A_{22} = \left\{ a \mid \frac{c}{2\sin\frac{\gamma}{2}} < a < c \right\}$	$0 < f_{ck22}(a) < +\infty$

3. Ha $\gamma = 90°$, akkor: $2R = c$

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A_{31} = \left\{ a \mid 0 < a < \frac{c}{\sqrt{2}} \right\}$	$0 < f_{ck31}(a) < +\infty$
$A_{32} = \left\{ a \mid \frac{c}{\sqrt{2}} < a < c \right\}$	$0 < f_{ck32}(a) < +\infty$

Mint látható $c > 0$, $0° < \gamma < 180°$ *és* $0 < f_{ck} < +\infty$ *induló feltételek a megoldás szükséges és elégséges feltételei.*

A megoldások száma mindig 2, amelyek egymásnak szimmetrikus párjai.

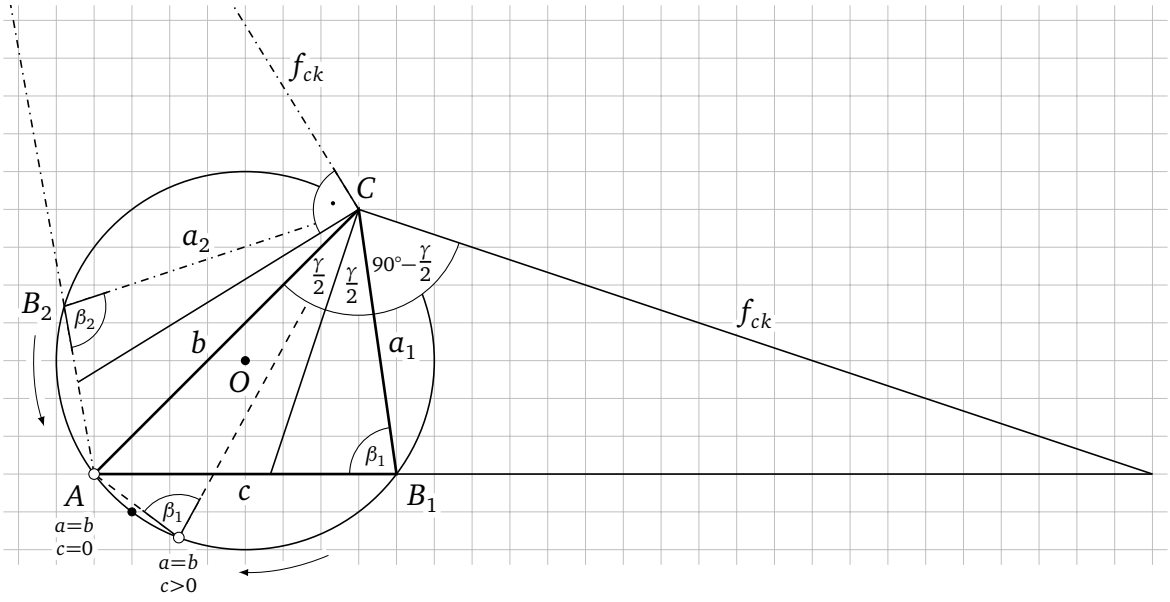
A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

53. Egy oldal, a szemben levő szög és egy másik oldalhoz tartozó külső szögfelező (b, β, f_{ck})

A $b > 0$ és a $0° < \beta < 180°$ felvétele után a B pontok egy *látószögköríven* helyezkednek el ($B \neq C$, $B \neq A$). B mértani helyét tekintve egy β-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R = b/\sin\beta$, és az $a = b$ pontok nem értelmezettek. Lásd E. 11(12)-t és az 53-1. ábrát.



A nyíl a növekvő a irányába mutat.

53-1. ábra

Induljunk el az f_{ck} külső szögfelező oldalakkal kifejezett képletéből:

E. 31(3)
$$f_{ck}^2 = ab \cdot \left(\frac{c^2}{(a-b)^2} - 1 \right), \qquad a \neq b. \tag{1}$$

Fejezzük ki c^2-et, illetve c-t, és írjuk föl a *koszinusztételt* a b oldalra. Így egy kétismeretlenes (a, c) egyenletrendszerhez jutunk, lásd (3)-at és (4)-et. Keressük a-t, majd ezután c-t:

$$c^2 = (a-b)^2 \cdot \left(\frac{f_{ck}^2}{ab} + 1 \right), \tag{2}$$

E. 12(14)
$$\begin{cases} c = \sqrt{(a-b)^2 \cdot \left(\frac{f_{ck}^2}{ab} + 1 \right)}, & (3) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta. & (4) \end{cases}$$

A c kiküszöbölésével oldjuk meg ezt az egyenletrendszert a-ra.

$$b^2 = a^2 + (a-b)^2 \cdot \frac{f_{ck}^2 + ab}{ab} - 2a \cdot \sqrt{(a-b)^2 \cdot \frac{f_{ck}^2 + ab}{ab}} \cdot \cos\beta, \tag{5}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$2a\cdot\sqrt{(a-b)^2\cdot\frac{f_{ck}^2+ab}{ab}}\cdot\cos\beta=(a+b)\cdot(a-b)+(a-b)^2\cdot\frac{f_{ck}^2+ab}{ab}.\quad\Big|\,()^2\qquad(6)$$

Emeljük (6)-ot négyzetre, majd osszuk $(a-b)^2>0$-val, ezután pedig szorozzuk $(ab)^2$-tel.

$$4a^2\cdot(a-b)^2\cdot\frac{f_{ck}^2+ab}{ab}\cdot\cos^2\beta=(a+b)^2\cdot(a-b)^2+$$
$$+2(a+b)(a-b)(a-b)^2\cdot\frac{f_{ck}^2+ab}{ab}+(a-b)^4\cdot\left(\frac{f_{ck}^2+ab}{ab}\right)^2,\qquad\Big|:(a-b)^2$$

$$4a^2\cdot\frac{f_{ck}^2+ab}{ab}\cdot\cos^2\beta=(a+b)^2+$$
$$+2(a^2-b^2)\cdot\frac{f_{ck}^2+ab}{ab}+(a-b)^2\cdot\left(\frac{f_{ck}^2+ab}{ab}\right)^2.\qquad\Big|\cdot(ab)^2$$

Átalakítás és egyszerűsítés után rendezzük az egyenletet a fogyó hatványai szerint nullára. Így az a ismeretlen oldal negyedfokú egyenletéhez jutunk b,β,f_{ck} paraméterekkel, lásd (7)-et.

$$4a^3b\cdot(f_{ck}^2+ab)\cdot\cos^2\beta=(ab\cdot(a+b))^2+2ab\cdot(a^2-b^2)\cdot(f_{ck}^2+ab)+(a-b)^2\cdot(f_{ck}^2+ab)^2,$$

$$4a^3bf_{ck}^2\cos^2\beta+4a^4b^2\cos^2\beta=(a^2b)^2+2a^2b\cdot ab^2+(ab^2)^2+$$
$$+(2a^3b-2ab^3)\cdot(f_{ck}^2+ab)+(a^2-2ab+b^2)\cdot(f_{ck}^4+2abf_{ck}^2+a^2b^2),$$

$$4bf_{ck}^2\cos^2\beta\,a^3+4b^2\cos^2\beta\,a^4=b^2a^4+\cancel{2b^3a^3}+\cancel{b^4a^2}+2bf_{ck}^2a^3+2b^2a^4-\cancel{2b^3f_{ck}^2a}-\cancel{2b^4a^2}+$$
$$+f_{ck}^4a^2+2bf_{ck}^2a^3+b^2a^4-2bf_{ck}^4a-4b^2f_{ck}^2a^2-\cancel{2b^3a^3}+b^2f_{ck}^4+\cancel{2b^3f_{ck}^2a}+\cancel{b^4a^2},$$

$$\boxed{4b^2\sin^2\beta\,a^4+4bf_{ck}^2\sin^2\beta\,a^3+(f_{ck}^4-4b^2f_{ck}^2)\,a^2-2bf_{ck}^4a+b^2f_{ck}^4=0.}\qquad(7)$$

Az $a\in\mathbf{R}^+$ a megoldás szükséges feltétele.

Most a,b,f_{ck} adatok ismeretében c (3)-ból számolható, és pozitív lesz, ha a, b pozitív, és $a\neq b$.

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség*:

E. 1(3) $$0<|a-b|<c<a+b,\qquad a\neq b.$$

Az $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

1. példa. Az 53-1. ábra adataiból elindulva:

$$b=35\sqrt{2}\approx 49{,}4975;\quad\beta=\operatorname{arctg}7\approx 81{,}8699^\circ;\quad f_{ck}=\sqrt{12\,250}\approx 110{,}6797,$$
$$9\,604\,a^4+2\,376\,869\,a^3+30\,012\,500\,a^2-14\,855\,429\,589\,a+367\,653\,125\,000=0,$$
$$a_1\approx 35{,}3553;\quad a_2\approx 41{,}0061;\quad a_3=\text{komplex};\quad a_4=\text{komplex};$$
$$c_1\approx 40;\quad c_2\approx 22{,}5227;\quad c_3=\text{komplex};\quad c_4=\text{komplex}.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A komplex gyökök síkgeometriai szempontból nem tekinthetők megoldásnak. A $\beta = \beta_1 < 90°$ hegyesszöghöz az a_1 megoldás tartozik, ugyanis ekkor (6) mindkét oldala pozitív, és a_2 a négyzetre emelés következtében fellépő hamis gyök. A $\beta = \beta_2 = 180° - \beta_1$ tompaszög esetén pedig éppen fordítva. Itt a_2 lesz a megoldás, ugyanis ekkor (6) mindkét oldala negatív, és a_1 a hamis gyök. A két esetet az 53-1. ábra mutatja.

2. példa. Az 53-1. ábra b, β adataiból, de egy nagyobb f_{ck}-ból elindulva:

$$b = 35\sqrt{2} \approx 49{,}4975; \quad \beta = \operatorname{arctg} 7 \approx 81{,}8699°; \quad f_{ck} = 1\,000,$$

$$a_1 \approx 48{,}5890; \quad a_2 \approx 49{,}9539; \quad a_3 = \text{komplex}; \quad a_4 = \text{komplex};$$

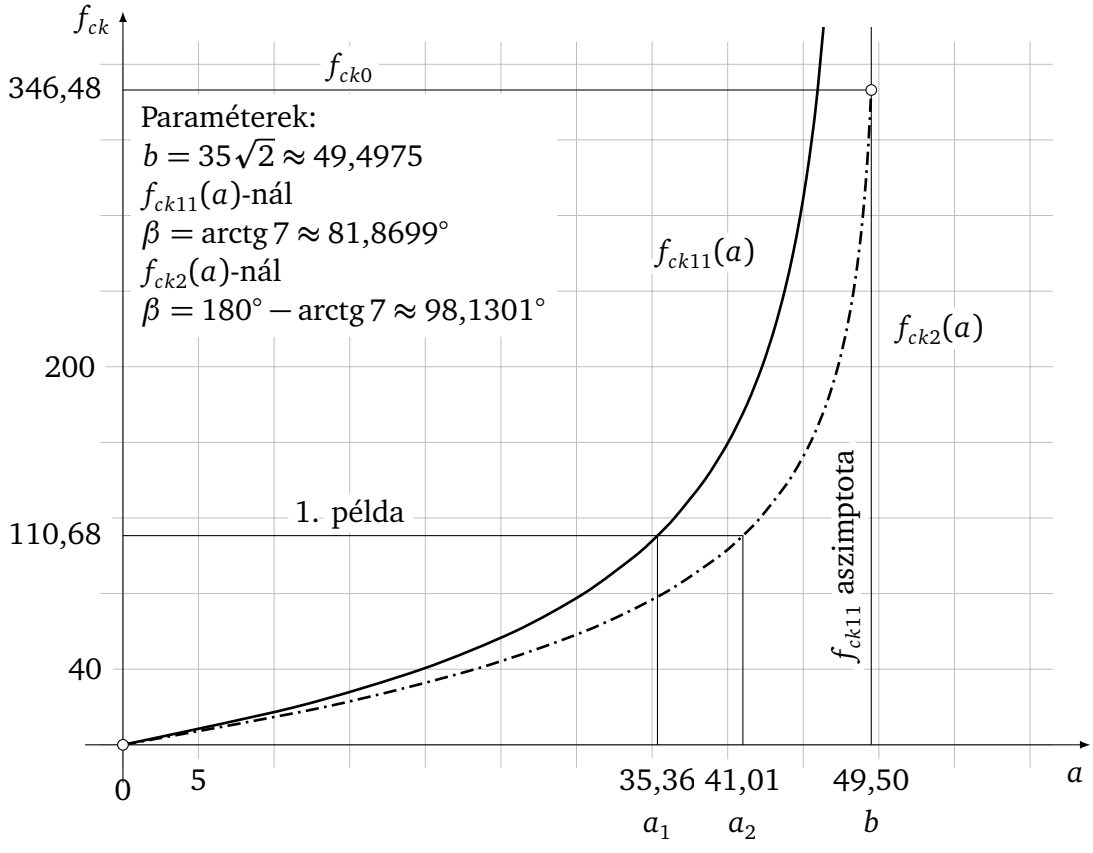
$$c_1 \approx 18{,}5475; \quad c_2 \approx 9{,}1900; \quad c_3 = \text{komplex}; \quad c_4 = \text{komplex}.$$

A komplex gyökök síkgeometriai szempontból nem tekinthetők megoldásnak. A valós gyökök kielégítik (6)-ot is, vagyis két megoldás van. Lásd még az 53-3. ábrát is.

A részletesebb vizsgálat:

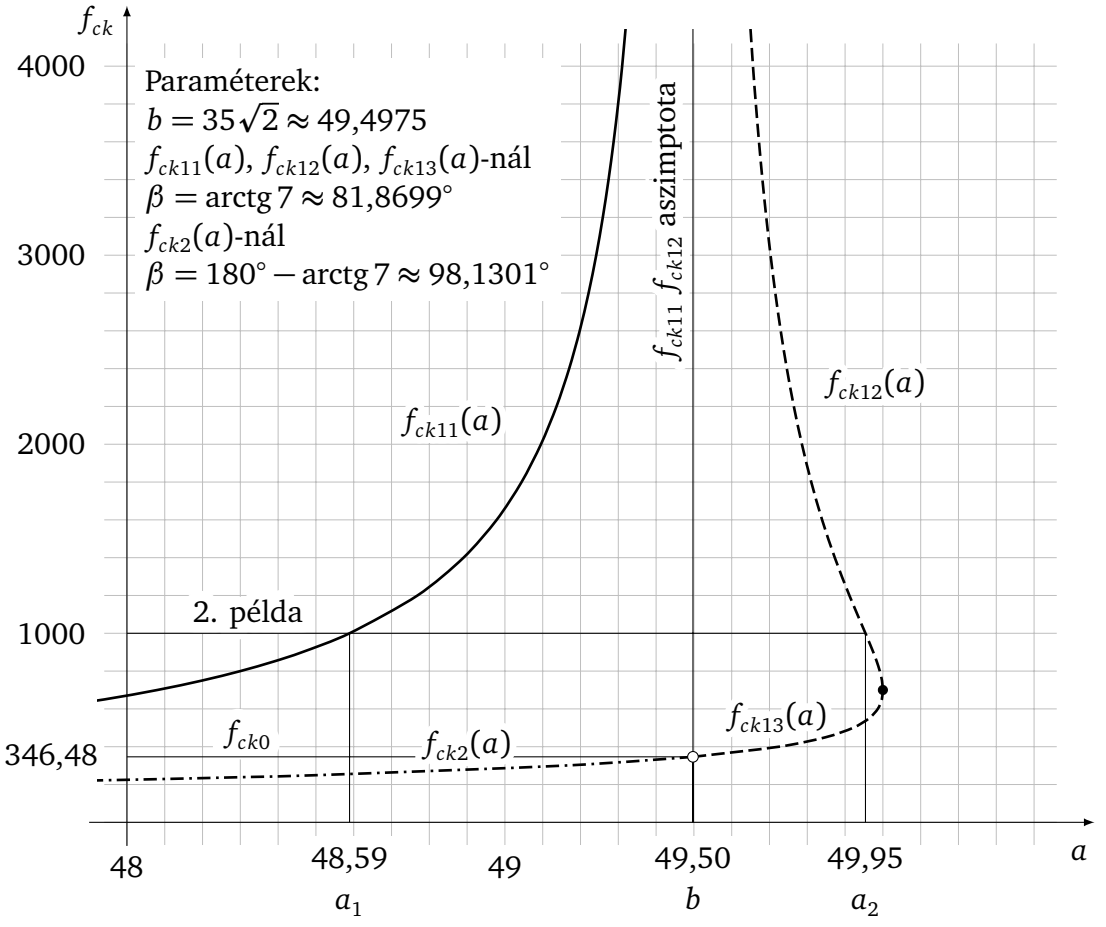
Rajzoljuk föl az $A \subset \mathbf{R}^+$ halmazon értelmezett $A \to \mathbf{R}^+$, $a \mapsto f_{ck}(a)$ függvényeket.

A b, β, f_{ck} adatok fölvétele után kiszámoljuk a-t mint a példákban, ezúttal azonban további pontokon b-t és β-t paraméternek választva, majd felrajzoljuk a síkgörbe grafikonját egy a, f_{ck} koordináta-rendszerben, amit ezután függvényekre bonthatunk. Lásd az 53-2., 53-3. és az 53-4. ábrákat.



53-2. ábra

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



53-3. ábra

A b felvétele után β felvételétől függően három eset lehetséges. Legyen $a, b, c, R \in \mathbf{R}^+$, $a \neq b$, $2R = b/\sin\beta$, $0° < \beta < 180°$ és az értelmezési tartományokat jelöljük A-val.

1. Ha $\beta < 90°$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A_{11} = \{a \mid 0 < a < b\}$	$0 < f_{ck11}(a) < +\infty$
$A_{12} = \{a \mid b < a \leq 2R\}$	$f_{ck12}(2R) \leq f_{ck12}(a) < +\infty$
$A_{13} = \{a \mid b < a \leq 2R\}$	$f_{ck0} < f_{ck13}(a) \leq f_{ck13}(2R)$

Mint látható, ez az eset három függvényből, egy $f_{ck11}(a)$-ból, egy $f_{ck12}(a)$-ból és egy $f_{ck13}(a)$-ból tevődik össze.

Vegyük észre, hogy az $f_{ck11}(a)$ függvénynek az $a = b$, $c > 0$-nál végtelen határértéke van:

$$\lim_{a \to b-} f_{ck11}(a) = +\infty.$$

De az $f_{ck13}(a)$ függvénynek az $a = b$, $c = 0$-nál véges határértéke van, amit jelöljünk f_{ck0}-val.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A $b = 35\sqrt{2} \approx 49{,}4975$, $\beta = \operatorname{arctg} 7 \approx 81{,}8699°$ esetén

$$\lim_{a \to b+} f_{ck13}(a) = f_{ck0} \approx 346{,}482.$$

A három függvényt ezen paraméterek mellett az 53-2., illetve az 53-3. ábra mutatja. Az $f_{ck11}(a)$ függvényt folytonos vonallal, az $f_{ck12}(a)$ és az $f_{ck13}(a)$ függvényt pedig szaggatott vonallal és pontelválasztással jelöltük.

Mint látható, ebben az esetben mindig van megoldás. A megoldások száma (7) *pozitív valós gyökeinek számától függ, ha azok kielégítik* (6)*-ot is.*
Ha $f_{ck} \leq f_{ck0}$, akkor 1 megoldás van, lásd az 1. példa β hegyesszögű esetét.
Ha $f_{ck} > f_{ck0}$, akkor 2 megoldás van, lásd a 2. példát.
Megjegyzés: Az $a = b$-nél f_{ck} nem értelmezett, és mindkét helyen oldalt vált (53-1. ábra).

2. Ha $90° < \beta < 180°$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A_2 = \{a \mid 0 < a < b\}$	$0 < f_{ck2}(a) < f_{ck0}$

Mint látható, ez az eset egy függvényből áll. Vegyük észre, hogy az $f_{ck2}(a)$ függvénynek az $a = b$, $c = 0$-nál véges határértéke van, ami ugyanaz, mint $f_{ck13}(a)$-nál. A $b = 35\sqrt{2} \approx 49{,}4975$, $\beta = 180° - \operatorname{arctg} 7 \approx 98{,}1301°$ esetén

$$\lim_{a \to b-} f_{ck2}(a) = f_{ck0} \approx 346{,}482.$$

A függvényt ezen paraméterek mellett az 53-2., illetve az 53-3. ábra mutatja. Az $f_{ck2}(a)$ függvényt mindkét ábrán pontvonallal jelöltük. Mint látható, ebben az esetben csak akkor van megoldás, ha $0 < f_{ck} < f_{ck0}$. *Vagyis ez a megoldás szükséges és elégséges feltétele. A megoldások száma mindig 1.*
Lásd az 1. példa β tompaszögű esetét.

3. Ha $\beta = 90°$, akkor: $2R = b$

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A_3 = \{a \mid 0 < a < 2R\}$	$0 < f_{ck3}(a) < +\infty$

És az $f_{ck3}(a)$ függvénynek $a = 2R$, $c = 0$-nál végtelen határértéke van.

$$\lim_{a \to 2R-} f_{ck3}(a) = +\infty.$$

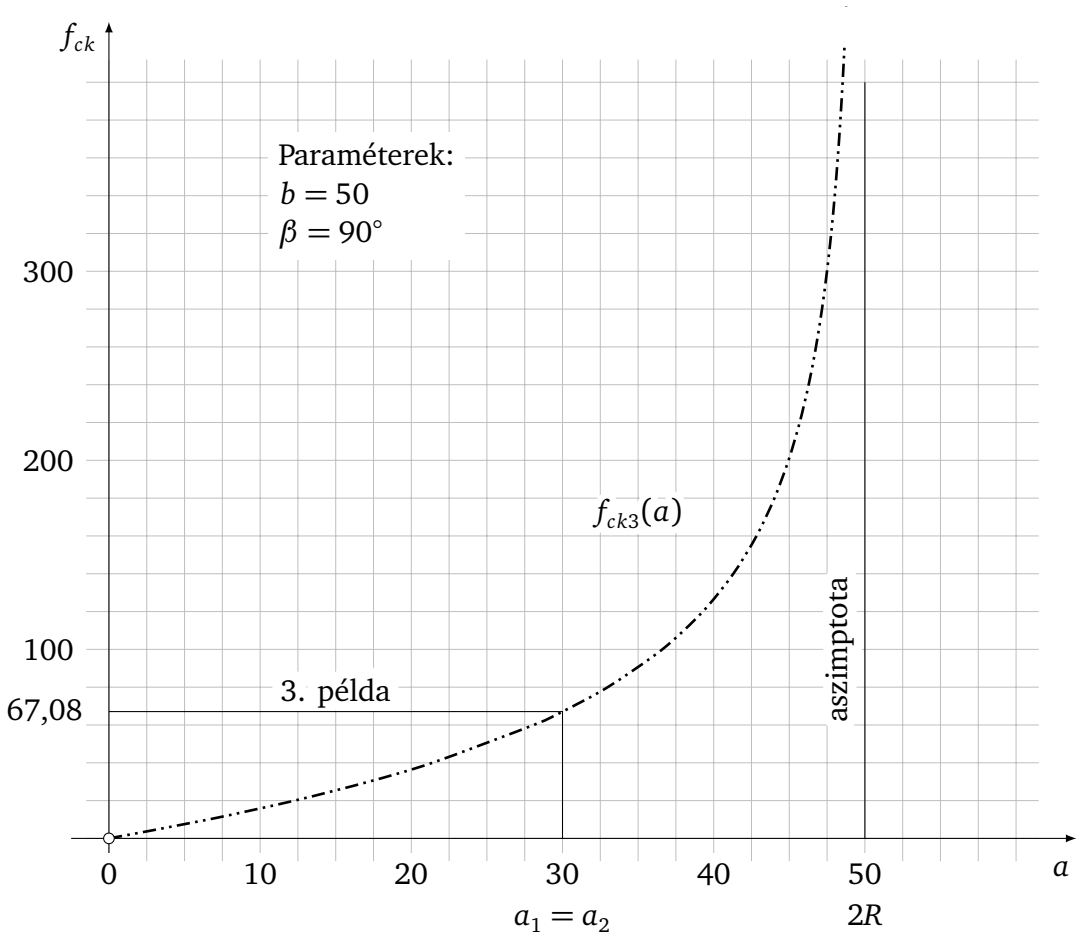
A $b = 50$, $\beta = 90°$ paraméterek esetén az $f_{ck3}(a)$ függvényt az 53-4. ábra mutatja. Ezt a függvényt az ábrán kettős pontvonallal jelöltük. *Mint látható, ebben az esetben mindig van megoldás, a megoldások száma mindig 1.*
Lásd a következő példát.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

3. példa: $b = 50; \quad \beta = 90°; \quad f_{ck} = 30\sqrt{5} \approx 67{,}0820;$

$a_1 = 30; \quad a_2 = 30; \quad a_3 = -75; \quad a_4 = -75;$

$c_1 = 40; \quad c_2 = 40; \quad c_3 = \text{komplex}; \quad c_4 = \text{komplex}.$



53-4. ábra

A pozitív a, b, c ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.

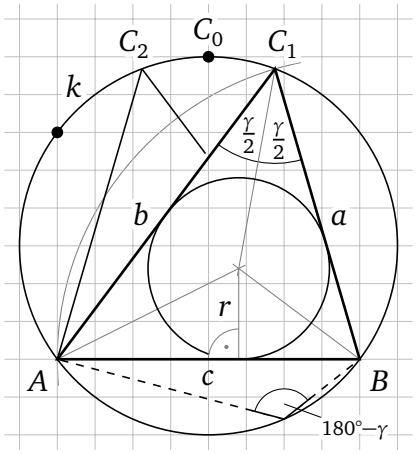
A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

54. Egy oldal, a szemben levő szög és a beírt kör sugara (c, γ, r)

A $c > 0$ és $0° < \gamma < 180°$ felvétele után a C pontok egy *látószögköríven* helyezkednek el ($C \neq B$, $C \neq A$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R = c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t és az 54-1. ábrát.



54-1. ábra

Induljunk el R képletéből (1), a *sugáregyenlőtlenségből* (2) és a (3) egyenletből.

Keressünk feltételt az induló adathármasra:

E. 11(12)
$$R = \frac{c}{2 \cdot \sin\gamma}, \tag{1}$$

E. 17(1)
$$0 < 2r \leq R = \frac{c}{2 \cdot \sin\gamma}. \tag{2}$$

(2) *a megoldás szükséges feltétele.*

E. 33(12)
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c} = \frac{2r}{a+b-c}, \tag{3}$$

$$\boxed{a + b = 2r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + c.} \tag{4}$$

Az $a + b =$ állandónak megfelelő C pontok egy A, B *fókuszú ellipszis* vonalon helyezkednek el (a nagytengely hossza $a + b$). Így a max $(a + b)$ a k körön lévő C_0-nál lesz (54-1. ábra), ezért:

$$\max(a + b) = \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Lásd még az 57. feladat (8)-at.

$$\max r = \frac{\max(a + b) - c}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Bizonyítható, hogy:

$$\max r = \frac{c}{2} \cdot \frac{1-\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\gamma}{4}\right). \tag{5}$$

$$0 < r \le \max r \le \frac{R}{2}. \tag{6}$$

A bal oldali egyenlőség $a = b$-nél, mindkettő az $a = b = c$-nél áll fenn.

(6) *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Most írjuk föl a *koszinusztételt* a c oldalra, lásd (7)-et, és fejezzük ki ab-t, lásd (8)-at:

E. 12(14)
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma, \tag{7}$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab - 2ab \cdot \cos\gamma,$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab \cdot (1 + \cos\gamma),$$

$$ab = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2 \cdot (1+\cos\gamma)}. \tag{8}$$

(4) miatt $a + b > c$ és pozitív, majd a (8)-ból számolt ab is pozitív lesz.

Most $a + b$ és ab ismeretében:

$$\begin{cases} a+b=p, & b = p-a, \\ ab=q, & a^2 - pa + q = 0, \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}; \qquad a_2 = \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; \tag{9}$$

$$b_1 = \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; \qquad b_2 = \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p > 0, \quad q > 0, \quad p^2 - 4q \ge 0. \tag{10}$$

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3)
$$|a-b| < c < a+b. \tag{11}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Példa. Az 54-1. ábra adataiból elindulva:

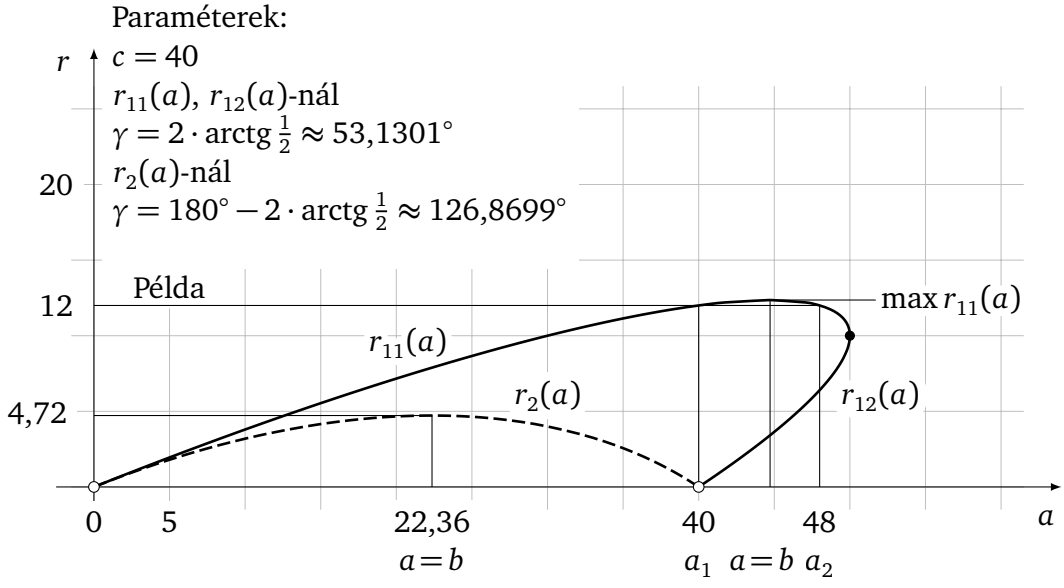
$$c = 40; \qquad \gamma = 2 \cdot \operatorname{arctg}(1/2) \approx 53{,}1301^\circ; \qquad r = 12,$$
$$a + b = 88 = p, \qquad ab = 1920 = q,$$
$$a_1 = 40; \qquad a_2 = 48;$$
$$b_1 = 48; \qquad b_2 = 40.$$

A két megoldás egymásnak szimmetrikus párja. Az 54-1. ábrán az 1. megoldást teljesen, a 2. megoldást részben jelöltük folytonos vonallal. Az 1. megoldás az $a = c$, a 2. megoldás a $b = c$ egyenlő szárú esetet mutatja.

A részletesebb vizsgálat:

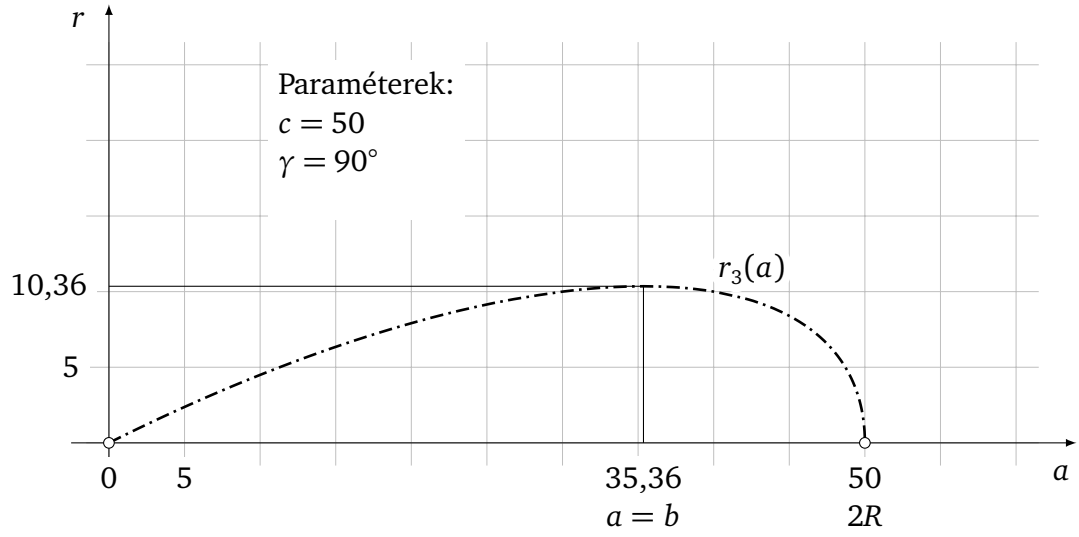
Rajzoljuk föl az $A \subset \mathbf{R}^+$ halmazon értelmezett $A \to \mathbf{R}^+$, $a \mapsto r(a)$ függvényeket.

A c, γ, r adatok fölvétele után kiszámoljuk a-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon c-t és γ-t paraméternek választva, majd felrajzoljuk a síkgörbe grafikonját egy a, r koordinátarendszerben, amit ezután függvényekre bonthatunk. Lásd az 54-2. és 54-3. ábrákat.



54-2. ábra

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



54-3. ábra

A c felvétele után γ felvételétől függően három eset lehetséges. Legyen $a, b, c, R \in \mathbf{R}^+$, $2R = c/\sin\gamma$, $0° < \gamma < 180°$, és az értelmezési tartományokat jelöljük A-val.

1. Ha $\gamma < 90°$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A_{11} = \{a \mid 0 < a \le 2R\}$	$0 < r_{11}(a) \le \max r_{11}(a)$
$A_{12} = \{a \mid c < a \le 2R\}$	$0 < r_{12}(a) \le r_{12}(2R)$

Mint látható, ez az eset két függvényből, egy $r_{11}(a)$-ból és egy $r_{12}(a)$-ból tevődik össze. A $c = 40$, $\gamma = 2 \cdot \operatorname{arctg}(1/2) \approx 53{,}1301°$ paraméterek esetén az $a = b = 20\sqrt{5} \approx 44{,}7214$-nél $\max r_{11}(a) \approx 12{,}3607$. Ezt a két függvényt az 54-2. ábrán folytonos vonallal jelöltük, és ponttal választottuk el egymástól.

Az ábrából a példa mindkét megoldása is leolvasható.

2. Ha $90° < \gamma < 180°$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A_2 = \{a \mid 0 < a < c\}$	$0 < r_2(a) \le \max r_2(a)$

A $c = 40$, $\gamma = 180° - 2 \cdot \operatorname{arctg}(1/2) \approx 126{,}8699°$ paraméterek esetén $a = b = 10\sqrt{5} \approx 22{,}3607$-nél $\max r_2(a) \approx 4{,}72$. A függvényt az 54-2. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

3. Ha $\gamma = 90°$, akkor: $2R = c$

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A_3 = \{a \mid 0 < a < 2R\}$	$0 < r_3(a) \leq \max r_3(a)$

A $c = 50$, $\gamma = 90°$ esetén $a = b = 25\sqrt{2} \approx 35{,}3553$-nál $\max r_3(a) = R \cdot \mathrm{tg}\,\frac{45°}{2} = 25(\sqrt{2}-1) \approx 10{,}3553$. A függvényt ezen paraméterek mellett az 54-3. ábrán pontvonallal jelöltük.

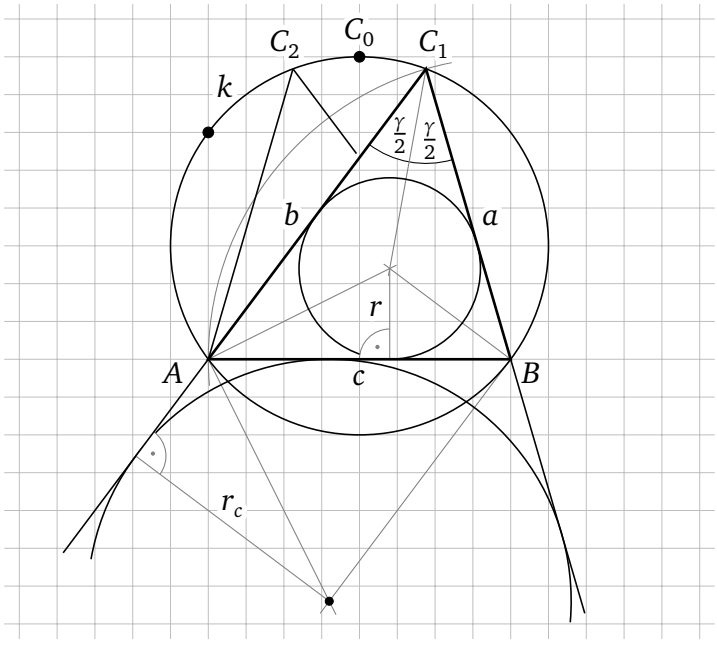
A pozitív a, b, c ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

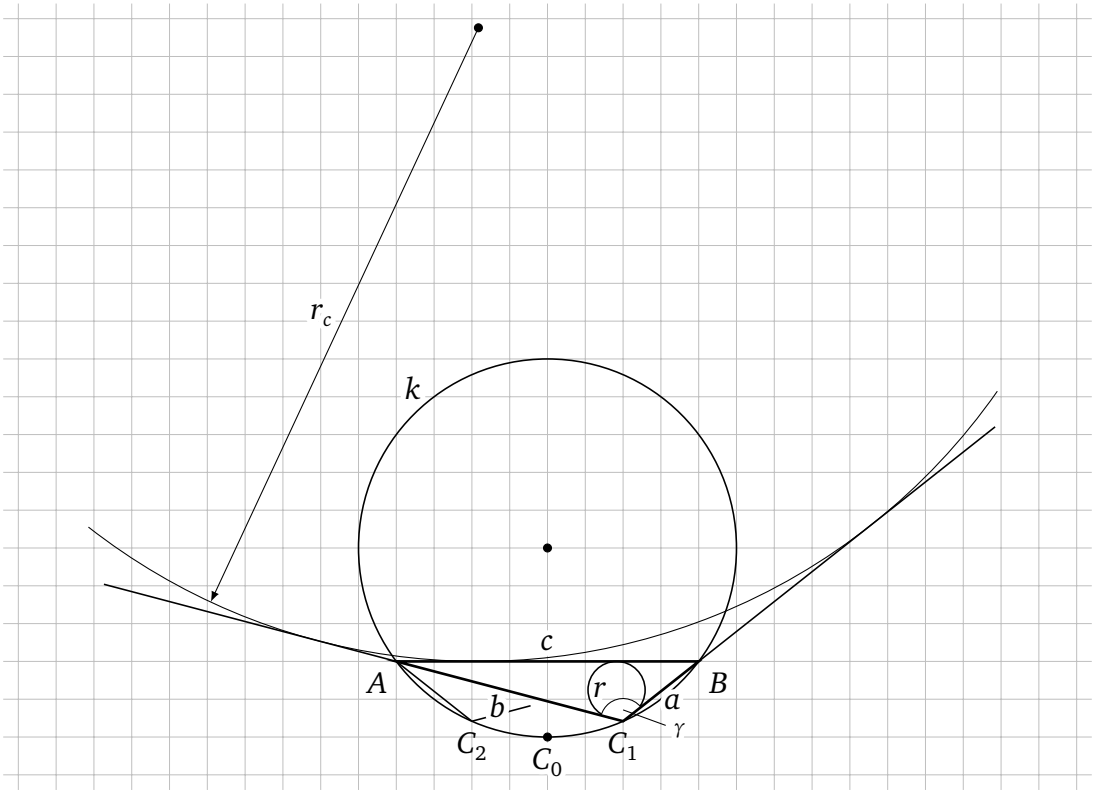
55. Egy oldal, a szemben levő szög és ezen oldalhoz a hozzáírt kör sugara (c, γ, r_c)

A $c > 0$ és $0° < \gamma < 180°$ felvétele után a C pontok egy *látószögköríven* helyezkednek el ($C \neq B$, $C \neq A$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R = c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t, az 55-1. és az 55-2. ábrákat.



55-1. ábra

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



55-2. ábra

Induljunk el az E. 33(12) és az E. 35(8) képletekből, ami itt két egyenletet jelent. Így a két ismeretlen (r,s) kiszámolható:

E. 33(12), E. 35(8)
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{s-c}=\frac{r_c}{s}. \tag{1}$$

Fejezzük ki r-et:

$$r=(s-c)\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=s\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

$$\boxed{r=r_c-c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.} \tag{2}$$

Keressünk feltételt az induló adathármasra:

$$0<r\le\max r\le\frac{R}{2}. \tag{3}$$

Lásd még az 54. feladat (6)-ot.

$$0<r\le\frac{c}{2}\cdot\frac{1-\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\le\frac{R}{2}. \tag{4}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Helyettesítsük (2)-t (4)-be, és alakítsuk át:

$$0 < r_c - c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \le \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}} - \frac{c}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \le \frac{R}{2}, \qquad \Big/ + c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

$$c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} < r_c \le \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}} + \frac{c}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \le \frac{R}{2} + c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

$$c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} < r_c \le \frac{c}{2}\cdot\frac{1+\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Bizonyítható, hogy:

$$\max r_c = \frac{c}{2}\cdot\frac{1+\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{c}{2}\cdot\operatorname{ctg}\left(45^\circ - \frac{\gamma}{4}\right). \tag{5}$$

$$\inf r_c = c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} < r_c \le \max r + c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \max r_c. \tag{6}$$

Egyenlőség csakis $a = b$, illetve $a = b = c$ estén áll fenn.

(6) *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

1. példa. Az 55-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \quad \gamma = 2\cdot\operatorname{arctg}(1/2) \approx 53{,}1301^\circ; \quad r_c = 32,$$

$$r = r_c - c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 32 - 40\cdot\frac{1}{2} = 12.$$

Majd az 54. feladat útmutatásait és az ott adott példát követve:

$$a + b = 88 = p, \qquad ab = 1920 = q,$$

$$a_1 = 40; \qquad a_2 = 48;$$

$$b_1 = 48; \qquad b_2 = 40.$$

2. példa. Az 55-2. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \quad \gamma = 180^\circ - 2\cdot\operatorname{arctg}(1/2) = 2\cdot\operatorname{arctg}2 \approx 126{,}8699^\circ;$$

$$r_c = 40 + 10\sqrt{3} + 10\sqrt{7} \approx 83{,}7780,$$

$$r = r_c - c\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \approx 83{,}7780 - 40\cdot 2 \approx 3{,}7780.$$

Most ismert c, γ, r, így az 54. feladatnál leírtak szerint folytathatjuk a számolást:

$$a + b \approx 43{,}7780 = p, \quad ab \approx 395{,}6440 = q,$$

$$a_1 \approx 12{,}7520; \quad a_2 \approx 31{,}0260;$$

$$b_1 \approx 31{,}0260; \quad b_2 \approx 12{,}7520.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A részletesebb vizsgálat:

Rajzoljuk föl az $A \subset \mathbf{R}^+$ halmazon értelmezett $A \to \mathbf{R}^+$, $a \mapsto r_c(a)$ függvényeket.

Hasonlóak, mint az előző, 54. feladatnál azzal a különbséggel, hogy eltolódnak az y tengelyen pozitív irányban $c \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$-vel. Az új függvények $r_c(a) = r(a) + c \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ lesznek:

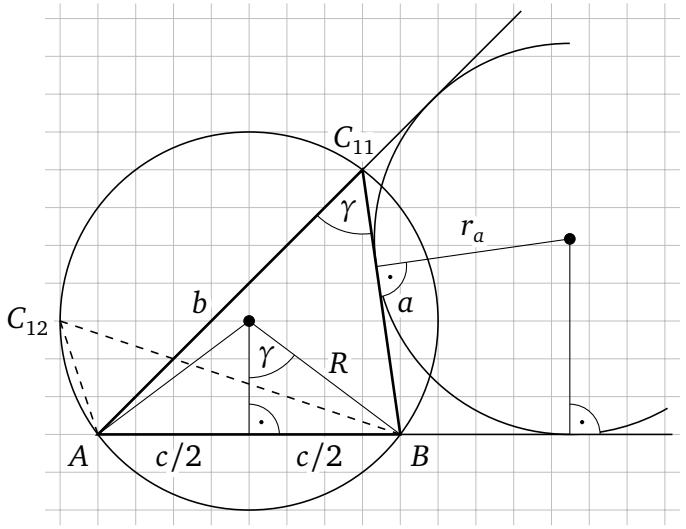
1. $c = 40,\ \gamma = 2 \cdot \operatorname{arctg}(1/2) \approx 53{,}1301°$ esetén $c \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20.$
2. $c = 40,\ \gamma = 2 \cdot \operatorname{arctg} 2 \approx 126{,}8699°$ esetén $c \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 40 \cdot 2 = 80.$
3. $c = 50,\ \gamma = 90°$ esetén $c \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 50 \cdot 1 = 50.$

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, mindkét példában 2.

Most (2) *után ismert* $(c, \gamma, r) \overset{(54.f.)}{\Longrightarrow} (a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

56. Egy oldal, a szemben levő szög és egy másik oldalhoz a hozzáírt kör sugara (c, γ, r_a) (egyértelmű)

A $c > 0$ és $0° < \gamma < 180°$ felvétele után a C pontok egy *látószögköríven* helyezkednek el ($C \neq B$, $C \neq A$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R = c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t és az 56-1. ábrát.



56-1. ábra

Induljunk el a körülírt kör R sugarának képletéből:

E. 11(12)
$$R = \frac{c}{2 \cdot \sin\gamma}. \tag{1}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

E. 11(9) $a = 2R \cdot \sin\alpha$

E. 11(10) $b = 2R \cdot \sin\beta$

E. 11(11) $+ \quad c = 2R \cdot \sin\gamma$

$$a + b + c = 2R \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

$$2s = 2R \cdot (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

$$\frac{s}{R} = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

Helyettesítsük az s képletét, ami itt egy egyenletet jelent,

E. 35(8)
$$s = \frac{r_a}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \tag{2}$$

és alakítsuk át a jobb oldalt egy korábban említett trigonometrikus azonosság felhasználásával:

E. 9(35)
$$\frac{r_a}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{R} = 4 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}, \tag{3}$$

$$\frac{r_a}{R} = 4 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Helyettesítsük $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$-t, és a kapott egyenletet alakítsuk át.

$$\frac{r_a}{R} = 4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\frac{180° - \alpha - \gamma}{2}\right) \cdot \cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{r_a}{R} = 4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{r_a}{R} = 4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \left(\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\frac{\gamma}{2} + \sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{r_a}{R} = 4 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \left(\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\frac{r_a}{R} = 4 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} + 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Áttérünk $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$-re, lásd E. 9(27)-et és E. 9(29)-et.

$$\frac{r_a}{R} = 4 \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} + \frac{2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\gamma,$$

$$\frac{r_a}{R} + \frac{r_a}{R} \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = 4 \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} + 2 \cdot \sin\gamma \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

E. 9(33) $$\cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1+\cos\gamma}{2}$$

azonosságot felhasználva rendezzük az egyenletet $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$ fogyó hatványai szerint nullára. Így $\operatorname{ctg}(\alpha/2)$ másodfokú egyenletéhez jutunk r_a, R, γ paraméterekkel:

$$\boxed{\frac{r_a}{R}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-2\cdot\sin\gamma\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\frac{r_a}{R}-2\cdot(1+\cos\gamma)=0.} \tag{4}$$

A $\operatorname{ctg}(\alpha/2)\in\mathbf{R}^+,\quad(0^\circ<\alpha/2<90^\circ)$ *a megoldás szükséges feltétele.* (5)

$$\alpha=2\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}, \tag{6}$$

$$\beta=180^\circ-(\alpha+\gamma). \tag{7}$$

A hiányzó a és b oldal ezután a *szinusz összefüggéssel* számolható:

E. 11(9)
E. 11(10)

$$\boxed{\begin{aligned}a&=2R\cdot\sin\alpha,\\ b&=2R\cdot\sin\beta.\end{aligned}} \tag{8}$$

1-1. példa. Az 56-1. ábra adataiból elindulva:

$$c=40;\quad\gamma=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\approx53{,}1301^\circ;\quad r_a=40-10\sqrt{2}\approx25{,}8579;\quad R=25,$$

$$1{,}0343\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1{,}6\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-2{,}1657=0,$$

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)_{11}\approx2{,}4142;\qquad\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)_{12}\approx-0{,}8673;$$

$$\alpha_{11}\approx45^\circ;\qquad\text{Nem ad megoldást.}$$

1-2. példa. Az 56-1. ábrán a szaggatott vonallal jelölt eset:

$$c=40;\quad\gamma=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\approx53{,}1301^\circ;\quad r_a=40+10\sqrt{10}\approx71{,}6228;\quad R=25,$$

$$2{,}8649\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1{,}6\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-0{,}3351=0,$$

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)_{11}\approx-0{,}1623;\qquad\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)_{12}\approx0{,}7208;$$

$$\text{Nem ad megoldást;}\qquad\alpha_{12}\approx108{,}4349^\circ.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

2. példa. Egy γ derékszögű eset:

$$c=40;\quad \gamma=90^\circ;\quad r_a=30;\quad R=\frac{c}{2\cdot\sin\gamma}=20,$$

$$\frac{3}{2}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-2\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{2}-2=0,$$

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)_1=\frac{2-\sqrt{7}}{3};\qquad \left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)_2=\frac{2+\sqrt{7}}{3};$$

Nem ad megoldást; $\qquad \alpha_2\approx 65{,}7048^\circ.$

3. példa. Egy γ tompaszögű esetből elindulva:

$$c=40;\quad \gamma=180^\circ-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\approx 126{,}8699^\circ;\quad r_a=26;\quad R=25,$$

$$1{,}04\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1{,}6\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+0{,}24=0,$$

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)_1\approx 0{,}1684;\qquad \left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)_2\approx 1{,}3700;$$

$$\alpha_1\approx 160{,}8822^\circ;\qquad \alpha_2\approx 72{,}2534^\circ.$$

Látható, hogy itt a két α közül egyik sem megfelelő, ugyanis mindkét esetben $\alpha+\gamma>180^\circ$.

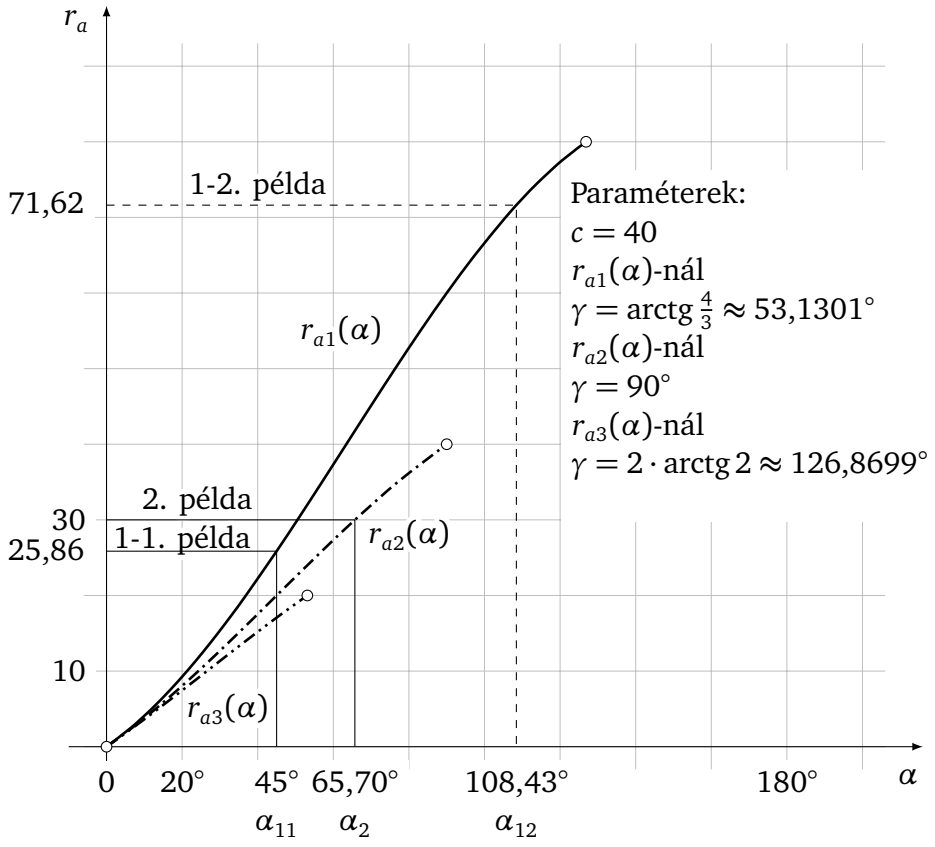
A részletesebb vizsgálat:

Rajzoljuk föl az $A=\{\alpha\,|\,0^\circ<\alpha<180^\circ-\gamma\}$ halmazon értelmezett $A\to\mathbf{R}^+$, $\alpha\mapsto r_a(\alpha)$ függvényeket. Itt $r_a(\alpha)$ (4) implicit függvénye, de explicit is előállítható (4)-ből.

Vegyük észre, hogy r_a-nak $\beta=0^\circ$-nál felső határa van:

$$\sup r_a=\sup\left(s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=c\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ-\gamma}{2}\right).\tag{9}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



56-2. ábra

A $c > 0$ felvétele után γ felvételétől függően három eset lehetséges. Legyen $c, R \in \mathbf{R}^+$, $2R = c/\sin\gamma$, $0° < \gamma < 180°$, és az értelmezési tartományokat jelöljük A-val.

1. Ha $\gamma < 90°$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A_1 = \{\alpha \mid 0° < \alpha < 180° - \gamma\}$	$0 < r_{a1}(\alpha) < c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180° - \gamma}{2}\right)$

A $c = 40$ és $\gamma = \operatorname{arctg}(4/3) \approx 53{,}1301°$ paraméterek esetén:

$$0 < r_{a1}(\alpha) < c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180° - \gamma}{2}\right) = 40 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180° - \operatorname{arctg}(4/3)}{2}\right) = 80.$$

A függvényt ezen paraméterek mellett az 56-2. ábrán folytonos vonallal jelöltük. Az ábrából az 1-1. és az 1-2. példa megoldása is leolvasható.

2. Ha $\gamma = 90°$, akkor: $2R = c$.

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A_2 = \{\alpha \mid 0° < \alpha < 90°\}$	$0 < r_{a2}(\alpha) < c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180° - \gamma}{2}\right) = c$

A $c = 40$, $\gamma = 90°$ paraméterek esetén:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$0 < r_{a2}(\alpha) < c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ - \gamma}{2}\right) = 40 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ - 90^\circ}{2}\right) = 40.$$

A függvényt ezen paraméterek mellett az 56-2. ábrán pontvonallal jelöltük. Az ábrából a 2. példa megoldása is leolvasható.

3. Ha $90^\circ < \gamma < 180^\circ$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A_3 = \{\alpha \mid 0^\circ < \alpha < 180^\circ - \gamma\}$	$0 < r_{a3}(\alpha) < c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ - \gamma}{2}\right)$

A $c = 40$ és $\gamma = 2 \cdot \operatorname{arctg} 2 \approx 126{,}8699^\circ$ paraméterek esetén:

$$0 < r_{a3}(\alpha) < c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ - \gamma}{2}\right) = 40 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ - 2 \cdot \operatorname{arctg} 2}{2}\right) = 20.$$

A függvényt ezen paraméterek mellett az 56-2. ábrán kettős pontvonallal jelöltük. Az ábrából a 3. példa nem létező megoldása is leolvasható.

Látható, hogy a (4)-ből számolt $\operatorname{ctg}(\alpha/2) \in \mathbf{R}^+$ és $\alpha + \gamma < 180^\circ$ együttes teljesülése *a megoldás szükséges és elégséges feltétele*. Vagy $c > 0$ és $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ esetén $0 < r_a < \sup r_a$ kell legyen, ami szintén *a megoldás szükséges és elégséges feltétele*.

A megoldások száma 0 vagy 1 lehet. Az 1-1. példában 1, az 1-2. példában szintén 1, a 2. példában 1, a 3. példában pedig 0.

Ha van megoldás, akkor csak 1 van. A feladat megoldása egyértelmű.

A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

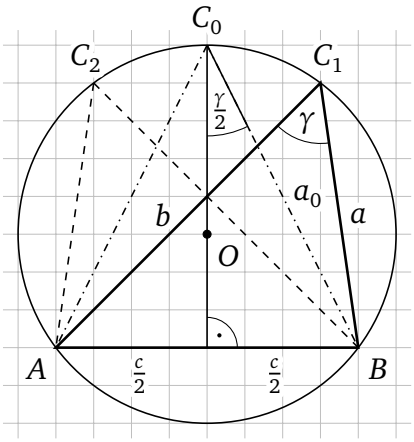
57. Egy oldal, a szemben levő szög és a másik két oldal összege $(c, \gamma, a+b)$

A $c > 0$ és $0^\circ < \gamma < 180^\circ$ felvétele után a C pontok egy *látószögköríven* helyezkednek el ($C \neq B$, $C \neq A$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R = c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t és az 57-1. ábrát.

E. 1(3) $$a + b > c. \tag{1}$$

(1) *a megoldás szükséges feltétele.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



57-1. ábra

Induljunk el a *szinusztételből*:

E. 11(12)
$$\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},\qquad \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}. \tag{2}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\sin\alpha+\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma},$$

ui. $\sin\beta=\sin(180^\circ-\beta)=\sin(\alpha+\gamma)$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\gamma}.$$

Ebben csak $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ az ismeretlen, keressük α-t.

$$\frac{a+b}{c}=\sin\alpha\cdot\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}+\cos\alpha,$$

$$\frac{a+b}{c}-\cos\alpha=\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}\cdot\sin\alpha. \qquad \Big/()^2 \tag{3}$$

Mivel (3) mindkét oldala $\cos\alpha$ előjelétől függetlenül mindig pozitív, a négyzetre emelés következtében nem lép föl hamis gyök.

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^2-2\cdot\frac{a+b}{c}\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)^2\cdot(1-\cos^2\alpha),$$

továbbá az

E. 9(34)
$$\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

azonosságot felhasználva rendezzük az egyenletet $\cos\alpha$ fogyó hatványai szerint 0-ra. Így $\cos\alpha$-ra nézve egy másodfokú egyenlethez jutunk $c,\gamma,(a+b)$ paraméterekkel:

$$\boxed{\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos^2\alpha-2\cdot\frac{a+b}{c}\cdot\cos\alpha+\left(\frac{a+b}{c}\right)^2-\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}=0.} \tag{4}$$

$$\alpha=\arccos(\cos\alpha), \tag{5}$$

$$\beta=180^\circ-(\alpha+\gamma). \tag{6}$$

A hiányzó a és b oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)
$$\boxed{\begin{aligned}a&=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c,\\ b&=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c.\end{aligned}} \tag{7}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Példa. Az 57-1. ábra adataiból elindulva:

$$c=40;\quad \gamma=\arcsin(4/5)\approx 53{,}1301^\circ;\quad a+b=60\sqrt{2}\approx 84{,}8528;\quad 2a_0=40\sqrt{5}\approx 89{,}4427,$$

$$5\cdot\cos^2\alpha-3\sqrt{2}\cdot\cos\alpha+1/2=0,$$

$$(\cos\alpha)_1=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad (\cos\alpha)_2=\frac{\sqrt{2}}{10};$$

$$\alpha_1=45^\circ;\qquad \alpha_2\approx 81{,}8699^\circ;$$

$$\beta_1\approx 81{,}8699^\circ;\qquad \beta_2=45^\circ;$$

$$a_1\approx 35{,}3553;\qquad a_2\approx 49{,}4975;$$

$$b_1\approx 49{,}4975;\qquad b_2\approx 35{,}3553.$$

Az a_2, b_2 megoldást az 57-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

Vegyük észre, hogy adott $c>0$ és $0^\circ<\gamma<180^\circ$ esetén $(a+b)$-nek nemcsak alsó határa, hanem maximuma is van, azaz:

$$\inf(a+b)=c<a+b=\frac{c\cdot(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin\gamma}\le 2a_0=\frac{c}{\sin(\gamma/2)}=\max(a+b). \tag{8}$$

Ugyanis c és $a+b=$ állandó $(a+b>c)$ felvétele után a C pont egy *A, B fókuszú ellipszis* vonalon helyezkedik el, melynek γ látószögkörívvel $c<a+b<2a_0$ esetén két, $c<a+b=2a_0$ esetén egy metszéspontja van, $a+b>2a_0$ esetén pedig nincs metszéspont.

A (8) bizonyítása trigonometrikus úton:

$$a+b=\frac{c\cdot(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin\gamma}\le\frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}},\qquad \Big|\cdot\frac{\sin\gamma}{c} \tag{9}$$

$$\frac{a+b}{c}\cdot\sin\gamma=\sin\alpha+\sin\beta\le\frac{2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Az E. 9(24) felhasználásával:

$$\frac{a+b}{c}\cdot\sin\gamma=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\le 2\cdot\cos\frac{\gamma}{2},\qquad \Big|:2$$

$$\frac{a+b}{2c}\cdot\sin\gamma=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\le\cos\left(\frac{180^\circ-(\alpha+\beta)}{2}\right),$$

$$\frac{a+b}{2c}\cdot\sin\gamma=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\le\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right),$$

$$\frac{a+b}{2c}\cdot 2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\le\sin\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \Big|:\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\frac{a+b}{c}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\le 1. \tag{10}$$

Felhasználva, hogy:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\left(\frac{180^\circ-\gamma}{2}\right)=\sin\left(90^\circ-\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2}.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

(10) bal oldala akkor maximum, ha $\alpha = \beta$, és ekkor:

$$\frac{2a_0}{c} \cdot \frac{c}{2a_0} = 1 \leq 1. \tag{11}$$

Tehát (8) *teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

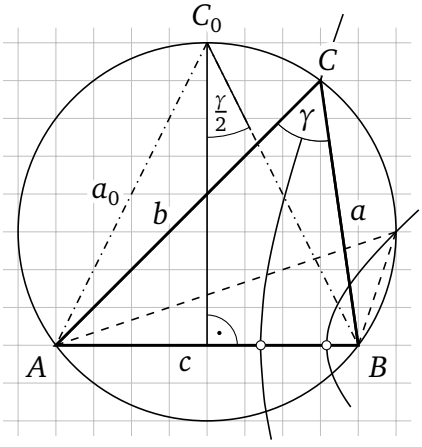
58. Egy oldal, a szemben levő szög és a másik két oldal különbsége (egyértelmű) $(c, \gamma, a-b)$

Most $(a-b) \in \mathbf{R}$. A $c > 0$ és $0° < \gamma < 180°$ felvétele után a C pontok egy *látószögkörívén* helyezkednek el ($C \neq B$, $C \neq A$). C mértani helyét tekintve egy γ-hoz két ív tartozik, azonban a szimmetria miatt elegendő az egyiket vizsgálni. A sugár kétszerese $2R = c/\sin\gamma$, lásd E. 11(12)-t és az 58-1. ábrát.

A *háromszög-egyenlőtlenség* szerint:

E. 1(3) $$0 \leq |a-b| < c. \tag{1}$$

(1) *a megoldás szükséges feltétele.*



58-1. ábra

Induljunk el a *szinusztételből*:

E. 11(12) $$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}. \tag{2}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha - \sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma},$$

ui. $\sin\beta = \sin(180° - \beta) = \sin(\alpha+\gamma)$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\gamma}.$$

Ebben csak $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ az ismeretlen, keressük α-t.

$$\frac{a-b}{c} = \sin\alpha \cdot \left(\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}\right) - \cos\alpha,$$

$$\frac{a-b}{c} + \cos\alpha = \left(\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}\right) \cdot \sin\alpha, \qquad \big|()^2 \tag{3}$$

$$\left(\frac{a-b}{c}\right)^2 + 2\cdot\frac{a-b}{c}\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 \cdot (1-\cos^2\alpha),$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

továbbá az

$$\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \qquad \text{E. 9(34)}$$

azonosságot felhasználva rendezzük az egyenletet $\cos\alpha$ fogyó hatványai szerint nullára. Így $\cos\alpha$-ra nézve egy másodfokú egyenlethez jutunk $c,\gamma,a-b$ paraméterekkel:

$$\boxed{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos^2\alpha+2\cdot\frac{a-b}{c}\cdot\cos\alpha+\left(\frac{a-b}{c}\right)^2-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=0.} \tag{4}$$

$$\alpha=\arccos(\cos\alpha), \tag{5}$$

$$\beta=180^\circ-(\alpha+\gamma). \tag{6}$$

A hiányzó a és b oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)

$$\boxed{\begin{aligned}a&=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c,\\ b&=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c.\end{aligned}} \tag{7}$$

Példa. Az 58-1. ábra adataiból elindulva:

$$c=40;\quad \gamma=\arcsin(4/5)\approx 53{,}1301^\circ;\quad a-b=-10\sqrt{2}\approx -14{,}1421,$$

$$0\le|a-b|\approx|-14{,}1421|<c=40.\quad \text{Az (1) feltétel teljesül.}$$

$$(5/4)\cdot\cos^2\alpha-(\sqrt{2}/2)\cdot\cos\alpha-(1/8)=0,$$

$$(\cos\alpha)_1=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad (\cos\alpha)_2=-\frac{\sqrt{2}}{10};$$

$$\alpha=45^\circ;$$

$$\beta\approx 81{,}8699^\circ;$$

$$a\approx 35{,}3553;\qquad b\approx 49{,}4975.$$

Vegyük észre, hogy $(\cos\alpha)_2=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ a négyzetre emelés miatt fellépő hamis gyök, ugyanis ekkor (3) bal oldala negatív, jobb oldala pedig pozitív.

A c és az $|a-b|=$ állandó $<c$ felvétele után a C pontok egy *hiperbolán* vagy egy egyenesen helyezkednek el. Pontosabban $-(a+b)<-c<a-b<0$ esetén a jobb oldali hiperbola ágon, $0<a-b<c<a+b$ esetén a bal oldali hiperbola ágon, és $0=a-b<c<a+b$ esetén pedig $\overline{AB}$ *felezőmerőlegesén* vannak. Mivel a három eset kizárja egymást, a látószögkörívvel csak egy metszéspont létezhet.

A példában C egyrészt rajta kell legyen $\gamma\approx 53{,}1301^\circ<90^\circ$ látószögköríven, másrészt az A,B fókuszokkal rendelkező jobb oldali hiperbola ágon $(-(a+b)<-c<a-b<0)$, melyeknek azonban csak egy metszéspontja van, C (58-1. ábra).

Mivel a hiperbola csúcspontja nem megoldás, így tehát:
(1), (3) *és* $0^\circ<\gamma<180^\circ$ *együttes teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A megoldások száma 0 vagy 1 lehet, a példában 1.

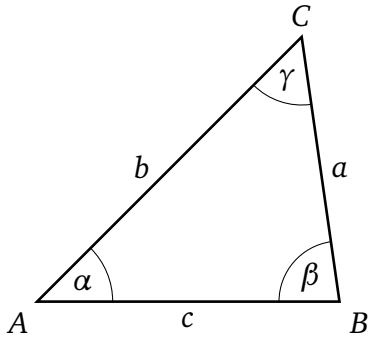
Ha van megoldás, akkor csak 1 van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

59. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és a terület (c,β,t) (egyértelmű)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (59-1. ábra).

Legyen $c,t \in \mathbf{R}^+$ és $0° < \beta < 180°$. Induljunk el a *trigonometrikus területképletből:*



59-1. ábra

E. 11(15) $$t = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}. \tag{1}$$

Az a oldal (1) átrendezésével, majd ezután a b oldal a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22) $$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{2t}{c \cdot \sin\beta}, \\ b &= \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}. \end{aligned}} \tag{2}$$

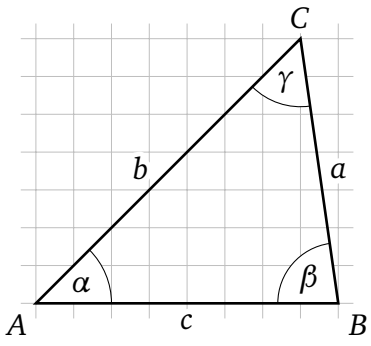
Látható, hogy mindig van megoldás, a megoldások száma mindig 1. A feladat megoldása egyértelmű.

Megjegyzés: A c oldaltól $m_c = \frac{2t}{c}$ távolságra, vele párhuzamosan húzott egyenesből a B csúcsból induló β hajlásszögű félegyenes kimetszi a C csúcsot (59-1. ábra).

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

60. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és a kerület (c,β,k) (egyértelmű)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (60-1. ábra).



60-1. ábra

Keressünk feltételt az induló adathármasra:

E. 1(3) $$k - c = a + b > c, \tag{1}$$

$$\frac{a+b}{c} > 1, \qquad k > 2c. \tag{2}$$

(2) *a megoldás szükséges feltétele.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Induljunk el az *első Mollweide-féle formulából*, és alakítsuk át:

E. 14(8)
$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}, \tag{3}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Osszuk el a jobb oldali tört számlálóját és nevezőjét $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}>0$-val:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}-1},$$

$$\left(\frac{a+b}{c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a+b}{c}+1,$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{k}{k-2c}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},\qquad \alpha=2\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}.} \tag{4}$$

$$\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta). \tag{5}$$

A hiányzó a és b oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)
$$\boxed{\begin{aligned}a&=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c,\\ b&=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c.\end{aligned}} \tag{6}$$

Példa. A 60-1. ábra adataiból elindulva:

$$c=40;\qquad \beta=\operatorname{arctg}7\approx 81{,}8699^\circ;\qquad k=40+60\sqrt{2}\approx 124{,}8528,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\approx\frac{124{,}8528}{124{,}8528-80}\cdot 0{,}8673\approx 2{,}4142,$$

$$\alpha\approx 45^\circ;\qquad \gamma\approx 53{,}1301^\circ;\qquad a\approx 35{,}3553;\qquad b\approx 49{,}4975.$$

A részletesebb vizsgálat: Rajzoljuk föl az $A=\{\alpha\,|\,0^\circ<\alpha<180^\circ-\beta\}$ halmazon értelmezett $A\to\mathbf{R}^+$, $\alpha\mapsto k(\alpha)$ függvényt c, β paraméterek mellett (60-2. ábra).

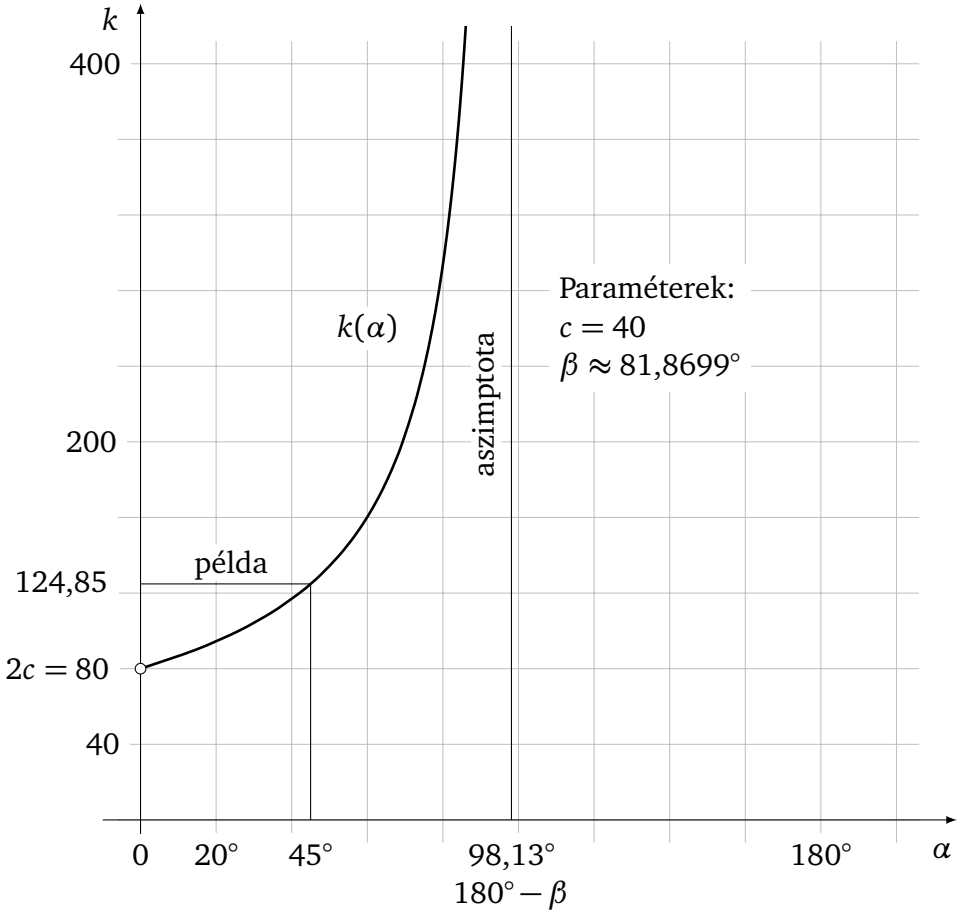
Itt lehetséges $k(\alpha)$ explicit előállítása (4)-ből:

$$k(\alpha)=\frac{2c}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}. \tag{7}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Vegyük észre hogy:

$$\lim_{\alpha\to(180^\circ-\beta)-} k(\alpha) = +\infty. \tag{8}$$



60-2. ábra

Legyen $c, k \in \mathbf{R}^+$, $k > 2c$, $0^\circ < \beta < 180^\circ$, és az értelmezési tartományt jelöljük A-val.

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A = \{\alpha \mid 0^\circ < \alpha < 180^\circ - \beta\}$	$2c < k(\alpha) < +\infty$

$c = 40$ és $\beta = \operatorname{arctg} 7 \approx 81{,}8699^\circ$ paraméterek esetén:

$$180^\circ - \beta \approx 98{,}1301^\circ \quad \text{és} \quad 2c = 80.$$

A függvényt ezen paraméterek mellett a 60-2. ábra mutatja. Az ábrából a példa megoldása is leolvasható.

Látható, hogy $0^\circ < \beta < 180^\circ$ és $k > 2c$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

A megoldások száma 0 vagy 1 lehet, az említett példában 1.

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

A vizsgálat programmal készült.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

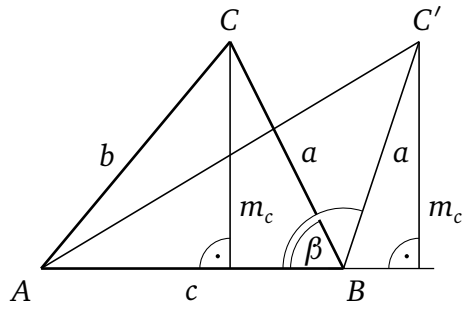
Megjegyzés: Vegyük észre, hogy $k-c=a+b>c$ miatt a C pontok egy A, B *fókuszú ellipszis* vonalon helyezkednek el, melyből β felvétele után ($0°<\beta<180°$) a félegyenese kimetszi a C pontot (60-1. ábra és 76-1. ábra).

Most három oldal $(a,b,c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

61. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és ezen oldalhoz tartozó magasság (egyértelmű) (c,β,m_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (61-1. ábra).

Legyen $c, m_c \in \mathbf{R}^+$, és $0°<\beta<180°$.



61-1. ábra

Ha $0°<\beta<90°$,
akkor $\sin\beta=\dfrac{m_c}{a}$. (1)
Ha $90°\le\beta<180°$,
akkor $\sin\beta=\sin(180°-\beta)=\dfrac{m_c}{a}$.

Az a oldal (1)-ből, majd ezután a b oldal a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)

$$\boxed{\begin{aligned} a&=\frac{m_c}{\sin\beta},\\ b&=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta}. \end{aligned}} \qquad (2)$$

Látható, hogy mindig van megoldás, a megoldások száma mindig 1. A feladat megoldása egyértelmű.

Megjegyzés: A c oldaltól m_c távolságra vele párhuzamosan húzott egyenesből a B csúcsból induló β hajlásszögű félegyenes kimetszi a C csúcsot (61-1. ábra).

Most három oldal $(a,b,c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

62. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz tartozó magasság (c,β,m_b)

A c,β,m_a választása esetén nincs három független adat, ugyanis $\sin\beta=m_a/c$, ha egyáltalán létezik.

A c,β,m_b választása esetén induljunk el a $\sin\alpha=m_b/c$ hányadosból, és vizsgáljuk meg a lehetséges értékeket:

$$\sin\alpha=\frac{m_b}{c}>1 \quad \text{esetén nincs megoldás.} \qquad (1)$$

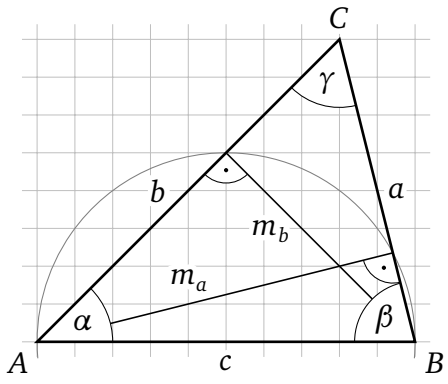
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\frac{m_b}{c} \le 1 \text{ esetén } \begin{cases} \alpha_1 = \arcsin\dfrac{m_b}{c}, \text{ ha } \alpha_1+\beta<180^\circ \text{ és } \gamma_1 = 180^\circ-(\alpha_1+\beta), \\ \alpha_2 = 180^\circ-\alpha_1, \text{ ha } \alpha_2+\beta<180^\circ \text{ és } \gamma_2 = 180^\circ-(\alpha_2+\beta). \end{cases} \tag{2}$$

A hiányzó a és b oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c, \qquad b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c. \tag{3}$$



62-1. ábra

1. példa. A 62-1. ábra adataiból elindulva:

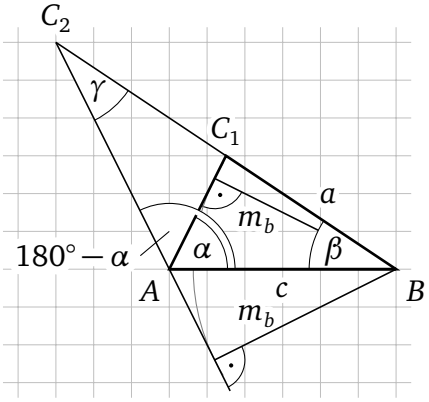
$$c = 50; \quad \beta = \operatorname{arctg} 4 \approx 75{,}9638^\circ;$$

$$m_b = 25\sqrt{2} \approx 35{,}3553,$$

$$\alpha_1 = \arcsin\frac{25\sqrt{2}}{50} = 45^\circ; \quad \gamma_1 \approx 59{,}0362^\circ;$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ; \quad \gamma_2 \approx -30{,}9638^\circ.$$

Ezekkel az induló adatokkal tehát csak egy megoldás van.



62-2. ábra

2. példa. A 62-2. ábra adataiból elindulva:

$$c = 30; \quad \beta = \operatorname{arctg}(2/3) \approx 33{,}6901^\circ;$$

$$m_b = 12\sqrt{5} \approx 26{,}8328,$$

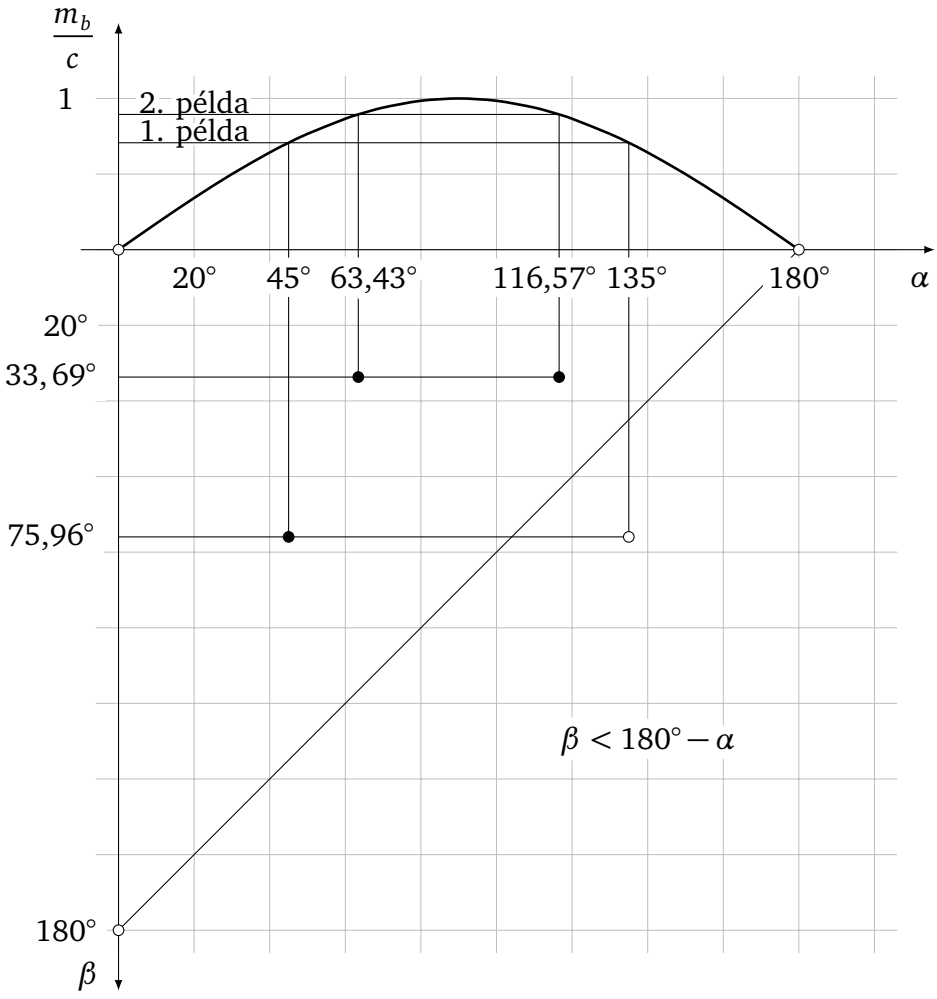
$$\alpha_1 = \arcsin\frac{12\sqrt{5}}{30} \approx 63{,}4349^\circ; \quad \gamma_1 \approx 82{,}8750^\circ;$$

$$\alpha_2 \approx 180^\circ - 63{,}4349^\circ \approx 116{,}5651^\circ; \quad \gamma_2 \approx 29{,}7448^\circ.$$

Ezekkel az induló adatokkal tehát két megoldás van.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A grafikus megoldás: Ezt a 62-3. ábra mutatja.



62-3. ábra

Az ábrából mindkét példa megoldása is leolvasható. Megoldásnál a tömör pont a háromszögmezőn belül kell legyen.

Ha $m_b = c$, akkor $\alpha = 90°$, ez a derékszögű eset. Derékszögű lehet még $\beta = 90°$ vagy $\gamma = 90°$ esetén is.

Ha $\alpha = \arcsin\frac{m_b}{c} = \beta < 90°$, akkor a háromszög egyenlő szárú. Egyenlő szárú lehet még $\alpha = \gamma < 90°$ vagy $\beta = \gamma < 90°$ esetén is. Ha $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, akkor a háromszög egyenlő oldalú.

Látható, hogy (2) *teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet. Az 1. példában 1, a 2. példában 2.

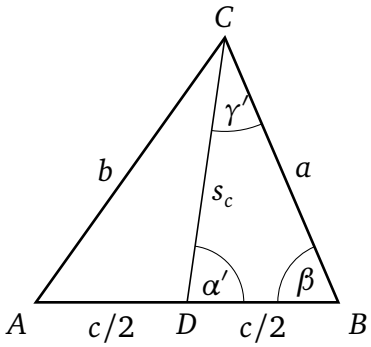
Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

63. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és ezen oldalhoz tartozó súlyvonal (c, β, s_c)

Első megoldás (szinusztétellel)

1. Ha $s_c > \frac{c}{2}$, akkor a $BCD\triangle$-ben ismert két oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög.
Lásd a 63-1. ábrát és a 3. feladatot.



63-1. ábra

Írjuk föl a *szinusztételt* a $BCD\triangle$-ben, és fejezzük ki $\sin\gamma'$-t:

E. 11(12) $$\sin\gamma' = \frac{\frac{c}{2}\cdot\sin\beta}{s_c}.$$

Mivel

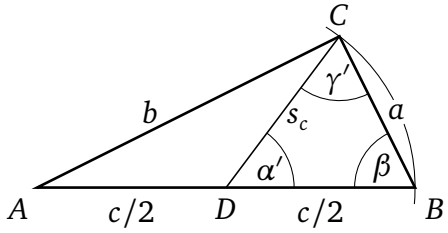
E. 2(2) $$\frac{c}{2} < s_c \Rightarrow \gamma' < \beta \Rightarrow 0° < \gamma' < 90°,$$

ezért az alábbiakat írhatjuk föl:

$$\gamma' = \arcsin\frac{\frac{c}{2}\cdot\sin\beta}{s_c}, \qquad \alpha' = 180° - (\gamma' + \beta), \qquad a = \frac{s_c\cdot\sin\alpha'}{\sin\beta}. \tag{1}$$

2. Ha $s_c = \frac{c}{2}$, akkor a $BCD\triangle$-ben ismert két egyenlő oldal és az alapon fekvő egyik szög.

Lásd a 63-2. ábrát és a 4. feladatot.



63-2. ábra

$\beta \geq 90°$ esetén nincs megoldás.

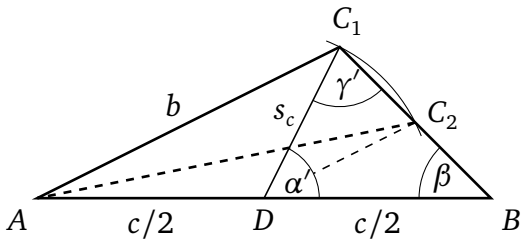
$\beta < 90°$ esetén pedig az alábbiakat írhatjuk föl:

$$\gamma' = \beta, \qquad \alpha' = 180° - 2\beta, \qquad a = c\cdot\cos\beta. \tag{2}$$

3. Ha $s_c < \frac{c}{2}$, akkor a $BCD\triangle$-ben ismert két oldal és a kisebbikkel szemben fekvő szög.

Lásd a 63-3. ábrát és az 5. feladatot.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



63-3. ábra

$\beta \geq 90°$ esetén: nincs megoldás.

$\beta < 90°$ esetén:

- $s_c < \frac{c}{2} \cdot \sin\beta$ nincs megoldás,
- $s_c = \frac{c}{2} \cdot \sin\beta$ egy megoldás van,
- $\frac{c}{2} \cdot \sin\beta < s_c < \frac{c}{2}$ két megoldás van.

Egy megoldásnál az alábbiakat írhatjuk föl:

$$\gamma' = 90°, \qquad \alpha' = 90° - \beta, \qquad a = \frac{c}{2} \cdot \cos\beta. \tag{3}$$

Két megoldásnál az alábbiakat írhatjuk föl:

$$\gamma_1' = \arcsin \frac{\frac{c}{2} \cdot \sin\beta}{s_c}; \qquad \alpha_1' = 180° - (\gamma_1' + \beta); \qquad a_1 = \frac{s_c \cdot \sin\alpha_1'}{\sin\beta};$$
$$\gamma_2' = 180° - \gamma_1'; \qquad \alpha_2' = 180° - (\gamma_2' + \beta); \qquad a_2 = \frac{s_c \cdot \sin\alpha_2'}{\sin\beta}. \tag{4}$$

Mivel D-ből s_c sugárral húzott körív és a félegyenesének metszéspontja(i) $C(C_1, C_2)$, *ezért a* $BCD\triangle$*-ek létezése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Második megoldás (koszinusztétellel)

Írjuk föl a *koszinusztételt* a $BCD\triangle$-ben s_c-re (63-1. ábra).

E. 12(14)
$$s_c^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2a \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\beta, \tag{5}$$

$$a^2 - c \cdot \cos\beta \cdot a + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - s_c^2 = 0, \tag{6}$$

$$a_{1,2} = \frac{c \cdot \cos\beta \pm \sqrt{c^2 \cdot \cos^2\beta - 4 \cdot \left(\left(\frac{c}{2}\right)^2 - s_c^2\right)}}{2}, \tag{7}$$

$$a_{1,2} = \frac{c \cdot \cos\beta \pm \sqrt{4s_c^2 - c^2 \cdot \sin^2\beta}}{2}, \tag{8}$$

$$a_{1,2} = \frac{c}{2} \cdot \cos\beta \pm \sqrt{\left(s_c + \frac{c}{2} \cdot \sin\beta\right) \cdot \left(s_c - \frac{c}{2} \cdot \sin\beta\right)}. \tag{9}$$

Az $a \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.* (10)

A folytatás mindkét megoldásnál a b oldal kiszámításával történik:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

E. 12(22)
$$\boxed{b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta}.} \tag{11}$$

A megoldások száma 0, 1, vagy 2 lehet. A 63-1. ábrán 1, a 63-2. ábrán szintén 1, a 63-3. ábrán 2.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

64. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonal, 1. (c,β,s_a)

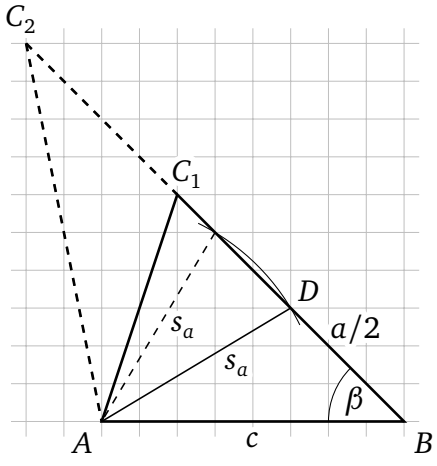
Vizsgáljuk meg a 64-1. ábrán látható $ABD\triangle$-et.

Ebben a háromszögben ismert két oldal c, s_a és egy szög, β. Ha $s_a > c$, akkor β a nagyobbik oldallal szemben lévő szög, ha $s_a = c$, akkor β az alapon fekvő egyik szög, és ha $s_a < c$, akkor β a kisebbik oldallal szemben lévő szög lesz.

Most lássunk a feladat megoldására a 3., a 4., illetve az 5. feladatokban bemutatott eljárásoktól különböző, további utat.

Írjuk föl a *koszinusztételt* az $ABD\triangle$-ben s_a-ra, lásd (1)-et és E. 12(14)-et.

Átalakítás után egy a-ra nézve másodfokú egyenlethez jutunk c, β, s_a paraméterekkel, lásd (2)-t:



64-1. ábra

$$s_a^2 = c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2c\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos\beta, \tag{1}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2c\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos\beta + c^2 - s_a^2 = 0, \quad \big/\cdot 4$$

$$\boxed{a^2 - 4c\cdot\cos\beta\cdot a + 4\cdot\left(c^2 - s_a^2\right) = 0.} \tag{2}$$

$$D = (4c\cdot\cos\beta)^2 - 16\cdot\left(c^2 - s_a^2\right). \tag{3}$$

$$a_{1,2} = \frac{4c\cdot\cos\beta \pm \sqrt{(4c\cdot\cos\beta)^2 - 16\cdot\left(c^2 - s_a^2\right)}}{2}, \tag{4}$$

$$a_{1,2} = 2c\cdot\cos\beta \pm 2\cdot\sqrt{(s_a + c\cdot\sin\beta)\cdot(s_a - c\cdot\sin\beta)}. \tag{5}$$

Az $ABD\triangle$-ben következő esetek lehetségesek:

1. Két oldal és a nagyobbikkal szemben levő szög (c,β,s_a és $s_a > c$).

Ekkor $D > 0$ és az egyik gyök pozitív, a másik gyök negatív, egy megoldás van.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

2. Két egyenlő oldal és az alapon fekvő egyik szög (c, β, s_a és $s_a = c$).

- $\beta > 90°$ esetén $D > 0$ és az egyik gyök nulla, a másik gyök negatív, nincs megoldás.
- $\beta = 90°$ esetén $D = 0$ és mindkét gyök nulla, nincs megoldás.
- $\beta < 90°$ esetén $D > 0$ és az egyik gyök nulla, a másik gyök pozitív, egy megoldás van, lásd a 2. példát.

3. Két oldal és a kisebbikkel szemben levő szög (c, β, s_a és $s_a < c$).

- $\beta \geq 90°$ esetén ha van valós gyök, akkor az negatív, nincs megoldás.
- $\beta < 90°$ esetén

$s_a < c \cdot \sin\beta$ $D < 0$, nincs valós gyök, nincs megoldás.

$s_a = c \cdot \sin\beta$ $D = 0$, egy pozitív valós gyök van, egy megoldás.

$c \cdot \sin\beta < s_a < c$ $D > 0$, két pozitív valós gyök van, két megoldás. Lásd a 64-1. ábrát és az 1. példát.

A folytatás mindhárom esetben a b oldal kiszámításával történik:

E. 12(22)
$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}. \tag{6}$$

1. példa. A 64-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \qquad \beta = 45°; \qquad s_a = \sqrt{25^2 + 15^2} \approx 29{,}1548,$$
$$40 \cdot \sin 45° < s_a < 40; \qquad \beta < 90°; \qquad D = 800.$$

Mint látható, ez a 3. esetnél felsoroltak közül az utolsó lehetőség.

$$a^2 - 80\sqrt{2} \cdot a + 3000 = 0,$$
$$a_1 \approx 42{,}4264; \qquad a_2 \approx 70{,}7107.$$

Az a_2 a 64-1. ábrán a szaggatott vonallal jelölt megoldás.

2. példa. Amikor az $ABD\triangle$-ben ismert két egyenlő oldal és az alapon fekvő egyik szög:

$$c = 40; \qquad \beta = 45°; \qquad s_a = 40;$$
$$s_a = c = 40; \qquad \beta < 90°; \qquad D = 12\,800.$$

Mint látható, ez a 2. esetnél felsoroltak közül az utolsó lehetőség.

$$a^2 - 4 \cdot 40 \cdot \cos 45° \cdot a = 0,$$
$$a_1 = 0; \qquad a_2 = 80\sqrt{2} \approx 113{,}1371.$$

Ha az A középpontból s_a sugárral húzott körívnek van közös pontja a oldalegyenesével (egy érintési vagy két metszéspont), akkor (2)-nek van valós megoldása (nulla, pozitív vagy negatív). Ha nincs közös pontja, akkor (2)-nek nincs valós megoldása.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Ha az A középpontból s_a sugárral húzott körívnek van közös pontja az a oldal B-ből húzott félegyenesével (ami lehet egy érintési vagy két metszéspont, az ábrán D-vel jelöltük és $B \neq D$), akkor (2)-nek van pozitív valós megoldása. Ha nincs közös pontja, akkor (2)-nek nincs pozitív valós megoldása.

Az $ABD\triangle$(-ek) létezése vagy ami ugyanaz, (2)*-ből számolt $a \in \mathbf{R}^+$ létezése tehát a megoldás szükséges és elégséges* feltétele.

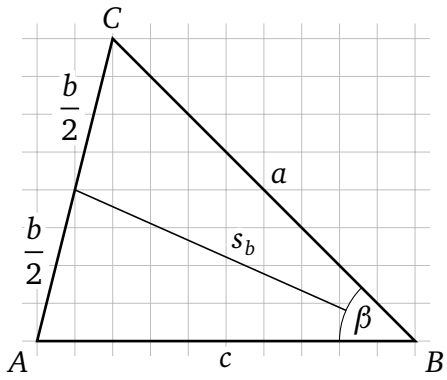
A megoldások száma (2) *pozitív valós gyökeinek számától függ, 0, 1 vagy 2 lehet, az első példában 2, a második példában 1.*

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

65. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz tartozó súlyvonal, 2. (c, β, s_b)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (65-1. ábra).

Induljunk el az s_b súlyvonal oldalakkal kifejezett képletéből:



65-1. ábra

E. 24(8) $$s_b = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}. \qquad (1)$$

Fejezzük ki b^2-et, majd írjuk föl a *koszinusztételt* az $ABC\triangle$-ben a b oldalra:

$$b^2 = 2a^2 + 2c^2 - 4s_b^2, \qquad (2)$$

E. 12(14) $$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta. \qquad (3)$$

Vonjuk ki (2)-ből (3)-at.

Így az a ismeretlen oldal másodfokú egyenletéhez jutunk c, β, s_b paraméterekkel:

$$\boxed{a^2 + 2c \cdot \cos\beta \cdot a + c^2 - 4s_b^2 = 0.} \qquad (4)$$

$$a_{12} = \frac{-2c \cdot \cos\beta \pm \sqrt{4c^2 \cdot \cos^2\beta - 4 \cdot \left(c^2 - 4s_b^2\right)}}{2},$$

$$a_{12} = -c \cdot \cos\beta \pm \sqrt{(2s_b + c \cdot \sin\beta) \cdot (2s_b - c \cdot \sin\beta)}. \qquad (5)$$

A b oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22) $$\boxed{b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}.} \qquad (6)$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

1. példa. A 65-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 50; \qquad \beta = 45°; \qquad s_b = 5\sqrt{97} \approx 49{,}2443,$$

$$a^2 + 50\sqrt{2} \cdot a - 7200 = 0,$$

$$a_1 \approx 56{,}5685; \qquad a_2 \approx -127{,}2792.$$

Ebben a példában egy megoldást kaptunk. Találjunk olyan induló adathármast, amelyik két megoldást eredményez. Ehhez először meg kell vizsgálnunk, hogy az

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0 \quad a, b, c \in \mathbf{R})$$

másodfokú egyenletnek mikor lesz két különböző pozitív valós gyöke. Ennek szükséges és elégséges feltétele $D > 0$, továbbá hogy a gyökök összege is és a szorzata is pozitív legyen. Írjuk föl a *D diszkriminánst* és a *Viète-féle formulákat*:

$$D = b^2 - 4ac, \qquad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Írjuk ezt föl (4) paramétereivel:

$$4c^2 \cdot \cos^2\beta - 4 \cdot \left(c^2 - 4s_b^2\right) > 0; \qquad -2c \cdot \cos\beta > 0; \qquad c^2 - 4s_b^2 > 0;$$

$$0 < \sin\beta < \frac{2s_b}{c}; \qquad -1 < \cos\beta < 0; \qquad 0 < \frac{2s_b}{c} < 1.$$

A következő példában egy ilyen adathármasból indulunk el.

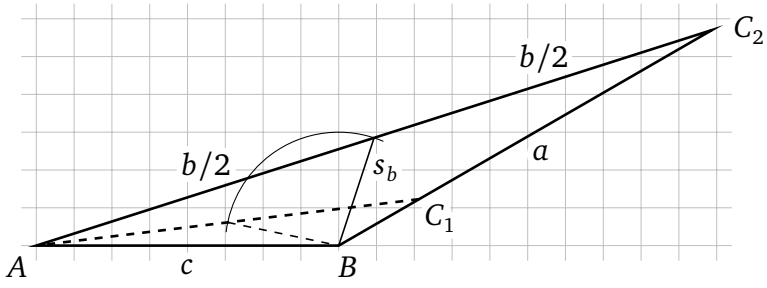
2. példa:

$$c = 40; \qquad \beta = 150°; \qquad s_b = 15,$$

$$a^2 - 40\sqrt{3} \cdot a + 700 = 0,$$

$$a_1 \approx 12{,}2803; \qquad a_2 \approx 57{,}0017.$$

Az a_1 megoldást a 65-2. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.



65-2. ábra

3. példa:

$$c = 40; \qquad \beta = 90°; \qquad s_b = 20,$$

$$a^2 + 2 \cdot 40 \cdot \cos 90° \cdot a + 40^2 - 4 \cdot 20^2 = 0,$$

$$a^2 = 0; \qquad \text{nincs megoldás.}$$

A (4) *egyenletből számolt $a \in \mathbf{R}^+$ létezése tehát a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

A megoldások száma a (4) *egyenlet pozitív valós gyökeinek számától függ, 0, 1 vagy 2 lehet.*

Az első példában 1, a második példában 2, a harmadik példában 0.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

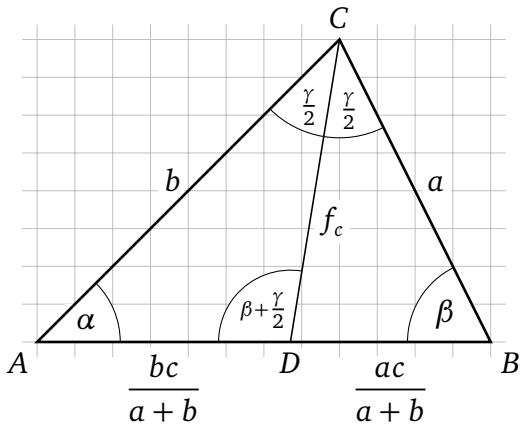
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

66. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és ezen oldalhoz tartozó belső szögfelező (egyértelmű) (grafikus megoldás) (c, β, f_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (66-1. ábra).

Mivel a numerikus út hatodfokú egyenletre vezet, a lényegesen egyszerűbb grafikus megoldást mutatjuk be.

Legyenek c, β *választott paraméterek*, és vegyük föl a-t $(0 < a < +\infty)$. A b-t a *koszinusztétellel*, majd f_c belső szögfelezőt az oldalakból számolhatjuk. Lásd (1)-et és (2)-t:



66-1. ábra

E. 12(22) $$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}, \qquad (1)$$

E. 29(3) $$f_c = \sqrt{ab \cdot \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}. \qquad (2)$$

Ezután felrajzolhatjuk az $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, $a \mapsto f_c(a)$ függvényeket c, β paraméterek mellett (66-2. ábra).

Vegyük észre, hogy:

$$\lim_{a \to +\infty} f_c(a) = +\infty. \qquad (3)$$

$c = 60,\ \beta = 30°$	esetén	a függvényt jelöljük $f_{c1}(a)$-val,
$c = 60,\ \beta = \arctan 2 \approx 63{,}4349°$	esetén	a függvényt jelöljük $f_{c2}(a)$-val,
$c = 60,\ \beta = 150°$	esetén	a függvényt jelöljük $f_{c3}(a)$-val.

Példa. A 66-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 60; \qquad \beta = \operatorname{arctg} 2 \approx 63{,}4349°;$$

$$a = \sqrt{20^2 + 40^2} = 20\sqrt{5} \approx 44{,}7214;$$

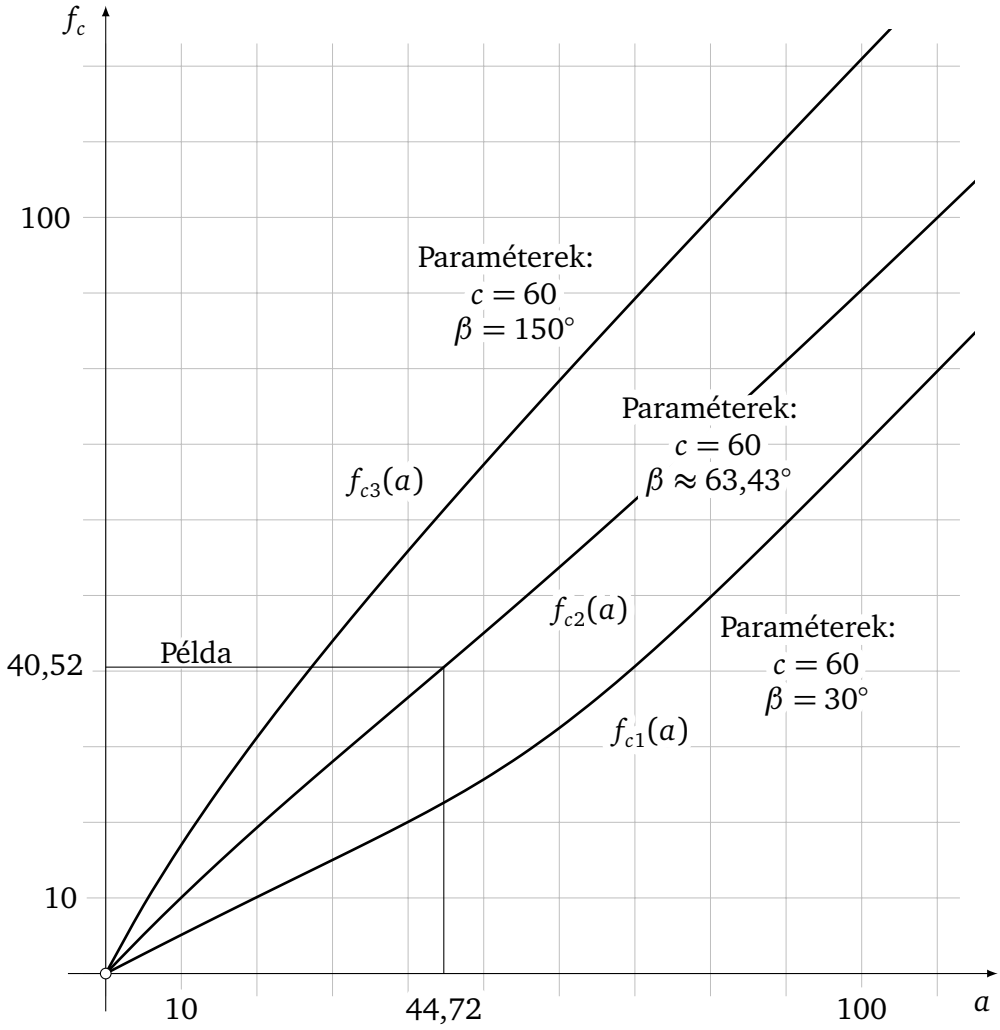
$$b = 40\sqrt{2} \approx 56{,}5685.$$

Végül f_c-t (2)-ből számolhatjuk:

$$f_c = \sqrt{20\sqrt{5} \cdot 40\sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{60^2}{\left(20\sqrt{5} + 40\sqrt{2}\right)^2}\right)} \approx 40{,}5233.$$

További a oldalak felvételével felrajzolhatjuk az egész $f_{c2}(a)$ grafikont. Ezután tetszőleges f_c-nél leolvasható a közelítő értéke, majd (1)-ből számolható b. A 66-2. ábrán berajzoltuk a példa megoldását is.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



66-2. ábra

Elegendően nagy (10^8) a oldalaknál kiszámolva f_c-t látható, hogy $f_c(a)$ függvény grafikonjának érintői közelednek az x tengely pozitív ágával bezárt 45°-os félegyeneshez.

A $c > 0$, $0° < \beta < 180°$, $f_c > 0$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

A megoldások száma mindig 1. A feladat megoldása egyértelmű.

A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

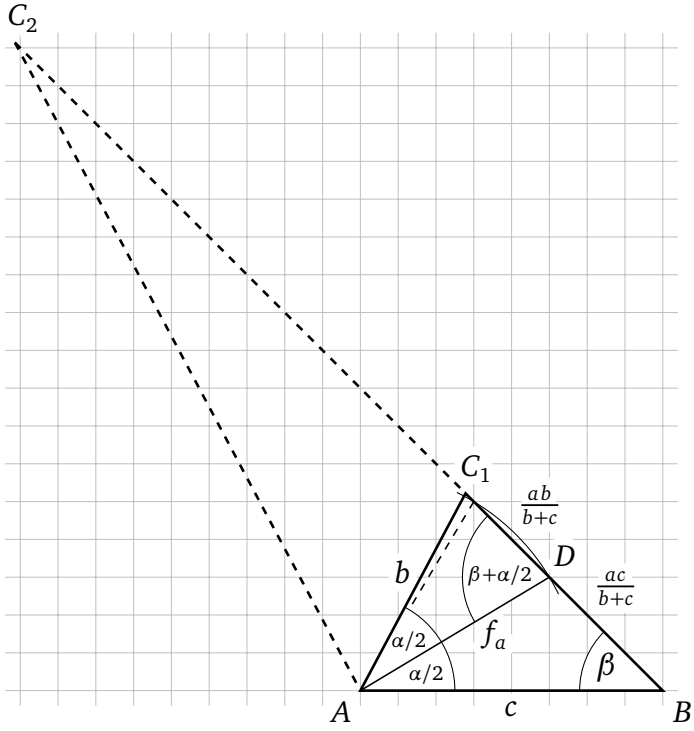
67. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz tartozó belső szögfelező, 1. (c, β, f_a)

Tekintsük a 67-1. ábrán látható $ABD\triangle$-et, melyben ismert két oldal (c, f_a) és egy nem közbezárt szög (β). Most lássunk a feladat megoldására egy a 63. és a 64. feladatokban leírtaktól különböző harmadik utat.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Írjuk föl a *szinusztételt* az $ABD\triangle$-ben. Vegyük figyelembe, hogy:

E. 9(2)
$$\sin\left(180^\circ-\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right). \tag{1}$$



67-1. ábra

E. 11(12)
$$\frac{f_a}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$\boxed{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{c\cdot\sin\beta}{f_a}.} \tag{2}$$

Most a jobb oldalon minden ismert, a bal oldalon pedig egy összeg szinusza áll, melyben csak α az ismeretlen. Keressük α-t.

A következő esetek fordulhatnak elő:

- $\frac{c\cdot\sin\beta}{f_a}>1$ esetén nincs megoldás.

1. $\frac{c\cdot\sin\beta}{f_a}=1$ esetén egy megoldás van: $\beta+\frac{\alpha}{2}=90^\circ,\quad \alpha=2\cdot(90^\circ-\beta)$.

2. $\frac{c\cdot\sin\beta}{f_a}<1$ esetén két megoldás van: $\alpha_1=2\cdot\left(\arcsin\frac{c\cdot\sin\beta}{f_a}-\beta\right)$,

$$\alpha_2=2\cdot\left(180^\circ-\arcsin\frac{c\cdot\sin\beta}{f_a}-\beta\right).$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A megoldás további feltétele, hogy:

$$0° < \alpha < 180° - \beta. \tag{3}$$

A feladatot a γ szög kiszámításával folytatjuk:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta). \tag{4}$$

A hiányzó a és b oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot c, \\ b &= \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot c. \end{aligned}} \tag{5}$$

1. példa. A 67-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \qquad \beta = 45°; \qquad f_a = 5\sqrt{34} \approx 29{,}1548,$$

$$\frac{c \cdot \sin\beta}{f_a} = \frac{40 \cdot \sin 45°}{5\sqrt{34}} \approx 0{,}970143 < 1,$$

$$\alpha_1 = 2 \cdot (\arcsin 0{,}970143 - 45°) \approx 61{,}9275°,$$

$$0° < 61{,}9275° < 135°,$$

$$\alpha_2 = 2 \cdot (180° - \arcsin 0{,}970143 - 45°) \approx 118{,}0725°,$$

$$0° < 118{,}0725° < 135°.$$

Az α_2 megoldást a 67-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

2. példa. Egy β tompaszögű eset:

$$c = 40; \qquad \beta = 120°; \qquad f_a = 50,$$

$$\frac{c \cdot \sin\beta}{f_a} = \frac{40 \cdot \sin 120°}{50} \approx 0{,}692820 < 1,$$

$$\alpha_1 = 2 \cdot (\arcsin 0{,}692820 - 120°) \approx -152{,}2924°,$$

$$\alpha_2 = 2 \cdot (180° - \arcsin 0{,}692820 - 120°) \approx 32{,}2924°,$$

$$0° < 32{,}2924° < 60°.$$

Látható, hogy csak α_2 lesz megoldás.

A $\dfrac{c \cdot \sin\beta}{f_a} \le 1$, *majd* $0° < \alpha < 180° - \beta$ *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, az 1. példában 2, a 2. példában 1.

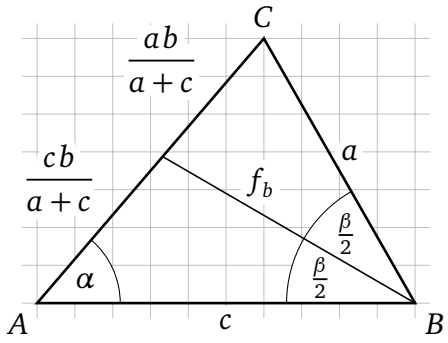
Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *és a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

68. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz tartozó belső szögfelező, 2. (egyértelmű) (c, β, f_b)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (68-1. ábra).

Induljunk el a belső szögfelező (f_b) két oldalból (a, c) és a közbezárt szögből (β) kifejezett (1) képletéből:



68-1. ábra

E. 28(1) $$f_b = \frac{2ac}{a+c} \cdot \cos\frac{\beta}{2}. \tag{1}$$

Ebben csak az a oldal ismeretlen, fejezzük ki a-t:

$$\boxed{a = \frac{f_b \cdot c}{2c \cdot \cos\frac{\beta}{2} - f_b}.} \tag{2}$$

A következő esetek lehetségesek:

- $2c \cdot \cos\frac{\beta}{2} - f_b \le 0$ esetén nincs megoldás. (3)

1. $2c \cdot \cos\frac{\beta}{2} - f_b > 0$ esetén egy megoldás van. (4)

A hiányzó b oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22) $$\boxed{b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}.} \tag{5}$$

Példa. A 68-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 50; \qquad \beta = \operatorname{arctg}\frac{7}{4} \approx 60{,}2551^\circ; \qquad f_b = \frac{\left(100 - 10\sqrt{65}\right) \cdot \sqrt{8\sqrt{65} + 130}}{7} \approx 38{,}6061;$$

$$a = \frac{38{,}6061 \cdot 50}{2 \cdot 50 \cdot \cos\frac{60{,}2551^\circ}{2} - 38{,}6061} \approx 40{,}3113.$$

A (4) *egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

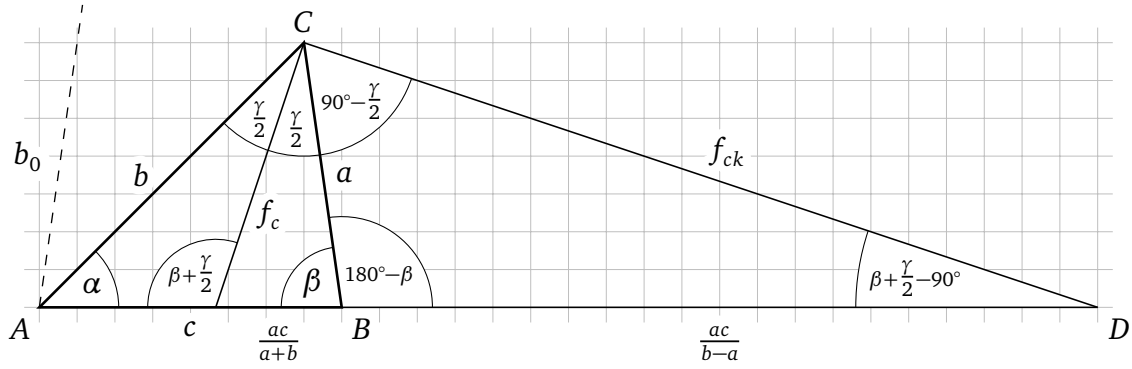
69. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és ezen oldalhoz tartozó külső szögfelező, 1. (c, β, f_{ck})

(grafikus megoldás)

Rajzoljunk fel egy ABC háromszöget úgy, hogy:

E. 2(3) $$a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta < 180^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha < 90^\circ, \tag{1}$$

és jelöljük a választott adatokat (69-1. ábra).



69-1. ábra

Mivel a numerikus út hatodfokú egyenletre vezet, a lényegesen egyszerűbb grafikus megoldást mutatjuk be.

Legyenek *c és β választott paraméterek*, és vegyük föl a-t úgy, hogy $a \neq b$.

A b-t a *koszinusztétellel* (2), majd f_{ck}-t az oldalakból számolhatjuk (3).

E. 12(22) $$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}, \tag{2}$$

E. 31(3) $$f_{ck} = \sqrt{ab \cdot \left(\frac{c^2}{(a-b)^2} - 1\right)}, \qquad a \neq b. \tag{3}$$

Az egyenlő szárú határesetben ($\alpha = \beta < 90^\circ$) az $a_0 = b_0$-t könnyen kiszámolhatjuk:

$$a_0 = b_0 = \frac{c}{2 \cdot \cos\beta}. \tag{4}$$

$$\lim_{a \to a_0} f_{ck}(a) = +\infty,$$

és f_{ck} oldalt vált. Ha most innen elindulva a tovább nő, akkor $f_{ck}(a)$ függvény először csökken, majd ismét nő, és

$$\lim_{a \to +\infty} f_{ck}(a) = +\infty,$$

vagyis az $f_{ck}(a)$ függvénynek az $a_0 < a < +\infty$ intervallumon valahol lokális minimuma kell legyen.

A grafikus megoldáshoz első lépésben rajzoljuk föl az $A \subseteq \mathbf{R}^+$ halmazon értelmezett $A \to \mathbf{R}^+$, $a \mapsto f_{ck}(a)$ függvényeket c, β paraméterek mellett.

A c felvétele után β felvételétől függően két eset lehetséges ($\beta < 90^\circ$, $\beta \geq 90^\circ$), ahol az első ($\beta < 90^\circ$) esetet tovább bonthatjuk, az értelmezési tartományokat pedig jelöljük A-val.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

1. Legyen $\beta < 90°$ és $a < a_0$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A = \{a \mid 0 < a < a_0\}$	$0 < f_{ck}(a) < +\infty$

Egy ilyen $f_{ck1}(a)$ függvényt $c = 40$, $\beta = \operatorname{arctg} 7 \approx 81{,}8699°$ paramétereknél a 69-2. ábrán folytonos vonallal jelöltünk. Az egyenlő szárú határesetben:

$$a_0 = b_0 = \frac{c}{2 \cdot \cos\beta} = \frac{40}{2 \cdot \cos 81{,}8699°} \approx 141{,}4214.$$

2. Legyen $\beta < 90°$ és $a > a_0$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A = \{a \mid a_0 < a < +\infty\}$	$\min f_{ck}(a) \le f_{ck}(a) < +\infty$

Egy ilyen $f_{ck2}(a)$ függvényt $c = 40$, $\beta = \operatorname{arctg} 7 \approx 81{,}8699°$ paramétereknél a 69-2. ábrán szintén folytonos vonallal jelöltünk. A függvény minimuma pedig:

$$\min f_{ck2}(a) \approx 3950.$$

3. Legyen $90° \le \beta < 180°$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$A = \{a \mid 0 < a < +\infty\}$	$0 < f_{ck}(a) < +\infty.$

$$\lim_{a \to +\infty} f_{ck}(a) = +\infty.$$

Egy ilyen $f_{ck3}(a)$ függvényt $c = 40$, $\beta = 120°$ paramétereknél a 69-2. ábrán szaggatott vonallal jelöltünk.

Példa. A 69-1. ábra c és β adataiból, de egy nagyobb a-ból elindulva:

$$c = 40; \qquad \beta = \operatorname{arctg} 7 \approx 81{,}8699°; \qquad a = 100;$$

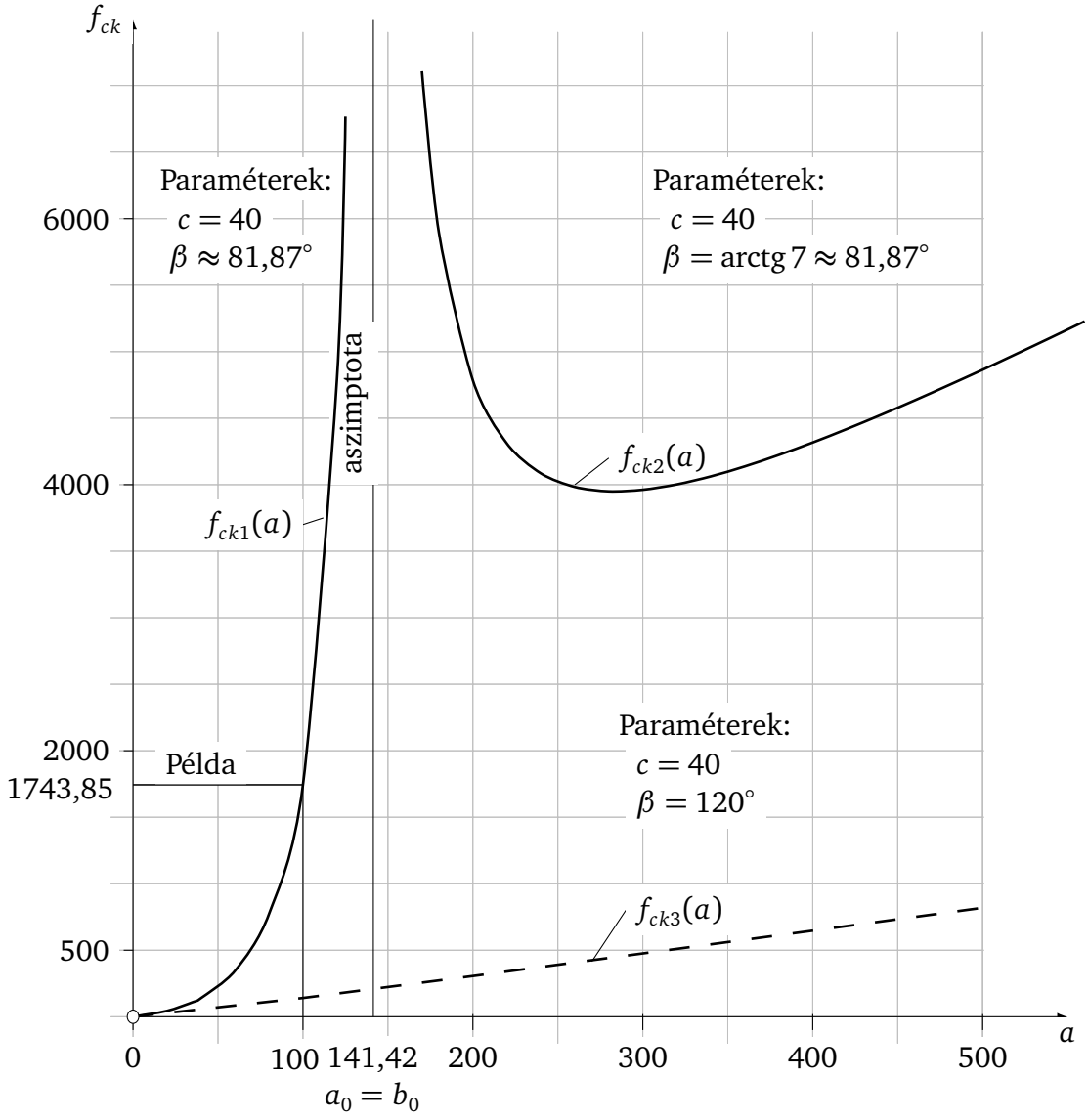
$$b = \sqrt{100^2 + 40^2 - \frac{2 \cdot 100 \cdot 40 \cdot \sqrt{50}}{50}} \approx 102{,}3163.$$

Végül f_{ck}-t (3)-ból számolhatjuk:

$$f_{ck} \approx 1743{,}85.$$

További a oldalak felvételével felrajzolhatjuk az egész $f_{ck1}(a)$ grafikont, majd az egész $f_{ck2}(a)$ vagy az $f_{ck3}(a)$ grafikont. Ezután tetszőleges f_{ck}-nál leolvasható a közelítő értéke (értékei), majd (2)-ből számolható b. A 69-2. ábrán berajzoltuk a példa megoldását is.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



69-2. ábra

A $c, f_{ck} \in \mathbf{R}^+$, $0° < \beta < 180°$ *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

A megoldások száma c, β *és* f_{ck} *felvételétől függ, 1, 2 vagy 3 lehet, a példában 1.*

A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

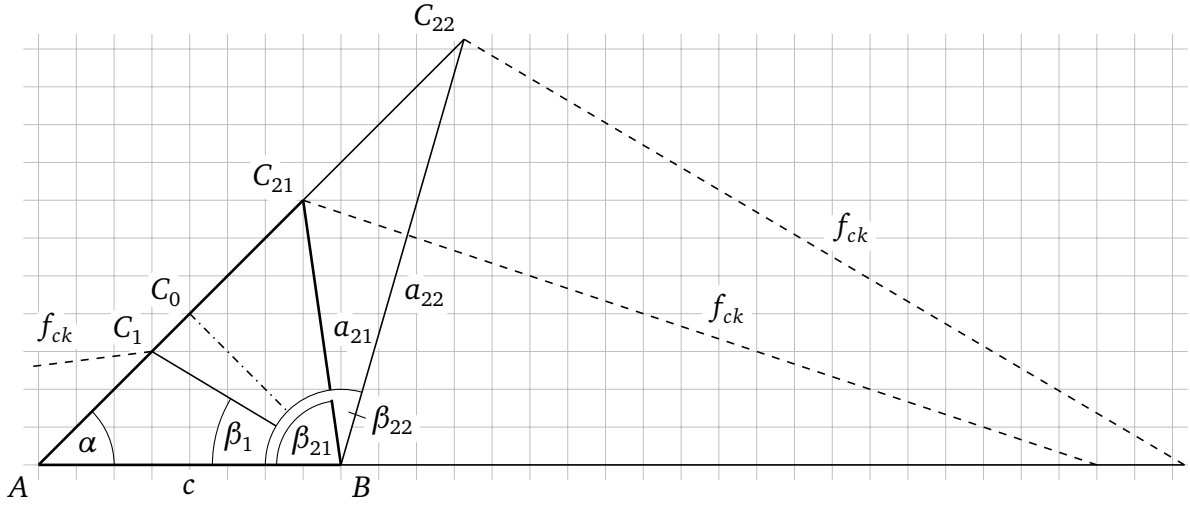
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

70. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és ezen oldalhoz tartozó külső szögfelező, 2. (grafikus megoldás) (c, α, f_{ck})

Rajzoljunk fel egy ABC háromszöget úgy, hogy:

E. 2(3) $$a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta < 180^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha < 90^\circ, \tag{1}$$

és jelöljük a választott adatokat (70-1. ábra).



70-1. ábra

Mivel a numerikus út nyolcadfokú egyenletre vezet, a lényegesen egyszerűbb grafikus megoldást mutatjuk be.

Legyenek *c és α választott paraméterek*, és vegyük föl β-t úgy, hogy $\beta < 180^\circ - \alpha$, és $\beta \neq \alpha$:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta). \tag{2}$$

Az a-t és b-t a *szinusztétellel* (3), majd f_{ck}-t az oldalakból számolhatjuk (4).

E. 11(12) $$a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot c, \qquad b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot c. \tag{3}$$

E. 31(3) $$f_{ck} = \sqrt{ab \cdot \left(\frac{c^2}{(a-b)^2} - 1 \right)}, \qquad a \neq b. \tag{4}$$

A $\beta = \alpha < 90^\circ$ egyenlő szárú határesetben:

$$\lim_{\beta \to \alpha} f_{ck}(\beta) = +\infty, \tag{5}$$

és f_{ck} oldalt vált.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Ha most innen elindulva β tovább nő, akkor $f_{ck}(\beta)$ függvény először csökken, majd ismét nő, és

$$\lim_{\beta\to(180^\circ-\alpha)-} f_{ck}(\beta) = +\infty, \tag{6}$$

vagyis $f_{ck}(\beta)$ függvénynek az $\alpha < \beta < 180^\circ - \alpha$ intervallumon valahol lokális minimuma kell legyen.

A grafikus megoldáshoz első lépésben rajzoljuk föl a $B = \{\beta | 0^\circ < \beta < 180^\circ - \alpha\} \setminus \{\alpha\}$ halmazon értelmezett $B \to \mathbf{R}^+$, $\beta \mapsto f_{ck}(\beta)$ függvényeket c, α paraméterek mellett.

A c felvétele után α felvételétől függően két eset lehetséges ($\alpha < 90^\circ$, $\alpha \geq 90^\circ$), ahol az első ($\alpha < 90^\circ$) esetet tovább bonthatjuk, az értelmezési tartományokat pedig jelöljük B-vel.

1. Legyen $\alpha < 90^\circ$ és $\beta < \alpha$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$B = \{\beta \,\|\, 0^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ\}$	$0 < f_{ck}(\beta) < +\infty$

   Egy ilyen $f_{ck1}(\beta)$ függvényt $c = 40$, $\alpha = 45^\circ$ paramétereknél a 70-2. ábrán folytonos vonallal jelöltünk.

2. Legyen $\alpha < 90^\circ$ és $\alpha < \beta < 180^\circ - \alpha$, akkor:

Értelmezési tartomány	Értékkészlet
$B = \{\beta \,\|\, \alpha < \beta < 180^\circ - \alpha\}$	$\min f_{ck}(\beta) \leq f_{ck}(\beta) < +\infty$

   Egy ilyen $f_{ck2}(\beta)$ függvényt $c = 40$, $\alpha = 45^\circ$ paramétereknél a 70-2. ábrán szintén folytonos vonallal jelöltünk. A függvény minimuma pedig:

$$\beta_{\min 2} \approx 94, \qquad \min f_{ck2}(\beta) \approx 104.$$

Példa. A 70-1. ábra ABC_{21} háromszögének adataiból elindulva:

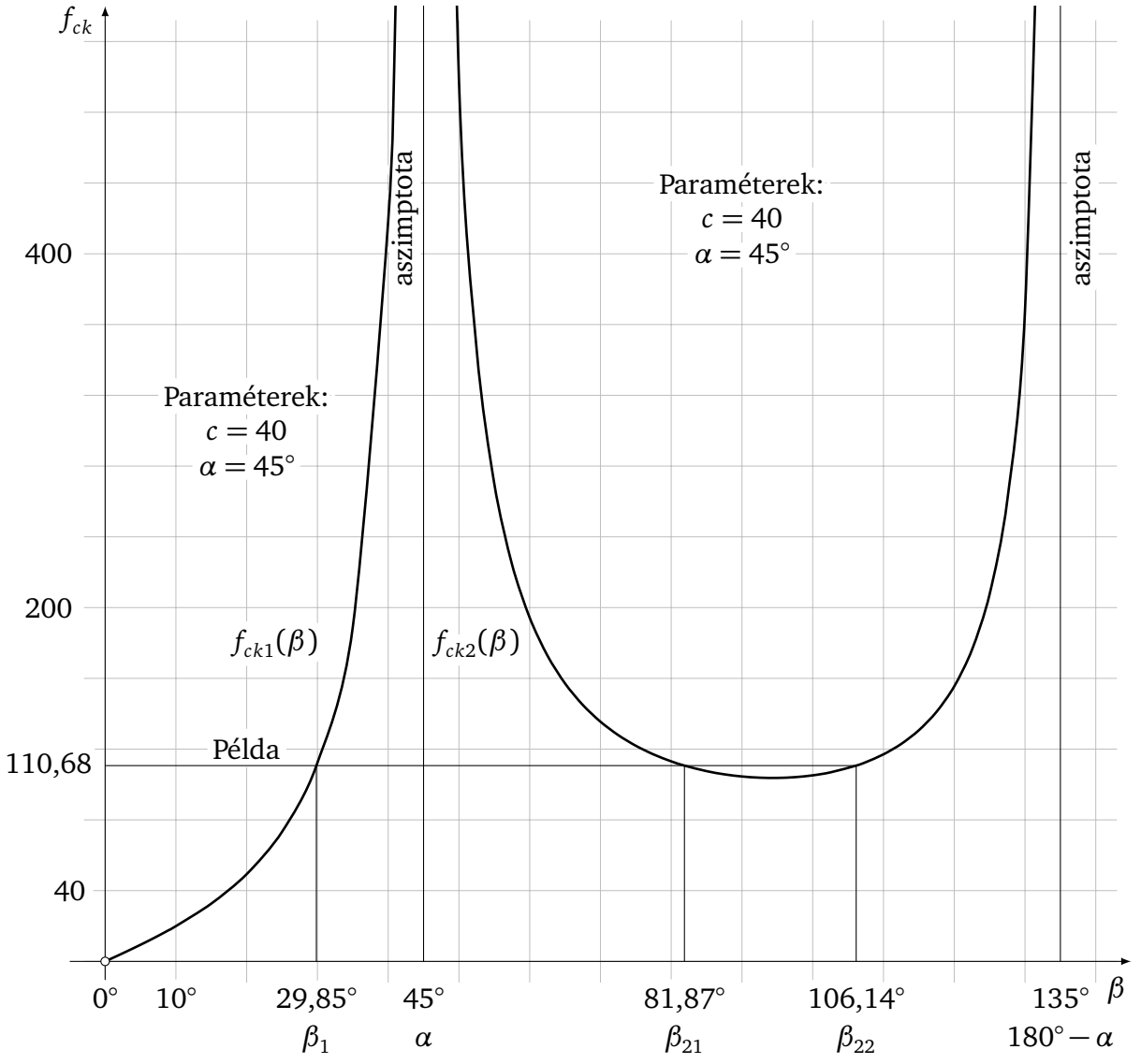
$$c = 40; \qquad \alpha = 45^\circ; \qquad f_{ck} = 35\sqrt{10} \approx 110{,}6797.$$

A numerikus út eredményeit felhasználva:

$$\begin{array}{lll} \beta_1 \approx 29{,}8540^\circ; & \beta_{21} \approx 81{,}8699^\circ; & \beta_{22} \approx 106{,}1426^\circ; \\ a_1 \approx 29{,}3021; & a_{21} \approx 35{,}3553; & a_{22} \approx 58{,}6043; \\ b_1 \approx 20{,}6282; & b_{21} \approx 49{,}4975; & b_{22} \approx 79{,}6113. \end{array}$$

További β szögek felvételével berajzolhatjuk az egész $f_{ck1}(\beta)$ grafikont, majd az egész $f_{ck2}(\beta)$ grafikont. Ezután tetszőleges f_{ck}-nál leolvasható β közelítő értéke (értékei), majd (2)-ből számolható γ, (3)-ból pedig a és b. A 70-2. ábrán berajzoltuk a példa megoldásait is.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



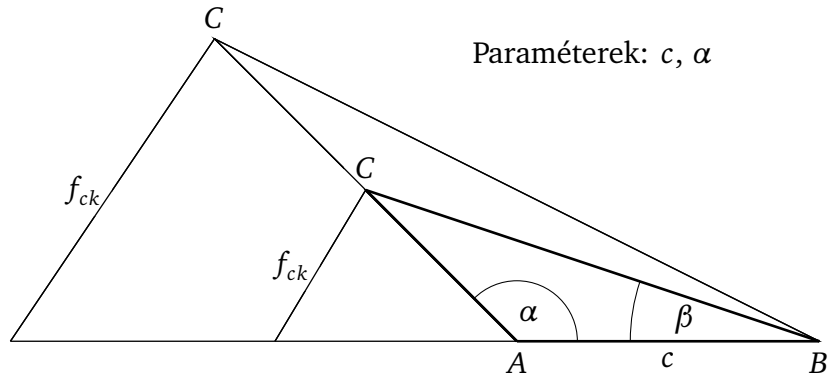
70-2. ábra

A $c > 0$ és $\alpha < 90°$ paraméterek felvétele után a 70-2. ábrából is látható, hogy mindig van megoldás.

A megoldások száma f_{ck} felvételétől függ, 1, 2 vagy 3 lehet, a példában 3.

Ha a paraméterek $c > 0$ és $\alpha \geq 90°$, akkor a β független változó intervalluma $0° < \beta < 180° - \alpha$, és $f_{ck}(\beta)$ függvény szigorúan monoton nő, így minden f_{ck}-hoz egy β adódik, tehát egy megoldást kapunk (70-3. ábra).

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



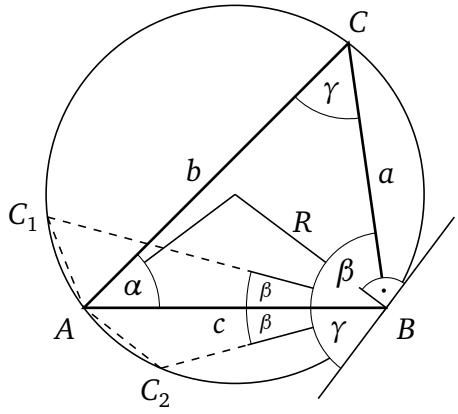
70-3. ábra

A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

71. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és a körülírt kör sugara (c,β,R)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (71-1. ábra).



71-1. ábra

Induljunk el a körülírt kör R sugarának képletéből:

E. 11(12) $$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (1)$$

Vizsgáljuk meg a lehetséges kiinduló adatokat:

$c > 2R$ esetén nincs megoldás.

$c = 2R$ esetén $\gamma = 90°$, és

- $\beta \geq 90°$, nincs megoldás,

1. $\beta < 90°$, egy megoldás van, és $\alpha = 90° - \beta$.

$c < 2R$ esetén $\sin\gamma = \frac{c}{2R} < 1$, $\gamma = \arcsin\frac{c}{2R} < 90°$, lásd a 71-1. ábrát,

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

- $\beta \geq 180^\circ - \gamma$ nincs megoldás,

1. $\gamma \leq \beta < 180^\circ - \gamma$ egy megoldás, $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$,
ezt az esetet a 71-1. ábrán folytonos vonallal jelöltük,

2. $0^\circ < \beta < \gamma$ két megoldás, $\alpha_1 = 180^\circ - (\beta + \gamma)$,
$\alpha_2 = 180^\circ - (\beta + 180^\circ - \gamma) = \gamma - \beta$,
ezeket az eseteket a 71-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A hiányzó a és b oldal ezután (1)-ből számolható:

E. 11(12)
$$\boxed{\begin{aligned} a &= 2R \cdot \sin\alpha, \\ b &= 2R \cdot \sin\beta. \end{aligned}} \tag{2}$$

Ha $\beta = \gamma, \alpha = \gamma$ vagy $\alpha = \beta$, akkor a háromszög egyenlő szárú, ha $R = c\sqrt{3}/3,\ \beta = 60^\circ$, akkor pedig egyenlő oldalú.

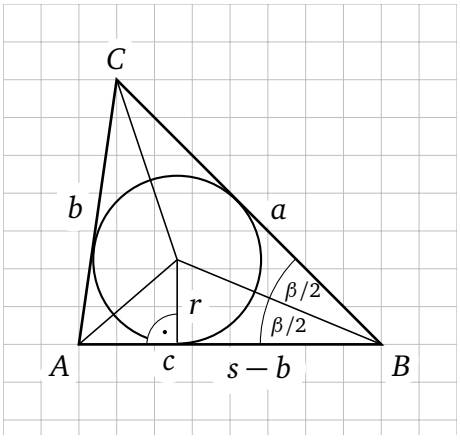
Egy másik út, ha kiszámoljuk b-t ($b = 2R \cdot \sin\beta$), majd innen a feladat két oldal (b, c) és egy (nem a közbezárt) szög (β) esetek valamelyikére vezet.

A $0 < c \leq 2R$ *és a* $0^\circ < \beta < 180^\circ - \arcsin(c/2R)$ *együttes teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*
A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet (71-1. ábra).

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

72. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és a beírt kör sugara (c, β, r) (egyértelmű)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (72-1. ábra).



72-1. ábra

Induljunk el az (1), (2) egyenletekből és a (3) *trigonometrikus területképletből*. Így egy háromismeretlenes (a, b, t) egyenletrendszerhez jutunk. Az s ismeretlen $2s = a+b+c$ helyettesítés után kiesik:

E. 33(12)
$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}, \tag{1}$$

E. 32(4)
$$t = r \cdot s, \tag{2}$$

E. 11(15)
$$t = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}. \tag{3}$$

Küszöböljük ki (2)-ből és (3)-ból t-t, majd a kapott egyenletet állítsuk egyenletrendszerbe (1)-gyel.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\begin{cases} r \cdot \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}, & (4) \\ \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{r}{\dfrac{a+b+c}{2} - \dfrac{2b}{2}} = \dfrac{2r}{a-b+c}. & (5) \end{cases}$$

Fejezzük ki b-t mindkét egyenletből:

$$\begin{cases} b = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{r} - (a+c), & (6) \\ b = (a+c) - \dfrac{2r}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}. & (7) \end{cases}$$

A b kiküszöbölése után kapjuk:

$$\frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{r} - (a+c) = (a+c) - \frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}. \tag{8}$$

Rendezzük (8) egyenletet a-ra:

$$\frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{r} = 2a + 2c - \frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}, \qquad \Big/ \cdot r \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

$$ac \cdot \sin\beta \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - 2ar \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 2cr \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - 2r^2,$$

$$a = \frac{2r \cdot (c \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - r)}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot (c \cdot \sin\beta - 2r)}. \tag{9}$$

Hozzuk egyszerűbb alakra (9) törtet, ezzel (10)-hez jutunk. Most a jobb oldalon minden ismert, így az a ismeretlen oldal kiszámolható:

$$\boxed{a = \frac{2 \cdot \left(c - r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)}{\frac{c \cdot \sin\beta}{r} - 2}.} \tag{10}$$

A hiányzó b oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)

$$\boxed{b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}.} \tag{11}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

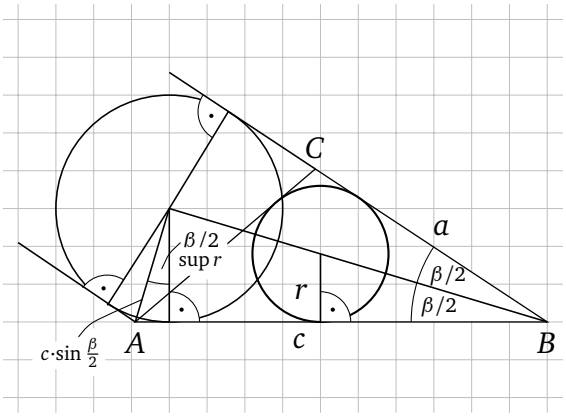
Példa. A 72-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \quad \beta = 45°; \quad r = 15\sqrt{2} - 10 \approx 11{,}2132,$$

$$a = \frac{2 \cdot (40 - 11{,}2132 \cdot 2{,}4142)}{40 \cdot 0{,}7071/11{,}2132 - 2} \approx 49{,}4975,$$

$$b = 25\sqrt{2} \approx 35{,}3553.$$

Vegyük észre, hogy:



72-2. ábra

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{\sup r}{c \cdot \sin\dfrac{\beta}{2}},$$

$$2 \cdot c \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} = 2 \cdot \sup r,$$

$$c \cdot \sin\beta = 2 \cdot \sup r,$$

$$\boxed{\sup r = \frac{c \cdot \sin\beta}{2}.} \tag{12}$$

És ekkor:

$$\lim_{r \to \sup r -} a(r) = +\infty. \tag{13}$$

A $\sup r$ (12) képlete nem változik $\beta \geq 90°$ esetén sem.

Látható, hogy adott c és β esetén r-nek felső határa van, vagyis $r < \sup r$ kell legyen. Ekkor a (10) képletének számlálója és nevezője is pozitív, tehát $a > 0$ lesz.

Tehát $r < \sup r$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

A megoldások száma 0 vagy 1 lehet, a példában 1.

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

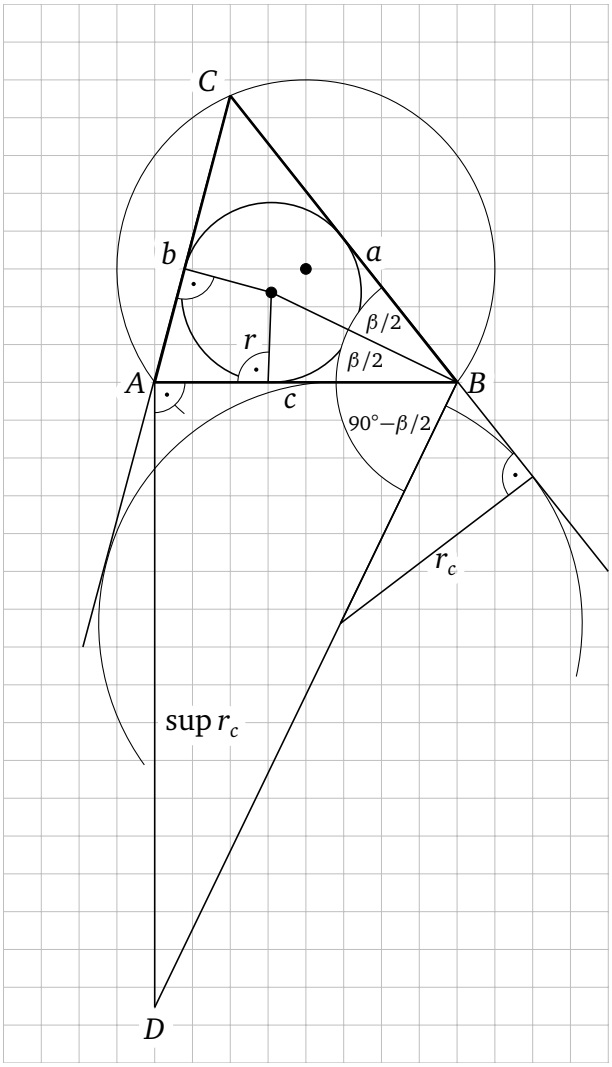
Megjegyzés:
A c oldaltól r távolságra, vele párhuzamosan húzott egyenesből β szög szögfelezője kimetszi a beírt kör középpontját (72-1. ábra).

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

73. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és ezen oldalhoz a hozzáírt kör sugara (c, β, r_c) (egyértelmű)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (73-1. ábra).



73-1. ábra

Induljunk el az (1) alatti kettő, valamint a (2), (3) egyenletekből, mint egy négyismeretlenes $(a,\ b,\ r_b,\ t)$ egyenletrendszerből. Az s ismeretlen $2s = a+b+c$ helyettesítés után kiesik:

E. 34(3) $$r_b = \frac{t}{s-b}, \qquad r_c = \frac{t}{s-c}, \tag{1}$$

E. 35(8) $$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r_b}{s}, \tag{2}$$

E. 11(15) $$t = \frac{a\cdot c\cdot \sin\beta}{2}. \tag{3}$$

$$s-c = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = \frac{a+b-c}{2},$$

$$s-b = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2b}{2} = \frac{a-b+c}{2}.$$

Az (1)-ből és (3)-ból küszöböljük ki t-t, majd (2)-ből, (1)-ből és (3)-ból r_b-t és t-t:

$$\begin{cases} r_c = \dfrac{a\cdot c\cdot \sin\beta}{a+b-c}, & (4)\\[2ex] \dfrac{a+b+c}{2}\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{a\cdot c\cdot \sin\beta}{a-b+c}. & (5) \end{cases}$$

Most fejezzük ki b-t (4)-ből:

$$r_c\cdot(a+b-c) = a\cdot c\cdot \sin\beta,$$

$$b = a\cdot\frac{c\cdot\sin\beta}{r_c} + c - a = \left(\frac{c\cdot\sin\beta}{r_c} - 1\right)\cdot a + c. \tag{6}$$

Alakítsuk át (5)-öt:

$$(a+b+c)\cdot(a-b+c)\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 2ac\cdot\sin\beta,$$

$$(a+c)^2 - b^2 = 2ac\cdot\frac{\sin\beta}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}. \tag{7}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Helyettesítsük (6)-ot (7)-be, valamint a (11) átalakítást is felhasználva:

$$\left(a^2+2ac+c^2\right)-\left(\left(\frac{c\cdot\sin\beta}{r_c}-1\right)\cdot a+c\right)^2=2ac\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}, \tag{8}$$

$$a^2+2ac+c^2-\left(\frac{c\cdot\sin\beta}{r_c}-1\right)^2\cdot a^2-2\cdot\left(\frac{c\cdot\sin\beta}{r_c}-1\right)\cdot ac-c^2=2ac\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2},$$

$$\left(1-\left(\frac{c\cdot\sin\beta}{r_c}-1\right)^2\right)\cdot a^2+2c\cdot\left(1-\left(\frac{c\cdot\sin\beta}{r_c}-1\right)-2\cos^2\frac{\beta}{2}\right)\cdot a=0. \tag{9}$$

Az $a=0$ megoldás síkgeometriai szempontból nem értelmezett, tegyük föl, hogy $a\neq 0$.
Ekkor a-val történő osztás, majd a-ra történő rendezés után kapjuk:

$$a=\frac{2c\cdot\left(\frac{c\cdot\sin\beta}{r_c}+2\cos^2\frac{\beta}{2}-2\right)}{1-\left(\frac{c\cdot\sin\beta}{r_c}-1\right)^2}. \tag{10}$$

$$\frac{\sin\beta}{\operatorname{tg}(\beta/2)}-2=\frac{2\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}}-2=2\cdot\left(\cos^2\frac{\beta}{2}-1\right)=-2\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}=\cos\beta-1. \tag{11}$$

(11) átalakítás felhasználásával hozzuk egyszerűbb alakra a (10) törtet, ezzel (12)-höz jutunk. Most a jobb oldalon minden ismert, így az a ismeretlen oldal kiszámolható:

$$\boxed{a=\frac{2\cdot\left(c-r_c\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)}{2-\frac{c\cdot\sin\beta}{r_c}}.} \tag{12}$$

A hiányzó b oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)

$$\boxed{b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta}.} \tag{13}$$

A β intervalluma $0^\circ<\beta<180^\circ$.

Vegyük észre, hogy adott c és β mellett r_c-nek felső határa van (73-1. ábra):

$$\sup r_c=c\cdot\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)=c\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}. \tag{14}$$

A $\sup r_c$-nél (12) számlálója nulla, nevezője pozitív, ugyanis ekkor a nevező:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$2-\frac{c\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\beta}{2}\right)}{c\cdot\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}}=2-\frac{2\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}=2\cdot\left(1-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)=2\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}>0. \tag{15}$$

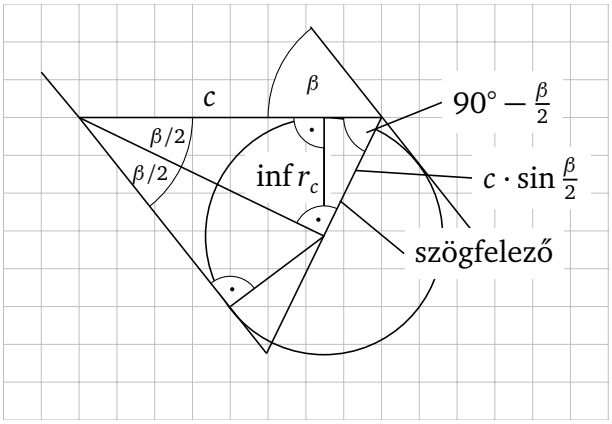
Ha r_c a $\sup r_c$-től indulva csökken, akkor (12) számlálója nő, vagyis pozitív lesz, pozitív nevezője pedig a nulláig csökkenhet, így kiszámítható r_c alsó határa, $\inf r_c$ is:

$$2-\frac{c\cdot\sin\beta}{\inf r_c}=0,$$

majd ebből

$$\inf r_c=\frac{c\cdot\sin\beta}{2}, \tag{16}$$

ami a 73-2. ábrából is látszik.



73-2. ábra

$$\sin\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\inf r_c}{c\cdot\sin\frac{\beta}{2}},$$

$$2\cdot c\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}=2\cdot\inf r_c,$$

$$\inf r_c=\frac{c\cdot\sin\beta}{2}.$$

$$\boxed{\inf r_c=\frac{c\cdot\sin\beta}{2}<r_c<c\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\sup r_c.} \tag{17}$$

A (17) egyenlőtlenség $90^\circ\le\beta<180^\circ$ esetén sem változik.

Példa. A 73-1. ábra adataiból elindulva:

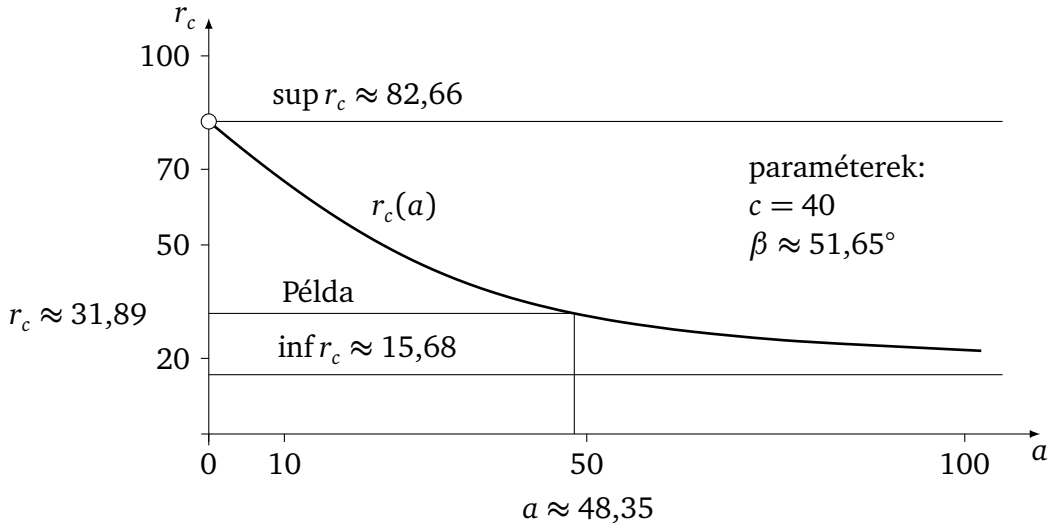
$$c=40,$$
$$\beta=\operatorname{arctg}\frac{15+\sqrt{25^2-10^2}}{30}\approx 51{,}6459^\circ,$$
$$r_c=\frac{t}{s-c}=\frac{40\cdot\left(15+5\sqrt{21}\right)}{20\sqrt{3}+20\sqrt{7}-40}\approx 31{,}8890,$$

$$a\approx 48{,}3465;\qquad b\approx 39{,}2095.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A részletesebb vizsgálat: Rajzoljuk fel az $a(r_c)$ függvény (lásd (12)-t) $r_c(a)$ *inverzét*, $c = 40$, $\beta \approx 51{,}65°$ paraméterek mellett (73-3. ábra). Az ábrából a példa megoldása is leolvasható. Más paraméterértékek esetén a grafikon hasonló jellegű. A határértékek pedig (17)-ből számíthatók:

$$\lim_{\beta\to 180°-} \sup r_c = 0, \qquad \lim_{\beta\to 180°-} \inf r_c = 0,$$
$$\lim_{\beta\to 0°+} \sup r_c = +\infty, \qquad \lim_{\beta\to 0°+} \inf r_c = 0.$$



73-3. ábra

Az $r_c(a)$ függvényt explicit is előállíthatjuk (12)-ből:

$$2 \cdot r_c(a) \cdot a - c \cdot \sin\beta \cdot a - 2 \cdot r_c(a) \cdot c + 2 \cdot r_c^2(a) \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 0,$$
$$2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot r_c^2(a) - 2 \cdot (c-a) \cdot r_c(a) - ac \cdot \sin\beta = 0,$$
$$r_c(a) = \frac{2 \cdot (c-a) + \sqrt{4 \cdot (c-a)^2 + 4 \cdot 2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot ac \cdot \sin\beta}}{4 \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}.$$

Mivel $r_c(a)$ pozitív kell legyen, ezért a négyzetgyök előtt csak a pozitív előjel értelmezett, továbbá

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \sin\beta = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\beta}{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = 2 \cdot \sin^2\frac{\beta}{2} \tag{18}$$

átalakítás felhasználásával kapjuk:

$$r_c(a) = \frac{c - a + \sqrt{(c-a)^2 + 4ac \cdot \sin^2\frac{\beta}{2}}}{2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}. \tag{19}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$r_c(0) = \frac{c + \sqrt{c^2}}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = c \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \sup r_c.$$

A c és β induló adatok felvétele után $\inf r_c < r_c < \sup r_c$ *a megoldás szükséges és elégséges feltétele. A megoldások száma 0 vagy 1 lehet, a példában 1.*

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

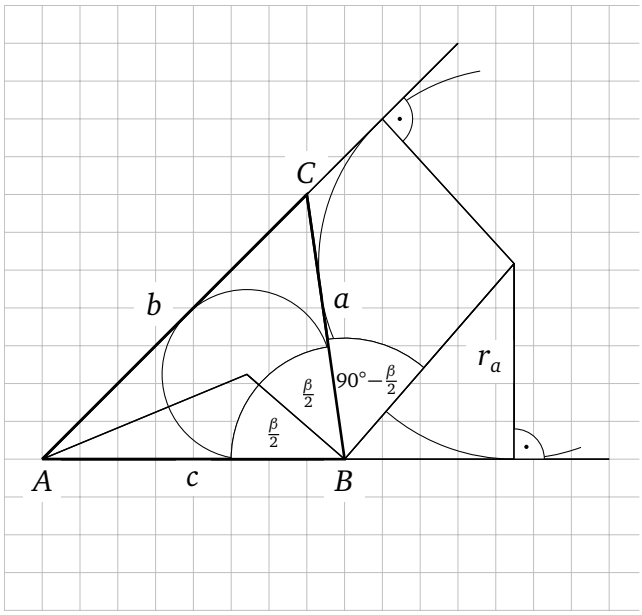
A vizsgálat programmal készült.

Megjegyzés: A c oldaltól r_c távolságra vele párhuzamosan húzott egyenesből $180° - \beta$ szög szögfelezője kimetszi a hozzáírt kör középpontját (73-1. ábra).

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

74. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz a hozzáírt kör sugara, 1. (egyértelmű) (c, β, r_a)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (74-1. ábra).



74-1. ábra

Induljunk el az (1) alatti kettő, valamint a (2), (3) egyenletekből, mint egy négyismeretlenes (a, b, r_b, t) egyenletrendszerből. Az s ismeretlen $2s = a + b + c$ helyettesítés után kiesik:

E. 34(3) $$r_a = \frac{t}{s-a}, \quad r_b = \frac{t}{s-b}, \tag{1}$$

E. 35(8) $$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r_b}{s}, \tag{2}$$

E. 11(15) $$t = \frac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{2}. \tag{3}$$

$$s - a = \frac{-a + b + c}{2}, \qquad s - b = \frac{a - b + c}{2}. \tag{4}$$

Küszöböljük ki t-t (1)-ből és (3)-ból, majd r_b-t és t-t (1)-ből, (2)-ből és (3)-ból:

$$\begin{cases} r_a = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{-a + b + c}, & (5) \\ \dfrac{a + b + c}{2} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin \beta}{a - b + c}. & (6) \end{cases}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Most fejezzük ki b-t (5)-ből:

$$r_a \cdot (-a+b+c) = a \cdot c \cdot \sin\beta,$$

$$b = a \cdot \frac{c \cdot \sin\beta}{r_a} + a - c,$$

$$b = \left(\frac{c \cdot \sin\beta}{r_a} + 1\right) \cdot a - c. \tag{7}$$

Most szorozzuk be (6)-ot, hogy ne legyen benne tört:

$$(a+b+c) \cdot (a-b+c) \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 2a \cdot c \cdot \sin\beta,$$

$$(a+c)^2 - b^2 = 2ac \cdot \frac{\sin\beta}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}. \tag{8}$$

Most küszöböljük ki b-t, helyettesítsük (7)-et (8)-ba, használjuk fel (11) átalakítást is:

$$a^2 + 2ac + c^2 - \left(\left(\frac{c \cdot \sin\beta}{r_a} + 1\right) \cdot a - c\right)^2 = 2ac \cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}. \tag{9}$$

Végezzük el bal oldalon a négyzetre emelést:

$$a^2 + 2ac + c^2 - \left(\frac{c \cdot \sin\beta}{r_a} + 1\right)^2 \cdot a^2 + 2 \cdot \left(\frac{c \cdot \sin\beta}{r_a} + 1\right) \cdot ac - c^2 = 2ac \cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}.$$

Most emeljük ki a^2-et és a-t, és rendezzük bal oldalra az egyenletet:

$$\left(1 - \left(\frac{c \cdot \sin\beta}{r_a} + 1\right)^2\right) \cdot a^2 + 2c \cdot \left(1 + \left(\frac{c \cdot \sin\beta}{r_a} + 1\right) - 2\cos^2\frac{\beta}{2}\right) \cdot a = 0.$$

Az $a = 0$ megoldás síkgeometriai szempontból nem értelmezett, tegyük fel, hogy $a \neq 0$.
Ekkor a-val történő osztás, majd a-ra történő rendezés után kapjuk:

$$a = \frac{2c \cdot \left(\frac{c \cdot \sin\beta}{r_a} - 2\cos^2\frac{\beta}{2} + 2\right)}{\left(\frac{c \cdot \sin\beta}{r_a} + 1\right)^2 - 1}. \tag{10}$$

Most β intervalluma: $0° < \beta < 180°$.

$$2 - \frac{\sin\beta}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = 2 - \frac{2\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}} = 2 \cdot \left(1 - \cos^2\frac{\beta}{2}\right) = 2 \cdot \sin^2\frac{\beta}{2} = 1 - \cos\beta > 0. \tag{11}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A (11) átalakítás felhasználásával hozzuk egyszerűbb alakra a (10) törtet, ezzel (12)-höz jutunk. Most a jobb oldalon minden ismert, így az a ismeretlen oldal kiszámolható:

$$a = \frac{2 \cdot \left(c + r_a \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right)}{2 + \frac{c \cdot \sin \beta}{r_a}}. \tag{12}$$

Látható, hogy (12) számlálója és nevezője is mindig pozitív, ami azt jelenti, hogy mindig van megoldás, és mindig csak egy. A hiányzó b oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)

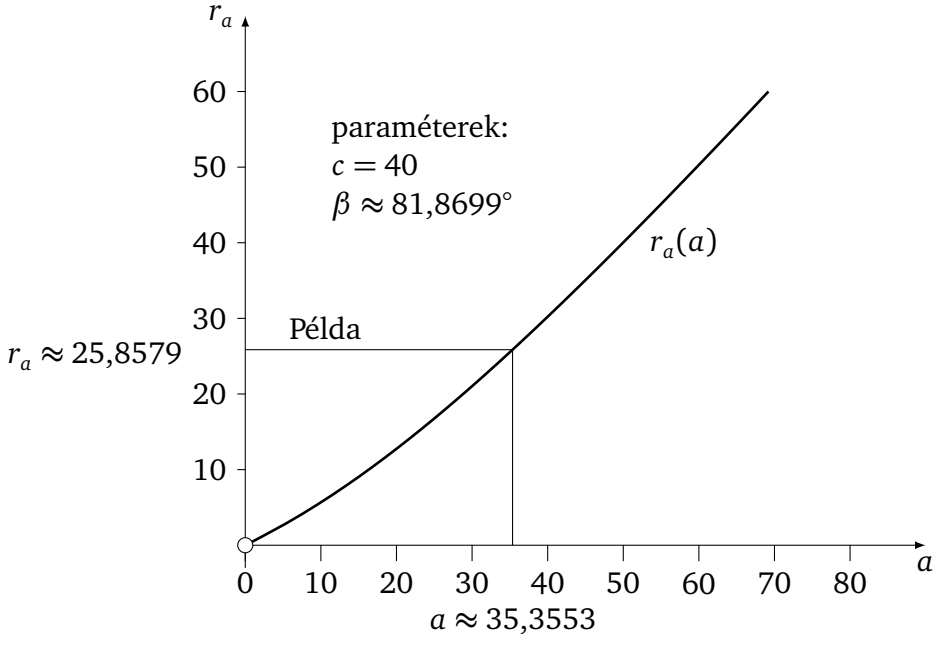
$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta}. \tag{13}$$

Példa. Induljunk el a 74-1. ábra adataiból. Mivel a csúcsok rácspontokban vannak, az induló adatok könnyen kiszámíthatók:

$$\begin{aligned} c &= 40, \\ \beta &= \operatorname{arctg} 7 \approx 81{,}8699^\circ, \\ r_a &= \frac{t}{s-a} = \frac{700}{20 + 5\sqrt{2}} = 40 - 10\sqrt{2} \approx 25{,}8579. \end{aligned}$$

Ezután a-t (12)-ből, b-t (13)-ból számolhatjuk: $a \approx 35{,}3553$, $b \approx 49{,}4975$.

A részletesebb vizsgálat: Rajzoljuk föl az $a(r_a)$ függvény (lásd (12)-t) $r_a(a)$ *inverzét* $c = 40$ és $\beta = \operatorname{arctg} 7 \approx \approx 81{,}8699^\circ$ paraméterek mellett (74-2. ábra). Az ábrából a példa megoldása is leolvasható. Más paraméterértékek esetén a grafikon hasonló jellegű.



74-2. ábra

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az $r_a(a)$ függvényt explicit is előállíthatjuk (12)-ből:

$$2\cdot r_a(a)\cdot a + c\cdot\sin\beta\cdot a - 2\cdot r_a(a)\cdot c - 2\cdot r_a^2(a)\cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 0,$$

$$2\cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot r_a^2(a) + 2\cdot(c-a)\cdot r_a(a) - ac\cdot\sin\beta = 0,$$

$$r_a(a) = \frac{-2\cdot(c-a) + \sqrt{4\cdot(c-a)^2 + 4\cdot 2\cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot ac\cdot\sin\beta}}{4\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}.$$

Mivel $r_a(a) > 0$ kell legyen, ezért a négyzetgyök előtt csak a pozitív előjel értelmezett, továbbá

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\sin\beta = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = 2\cdot\sin^2\frac{\beta}{2} \tag{14}$$

átalakítás felhasználásával kapjuk:

$$r_a(a) = \frac{a - c + \sqrt{(a-c)^2 + 4ac\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}}}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}. \tag{15}$$

Adott c és β paraméterek mellett az $a(r_a)$ függvény határértékeit a (12) képletből számolhatjuk:

$$\lim_{r_a\to 0+} a(r_a) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{r_a\to+\infty} a(r_a) = +\infty. \tag{16}$$

A megoldások száma mindig 1. A feladat megoldása egyértelmű.

A vizsgálat programmal készült.

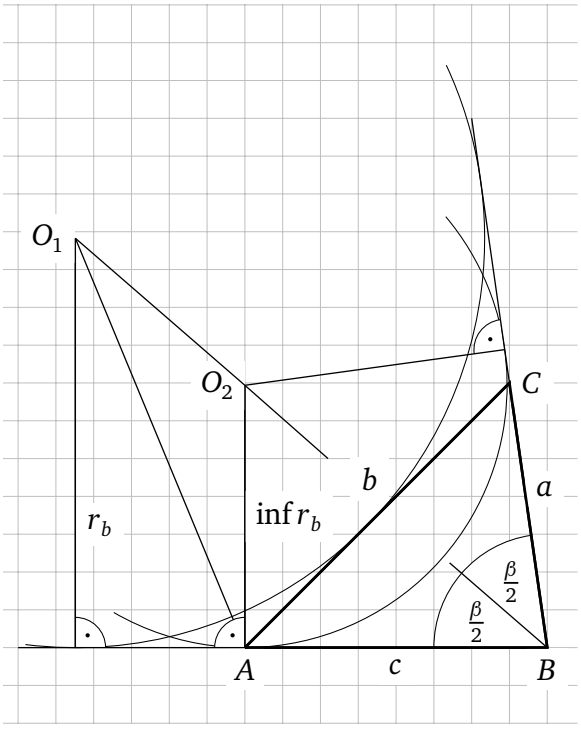
Megjegyzés:
A c oldaltól r_a távolságra vele párhuzamosan húzott egyenesből $180^\circ - \beta$ szög szögfelezője kimetszi a hozzáírt kör középpontját (74-1. ábra).

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

75. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és egy másik oldalhoz a hozzáírt kör sugara, 2. (egyértelmű) (c, β, r_b)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (75-1. ábra).



75-1. ábra

Induljunk el az alábbi négy egyenletből, (1), (2), (3), (4) mint egy négyismeretlenes (a, b, s, t) egyenletrendszerből:

E. 34(3) $$r_b = \frac{t}{s-b}, \tag{1}$$

E. 35(8) $$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r_b}{s}, \tag{2}$$

E. 11(15) $$t = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}, \tag{3}$$

$$s - b = \frac{a - b + c}{2}. \tag{4}$$

Küszöböljük ki t-t és $(s-b)$-t (1)-ből és (3)-ból és (4)-ből, majd helyettesítsük s-et (2)-be:

$$\begin{cases} r_b = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{a - b + c}, & (5) \\ \dfrac{a+b+c}{2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = r_b. & (6) \end{cases}$$

Fejezzük ki b-t (5)-ből:

$$r_b \cdot (a - b + c) = a \cdot c \cdot \sin\beta,$$

$$b = -a \cdot \frac{c \cdot \sin\beta}{r_b} + a + c,$$

$$b = \left(1 - \frac{c \cdot \sin\beta}{r_b}\right) \cdot a + c. \tag{7}$$

Fejezzük ki b-t (6)-ból:

$$b = \frac{2r_b}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}} - a - c. \tag{8}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Küszöböljük ki b-t (7)-ből és (8)-ból:

$$\left(1-\frac{c\cdot\sin\beta}{r_b}\right)\cdot a+c=\frac{2r_b}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}-a-c, \tag{9}$$

$$\left(2-\frac{c\cdot\sin\beta}{r_b}\right)\cdot a=\frac{2r_b}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}-2c.$$

Rendezzük az egyenletet a-ra, ezzel (10)-hez jutunk. Most a jobb oldalon minden ismert, így az a ismeretlen oldal kiszámolható:

$$\boxed{a=\frac{2\cdot\left(r_b\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}-c\right)}{2-\frac{c\cdot\sin\beta}{r_b}}.} \tag{10}$$

Itt β intervalluma $0^\circ<\beta<180^\circ$.

Adott c és β mellett r_b-nek alsó határa van, lásd a 75-1. ábrát:

$$\inf r_b=c\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \tag{11}$$

Ekkor (10) számlálója nulla, nevezője pozitív (lásd 74. (11)-et), vagyis

$$r_b>\inf r_b \tag{12}$$

kell legyen. Ekkor (10) számlálója nő, és nevezője is nő, és így $a>0$ lesz. Továbbá:

$$\lim_{r_b\to\inf r_b+}a(r_b)=0,\qquad\qquad\lim_{r_b\to+\infty}a(r_b)=+\infty. \tag{13}$$

A hiányzó b oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)

$$\boxed{b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta}.} \tag{14}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Példa. A 75-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \quad \beta = \operatorname{arctg} 7 \approx 81{,}8699^\circ,$$

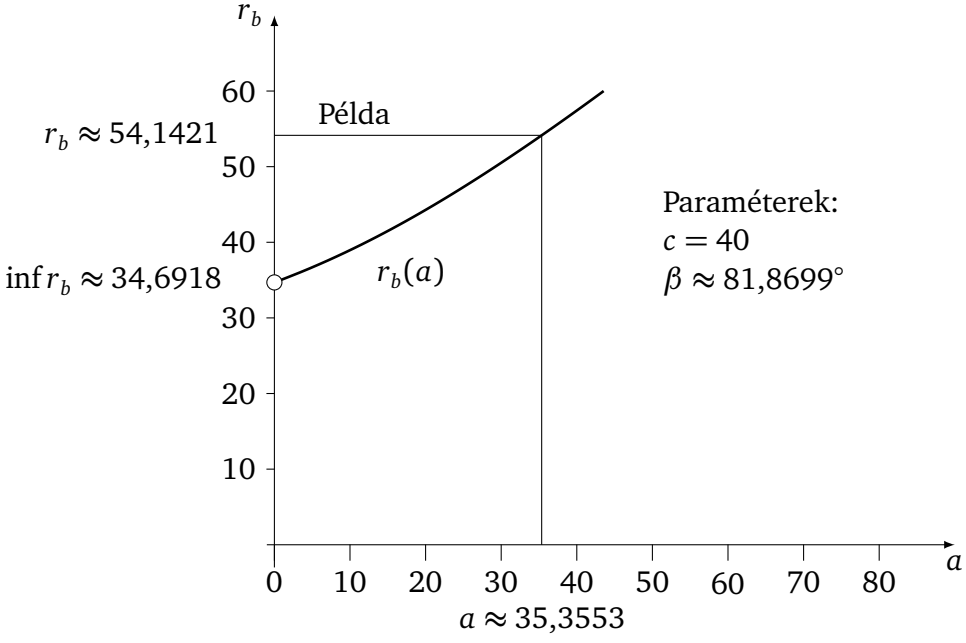
$$r_b = \frac{t}{s-b} = \frac{700}{\frac{25\sqrt{2}-35\sqrt{2}+40}{2}} = \frac{700}{20-5\sqrt{2}} \approx 54{,}1421.$$

Ezután a-t (10)-ből, b-t (14)-ből számolhatjuk:

$$a = \frac{\frac{2\cdot 54{,}1421}{\operatorname{tg}(81{,}8699^\circ/2)} - 2\cdot 40}{2 - \frac{40\cdot \sin 81{,}8699^\circ}{54{,}1421}} \approx 35{,}3553, \qquad b \approx 49{,}4975.$$

A részletesebb vizsgálat:

Rajzoljuk föl az $a(r_b)$ függvény (lásd (10)-et) $r_b(a)$ *inverzét* $c = 40$ és $\beta = \operatorname{arctg} 7 \approx 81{,}8699^\circ$ paraméterek mellett. Ekkor $\inf r_b \approx 34{,}6918$ (11) alapján (75-2. ábra). Az ábrából a példa megoldása is leolvasható. Más paraméterértékek esetén a grafikon hasonló jellegű. Az $r_b(a)$ függvény explicit is előállítható (10)-ből.



75-2. ábra

A c és β induló adatok felvétele után $r_b > \inf r_b$ a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

A vizsgálat programmal készült.

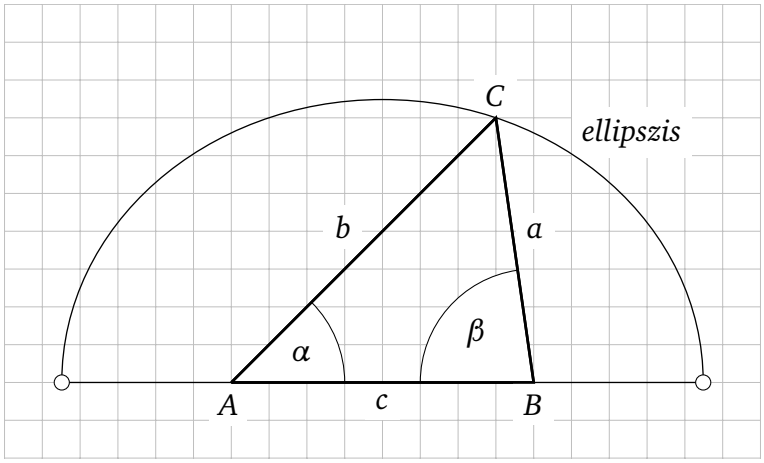
Megjegyzés:
A c oldaltól r_b távolságra vele párhuzamosan húzott egyenesből a β szög szögfelezője kimetszi a hozzáírt kör középpontját (75-1. ábra).

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

76. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és a másik két oldal összege (egyértelmű) $(c, \beta, a+b)$

A c és $a+b$ felvétele után ($c < a+b$) az $a+b =$ állandónak megfelelő C pontok egy A,B *fókuszú ellipszis* vonalon helyezkednek el (a nagytengely hossza $a+b$), melyből β felvétele után ($0° < \beta < 180°$) a félegyenese kimetszi a C pontot (76-1. ábra).



76-1. ábra

Induljunk el az *első Mollweide-féle formulából:*

E. 14(8)
$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}. \tag{1}$$

Ebben csak α ismeretlen, keressük α-t.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}.$$

A jobb oldal számlálóját és nevezőjét osszuk el $\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} > 0$-val:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}},$$

$$\frac{a+b}{c} - \frac{a+b}{c}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - 1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 0,$$

$$\frac{a+b}{c} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\left(\frac{a+b}{c}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) - 1 = 0,$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\dfrac{a+b}{c}-1}{\left(\dfrac{a+b}{c}+1\right)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}, \tag{2}$$

$$\boxed{\alpha=2\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{\dfrac{a+b}{c}-1}{\dfrac{a+b}{c}+1}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right).} \tag{3}$$

A β intervalluma $0^\circ<\beta<180^\circ$.

$$\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta). \tag{4}$$

A hiányzó a és b oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)

$$\boxed{\begin{aligned}a&=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c,\\ b&=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c.\end{aligned}} \tag{5}$$

Példa. A 76-1. ábra adataiból elindulva:

$$c=40;\quad \beta=\operatorname{arctg}7\approx 81{,}8699^\circ;\quad a+b=60\sqrt{2}\approx 84{,}8528,$$

$$\alpha=2\cdot\operatorname{arctg}\frac{\dfrac{60\sqrt{2}}{40}-1}{\left(\dfrac{60\sqrt{2}}{40}+1\right)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\operatorname{arctg}7}{2}}\approx 45^\circ.$$

$$\alpha<\sup\alpha=180^\circ-\beta \tag{6}$$

kell legyen, ez azonban teljesül, ugyanis (2)-ből:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\dfrac{a+b}{c}-1}{\dfrac{a+b}{c}+1}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}<\operatorname{tg}\frac{\sup\alpha}{2}=\operatorname{tg}\frac{180^\circ-\beta}{2}=\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right),$$

$$\frac{\dfrac{a+b}{c}-1}{\dfrac{a+b}{c}+1}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}<\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},\qquad \Big/:\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}>0$$

$$\frac{a+b}{c}-1<\frac{a+b}{c}+1,$$

$$0<2.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Ha $a+b>c$, akkor (3) belső tört számlálója és nevezője is pozitív.

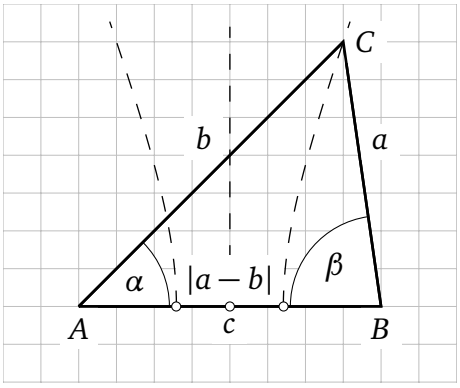
Így tehát az $a+b>c$ *és* $0^\circ<\beta<180^\circ$ *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

77. Egy oldal, a rajta fekvő egyik szög és a másik két oldal különbsége (egyértelmű) $(c,\beta,a-b)$

Most $(a-b)\in\mathbf{R}$. A c és $|a-b|=$ állandó $<c$ felvétele után a C pontok egy *A, B fókuszú hiperbolán* vagy egy egyenesen helyezkednek el. Pontosabban $-(a+b)<-c<a-b<0$ esetén a jobb oldali hiperbola ágon, $0<a-b<c<a+b$ esetén a bal oldali hiperbola ágon, és $0=a-b<c<a+b$ esetén pedig $\overline{AB}$ *felezőmerőlegesén*. Mivel a három eset kizárja egymást, β-val ($0^\circ<\beta<\sup\beta$, lásd (9)-et) csak egy metszéspont létezhet (77-1. ábra).



77-1. ábra

Írjuk föl a *második Mollweide-féle formulát:*

E. 14(16)
$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}. \qquad (1)$$

Ebben csak α ismeretlen, keressük α-t:

E. 9(20)
$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{\beta}{2}}.$$

A jobb oldal számlálóját és nevezőjét osszuk el $\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}>0$-val,

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}},$$

majd rendezzük az egyenletet $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$-re:

$$\frac{a-b}{c}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{a-b}{c}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=0, \qquad \Big|\cdot(-1)$$

$$\left(1-\frac{a-b}{c}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\left(1+\frac{a-b}{c}\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=0,$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\dfrac{a-b}{c}}{1-\dfrac{a-b}{c}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}. \tag{2}$$

E. 1(3) $$0\le|a-b|<c \qquad \textit{a megoldás szükséges feltétele} \tag{3}$$

Ekkor (2)-ben a jobb oldali tört számlálója és nevezője is pozitív, és

$$\boxed{\alpha=2\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\dfrac{a-b}{c}}{1-\dfrac{a-b}{c}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right).} \tag{4}$$

$$\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta). \tag{5}$$

A hiányzó a és b oldal ezután a *szinusztétellel* számolható:

E. 11(12)
$$\boxed{\begin{aligned}a&=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c,\\ b&=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c.\end{aligned}} \tag{6}$$

A 77-1. ábrából is látszik, hogy most nemcsak α-nak, hanem β-nak is felső határa van, ugyanis β kisebb kell legyen $-(a+b)<-c<a-b<0$ esetén a hiperbola jobb oldali, $0<a-b<$ $<c<a+b$ esetén a hiperbola bal oldali *aszimptotájának* az x tengely negatív ágával bezárt hajlásszögénél, illetve $0=a-b<c<a+b$ esetén, amikor is $\alpha=\beta$, ekkor $\alpha=\beta<90^\circ$ kell legyen. Részletesebben:

$$\alpha<\sup\alpha=180^\circ-\beta, \tag{7}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\dfrac{a-b}{c}}{1-\dfrac{a-b}{c}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}<\operatorname{tg}\frac{\sup\alpha}{2}, \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\sup\alpha}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ-\beta}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}.$$

Folytassuk (8)-at:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}<\frac{1-\dfrac{a-b}{c}}{1+\dfrac{a-b}{c}},$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\beta < 2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\frac{a-b}{c}}{1+\frac{a-b}{c}}} = \sup \beta. \tag{9}$$

Megjegyzés: $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} > 0$ miatt az előjel a négyzetgyök előtt pozitív.

Az $|a-b| < c < a+b$ és $0° < \beta < \sup \beta$ együttes teljesülése tehát *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

1. példa. A 77-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \quad \beta = \operatorname{arctg} 7 \approx 81{,}8699°; \quad a - b = -10\sqrt{2} \approx -14{,}1421.$$

A feltételek:

$$|a-b| = \left|-10\sqrt{2}\right| = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1421 < c = 40,$$
$$\beta = \operatorname{arctg} 7 \approx 81{,}8699° < \sup \beta \approx 110{,}7048°.$$

Ha $0° < \beta < \sup \beta$, akkor teljesül a $c < a+b$ is. Végül α-t (4)-ből számolva $\alpha \approx 45°$.

2. példa:

$$c = 40; \quad \beta = 45°; \quad a - b = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1421.$$

A feltételek :

$$|a-b| = \left|10\sqrt{2}\right| = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1421 < c = 40,$$
$$\beta = 45° < \sup \beta \approx 69{,}2952°.$$

Ha $0° < \beta < \sup \beta$, akkor teljesül a $c < a+b$ is. Végül α-t (4)-ből számolva $\alpha \approx 81{,}8699°$.

A γ szög (5), majd az a és b oldalak (6) innen már könnyen számolhatók.

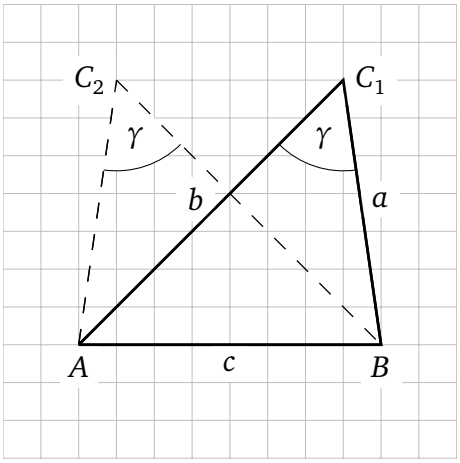
Ha van megoldás akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

78. Terület, kerület és egy szög (t, k, γ)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget és jelöljük a választott adatokat (78-1. ábra).



78-1. ábra

Induljunk el a terület (t) és a félkerület (s) egyenlőtlenségéből, lásd E. 16(4)-et:

$$t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}, \qquad s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{k}{2}. \tag{1}$$

(1) *a megoldás szükséges feltétele.*

Írjuk még föl a *koszinusztételt* a c oldalra (2) és a *trigonometrikus területképletet* (3):

E. 12(14)
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma, \tag{2}$$

E. 11(15)
$$t = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}. \tag{3}$$

Fejezzük ki c-t a félkerület képletéből, és emeljük négyzetre:

$$c^2 = (2s - (a+b))^2, \tag{4}$$

majd rendezzük a trigonometrikus területképletet ab-re:

$$ab = \frac{2t}{\sin\gamma}. \tag{5}$$

Küszöböljük ki c^2-et, helyettesítsük (2)-be (4)-et és (5)-öt:

$$a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{2t}{\sin\gamma} \cdot \cos\gamma = 4s^2 - 4s \cdot (a+b) + a^2 + 2 \cdot \frac{2t}{\sin\gamma} + b^2. \tag{6}$$

Most a^2, b^2 kiesik, majd rendezzük (6)-ot $(a+b)$-re:

Vegyük figyelembe, hogy:

E. 9(34)
$$\frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{s^2+t\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}}{s}=p, & p>0, \qquad (7)\\[2ex] ab=\dfrac{2t}{\sin\gamma}=q, & q>0. \qquad (8)\end{cases}$$

Most oldjuk meg a (7) és (8) egyenletekből álló egyenletrendszert a-ra, b-re:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \begin{cases} a+b=p, \\ ab=q, \end{cases} & \begin{array}{l} b=p-a, \\ a^2-pa+q=0, \end{array} \\ a_1=\dfrac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}; & a_2=\dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; \\ b_1=\dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; & b_2=\dfrac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}. \end{array}} \qquad (9)$$

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p>0, \quad q>0, \quad p^2-4q\geq 0. \qquad (10)$$

$$\boxed{c=2s-(a+b).} \qquad (11)$$

A c pozitív lesz, ha $2s>a+b$. A pozitív a,b,c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3) $$|a-b|<c<a+b. \qquad (12)$$

Az $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a magoldás szükséges és elégséges feltétele.

Példa. A 78-1. ábra adataiból elindulva:

$$t=700; \quad k=2s=40+60\sqrt{2}\approx 124{,}8528; \qquad \gamma=\arcsin\frac{4}{5}\approx 53{,}1301^\circ,$$

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{62{,}4264^2+\dfrac{700}{\sin 53{,}1301^\circ}\cdot(1+\cos 53{,}1301^\circ)}{62{,}4264}\approx 84{,}8528=p, \\[2ex] ab=\dfrac{2\cdot 700}{\sin 53{,}1301^\circ}\approx 1750=q, \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} a_1\approx 35{,}3553; & a_2\approx 49{,}4975; \\ b_1\approx 49{,}4975; & b_2\approx 35{,}3553; \\ \multicolumn{2}{c}{c\approx 40.} \end{array}$$

Az a_2, b_2 megoldást a 78-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

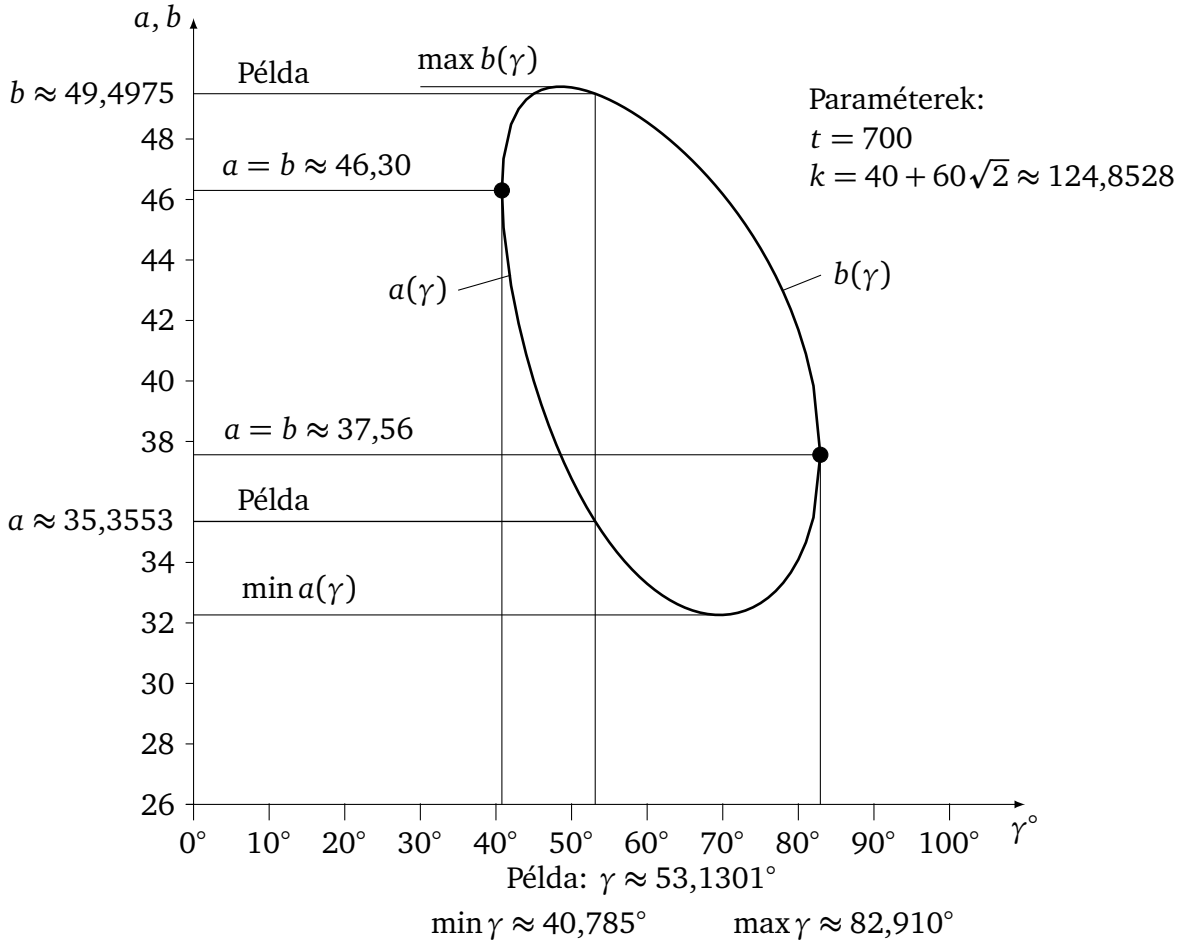
A részletesebb vizsgálat: A t, k, γ adatok felvétele után kiszámoljuk a-t és b-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon a t területet és a k kerületet (s félkerületet) paraméternek választva, majd felrajzoljuk az $a(\gamma)$, $b(\gamma)$ függvényeket.

Rajzoljuk föl a $G \subset \{\gamma | 0° < \gamma < 180°\}$ halmazon értelmezett $G \to \mathbf{R}^+$, $\gamma \mapsto a(\gamma)$, $\gamma \mapsto b(\gamma)$ függvényeket a $t = 700$, $k = 40 + 60\sqrt{2} \approx 124{,}8528$ paraméterek esetén (78-2. ábra).

Az ábra az $a(\gamma) \le b(\gamma)$ esetet mutatja, ugyanis a két függvény felcserélhető, ami a példából is látszik. Az ábrából a példa $a < b$ megoldása is leolvasható.

Jelöljük: $\min D(a(\gamma)) = \min \gamma$, $\max D(a(\gamma)) = \max \gamma$. Ekkor:

$$\begin{array}{lll} \min\gamma \approx 40{,}785°; & a = b \approx 46{,}30; & c \approx 32{,}26; \\ \max\gamma \approx 82{,}910°; & a = b \approx 37{,}56; & c \approx 49{,}73. \end{array}$$



78-2. ábra

A t és $k = 2s$, $t \le \dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$, felvétele után $\min\gamma \le \gamma \le \max\gamma$ *kell legyen, ami szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A $t=\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ *az egyenlő oldalú eset, ekkor* $\min\gamma=\gamma=60^\circ=\max\gamma$ *és* $a=b=c=2s/3$.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

A $\min\gamma$, illetve a $\max\gamma$ a (7), (8) egyenletrendszerből $a=b$-nél nyert

$$t^2\cdot\operatorname{ctg}^3\frac{\gamma_m}{2}-2s^2\cdot t\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma_m}{2}+s^4\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma_m}{2}-4s^2\cdot t=0 \tag{13}$$

egyenlet valós gyökeiből számolható. A 78-2. ábra paramétereivel:

$$t=700,\qquad s=20+30\sqrt{2},\qquad \text{és így}$$

$$\gamma_{m1}=\max\gamma\approx 82{,}91^\circ;\qquad \gamma_{m2}=\min\gamma\approx 40{,}78^\circ;\qquad \gamma_{m3}\approx 15{,}57^\circ,$$

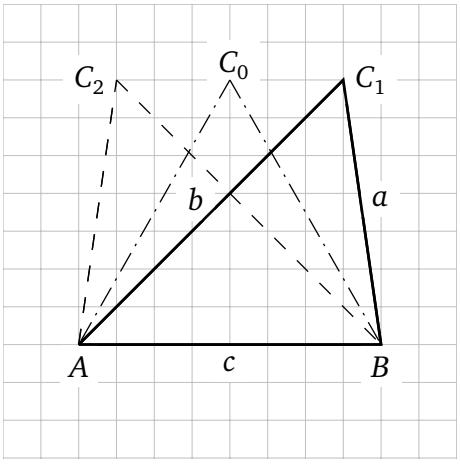
ahol is γ_{m3} a $c<0$ miatt nem ad megoldást, hamis gyök.

A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a,b,c)\overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

79. Terület, kerület és egy oldal (t,k,c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (79-1. ábra).



79-1. ábra

Induljunk el a terület (t) és a félkerület (s) egyenlőtlenségéből, lásd E. 16(4)-et és a c, s egyenlőtlenségéből:

$$t\le\frac{s^2}{3\sqrt{3}},\quad c<\frac{a+b+c}{2}=\frac{k}{2}=s. \tag{1}$$

(1) *a megoldás szükséges feltétele*.

Alakítsuk át a *Héron-képletet*:

E. 36(4)
$$\frac{t^2}{s(s-c)}=(s-a)(s-b), \tag{2}$$

$$c=(a+b+c)-(a+b)=2s-a-b=(s-a)+(s-b),$$

$$s-b=c-(s-a). \tag{3}$$

Helyettesítsük (3)-ból $(s-b)$-t (2)-be:

$$\frac{t^2}{s(s-c)}=(s-a)\cdot(c-(s-a)),$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\frac{t^2}{s(s-c)} = c(s-a)-(s-a)^2,$$

$$\frac{t^2}{s(s-c)} = c\cdot s - c\cdot a - s^2 + 2sa - a^2.$$

Az a-ra való rendezés után az a ismeretlen oldal másodfokú egyenletéhez jutunk, t, s, c paraméterekkel:

$$\boxed{a^2-(2s-c)\,a+s(s-c)+\frac{t^2}{s(s-c)}=0.} \tag{4}$$

A (4) egyenlet a_1, a_2 valós gyökei akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$D \geq 0, \quad a_1+a_2>0 \ \text{ és } \ a_1\cdot a_2>0, \tag{5}$$

lásd még a *megoldó képletet* és a *Viète-féle formulákat*.

$$\boxed{b = 2s-(c+a).} \tag{6}$$

A b pozitív lesz, ha $2s > c+a$. A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség*:

E. 1(3) $$|a-b| < c < a+b. \tag{7}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Példa. A 79-1. ábra adataiból elindulva:

$$t = 700; \qquad k = 2s = 40+60\sqrt{2} \approx 124{,}8528; \qquad c = 40,$$

$$a^2 - 84{,}8528\,a + 1750 = 0,$$

$$a_1 \approx 35{,}3553; \qquad a_2 \approx 49{,}4975;$$
$$b_1 \approx 49{,}4975; \qquad b_2 \approx 35{,}3553.$$

Az a_2, b_2 megoldást a 79-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

Az $a = b$ egyenlő szárú esetben:

$$a = b = \frac{2s-c}{2}, \qquad D = 0. \tag{8}$$

Egyenlő szárú lesz még a háromszög $a = c$ vagy $b = c$ esetén is.

Ha

$$t = \frac{s^2}{3\sqrt{3}}, \tag{9}$$

akkor a háromszög egyenlő oldalú, és $a = b = c = 2s/3$.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Adott c és $2s$ ($c < s$) felvétele esetén $2s - c = a + b =$ állandó, így a C pontok egy *A,B fókuszú ellipszis* vonalon helyezkednek el, melynek nagytengelye $a + b$, a terület maximumát pedig az $a = b$ egyenlő szárú esetben C_0-nál kapjuk (88-2. ábra), és (8)-nak (2)-be történő helyettesítésével ki is tudjuk számolni:

$$0 < t(a,b,c) \leq \frac{c}{2}\sqrt{s(s-c)},$$

és így

$$\boxed{\max t(s,c) = \frac{c}{2}\sqrt{s(s-c)}.} \tag{10}$$

Látszik, hogy $0 < c < s$ *és* $0 < t \leq \max t$ *együttes teljesülése szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele. A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.*

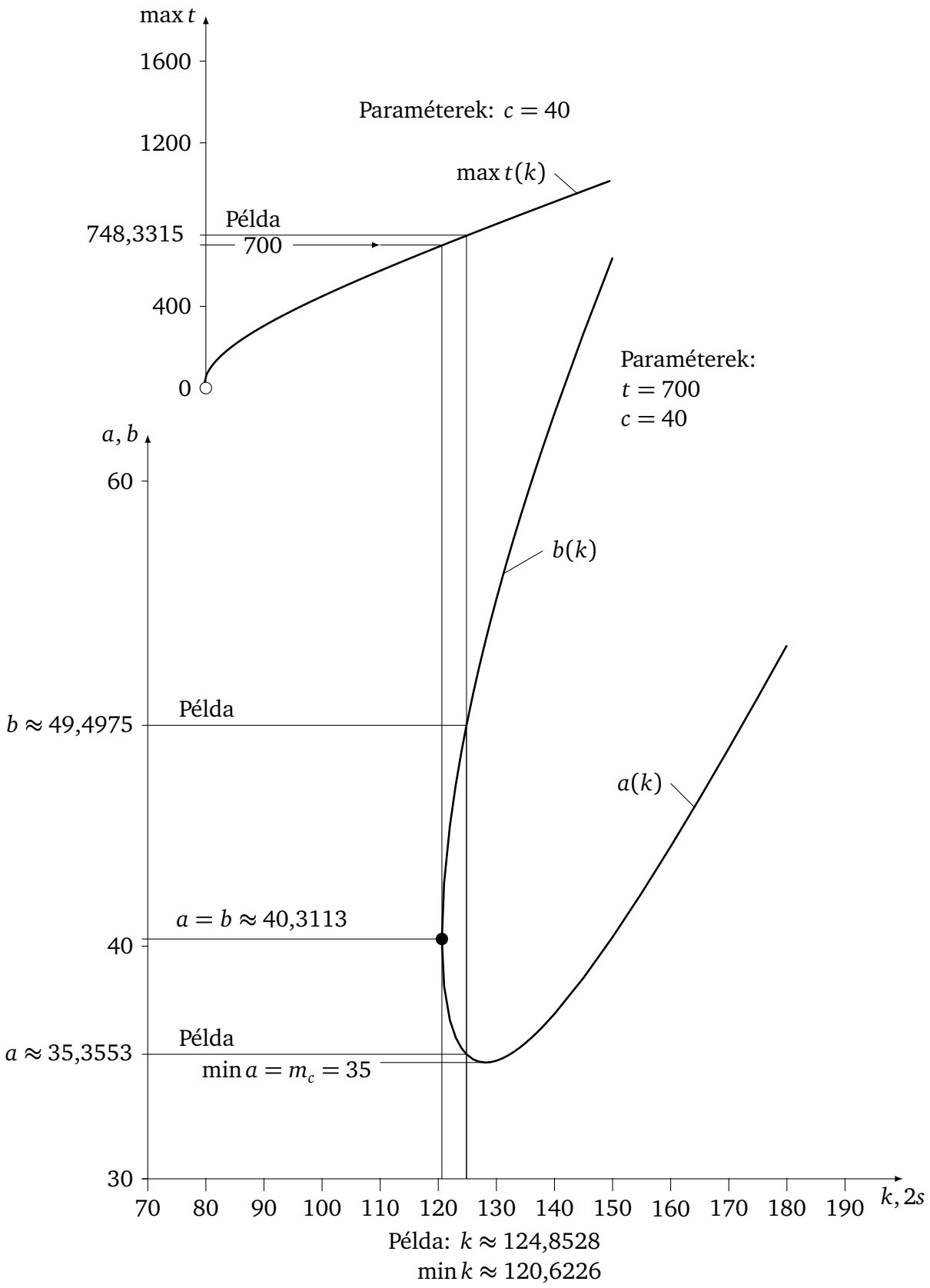
A részletesebb vizsgálat:

A t, k, c *adatok felvétele után kiszámoljuk a-t, b-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon most a* t *területet és a* c *oldalt paraméternek választva, majd felrajzoljuk az* $a(k)$, $b(k)$ *függvényeket.*

Rajzoljuk föl a $K = \{k | k \in \mathbf{R}^+,\ k \geq \min k\}$ *halmazon értelmezett* $K \to \mathbf{R}^+$, $k \mapsto a(k)$, $k \mapsto b(k)$ *függvényeket* $t = 700$, $c = 40$ *paraméterek, és a* $K_m = \{k | k \in \mathbf{R}^+,\ k > 2c\}$ *halmazon értelmezett* $K_m \to \mathbf{R}^+$, $k \mapsto \max t(k)$ *függvényt* $c = 40$ *paraméter mellett (79-2. ábra).*

Az ábra a C_0-tól jobbra lévő oldalt ($a(k) \leq b(k)$) és a példa $a < b$ megoldását mutatja.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



79-2. ábra

Látszik, hogy t és c felvétele esetén $m_c = 2t/c$, így a C pontok egy c-vel párhuzamos, tőle m_c távolságra lévő egyenes mentén helyezkednek el, és ezek közül a $\min(a+b)$-t C_0-nál az $a = b$ egyenlő szárú esetben kapjuk (79-1. ábra, 115-1. ábra).

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Így:

$$\min(a+b) = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{c}\right)^2}, \tag{11}$$

$$a = b = \frac{\min(a+b)}{2}. \tag{12}$$

Tehát t és c felvétele esetén k-nak minimuma van:

$$\min k = \min(a+b) + c, \tag{13}$$

$$\boxed{\min k = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{c}\right)^2} + c,} \tag{14}$$

és így t és c felvétele esetén $k \geq \min k$ szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Ha $t = 700$ és $c = 40$ (79-1. ábra, 79-2. ábra):

$$\min(a+b) = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{40}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 700}{40}\right)^2} \approx 80{,}6226,$$

$$a = b = \frac{\min(a+b)}{2} \approx 40{,}3113,$$

$$\min k = \min(a+b) + c \approx 80{,}6226 + 40 \approx 120{,}6226.$$

Ha $k = 2s = 40 + 60\sqrt{2} \approx 124{,}8528$ és $c = 40$, mint a példában, akkor:

$$\max t = \frac{c}{2}\sqrt{s(s-c)} = \frac{40}{2} \cdot \sqrt{(20+30\sqrt{2}) \cdot (20+30\sqrt{2}-40)} \approx 748{,}3315.$$

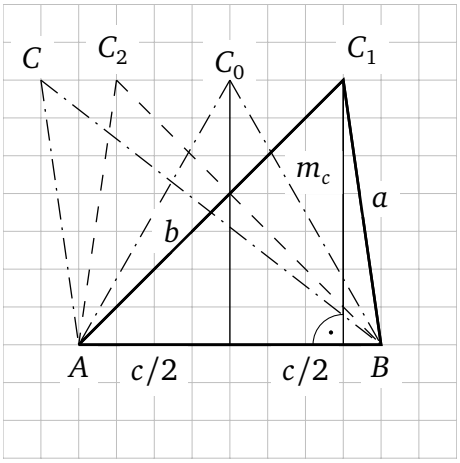
A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

80. Terület, kerület és egy magasság (t, k, m_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (80-1. ábra).



80-1. ábra

Induljunk el a terület (t) és a félkerület (s) egyenlőtlenségéből (1), t, m_c és s egyenlőtlenségéből (2), valamint m_c és s egyenlőtlenségéből (3):

E. 16(4)
$$t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}, \tag{1}$$

$$\frac{2t}{m_c} = c < \frac{a+b+c}{2} = \frac{k}{2} = s. \tag{2}$$

Mivel m_c a C csúcs távolsága c egyenesétől, így a következő esetek lehetségesek:

- $m_c = a$ és $m_c < b$, így $2m_c < a+b$,
- $m_c < a$ és $m_c = b$, így $2m_c < a+b$,
- $m_c < a$ és $m_c < b$, így $2m_c < a+b$.

Tehát

E. 23(1)
$$0 < s-c < m_c < s. \tag{3}$$

(1), (2) *és* (3) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele.*

$$c = \frac{2t}{m_c}. \tag{4}$$

Folytassuk 79. (4)-gyel, majd helyettesítsük (4)-et:

$$a^2 - (2s-c)\,a + s(s-c) + \frac{t^2}{s(s-c)} = 0. \tag{5}$$

Így az a ismeretlen oldal másodfokú egyenletéhez jutunk t, s, m_c paraméterekkel:

$$\boxed{a^2 - \left(2s - \frac{2t}{m_c}\right)\cdot a + s\left(s - \frac{2t}{m_c}\right) + \frac{t^2}{s(s-\frac{2t}{m_c})} = 0.} \tag{6}$$

A (6) egyenlet a_1, a_2 valós gyökei akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$D \ge 0, \qquad a_1 + a_2 > 0 \ \text{ és } \ a_1 \cdot a_2 > 0. \tag{7}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Lásd még a *megoldó képletet* és a *Viète-féle formulákat*.

$$\boxed{b = 2s - (c + a).} \tag{8}$$

A b pozitív lesz, ha:

$$2s > c + a.$$

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3)
$$|a - b| < c < a + b. \tag{9}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Példa. A 80-1. ábra ABC_1 háromszögének adataiból elindulva:

$$t = 700; \quad k = 2s = 40 + 60\sqrt{2} \approx 124{,}8528; \quad m_c = 35;$$

$$a^2 - 84{,}8528\,a + 1750 = 0,$$

$$a_1 \approx 35{,}3553; \qquad a_2 \approx 49{,}4975;$$
$$b_1 \approx 49{,}4975; \qquad b_2 \approx 35{,}3553;$$
$$c = 40.$$

A c (4)-ből, b pedig (8)-ból számolható.

Az a_2, b_2 megoldást a 80-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

Az $a = b$ egyenlő szárú esetben:

$$a = b = \frac{2s - c}{2} = s - \frac{t}{m_c}, \qquad D = 0.$$

Egyenlő szárú lesz még a háromszög $c = \dfrac{2t}{m_c} = a$ vagy $c = \dfrac{2t}{m_c} = b$ esetén is.

A $t = \dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ esetén $D = 0$, ez az egyenlő oldalú eset. Ekkor $a = b = c = \dfrac{2t}{m_c} = \dfrac{2s}{3} < s$.

Vegyük észre, hogy t és m_c felvétele után s-nek minimuma van C_0-nál, lásd a 80-1. ábrán a pontvonallal rajzolt eseteket és a 79. feladatot.

$$\min s = \frac{\min(a + b) + c}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{(c/2)^2 + m_c^2} + c}{2} = \frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2},$$

$$\boxed{\min s = \frac{t}{m_c} + \sqrt{\left(\frac{t}{m_c}\right)^2 + m_c^2}.} \tag{10}$$

Így tehát $t > 0$ és $m_c > 0$ felvétele után $s \geq \min s$ szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

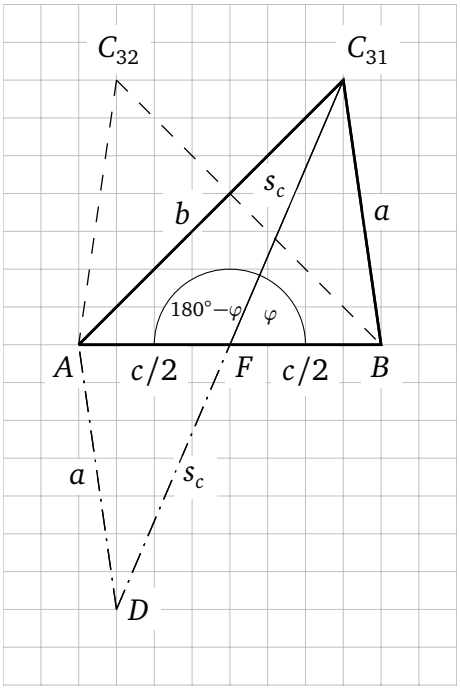
A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

81. Terület, kerület és egy súlyvonal (t, k, s_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (81-1. ábra).



81-1. ábra

Tükrözzük az $ABC_{31}\triangle$-et az $\overline{AB}$ oldal F felezőpontjára. A C_{31} tükörképe legyen D.
Induljunk el a terület (t) és a félkerület (s) egyenlőtlenségéből (1), lásd még E. 16(4)-et, valamint $s-c$, s_c és s egyenlőtlenségéből (2):

$$t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}, \quad s = \frac{k}{2} = \frac{a+b+c}{2}, \tag{1}$$

$$s_c + \frac{c}{2} > a, \quad s_c + \frac{c}{2} > b,$$

$$2s_c + c > a + b,$$

$$s_c > \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = s - c.$$

Az $AC_{31}D$ háromszögből

$$2s_c < a + b < a + b + c,$$

és így

E. 23(1)
$$0 < s - c < s_c < s. \tag{2}$$

(1) *és* (2) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele*.

Folytassuk a *Héron-képlettel* (3), az s_c súlyvonal képletével (4), valamint c, illetve $s-c$ képletével (5), mint három ismeretlent (a, b, c) tartalmazó egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (3) \\ s_c = \dfrac{\sqrt{2b^2+2a^2-c^2}}{2}, & \text{E. 24(8)} \quad (4) \\ c = 2s-(a+b), \quad \Leftrightarrow \quad s-c = (a+b)-s. & (5) \end{cases}$$

Küszöböljük ki $(s-c)$-t (3)-ból és c-t (4)-ből (5) helyettesítésével:

$$\begin{cases} \dfrac{t^2}{s} = \big(s^2 - sb - sa + ab\big) \cdot \big((a+b)-s\big), & (6) \\ 4s_c^2 = 2(a+b)^2 - 4ab - \big(2s-(a+b)\big)^2. & (7) \end{cases}$$

Alakítsuk át (6)-ot és (7)-et úgy, hogy bennük csak $a+b$ és az ab változók forduljanak elő.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\begin{cases} \dfrac{4t^2}{s} = \big(4s^2 - 4s(a+b) + 4ab\big)\cdot\big((a+b)-s\big), & (8)\\ 4ab = (a+b)^2 + 4s(a+b) - \big(4s^2 + 4s_c^2\big). & (9) \end{cases}$$

Fejezzük ki (9)-ből ab-t:

$$\boxed{ab = \frac{1}{4}\cdot(a+b)^2 + s(a+b) - (s^2 + s_c^2).} \tag{10}$$

Helyettesítsük (9)-et (8)-ba:

$$\frac{4t^2}{s} = \big(\cancel{4s^2} - \cancel{4s(a+b)} + (a+b)^2 + \cancel{4s(a+b)} - \cancel{4s^2} - 4s_c^2\big)\cdot\big((a+b)-s\big), \tag{11}$$

$$\frac{4t^2}{s} = \big((a+b)^2 - 4s_c^2\big)\cdot\big((a+b)-s\big). \tag{12}$$

Bontsuk föl (12) jobb oldalát, és rendezzük az egyenletet $(a+b)$ fogyó hatványai szerint nullára. Így $a+b$ harmadfokú egyenletéhez jutunk t, s, s_c paraméterekkel:

$$\boxed{(a+b)^3 - s(a+b)^2 - 4s_c^2\cdot(a+b) + 4s_c^2\cdot s - \frac{4t^2}{s} = 0.} \tag{13}$$

Ezután ab (10)-ből számolható: $(a+b),\ ab \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás további szükséges feltétele.*

$$\boxed{\begin{aligned} a+b &= p, & b &= p-a,\\ ab &= q, & a^2 - pa + q &= 0,\\ a_1 &= \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}; & a_2 &= \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2};\\ b_1 &= \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; & b_2 &= \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}. \end{aligned}} \tag{14}$$

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p > 0, \qquad q > 0, \qquad p^2 - 4q \geq 0. \tag{15}$$

$$\boxed{c = 2s - (a+b).} \tag{16}$$

A c pozitív lesz, ha:

$$2s > a+b.$$

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3)
$$|a-b| < c < a+b. \tag{17}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Ha $a=b$ vagy $a=c$ vagy $b=c$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Ha $t=\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$, akkor $a=b=c=\dfrac{2s}{3}$, a háromszög egyenlő oldalú, és $s_c=\dfrac{2s}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{s\sqrt{3}}{3}$.

Példa. A 81-1. ábra adataiból elindulva:

$$t=700;\quad k=2s=40+60\sqrt{2}\approx 124{,}8528;\quad s_c=5\sqrt{58}\approx 38{,}0789,$$
$$(a+b)^3-62{,}4264\cdot(a+b)^2-5800\cdot(a+b)+330676{,}1902=0,$$
$$(a+b)_1\approx 52{,}2123;\quad (a+b)_2\approx -74{,}6387;\quad (a+b)_3\approx 84{,}8528;$$
$$(ab)_1\approx -1406{,}09;\qquad (ab)_3\approx 1750.$$

Látható, hogy csak $(a+b)_3$, $(ab)_3$ ad megoldást, amiből:

$$a_{31}\approx 35{,}3553;\quad a_{32}\approx 49{,}4975;$$
$$b_{31}\approx 49{,}4975;\quad b_{32}\approx 35{,}3553;$$
$$c\approx 40.$$

Az a_{32}, b_{32} megoldást a 81-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

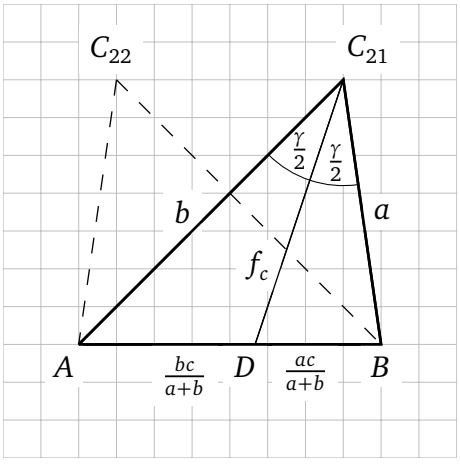
A pozitív a,b,c ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

Most három oldal $(a,b,c)\overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

82. Terület, kerület és egy belső szögfelező (t,k,f_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (82-1. ábra).



82-1. ábra

Induljunk el a terület (t) és a félkerület (s) egyenlőtlenségéből (1), lásd még E. 16(4)-et, valamint $s-c$, f_c és s egyenlőtlenségéből (2):

$$t\le\frac{s^2}{3\sqrt{3}},\quad s=\frac{k}{2}=\frac{a+b+c}{2},\qquad (1)$$

$$a<f_c+\frac{ac}{a+b},\qquad b<f_c+\frac{bc}{a+b},$$

$$a+b<2f_c+c,$$

$$f_c>\frac{a+b-c}{2}=s-c,$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

E. 23(1) $$0 < s-c < f_c < s. \tag{2}$$

(1) *és* (2) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele*.

Folytassuk a *Héron-képlettel* (3), az f_c belső szögfelező képletével (4), valamint c, illetve $s-c$ képletével (5) mint három ismeretlent (a,b,c) tartalmazó egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (3)\\ f_c^2 = ab\cdot\left(1-\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right), & \text{E. 29(3)} \quad (4)\\ c = 2s-(a+b), \quad \Leftrightarrow \quad s-c = (a+b)-s. & (5) \end{cases}$$

Küszöböljük ki $(s-c)$-t (3)-ból és c-t (4)-ből (5) helyettesítésével:

$$\begin{cases} \dfrac{t^2}{s} = \big(s^2-sb-sa+ab\big)\cdot\big((a+b)-s\big), & (6)\\ f_c^2 = ab\cdot\left(1-\dfrac{(2s-(a+b))^2}{(a+b)^2}\right). & (7) \end{cases}$$

Alakítsuk át (6)-ot és (7)-et úgy, hogy bennük csak az $a+b$ és ab változók forduljanak elő:

$$\begin{cases} \dfrac{t^2}{s} = \big(s^2-s(a+b)+ab\big)\cdot\big((a+b)-s\big), & (8)\\ f_c^2 = ab\cdot\left(\dfrac{\cancel{(a+b)^2}-4s^2+4s(a+b)-\cancel{(a+b)^2}}{(a+b)^2}\right). & (9) \end{cases}$$

Fejezzük ki ab-t (9)-ből:

$$\boxed{ab = \frac{f_c^2\cdot(a+b)^2}{4s\cdot((a+b)-s)}.} \tag{10}$$

Helyettesítsük (10)-et (8)-ba:

$$\frac{t^2}{s} = \frac{f_c^2\cdot(a+b)^2}{4s\cdot\cancel{\big((a+b)-s\big)}}\cdot\cancel{\big((a+b)-s\big)} - s\cdot\big((a+b)-s\big)^2, \quad \Big/\cdot 4s \tag{11}$$

$$4t^2 = f_c^2\cdot(a+b)^2 - 4s^2\cdot\big((a+b)^2-2s(a+b)+s^2\big). \tag{12}$$

Rendezzük (12)-t $a+b$ fogyó hatványai szerint nullára. Így $a+b$ másodfokú egyenletéhez jutunk t, s, f_c paraméterekkel:

$$\boxed{(4s^2-f_c^2)(a+b)^2 - 8s^3(a+b) + 4s^4 + 4t^2 = 0.} \tag{13}$$

Ezután ab (10)-ből számolható: $(a+b), (ab)\in\mathbf{R}^+$ *a megoldás további szükséges feltétele*.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\boxed{\begin{aligned} a+b&=p, & b&=p-a,\\ ab&=q, & a^2-pa+q&=0,\\ a_1&=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}; & a_2&=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2};\\ b_1&=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; & b_2&=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}. \end{aligned}} \tag{14}$$

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p>0, \qquad q>0, \qquad p^2-4q\geq 0. \tag{15}$$

$$\boxed{c=2s-(a+b).} \tag{16}$$

A c pozitív lesz, ha $2s>a+b$.

A pozitív a,b,c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3)
$$|a-b|<c<a+b. \tag{17}$$

Az $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Ha $a=b$ vagy $a=c$, vagy $b=c$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Ha $t=\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$, akkor $a=b=c=\dfrac{2s}{3}$, a háromszög egyenlő oldalú, és $f_c=\dfrac{2s}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{s\sqrt{3}}{3}$.

Példa. A 82-1. ábra adataiból elindulva:

$$t=700; \quad k=2s=40+60\sqrt{2}\approx 124{,}8528; \quad f_c=\frac{35\sqrt{10}}{3}\approx 36{,}8932,$$
$$14\,227{,}1140\cdot(a+b)^2-1\,946\,233{,}7649\cdot(a+b)+62\,708\,190{,}4364=0,$$
$$(a+b)_1\approx 51{,}9447; \quad (a+b)_2\approx 84{,}8528;$$
$$(ab)_1\approx -1403{,}1876; \quad (ab)_2\approx 1750.$$

Látható, hogy csak $(a+b)_2$ és $(ab)_2$ ad megoldást:

$$a_{21}\approx 35{,}3553; \quad a_{22}\approx 49{,}4975;$$
$$b_{21}\approx 49{,}4975; \quad b_{22}\approx 35{,}3553;$$
$$c\approx 40.$$

Az a_{22}, b_{22} megoldást a 82-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A pozitív a,b,c ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

Most három oldal $(a,b,c)\overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

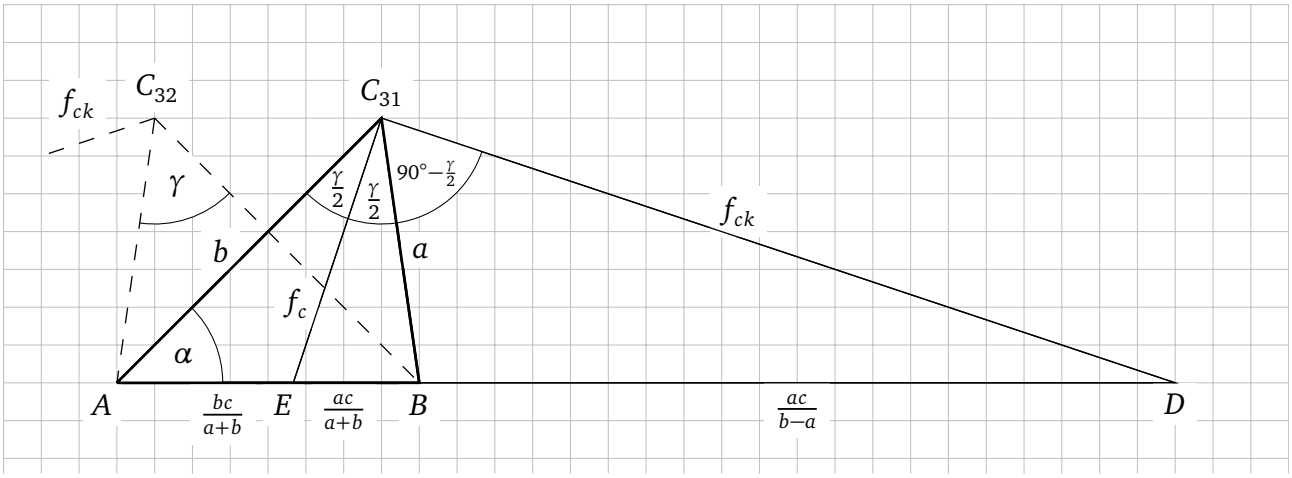
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

83. Terület, kerület és egy külső szögfelező (t, k, f_{ck})

Rajzoljunk fel egy ABC háromszöget úgy, hogy:

E. 2(3) $$a < b \iff \alpha < \beta < 180^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha < 90^\circ,$$

és jelöljük a választott adatokat (83-1. ábra).



83-1. ábra

Induljunk el a terület (t) és a félkerület (s) egyenlőtlenségéből, lásd (1)-et, azzal, hogy most $a \neq b$, így a háromszög nem lehet egyenlő oldalú sem:

E. 16(4) $$t < \frac{s^2}{3\sqrt{3}}, \quad s = \frac{k}{2} = \frac{a+b+c}{2}, \qquad a \neq b. \tag{1}$$

(1) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele*.

Folytassuk a *Héron-képlettel* (2), az f_{ck} külső szögfelező képletével (3), valamint c, illetve $s-c$ képletével (4), mint három ismeretlent (a, b, c) tartalmazó egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (2) \\ f_{ck}^2 = ab \cdot \left(\dfrac{c^2}{(a-b)^2} - 1 \right), \qquad a \neq b, & \text{E. 31(3)} \quad (3) \\ c = 2s - (a+b) \quad \Leftrightarrow \quad s - c = (a+b) - s. & (4) \end{cases}$$

Küszöböljük ki $(s-c)$-t (2)-ből és c-t (3)-ból (4) helyettesítésével:

$$\begin{cases} \dfrac{t^2}{s} = \big(s^2 - sb - sa + ab\big) \cdot \big((a+b) - s\big), & (5) \\ f_{ck}^2 = ab \cdot \left(\dfrac{4s^2 - 4s(a+b) + \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2}}{(a-b)^2} \right). & (6) \end{cases}$$

Alakítsuk át (5)-öt és (6)-ot:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\begin{cases} \dfrac{t^2}{s} = \big(s^2 - s(a+b) + ab\big) \cdot \big((a+b) - s\big), & (7) \\ f_{ck}^2 = 4ab \cdot \left(\dfrac{s^2 - s(a+b) + ab}{(a+b)^2 - 4ab}\right). & (8) \end{cases}$$

Alakítsuk tovább (7)-et és (8)-at úgy, hogy ab kifejezhető legyen:

$$f_{ck}^2 \cdot \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4ab} = \frac{t^2}{s \cdot ((a+b) - s)}, \tag{9}$$

$$f_{ck}^2 \cdot s \cdot \big((a+b)^2 - 4ab\big) \cdot (a+b-s) = t^2 \cdot 4ab, \tag{10}$$

$$f_{ck}^2 \cdot s \cdot \big((a+b)^2(a+b-s) - 4ab(a+b-s)\big) = t^2 \cdot 4ab,$$

$$f_{ck}^2 \cdot s \cdot (a+b)^2 \cdot (a+b-s) = f_{ck}^2 \cdot s \cdot (a+b-s) \cdot 4ab + t^2 \cdot 4ab, \tag{11}$$

$$\boxed{ab = \frac{f_{ck}^2 \cdot s \cdot (a+b)^2 \cdot (a+b-s)}{4f_{ck}^2 \cdot s \cdot (a+b-s) + 4t^2}, \qquad a+b-s > 0.} \tag{12}$$

Helyettesítsük (12)-t (7)-be:

$$\frac{t^2}{s} = \frac{f_{ck}^2 \cdot s \cdot (a+b)^2 \cdot (a+b-s)}{4f_{ck}^2 \cdot s \cdot (a+b-s) + 4t^2} \cdot (a+b-s) - s \cdot (a+b-s)^2.$$

Átalakítás után az $a+b=p$ ismeretlen negyedfokú egyenletéhez jutunk t, s, f_{ck} paraméterekkel:

$$\boxed{\begin{aligned} &f_{ck}^2 s^2\, p^4 - 6f_{ck}^2 s^3\, p^3 + \\ &\quad + (13f_{ck}^2 s^4 - 4t^2 s^2)\, p^2 - \\ &\quad\quad - 4s(t^2 f_{ck}^2 + 3f_{ck}^2 s^4 - 2t^2 s^2)\, p + \\ &\quad\quad\quad + 4t^2(f_{ck}^2 s^2 - t^2 - s^4) + 4f_{ck}^2 s^6 = 0. \end{aligned}} \tag{13}$$

Ezután ab (12)-ből, c (4)-ből számolható:
Az $(a+b)$, ab, $c \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás további szükséges feltétele*.

$$\boxed{\begin{aligned} a+b &= p, & b &= p-a, \\ ab &= q, & a^2 - pa + q &= 0, \\ a_1 &= \frac{p - \sqrt{p^2-4q}}{2}; & a_2 &= \frac{p + \sqrt{p^2-4q}}{2}; \\ b_1 &= \frac{p + \sqrt{p^2-4q}}{2}; & b_2 &= \frac{p - \sqrt{p^2-4q}}{2}. \end{aligned}} \tag{14}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az a és b két valós gyök akkor és csak akkor különböző pozitív, ha:

$$p > 0, \qquad q > 0, \qquad p^2 - 4q > 0, \tag{15}$$

hiszen most sem $a = b$ egyenlő szárú, sem egyenlő oldalú a háromszög nem lehet.

$$\boxed{c = 2s - (a + b).} \tag{16}$$

A c pozitív lesz, ha:

$$2s > a + b.$$

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3)
$$0 < |a - b| < c < a + b, \qquad a \neq b. \tag{17}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Adott $f_{ck} \in \mathbf{R}^+$ esetén a háromszög egyenlő szárú lehet, ha $a = c$ vagy $b = c$, egyenlő oldalú azonban nem lehet.

Példa. A 83-1. ábra adataiból elindulva:

$$t = 700; \quad k = 2s = 40 + 60\sqrt{2} \approx 124{,}8528; \quad f_{ck} = 35\sqrt{10} \approx 110{,}6797,$$

$$\begin{aligned} &47\,738\,939{,}37\,p^4 - \\ &\quad - 17\,881\,022\,715\,p^3 + \\ &\quad\quad + 2\,410\,899\,101\,480\,p^2 - \\ &\quad\quad\quad - 139\,911\,907\,028\,000\,p + \\ &\quad\quad\quad\quad + 2\,962\,895\,487\,750\,000 = 0, \end{aligned}$$

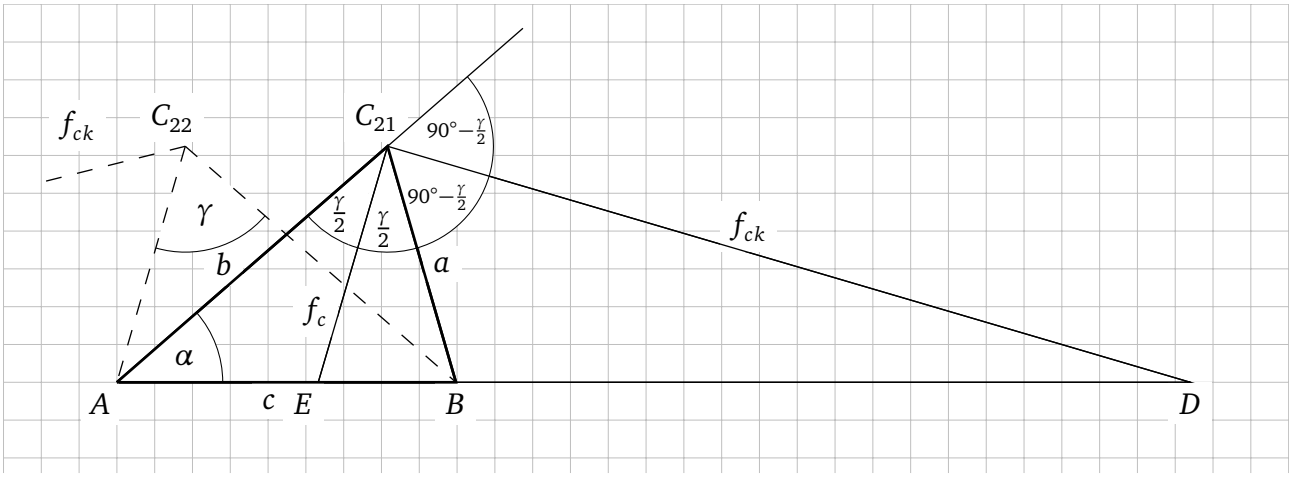
$$\begin{aligned} &(a+b)_1 \approx 61{,}8290; \quad (a+b)_2 \approx 79{,}9982; \quad (a+b)_3 \approx 84{,}8528; \quad (a+b)_4 \approx 147{,}8784; \\ &(ab)_1 \approx -13175{,}8482; \quad (ab)_2 \approx 1543{,}6412; \quad (ab)_3 \approx 1750; \quad (ab)_4 \approx 5426{,}3162; \\ &\qquad\qquad c_2 \approx 44{,}8546; \qquad\quad c_3 \approx 40; \qquad\quad c_4 \approx -23{,}0256. \end{aligned}$$

Látható, hogy csak a (2), illetve a (3) indexszel jelölt eset ad megoldást:

$$\begin{aligned} &a_{21} \approx 32{,}4965; \quad a_{22} \approx 47{,}5017; \quad a_{31} \approx 35{,}3553; \quad a_{32} \approx 49{,}4975; \\ &b_{21} \approx 47{,}5017; \quad b_{22} \approx 32{,}4965; \quad b_{31} \approx 49{,}4975; \quad b_{32} \approx 35{,}3553. \end{aligned}$$

A (32) indexű megoldást a 83-1. ábrán, a (22) indexű megoldást pedig a 83-2. ábrán szaggatott vonallal jelöltük, vagyis két szimmetrikus pár adódik.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



83-2. ábra

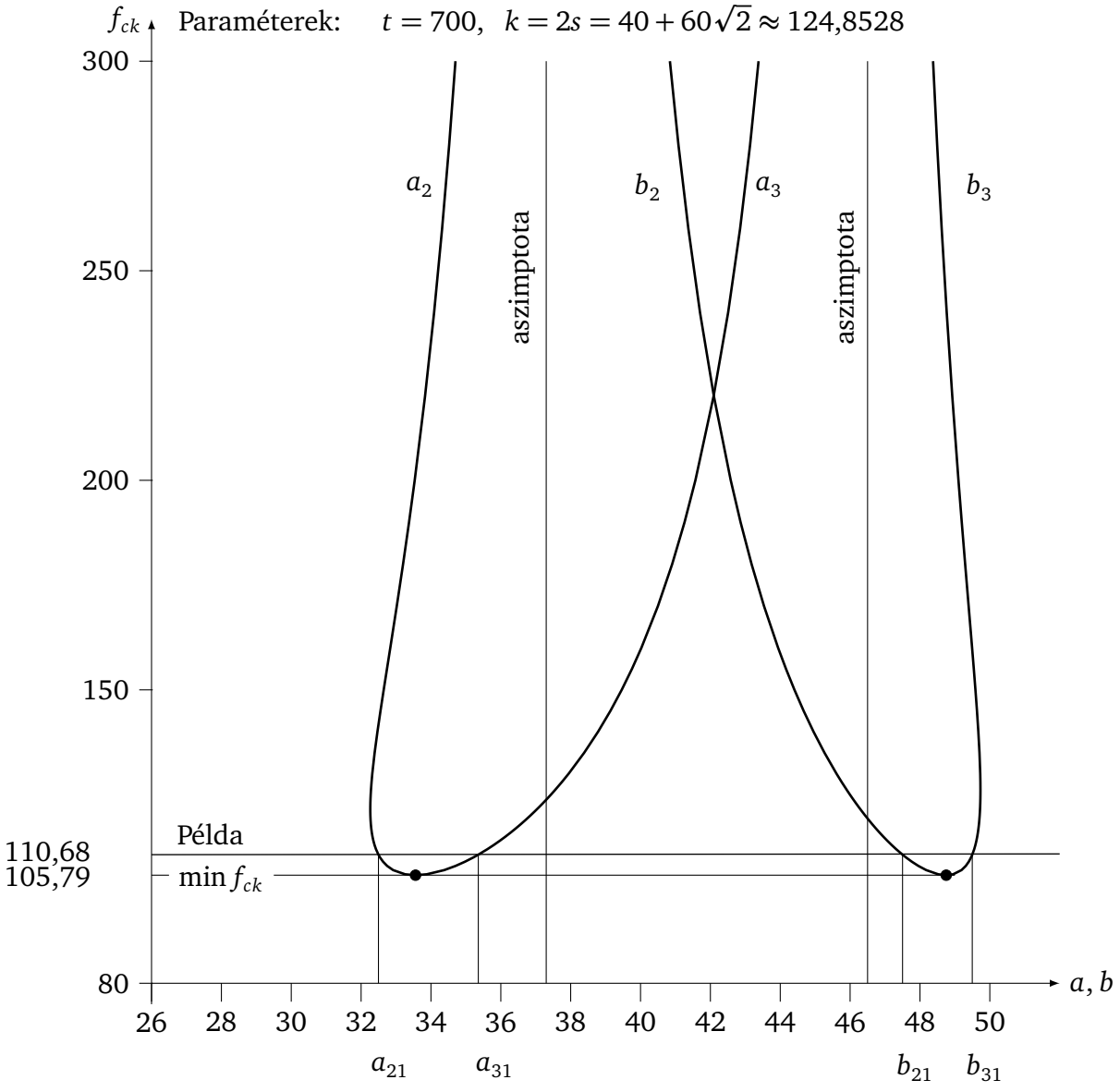
A részletesebb vizsgálat:

A t, k, f_{ck} adatok felvétele után kiszámítjuk a-t és b-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon a t területet és a k kerületet (s félkerületet) paraméternek választva, majd felrajzoljuk a kapott két síkgörbét egy a, b, f_{ck} koordináta-rendszerben (83-3. ábra).

Egy $P(a, f_{ck})$, illetve $Q(b, f_{ck})$ pont akkor és csak akkor van rajta a grafikonon, ha a, b, f_{ck} koordinátáik kielégítik a (12), (13), (14) egyenleteket, valamint a (15) és (17) egyenlőtlenségeket. A 83-3. ábra grafikonjain beírtuk a gyököket (a_2, b_2, a_3, b_3), melyeket f_{ck} felvétele után kapunk.

Az ábra az $a < b$ esetet mutatja, a példa négy megoldásából pedig kettőt, ugyanis az a és b gyökök grafikonja felcserélhető. Pontosabban az a_2 grafikon a b_2-vel, az a_3 grafikon pedig a b_3-mal, ami a példából is látszik.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



83-3. ábra

Látszik, hogy a t, k paraméterek esetén f_{ck}-nak minimuma van. Ha $t = 700$, $k = 40 + 60\sqrt{2} \approx$ $\approx 124{,}8528$ akkor $\min f_{ck} \approx 105{,}785$. *Az $f_{ck} \geq \min f_{ck}$ a megoldás további szükséges feltétele.*

Az ábrából a példa négy megoldásából kettő (a_{21}, b_{21} és a_{31}, b_{31}) leolvasható.

A megoldások száma 0, 2, egy szimmetrikus pár vagy 4, két szimmetrikus pár lehet, a példában 4, két szimmetrikus pár.

A pozitív a, b, c ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.

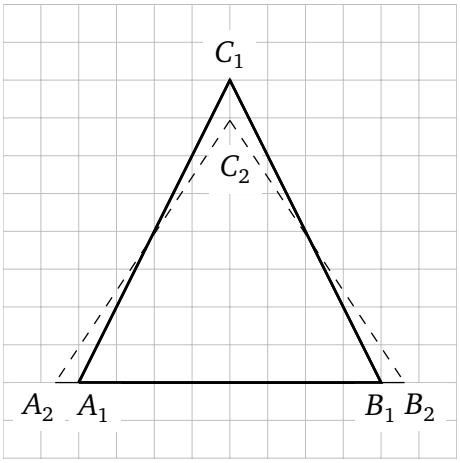
A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

84. Terület, kerület, és a háromszög egyenlő szárú $(t, k, a = b)$

Rajzoljunk fel egy ilyen ABC háromszöget (84-1. ábra).



84-1. ábra

Induljunk el a terület (t) és a félkerület (s) egyenlőtlenségéből, lásd E. 16(4)-et:

$$t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}, \quad s = \frac{k}{2} = \frac{a+b+c}{2}. \tag{1}$$

(1) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele.*

Folytassuk a *Héron-képlettel* (2), valamint $a = b$ (3) és $s-c$ (4) képleteivel mint három ismeretlent (a, b, c) tartalmazó egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (2) \\ a = b, & (3) \\ s-c = (a+b)-s = 2a-s = a-(s-a). & (4) \end{cases}$$

Helyettesítsük (3)-at és (4)-et (2)-be úgy, hogy csak t, s és a maradjon benne:

$$\frac{t^2}{s} = (s-a)^2 \cdot \big(a-(s-a)\big) = a(s-a)^2 - (s-a)^3,$$

$$\frac{t^2}{s} = as^2 - 2a^2 s + a^3 - s^3 + 3s^2 a - 3sa^2 + a^3. \qquad \big| \cdot s$$

Beszorzás és összevonás után rendezzük az egyenletet a fogyó hatványai szerint nullára. Így az a ismeretlen oldal harmadfokú egyenletéhez jutunk t, s paraméterekkel:

$$\boxed{2s\,a^3 - 5s^2a^2 + 4s^3 a - (t^2 + s^4) = 0.} \tag{5}$$

Az $a \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás további szükséges feltétele.*

$$\boxed{b = a, \qquad c = 2s - 2a.} \tag{6}$$

A c pozitív lesz, ha $2s > 2a$.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Példa. A 84-1. ábra $A_1B_1C_1$ háromszögének adataiból elindulva:

$$t = 800; \quad k = 2s = 40 \cdot \left(\sqrt{5}+1\right) \approx 129{,}442719; \quad a = b,$$

$$\begin{aligned} &129{,}442719\,a^3 - \\ &\quad -20944{,}271910\,a^2 + \\ &\qquad +1084433{,}40224\,a - \\ &\qquad\quad -18186501{,}0336 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a_1 \approx 44{,}7214; \quad a_2 \approx 41{,}6469; \quad a_3 \approx 75{,}4351; \\ &b_1 \approx 44{,}7214; \quad b_2 \approx 41{,}6469; \quad b_3 \approx 75{,}4351; \\ &c_1 \approx 40; \qquad\quad c_2 \approx 46{,}1489; \quad c_3 \approx -21{,}4275. \end{aligned}$$

Látható, hogy csak az (1) és (2) indexszel jelölt eset ad megoldást, amit a 84-1. ábra is mutat. Az a_2, b_2, c_2 megoldást az ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

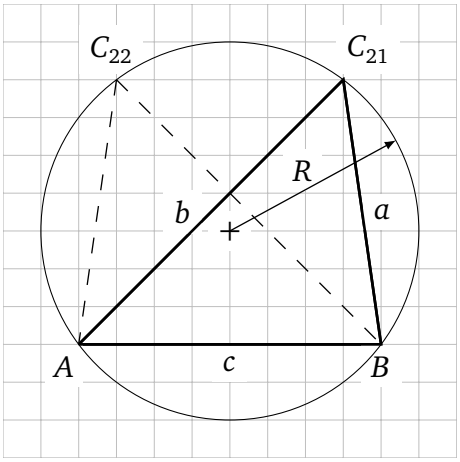
A megoldások száma (5) *pozitív valós gyökeinek számától függ ha c is, más esetben a harmadik oldal is pozitív, a példában 2, más esetben 0, 1, vagy 2 lehet.*

Ha $t = \dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$, akkor $a = b = c = \dfrac{2s}{3}$, a háromszög egyenlő oldalú.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

85. Terület, kerület és a körülírt kör sugara (t, k, R)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (85-1. ábra).



85-1. ábra

Induljunk el a terület (t), a félkerület (s) és a körülírt kör (R) sugarának egyenlőtlenségéből. Az egyenlőség egyszerre lép föl mindkét helyen az egyenlő oldalú háromszög esetén:

$$t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}} \le \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2, \tag{1}$$

$$s = \frac{k}{2} = \frac{a+b+c}{2}. \tag{2}$$

(1) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele*.
Lásd E. 16(4)-et és E. 19(8)-at.

Folytassuk a *Héron-képlettel* (3), c képletével (4), valamint R képletével (6) mint három ismeretlent (a, b, c) tartalmazó egyenletrendszerrel. (5) nem független ugyanis (4)-ből következik:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\begin{cases} t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (3) \\ c = 2s-(a+b), \quad \Leftrightarrow & \quad (4) \\ s-c = (a+b)-s, & \quad (5) \\ R = \dfrac{abc}{4t}. & \text{E. 11(17)} \quad (6) \end{cases}$$

Helyettesítsük (5)-öt (3)-ba és (4)-et (6)-ba:

$$\begin{cases} \dfrac{t^2}{s} = (s-a)(s-b)(a+b-s), & (7) \\ 4Rt = ab\cdot\big(2s-(a+b)\big). & (8) \end{cases}$$

Fejezzük ki ab-t (8)-ból:

$$\boxed{ab = \frac{4Rt}{2s-(a+b)}.} \qquad (9)$$

Folytassuk (7) átalakításával:

$$\frac{t^2}{s} = (s^2 - sb - sa + ab)\cdot(a+b-s), \qquad (10)$$

$$\frac{t^2}{s} = \big(s^2 - s(a+b) + ab\big)\cdot(a+b-s). \qquad (11)$$

Helyettesítsük (9)-et (11)-be:

$$\frac{t^2}{s} = \frac{4Rt}{2s-(a+b)}\cdot(a+b-s) - s(a+b-s)^2, \qquad \Big/\cdot s\cdot\big(2s-(a+b)\big) \qquad (12)$$

$$t^2\cdot\big(2s-(a+b)\big) = 4Rts\cdot(a+b-s) - s^2\cdot(a+b-s)^2\cdot\big(s-(a+b-s)\big), \qquad (13)$$

$$t^2\cdot\big(2s-(a+b)\big) = 4Rts\cdot\big((a+b)-s\big) - s^3\cdot\big((a+b)-s\big)^2 + s^2\cdot\big((a+b)-s\big)^3. \qquad (14)$$

Átalakítás után rendezzük az egyenletet $a+b$ fogyó hatványai szerint nullára. Így $(a+b)$-re nézve egy harmadfokú egyenlethez jutunk t, s, R paraméterekkel:

$$\boxed{s^2(a+b)^3 - 4s^3(a+b)^2 + (5s^4 + 4Rts + t^2)(a+b) - (2s^5 + 4Rts^2 + 2t^2s) = 0.} \qquad (15)$$

Ezután ab (9)-ből, c (4)-ből számolható: $(a+b)$, ab, $c \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás további szükséges feltétele*.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\begin{aligned} a+b&=p, & b&=p-a,\\ ab&=q, & a^2-pa+q&=0,\\ a_1&=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}; & a_2&=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2};\\ b_1&=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; & b_2&=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p>0, \qquad q>0, \qquad p^2-4q\geq 0. \tag{17}$$

$$c=2s-(a+b). \tag{18}$$

A c oldal pozitív lesz, ha

$$2s>a+b.$$

A pozitív a,b,c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3)
$$|a-b|<c<a+b. \tag{19}$$

Az $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Ha $a=b$ vagy $a=c$, vagy $b=c$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Ha $t=\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$, akkor $a=b=c=\dfrac{2s}{3}=\sqrt{3}R$, a háromszög egyenlő oldalú.

Példa. A 85-1. ábra adataiból elindulva:

$$t=700; \quad k=2s=40+60\sqrt{2}\approx 124{,}852814; \quad R=25,$$

$$\begin{aligned} &3897{,}05627482\cdot(a+b)^3-\\ &\quad -973116{,}882444\cdot(a+b)^2+\\ &\qquad +80795086{,}5265\cdot(a+b)-\\ &\qquad\quad -2230117444{,}40=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a+b)_1&\approx 75{,}3553; & (a+b)_2&\approx 84{,}8528; & (a+b)_3&\approx 89{,}4975;\\ (ab)_1&\approx 1414{,}2136; & (ab)_2&\approx 1750; & (ab)_3&\approx 1979{,}8990;\\ c_1&\approx 49{,}4975; & c_2&\approx 40; & c_3&\approx 35{,}3553; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}&\approx 35{,}36; & a_{12}&\approx 40; & a_{21}&\approx 35{,}36; & a_{22}&\approx 49{,}50; & a_{31}&\approx 40; & a_{32}&\approx 49{,}50;\\ b_{11}&\approx 40; & b_{12}&\approx 35{,}36; & b_{21}&\approx 49{,}50; & b_{22}&\approx 35{,}36; & b_{31}&\approx 49{,}50; & b_{32}&\approx 40. \end{aligned}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A pozitív a, b, c ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.

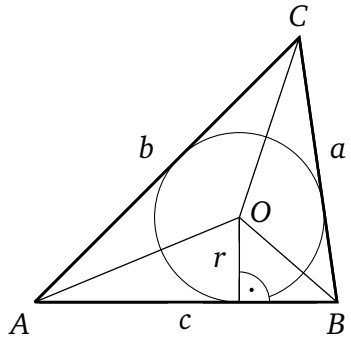
A (2)-es indexű esetet a 85-1. ábra mutatja. Az a_{22}, b_{22} megoldást az ábrán szaggatott vonallal jelöltük.
A megoldások száma 0, 1 (ha a háromszög egyenlő oldalú), 3 (ha a háromszög egyenlő szárú) vagy 6 (3 szimmetrikus pár) mint a példában, ahol (1), (2) *ill.* (3) *egymás elforgatottja, vagyis 6 egybevágó háromszögről van szó.*

Lásd még a 92. feladatot és a 92-2. ábrát.

Most három oldal (a, b, c) $\overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

86. Terület, kerület és a beírt kör sugara (t, k, r)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (86-1. ábra). Keressünk feltételt az induló adatokra:



86-1. ábra

E. 16(4) $$t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}, \tag{1}$$

$$s = \frac{k}{2} = \frac{a+b+c}{2}, \tag{2}$$

E. 19(9) $$6\sqrt{3}\, r \le 2s, \tag{3}$$

E. 32(4) $$t = r \cdot s. \tag{4}$$

(1), (3) *és* (4) *a megoldás szükséges feltételei*.

Ha viszont $t = r \cdot s$, akkor sem lehet elindulni, ugyanis (t, k, r), illetve (t, s, r) nem három független adat, hiszen éppen az említett összefüggés van közöttük, ami minden háromszögben igaz, ezért ebből nincs egyértelmű megoldás.

Egyetlen kivétel van, ha $r = \frac{t}{s} = \frac{s}{3\sqrt{3}}$, amikor is a háromszög egyenlő oldalú.

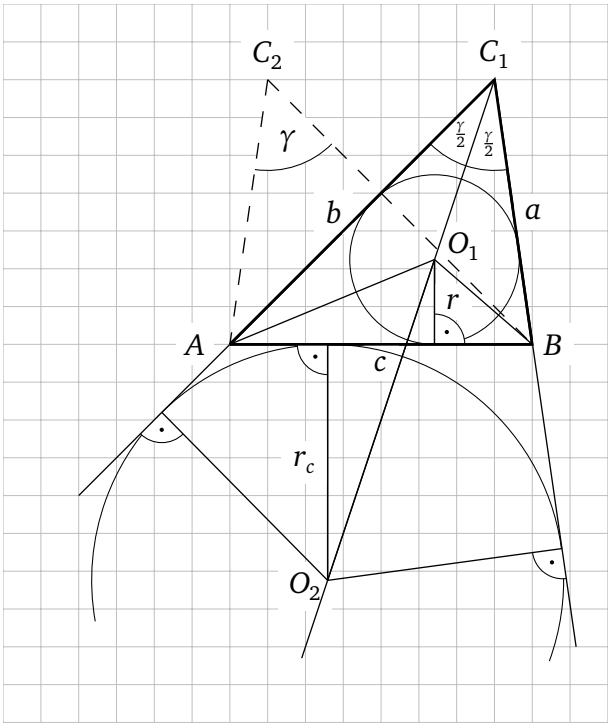
Ha egy háromszög egyenlő oldalú, akkor meghatározásához egyetlen számadat (hosszúság vagy terület) szükséges és elegendő. Lásd még az E. 3. pontot.

Más esetben ellentmondó, nincs megoldás.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

87. Terület, kerület és egy hozzáírt kör sugara (t, k, r_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (87-1. ábra).



87-1. ábra

Induljunk el a terület (t), a félkerület (s) és a hozzáírt kör sugarának (r_c) két egyenlőtlenségéből (1), (3), valamint $s-c$ egyenlőtlenségéből (4):

E. 16(4) $$t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}, \tag{1}$$

$$s = \frac{k}{2} = \frac{a+b+c}{2}, \tag{2}$$

E. 34(3) $$r = \frac{t}{s} < \frac{t}{s-c} = r_c, \tag{3}$$

E. 1(3) $$s - c > 0. \tag{4}$$

(1), (3) *és* (4) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele*.

Folytassuk a *Héron-képlettel* (5), c (3)-ból kifejezett képletével (6), valamint $a+b$ képletével (7) mint három ismeretlent (a, b, c) tartalmazó egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (5) \\ c = s - \dfrac{t}{r_c}, & (6) \\ a + b = 2s - c = s + \dfrac{t}{r_c}. & (7) \end{cases}$$

Alakítsuk át (5)-öt:

$$\frac{t}{s} \cdot \frac{t}{s-c} = (s-a)(s-b), \tag{8}$$

majd helyettesítsük (3)-at (8)-ba, és bontsuk föl a jobb oldalt:

$$\frac{t}{s} \cdot r_c = s^2 - s(a+b) + ab. \tag{9}$$

Helyettesítsük (7)-et (9)-be, és rendezzük az egyenletet ab-re:

$$ab = \frac{t}{s} \cdot r_c + s \cdot \left(s + \frac{t}{r_c}\right) - s^2, \tag{10}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$ab = t \cdot \left(\frac{r_c}{s} + \frac{s}{r_c} \right). \tag{11}$$

Az $a+b$ (7)-ből számolható és pozitív lesz, lásd az induló adathármast.

$$\begin{aligned} a+b &= p, & b &= p-a, \\ ab &= q, & a^2 - pa + q &= 0, \\ a_1 &= \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}; & a_2 &= \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; \\ b_1 &= \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; & b_2 &= \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p > 0, \qquad q > 0, \qquad p^2 - 4q \geq 0. \tag{13}$$

Mivel $p > 0$, $q > 0$ most teljesül, elegendő a *diszkriminánst* vizsgálni.

A c oldal (6)-ból számolható,

$$c = s - \frac{t}{r_c}, \tag{14}$$

és pozitív lesz, ha $s > \dfrac{t}{r_c}$.

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3) $$|a-b| < c < a+b. \tag{15}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Ha $a = b$ vagy $a = c$ vagy $b = c$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Ha $t = \dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$, akkor a háromszög egyenlő oldalú és $r_c = \dfrac{t}{s-c} = \dfrac{t}{s/3} = \dfrac{3t}{s}$.

Példa. A 87-1. ábra adataiból elindulva:

$$t = 700; \quad k = 2s = 40 + 60\sqrt{2} \approx 124{,}8528; \quad r_c = \frac{700}{30\sqrt{2} - 20} \approx 31{,}2132,$$

$$\begin{aligned} a+b &\approx 84{,}8528; & ab &\approx 1750; \\ a_1 &\approx 35{,}3553; & a_2 &\approx 49{,}4975; \\ b_1 &\approx 49{,}4975; & b_2 &\approx 35{,}3553; \\ & & c &\approx 40. \end{aligned}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az a_2, b_2 megoldást a 87-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

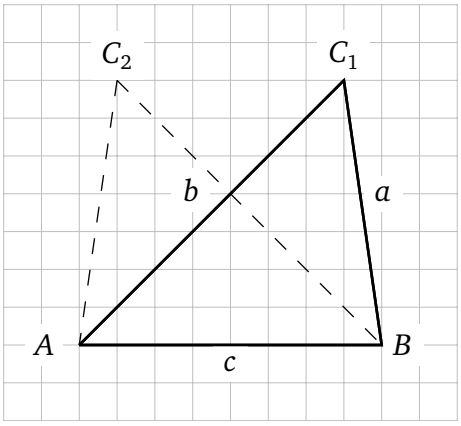
A pozitív a, b, c ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ a többi adat.

88. Terület, kerület és két oldal összege $(t, k, a+b)$

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (88-1. ábra).



88-1. ábra

Induljunk el a terület (t), a félkerület (s) és az $(a+b)$ két egyenlőtlenségéből (1), (3):

E. 16(4) $$t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}, \tag{1}$$

$$s = \frac{k}{2} = \frac{a+b+c}{2}, \tag{2}$$

$$a + b < 2s. \tag{3}$$

(1) *és* (3) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele*.

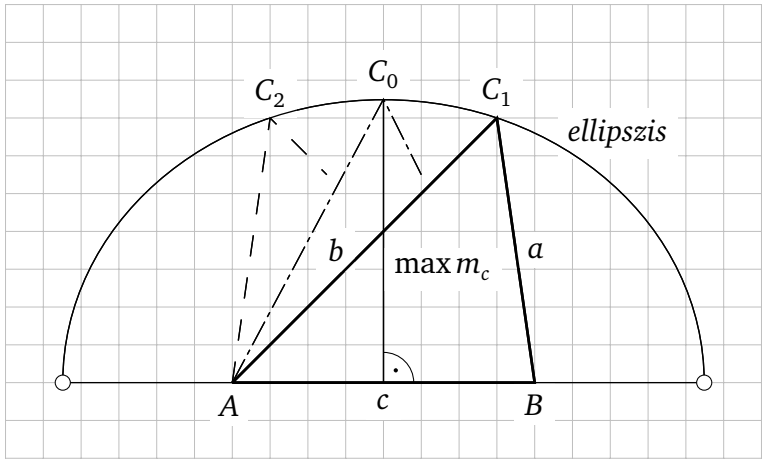
Folytassuk a c oldal kiszámításával:

$$c = 2s - (a+b). \tag{4}$$

Mivel most $a+b =$ állandó, így a C pontok egy A, B *fókuszú ellipszis* vonalon helyezkednek el (a nagytengely hossza $a+b$), melyen $\max m_c$ C_0-nál, $a = b$-nél lesz az egyenlő szárú esetben (88-2. ábra).

$$\max m_c = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}. \tag{5}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



88-2. ábra

$$t_{esz} = \frac{c \cdot \max m_c}{2}, \tag{6}$$

$$t_{eo} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}}. \tag{7}$$

Mivel egy adott s-nél a terület nagyobb nem lehet, mint ehhez az s-hez tartozó egyenlő oldalú háromszög területe (lásd (1)-et), így $2s$ és $a+b$ induló adatok felvétele után ($2s > a+b$), t megválasztásánál

$$\boxed{t \le t_{esz} \le t_{eo}} \tag{8}$$

kell legyen.

Balról az első egyenlőség az $a = b$ egyenlő szárú, mindkét egyenlőség az egyenlő oldalú háromszög esetében áll fenn. Ezért

(8) *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Egyenlő szárú lehet még a háromszög $a = c$ vagy $b = c$ esetén is.

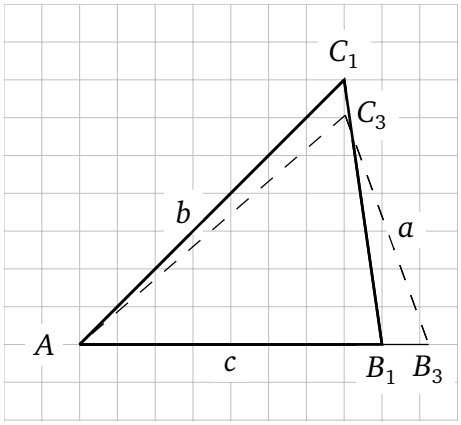
A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár (88-1. ábra).

Most $(t,k,c) \overset{(79.f.)}{\Longrightarrow} (a,b,c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

89. Terület, kerület és két oldal különbsége $(t, k, a-b)$

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (89-1. ábra).



89-1. ábra

Most $t, k \in \mathbf{R}^+$; és $(a-b) \in \mathbf{R}$.
Induljunk el a terület (t) és a félkerület (s) (1), valamint a felírható (3) egyenlőtlenségekből:

E. 16(4) $$t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}, \tag{1}$$

$$s = \frac{k}{2} = \frac{a+b+c}{2}, \tag{2}$$

E. 1(3) $$s > c > |a-b| = u \ge 0. \tag{3}$$

(1) *és* (3) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele*.

Folytassuk a *Héron-képlettel* (4), valamint $a+b$ és $a-b$ képleteivel (5), (6) mint három ismeretlent (a, b, c) tartalmazó egyenletrendszerrel.

Tegyük föl, hogy $a \ge b$, ekkor $|a-b| = a-b = u \ge 0$.

$$\begin{cases} t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (4) \\ a+b = 2s-c, & (5) \\ a-b = u. & (6) \end{cases}$$

Most (5)-öt és (6)-ot összeadva, majd kivonva kapjuk a-t és b-t:

$$a = \frac{2s-c+u}{2}, \qquad a \ge b, \tag{7}$$

$$b = \frac{2s-c-u}{2}, \qquad a \ge b. \tag{8}$$

$$s-a = \frac{2s-(2s-c+u)}{2}, \tag{9}$$

$$s-b = \frac{2s-(2s-c-u)}{2}. \tag{10}$$

Helyettesítsük (9)-et és (10)-et (4)-be:

$$\frac{t^2}{s} = \frac{c-u}{2} \cdot \frac{c+u}{2} \cdot (s-c),$$

$$\frac{4t^2}{s} = (c^2-u^2) \cdot (s-c),$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\frac{4t^2}{s} = c^2 s - c^3 - u^2 s + u^2 c.$$

Rendezzük az egyenletet c fogyó hatványai szerint nullára. Így a c ismeretlen oldalra nézve egy harmadfokú egyenlethez jutunk t, s, u paraméterekkel:

$$\boxed{c^3 - s\,c^2 - u^2 c + u^2 s + \frac{4t^2}{s} = 0.} \tag{11}$$

A $c \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás további szükséges feltétele.* (12)

Ezután a és b (7)-ből és (8)-ból számolható és pozitív valós lesz, ha (1), (3) és (12) teljesül. Ugyanis ekkor:

$$s - c > 0, \qquad s - u > 0, \qquad s + u > 0, \tag{13}$$

és így

$$2a = 2s - c + u > 0, \qquad 2b = 2s - c - u > 0. \tag{14}$$

Az $a < b$ esetén $|a-b| = b - a = u > 0$, és ugyanerre az eredményre jutunk azzal a különbséggel, hogy ekkor a és b mindenhol helyet cserél, így a (8)-ból, b (7)-ből lesz számolható.

Mivel $(a-b)^2 = (b-a)^2 = u^2$, ezért a (11) egyenlet sem változik.

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3) $$0 \le |a-b| < c < a + b. \tag{15}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ *és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Példa. A 89-1. ábra AB_1C_1 háromszögének adataiból elindulva:

$$t = 700; \quad k = 2s = 40 + 60\sqrt{2} \approx 124{,}8528; \quad u = |a-b| = |-10\sqrt{2}| \approx 14{,}1421, \; a < b,$$

$$c^3 - 62{,}4264 \cdot c^2 - 200 \cdot c + 43\,882{,}2510 = 0,$$

$$\begin{array}{lll} c_1 \approx 40; & c_2 \approx -23{,}7552; & c_3 \approx 46{,}1816; \\ a_1 \approx 35{,}3553; & & a_3 \approx 32{,}2645; \\ b_1 \approx 49{,}4975; & & b_3 \approx 46{,}4067. \end{array}$$

Látható, hogy csak az (1) és (3) indexszel jelölt eset ad megoldást. Az a_3, b_3, c_3 megoldást a 89-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

Ha $t = \dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$, akkor a háromszög egyenlő oldalú, és $|a-b| = u = 0$.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Megvizsgálva a (11) egyenletet megállapítható:
Mivel

$$c^3 - s\,c^2 - u^2 c + u^2 s + \frac{4t^2}{s} = 0, \tag{16}$$

c-ben harmadfokú egyenlet valós gyökei megegyeznek az

$$f(c) = c^3 - s\,c^2 - u^2 c + u^2 s + \frac{4t^2}{s} \tag{17}$$

harmadfokú függvény zérushelyeivel, és

$$\lim_{c \to -\infty} f(c) = -\infty, \tag{18}$$

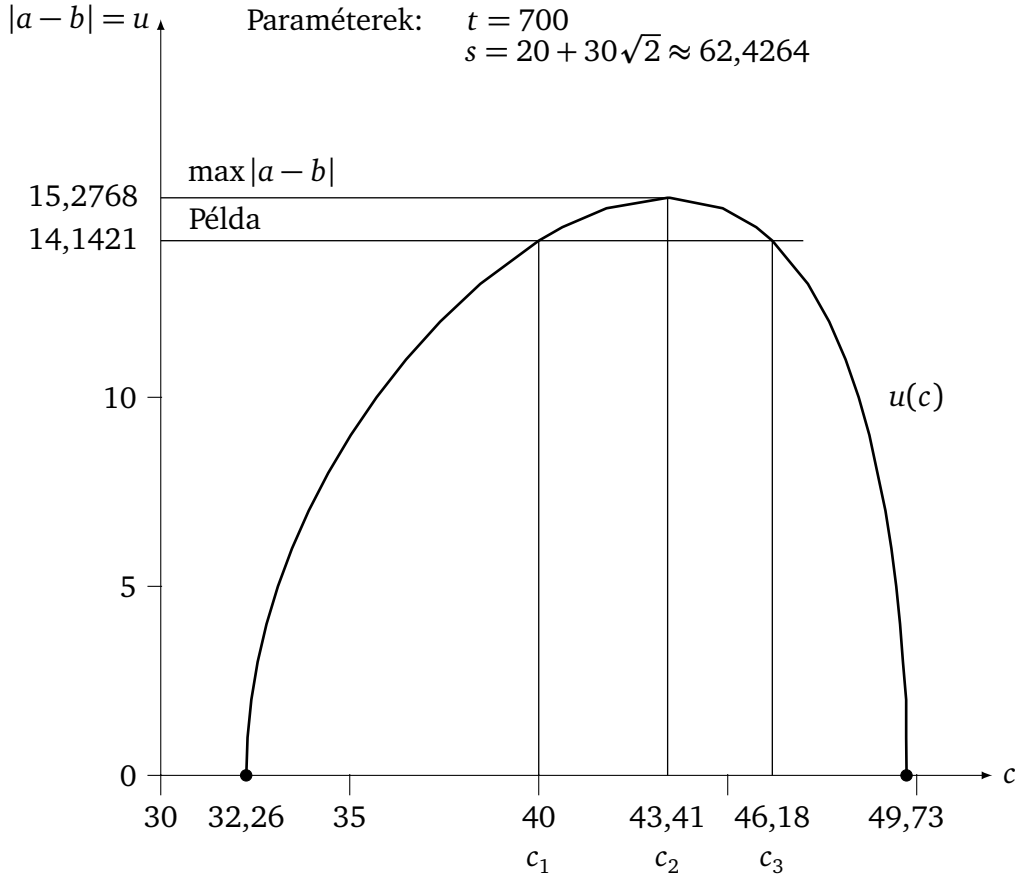
de

$$f(0) = u^2 s + \frac{4t^2}{s} > 0, \tag{19}$$

és az f függvény folytonossága miatt kell legyen ennek a függvénynek legalább egy negatív zérushelye, és így a pozitív zérushelyek (pozitív valós gyökök) száma legfeljebb kettő lehet.

A részletesebb vizsgálat: A $t, k, |a-b|$ adatok felvétele után kiszámoljuk c-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon a t területet és a k kerületet (s félkerületet) paraméternek választva, majd felrajzoljuk a síkgörbe grafikonját egy c, $|a-b| = u$ koordináta-rendszerben. Látható, hogy függvényt kapunk (89-2. ábra). Az ábrából a példa mindkét megoldása is leolvasható.

Továbbá az is látható, ha a b-vel helyet cserél, $|a-b| = |b-a|$ miatt ugyanazt a grafikont kapjuk, ez azonban az $a = b$ kivételével nem ugyanaz a háromszög. Lásd még az induló adathármast.



89-2. ábra

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Látható, hogy az $|a-b|=u(c)$ függvénynek maximuma van. A $\max|a-b|=\max u(c)$ kiszámításához első lépésben állítsuk elő $u(c)$-t (11)-ből. Mivel $u(c)\geq 0$:

$$u(c)=|u(c)|=\sqrt{u^2(c)}=\sqrt{\frac{-c^3+s\,c^2-\dfrac{4t^2}{s}}{s-c}}. \tag{20}$$

Tegyük fel, hogy:

$$-c^3+s\,c^2-\frac{4t^2}{s}\geq 0; \qquad s-c>0. \tag{21}$$

Most az a c, amelyiknél $u(c)$ maximális lesz, az $u'(c)=0$ egyenletből nyert

$$2c^3-4s\,c^2+2s^2c-\frac{4t^2}{s}=0 \tag{22}$$

egyenletből számolható. A 89-2. ábra paramétereivel:

$$t=700; \quad s=20+30\sqrt{2}\approx 62{,}4264;$$
$$c_1\approx 4{,}7131; \qquad c_2\approx 43{,}4097; \qquad c_3\approx 76{,}7300,$$

ahol c_1 és c_3 hamis gyök (21) nem teljesülő feltételei miatt.

Majd (20)-ból:

$$\max|a-b|=\max u(c)=u(c_2)\approx 15{,}2768,$$

lásd a 89-2. ábrát. Mivel $u''(c)$ előállítása nehézkes, hogy maximumról van szó, azt az $u(c)$ függvény néhány ponton történő helyettesítéséből is lehet látni.

A t, s paraméterek után az utoljára felvett $|a-b|$-ra igaz kell legyen:

$$0\leq|a-b|\leq\max|a-b|. \tag{23}$$

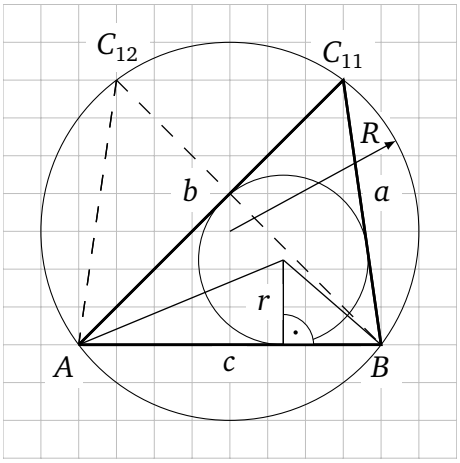
(1) *és* (23) *együttes teljesülése szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

A megoldások száma (11) *pozitív valós gyökeinek számától függ, 0, 1 vagy 2 lehet, a példában 2.*
Most három oldal $(a,b,c)\overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

90. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy oldal (R, r, c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (90-1. ábra).



90-1. ábra

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből* (1) valamint a c oldal és a körülírt kör sugara, R közötti egyenlőtlenségből (2):

E. 17(1) $$2r \le R, \tag{1}$$

$$c \le 2R. \tag{2}$$

(1) *és* (2) *a megoldás szükséges feltétele*.

Folytassuk a következő négyismeretlenes (a, b, s, t) egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} R = \dfrac{abc}{4t}, & \text{E. 11(17)} \quad (3) \\ t = r \cdot s, & \text{E. 32(4)} \quad (4) \\ t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (5) \\ a + b = 2s - c = 2(s-c) + c. & (6) \end{cases}$$

Helyettesítsük (4)-et (3)-ba és (5)-be, így t-t kiküszöbölhetjük:

$$\begin{cases} ab = \dfrac{4Rrs}{c}, & (7) \\ r^2 s = \left(s^2 - s(a+b) + ab\right) \cdot (s-c). & (8) \end{cases}$$

Helyettesítsük (6)-ot és (7)-et (8)-ba:

$$r^2 s = \left(s^2 - s(s+s-c) + \frac{4Rrs}{c}\right) \cdot (s-c), \tag{9}$$

$$r^2 s = \frac{4Rrs}{c} \cdot (s-c) - s \cdot (s-c)^2, \qquad \Big/ : \frac{s}{c} \tag{10}$$

$$r^2 c = 4Rr \cdot (s-c) - c \cdot (s-c)^2. \tag{11}$$

Így $s-c$ másodfokú egyenletéhez jutunk R, r, c paraméterekkel:

$$\boxed{\begin{array}{c} c \cdot (s-c)^2 - 4Rr \cdot (s-c) + r^2 c = 0, \\ s = (s-c) + c. \end{array}} \tag{12}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Ezután $a+b$ (6)-ból, ab (7)-ből számolható:

Az $s-c,\ s,\ a+b,\ ab \in \mathbf{R}^+$ lesz, ha (1) és (2) teljesül. (13)

A bizonyításhoz elegendő belátni, hogy (12) egyenlet *diszkriminánsa* $D \geq 0$, továbbá gyökeinek összege és szorzata is pozitív:

$$D = (-4Rr)^2 - 4c \cdot (r^2 c) \geq 0,$$

$$16R^2r^2 - 4c^2r^2 \geq 0, \qquad / : 4r^2$$

$$4R^2 - c^2 \geq 0,$$

$$(2R+c)\cdot(2R-c) \geq 0, \qquad \text{de}$$

$$2R-c \geq 0, \quad 2R \geq c. \qquad \text{lásd (2)-t.}$$

A továbbiakban használjuk a *Viète-féle formulákat*:

$$(s-c)_1 + (s-c)_2 = -\frac{-4Rr}{c} = \frac{4Rr}{c} > 0,$$

$$(s-c)_1 \cdot (s-c)_2 = \frac{r^2 c}{c} = r^2 > 0,$$

amiből
$$(s-c) \in \mathbf{R}^+, \quad s = (s-c)+c, \quad \text{és így} \quad s \in \mathbf{R}^+,$$
$$a+b = 2s-c = 2\cdot(s-c)+c, \quad \text{így} \quad a+b \in \mathbf{R}^+,$$

végül
$$ab = \frac{4Rrs}{c} \quad \text{és így} \quad ab \in \mathbf{R}^+.$$

$$\begin{aligned} &a+b=p, && b=p-a,\\ &ab=q, && a^2-pa+q=0,\\ &a_1=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}; && a_2=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2};\\ &b_1=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; && b_2=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p > 0, \qquad q > 0, \qquad p^2 - 4q \geq 0. \tag{15}$$

Mivel most $p > 0$, $q > 0$ teljesül, elegendő a diszkriminánst vizsgálni.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3) $$|a-b| < c < a+b. \tag{16}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Ha $a = b$ vagy $a = c$, vagy $b = c$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Ha $2r = R$, akkor $a = b = c = \sqrt{3}R$, a háromszög egyenlő oldalú.

Ha $c = 2R$ vagy $b = 2R$, vagy $a = 2R$, akkor a háromszög derékszögű.

Példa. A 90-1. ábra adataiból elindulva:

$$R = 25; \quad r = \frac{700}{20+30\sqrt{2}} \approx 11{,}2132; \quad c = 40;$$

$$(s-c)_1 \approx 22{,}4264; \qquad (s-c)_2 \approx 5{,}6066;$$
$$s_1 \approx 62{,}4264; \qquad s_2 \approx 45{,}6066.$$

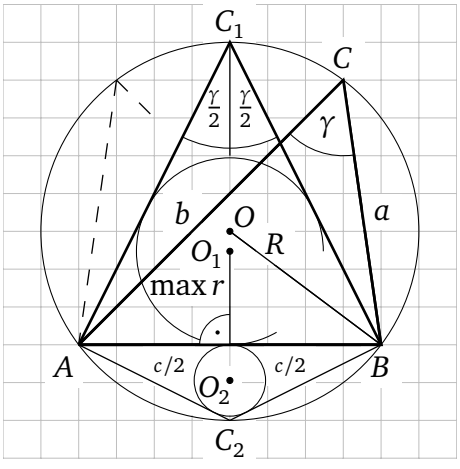
$$(a+b)_1 \approx 84{,}8528; \quad (ab)_1 \approx 1750; \quad (a+b)_2 \approx 51{,}2132; \quad (ab)_2 \approx 1278{,}4903;$$

$$D_1 \approx 200; \qquad D_2 \approx -2491{,}1688;$$

$$a_{11} \approx 35{,}3553; \quad a_{12} \approx 49{,}4975; \quad a_{21} = \text{komplex}; \quad a_{22} = \text{komplex};$$
$$b_{11} \approx 49{,}4975; \quad b_{12} \approx 35{,}3553; \quad b_{21} = \text{komplex}; \quad b_{22} = \text{komplex}.$$

Látható, hogy csak az (1) indexszel jelölt eset ad megoldást. Az a_{12}, b_{12} megoldást a 90-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A részletesebb vizsgálat: Folytassuk a megoldás feltételeinek vizsgálatával, lásd a 90-2. ábrát.



90-2. ábra

$$\sin\gamma = \frac{c}{2R} \le 1, \tag{17}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = \arcsin\dfrac{c}{2R} \le 90^\circ, & (18) \\ \gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 \ge 90^\circ, & (19) \end{cases}$$

E. 33(12) $$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}. \tag{20}$$

Rögzítsük R-et és c-t, és legyen $c \le 2R$. Ha C, B-ből $C_1(C_2)$ felé halad, akkor $r = (s-c)\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ szigorúan monoton nő s miatt $\max r$-ig, vagyis r-nek az $a = b$ egyenlő szárú esetben lesz maximuma.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Ha C_1-nél, ill. C_2-nél fellépő $\max r$-ek különbözőek, a nagyobbikra kell teljesüljön hogy:

$$0 < r \leq \max r. \tag{21}$$

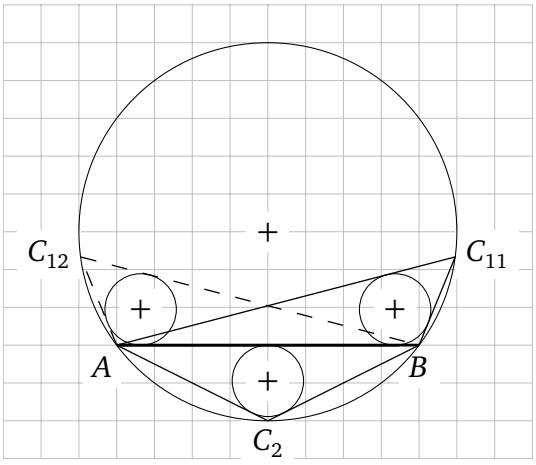
Mivel r nem lehet nagyobb $\frac{R}{2}$-nél, átalakítás után:

$$\boxed{0 < r \leq \max r = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\gamma}{4}\right) \leq \frac{R}{2}.} \tag{22}$$

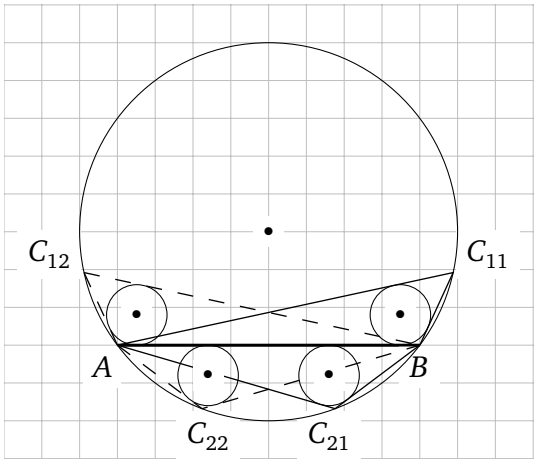
Ha γ_1 (18) és γ_2 (19) különböző, akkor γ (22)-ben a kisebbik.

A $0 < c \leq 2R$, $0 < r \leq \max r \leq \frac{R}{2}$ *együttes teljesülése szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele (úgy értve, hogy ilyenkor van legalább egy pozitív valós megoldás).*

A megoldások száma 0, 1 (egyenlő oldalú vagy egyenlő szárú háromszög, lásd a 90-2. ábrát), 2 (egy szimmetrikus pár, lásd a 90-1. ábrát), 3 (egy egyenlő szárú háromszög és egy szimmetrikus pár, lásd a 90-3. ábrát), 4 (két szimmetrikus pár, lásd a 90-4. ábrát) lehet.

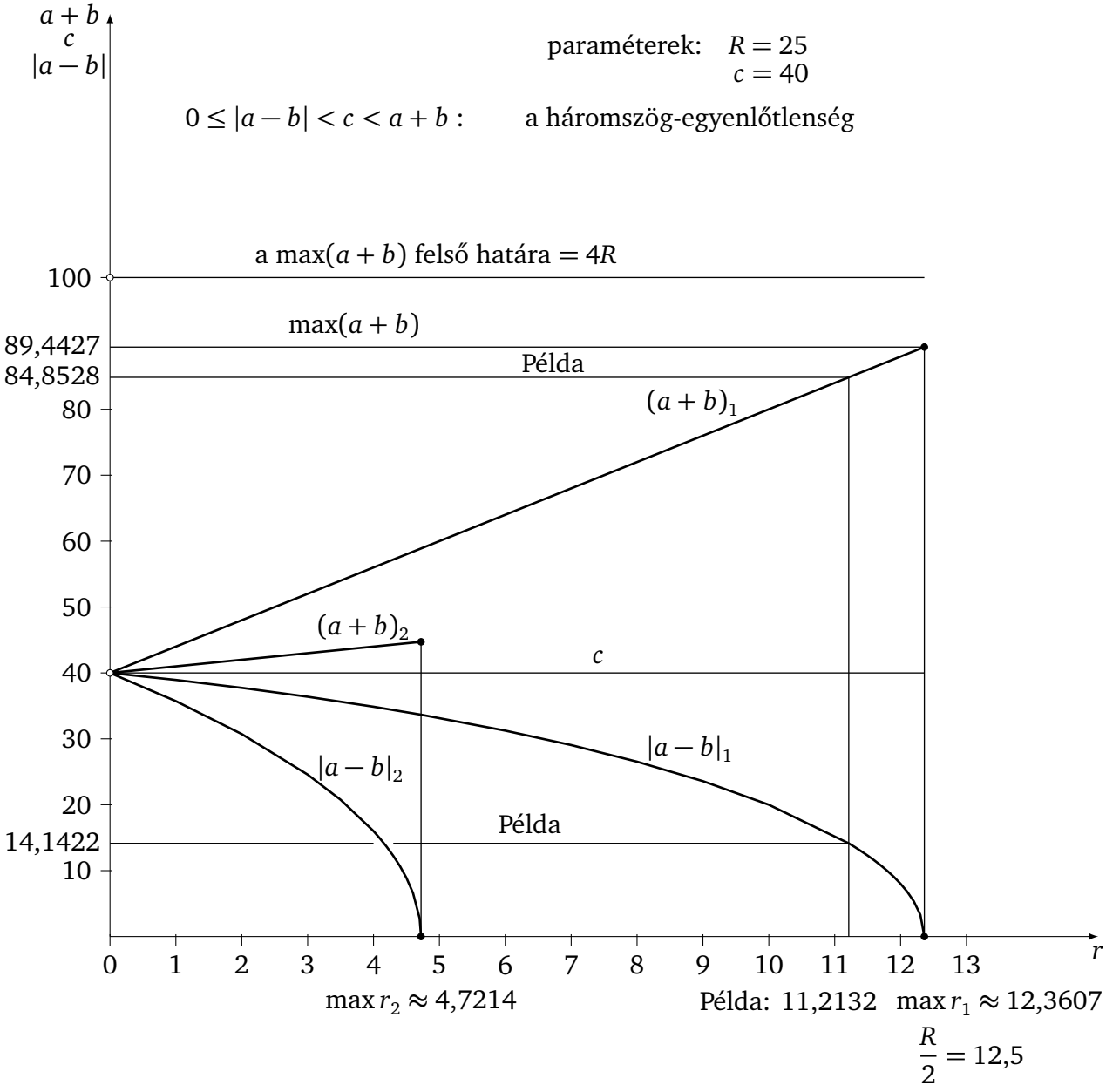


90-3. ábra



90-4. ábra

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



90-5. ábra

A 90-5. ábra a háromszög-egyenlőtlenség alakulását mutatja $R = 25$ és $c = 40$ paraméterek mellett. A függvényeknél az r független változó jelölését most az egyszerűség kedvéért elhagytuk, és (1) indexszel a hegyesszögű, (2) indexszel a tompaszögű esetet jelöltük. Az ábrába a példa háromszög-egyenlőtlenségét is berajzoltuk. Lásd még a 90-2. ábrát.

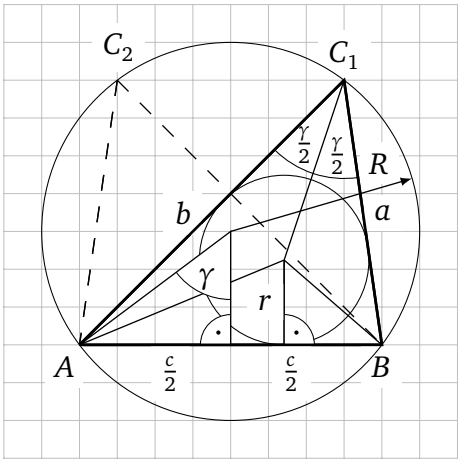
A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

91. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy szög (R, r, γ)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (91-1. ábra).



91-1. ábra

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből* (1) és γ intervallumából (2):

E. 17(1) $$2r \le R, \tag{1}$$

$$0° < \gamma < 180°. \tag{2}$$

(1) *és* (2) *a megoldás szükséges feltétele*.

E. 11(11) $$c = 2R \cdot \sin\gamma. \tag{3}$$

Most $(R, r, c) \overset{\text{(90.f.)}}{\Longrightarrow} (a, b, c)$. Mivel

$$\sin\gamma = \sin(180° - \gamma), \tag{4}$$

a 90. feladat eredményeiből csak az lesz a 91. feladat megoldása, amelyiknél

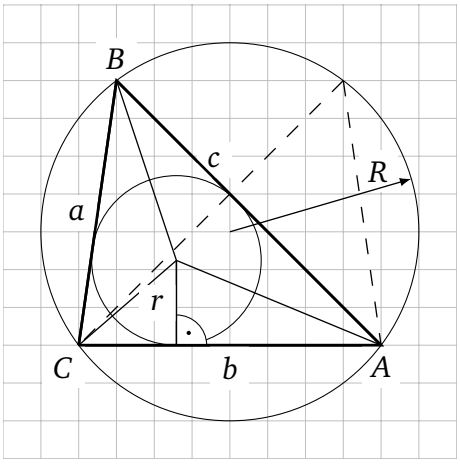
E. 33(12) $$2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{s-c}\right) = \gamma. \tag{5}$$

A megoldások száma 0, 1 (egyenlő oldalú vagy egyenlő szárú háromszög, lásd a 90-2. ábrát), vagy 2 (egy szimmetrikus pár, lásd a 91-1. ábrát) lehet.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

92. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és a terület (R, r, t)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (92-1. ábra).



92-1. ábra

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből* (1) és R, r, t egyenlőtlenségéből (2):

E. 17(1) $$2r \le R, \tag{1}$$

E. 20(3) $$3\sqrt{3}\, r^2 \le t \le \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2. \tag{2}$$

(2)-nél az egyenlőség egyszerre lép föl mindkét helyen az egyenlő oldalú háromszög esetén.
(1) *és* (2) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele*.

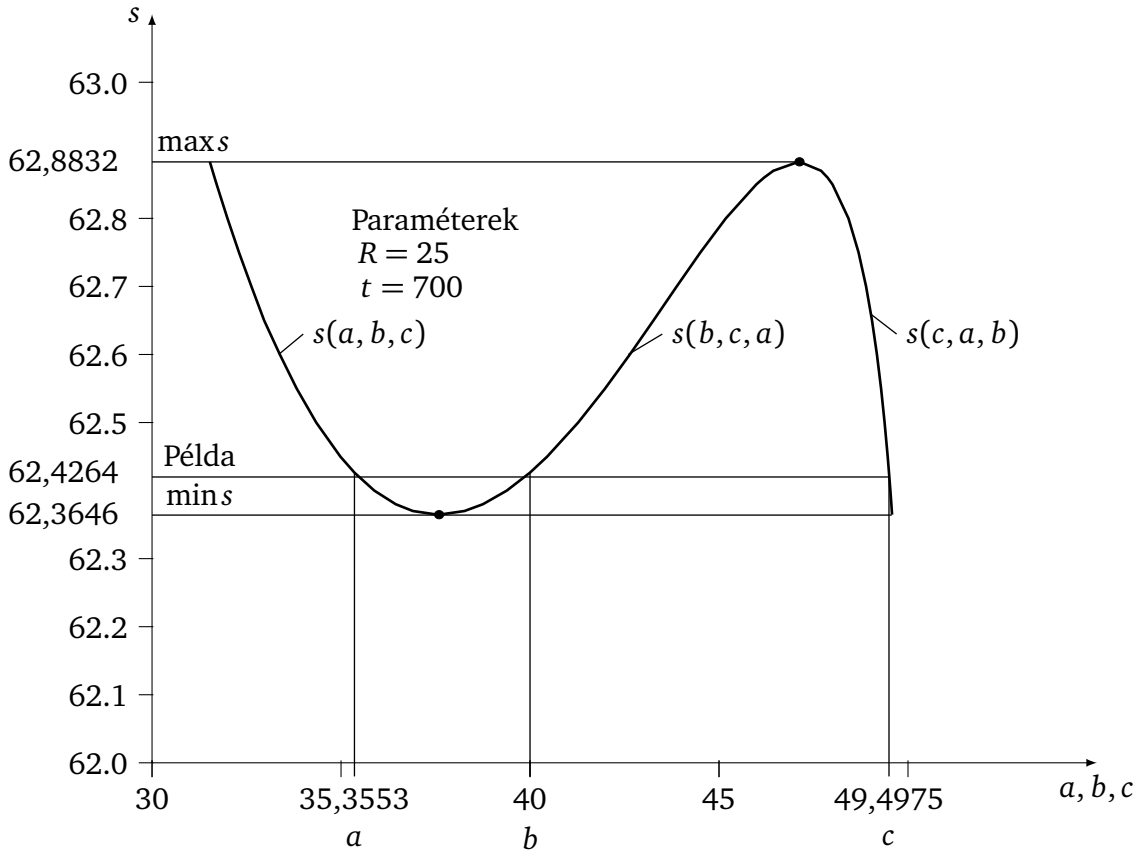
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

E. 32(4)

$$s = \frac{t}{r}, \tag{3}$$

$$k = 2s. \tag{4}$$

Most vegyük föl R-et és t-t (2) figyelembevételével, és keressünk feltételt r-re a 85. feladat (t, k, R) eredményeinek felhasználásával. A vizsgálatot, s változását R és t paraméterek mellett a 92-2. ábra mutatja. Egy $P(a,s)$, $Q(b,s)$ és $W(c,s)$ pont akkor és csak akkor van rajta a grafikonon, ha az a, b, c, s koordináták kielégítik a 85. feladat (4), (9), (15) és (16) egyenleteit. Vegyük észre, hogy az s függvény a, b, c független változói permutálhatók, továbbá $a = b$-nél s-nek minimuma, $b = c$-nél pedig maximuma van (92-2. ábra).

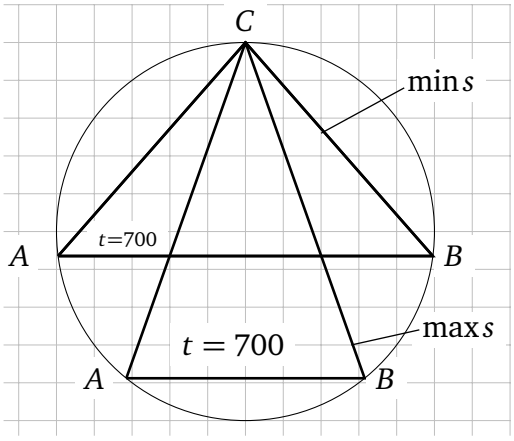


92-2. ábra

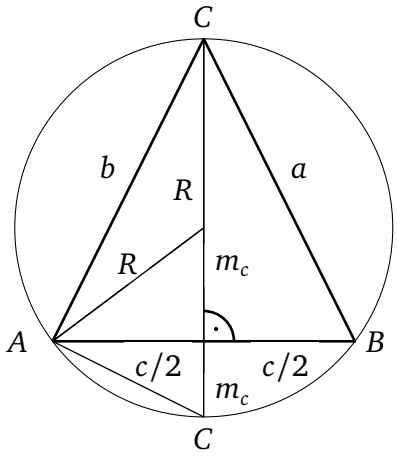
Megjegyzés: A 92-2. ábrában példaként a 85-1. ábra folytonos vonallal berajzolt (a, c, b) háromszögének (a, b, c) szimmetrikus párja jelenik meg elsőként (92-1. ábra). Az oldalak permutálása és/vagy valamelyik oldalra való tükrözés azonban az ottani (t, k, R), (rs, s, R) és a mostani (R, r, t), (R, r, rs) feladat szempontjából nem jelent különbséget, ugyanarra az eredményre vezet. Lásd még a 85. feladat példájának (a_{11}, b_{11}, c_1) megoldását.

Most forgassuk el a $b = c$ esetét úgy, hogy (b, c, a) helyére rendre (a, b, c) kerüljön, és rajzoljuk föl úgy, hogy a c oldalak párhuzamosak legyenek. Ezt megtehetjük, mivel az elforgatás következtében sem R, sem t, sem s, sem r, sem az oldalak hossza nem változik (92-3-1. ábra).

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



92-3-1. ábra



92-3-2. ábra

Mivel t állandó, és

$$r = \frac{t}{s}, \tag{5}$$

így

$$\min r = \frac{t}{\max s}, \tag{6}$$

$$\max r = \frac{t}{\min s}, \tag{7}$$

$$\min r \le r \le \max r. \tag{8}$$

A $\min s$-et és $\max s$-et, majd a $\min r$-et és a $\max r$-et ki is tudjuk számolni (92-3-1. ábra).

Az első lépésben számoljuk ki c-t (92-3-2. ábra):

$$t = \frac{c \cdot \left(R \pm \sqrt{R^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \right)}{2}, \tag{9}$$

$$R - \frac{2t}{c} = \pm\sqrt{R^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}, \qquad /()^2 \tag{10}$$

$$\cancel{R^2} - 2 \cdot \frac{2t}{c} \cdot R + \frac{4t^2}{c^2} = \cancel{R^2} - \frac{c^2}{4}, \qquad / \cdot 4c^2 \tag{11}$$

$$-16tRc + 16t^2 = -c^4, \tag{12}$$

$$\boxed{c^4 - 16Rt \cdot c + 16t^2 = 0.} \tag{13}$$

A (13) egyenlet megoldásának két pozitív valós gyöke adja a keresett két c-t.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Folytassuk a számítást R és t paraméterek felhasználásával:

$$R = 25; \qquad t = 700;$$

$$c \approx 31{,}5295; \qquad c \approx 49{,}5789,$$

$$m_c = \frac{2t}{c}, \tag{14}$$

$$m_c \approx 44{,}4029; \qquad m_c \approx 28{,}2378,$$

$$a = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2}, \tag{15}$$

$$a \approx 47{,}1184; \qquad a \approx 37{,}5751,$$

$$s = \frac{2a + c}{2}, \tag{16}$$

$$\max s \approx 62{,}8832, \qquad \min s \approx 62{,}3646,$$

$$r = \frac{t}{s}, \tag{17}$$

$$\min r \approx 11{,}1318, \qquad \max r \approx 11{,}2243,$$

$$\min r \le r \le \max r, \tag{18}$$

$$11{,}1318 < 11{,}2132 < 11{,}2243.$$

Az (1), (2) *és* (8) *egyenlőtlenségek együttes teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele. A megoldások száma ugyanaz, mint a 85. feladatnál.* Ha R-et és r-et választjuk paraméternek és $2r < R$, vagyis a háromszög nem egyenlő oldalú, akkor t várhatóan $\min t \le t \le \max t$ között kell legyen, ugyanis $t = r \cdot s$, és így $r \cdot \min s \le t \le r \cdot \max s$, lásd a 94-2. és a 99-2. ábrákat. A $\min s$ és a $\max s$ csak R-től és r-től függ, és a 99. (17)-ből elindulva számolhatjuk. Egy adott és megfelelő R, r, t-nél a megoldás legfeljebb három szimmetrikus pár lesz, mint a 85. feladatnál. A feladat megoldását javaslom a gyakorlottabb olvasónak.

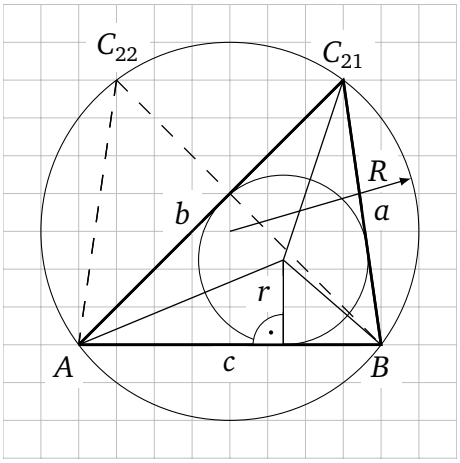
A vizsgálat programmal készült.

Most $(t, k, R) \overset{(85.\text{f.})}{\Longrightarrow} (a, b, c) \overset{(1.\text{f.})}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

93. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és a kerület (R, r, k)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (93-1. ábra).



93-1. ábra

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből* (1) és R, r, k $(k = 2s)$ egyenlőtlenségéből (2):

E. 17(1) $$2r \le R, \tag{1}$$

E. 19(9) $$6\sqrt{3}\, r \le 2s \le 3\sqrt{3}\, R. \tag{2}$$

(2)-nél az egyenlőség egyszerre lép föl mindkét helyen az egyenlő oldalú háromszög esetén.
(1) *és* (2) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele*.

$$k = 2s, \qquad s = \frac{k}{2}, \tag{3}$$

E. 32(4) $$t = r \cdot s. \tag{4}$$

Ha R-et és t-t választjuk paraméternek, és a háromszög nem egyenlő oldalú, vagyis $2r < R$, *akkor* $\max s$*-et,* $\min s$*-et és* $\max r$*-et, illetve* $\min r$*-et a 92. feladatban* (R, r, t) *leírtak szerint számoljuk. Lásd még a 92-2. ábrát.*

Ha R-et és r-et választjuk paraméternek, akkor $\max s$ *és* $\min s$ *a 99. feladatban* $(R, r, a + b)$ *leírtak szerint számolható, és csak* R, r*-től függ. Induljunk el 99. (17)-ből. Lásd még a 99-2., 99-3., 99-4. és 99-5. ábrákat.*

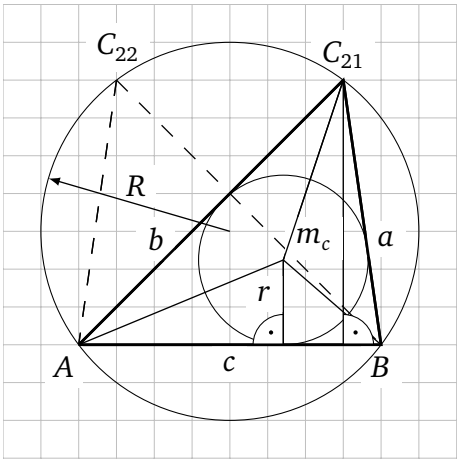
Egy adott és megfelelő R, r, s*-nél a megoldás legfeljebb három szimmetrikus pár lesz, mint a 85.* (rs, s, R) *feladatnál.*

Most $(t, k, R) \overset{(85.f.)}{\Longrightarrow} (a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

94. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy magasság (R, r, m_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (94-1. ábra).



94-1. ábra

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből* (1) és $m_c, 2R$ egyenlőtlenségéből (2):

E. 17(1) $$2r \le R, \tag{1}$$

$$m_c < 2R. \tag{2}$$

(1) *és* (2) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele*.

Folytassuk a következő ötismeretlenes (a, b, c, s, t) egyenletrendszerrel, ahol (4) tulajdonképpen t két egyenlete, vagyis öt egyenletünk van:

$$\begin{cases} R = \dfrac{abc}{4t}, & \text{E. 11(17)} \quad (3) \\ t = r \cdot s = \dfrac{c \cdot m_c}{2}; \quad \Leftrightarrow \quad c = \dfrac{2 \cdot r \cdot s}{m_c}, & \text{E. 32(4)} \quad (4) \\ t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (5) \\ a + b = 2s - c = s + (s-c). & (6) \end{cases}$$

Küszöböljük ki t-t és c-t, majd $(a+b)$-t és (ab)-t:

$$\begin{cases} ab = 2Rm_c, & (7) \\ r^2 s = \left(s^2 - s(a+b) + ab\right) \cdot (s-c), & (8) \end{cases}$$

$$r^2 s = 2Rm_c \cdot \left(s - \frac{2rs}{m_c}\right) - s \cdot \left(s - \frac{2rs}{m_c}\right)^2.$$

Átalakítás, majd nullára történő rendezés után s másodfokú egyenletéhez jutunk R, r, m_c paraméterekkel:

$$\boxed{\left(1 - \frac{2r}{m_c}\right)^2 \cdot s^2 + 2R \cdot (2r - m_c) + r^2 = 0.} \tag{9}$$

Az $s \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás további szükséges feltétele*. (10)

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Ezután c (4)-ből, $a+b$ (6)-ból, ab pedig (7)-ből számolható:

$$c=\frac{2\cdot r\cdot s}{m_c}. \tag{11}$$

A c pozitív lesz, ha s pozitív.

$$\begin{aligned} a+b&=p, & b&=p-a,\\ ab&=q, & a^2-pa+q&=0,\\ a_1&=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}; & a_2&=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2};\\ b_1&=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; & b_2&=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p>0, \qquad q>0, \qquad p^2-4q\geq 0. \tag{13}$$

A pozitív a,b,c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3)
$$|a-b|<c<a+b. \tag{14}$$

Az $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Ha $a=b$ vagy $a=c$ vagy $b=c$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Ha $2r=R$, akkor $a=b=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot m_c=\sqrt{3}R$, a háromszög egyenlő oldalú.

Példa. A 94-1. ábra adataiból elindulva:

$$R=25; \quad r=\frac{700}{20+30\sqrt{2}}\approx 11{,}2132; \quad m_c=35,$$

$$0{,}129057\cdot s^2-502{,}943725=0,$$

$$s_1\approx -62{,}4264; \qquad s_2\approx 62{,}4264,$$

$$c_2\approx 40,$$

$$\begin{aligned}(a+b)_2&\approx 84{,}8528,\\ (ab)_2&\approx 1750,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21}&\approx 35{,}3553; & a_{22}&\approx 49{,}4975;\\ b_{21}&\approx 49{,}4975; & b_{22}&\approx 35{,}3553. \end{aligned}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Látható, hogy csak a (2) indexű eset ad megoldást, amit a 94-1. ábra is mutat.

Az a_{22}, b_{22} megoldást az ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

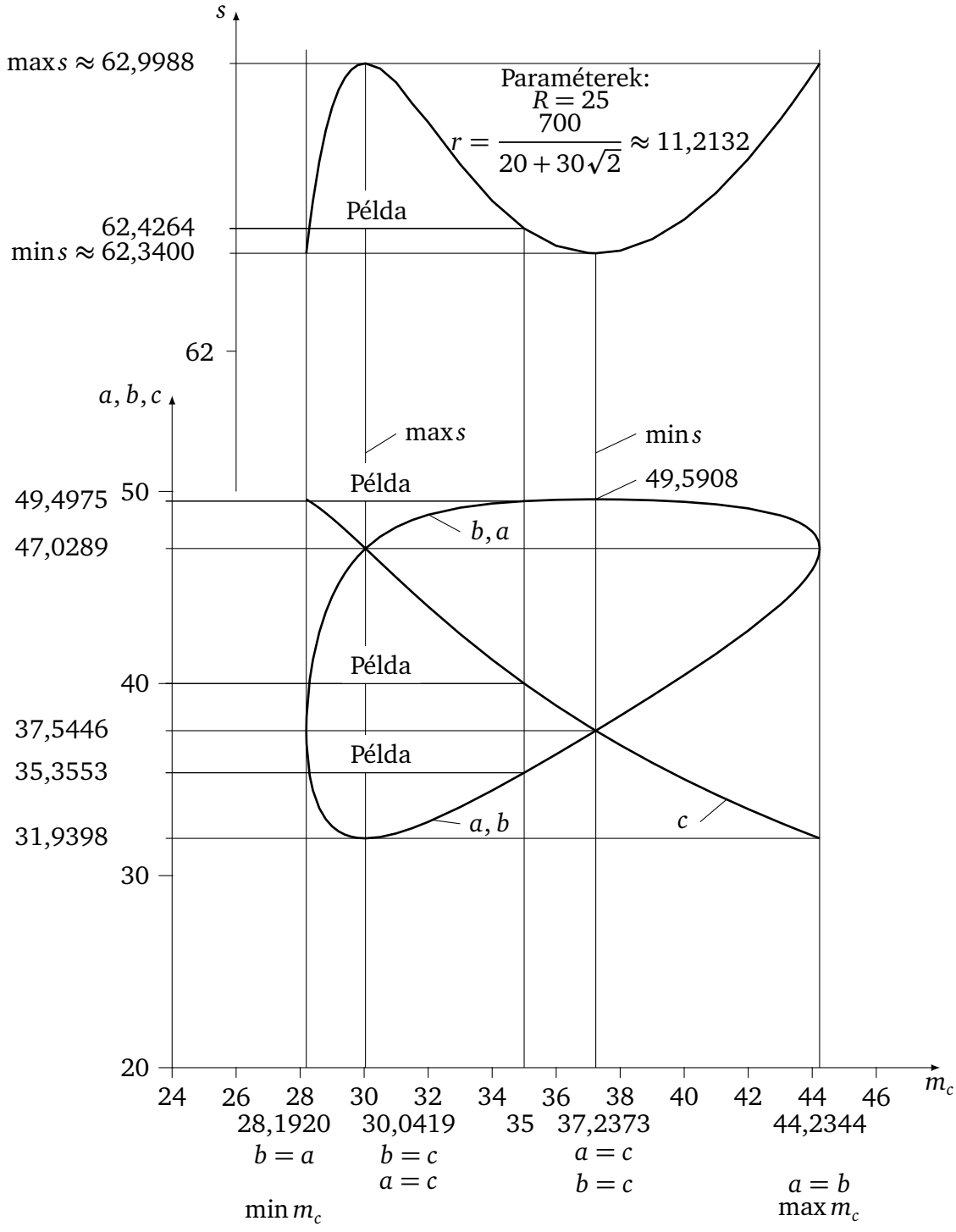
A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

A részletesebb vizsgálat:

Az R, r, m_c adatok felvétele után kiszámítjuk s-et, a-t, b-t és c-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon R-et és r-et paraméternek választva, majd felrajzoljuk a kapott síkgörbéket egy m_c, a, b, c, s koordináta-rendszerben. Látható, hogy $s(m_c)$ és $c(m_c)$ függvények, a, b síkgörbéje pedig $a(m_c)$, $b(m_c)$ függvényekre bontható (94-2. ábra).

Az ábrában a függvényeknél az m_c független változó jelölését az egyszerűség kedvéért most elhagytuk, továbbá az a, b és b, a első betűi azt az esetet jelölik, amikor $a \leq b$, második betűinél pedig $b \leq a$, ugyanis a két függvény felcserélhető, ami a példából is látszik.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



94-2. ábra

Az ábrából a példa $a < b$ megoldása is leolvasható.

Az R, r $(2r \le R)$ felvétele után $\min m_c(R,r)$ és $\max m_c(R,r)$ kiszámításához első lépésben számoljuk ki m_c-t $\max s$, illetve $\min s$-nél. Ezt (9) $s(m_c)$ implicit függvény m_c szerinti deriválásával, majd $s'(m_c) = 0$ egyenletből nyert

$$R\,m_c^2 - 6Rr\,m_c + 8Rr^2 + 2r^3 = 0 \tag{15}$$

egyenletből számolhatjuk. Ahol $s''(m_c) > 0$, ott lesz a minimum, ahol $s''(m_c) < 0$, ott lesz a maximum. Lásd a 94-2. ábrát.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az ábra paramétereivel:

$$R = 25; \quad r = \frac{700}{20 + 30\sqrt{2}} \approx 11{,}2132;$$

min s-nél $m_c \approx 37{,}2373$; max s-nél $m_c \approx 30{,}0419$.

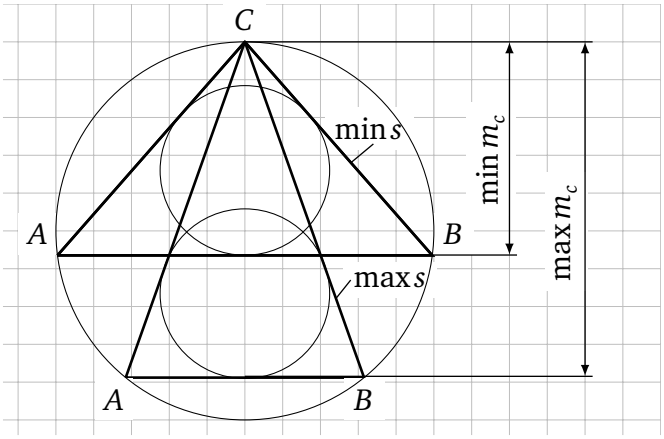
A 94-2. ábrából is látható, hogy három egyenlő szárú egybevágó párról van szó, ahol a három pár egymás elforgatottja, és a pár egyik tagja max$s$-hez, másik tagja min$s$-hez tartozik. Az elforgatott esetek közül válasszuk ki $b = c$-t, ugyanis itt ismerjük m_c-t és keressük m_a-t.

$$a = 2s - (b + c) = 2s - 2c = 2(s - c),$$

$$m_a = \frac{c \cdot m_c}{a} = \frac{\frac{2rs}{m_c} \cdot m_c}{2 \cdot \left(s - \frac{2rs}{m_c}\right)} = \frac{2rs}{2s \cdot \left(1 - \frac{2r}{m_c}\right)} = \frac{r}{1 - \frac{2r}{m_c}},$$

$$\boxed{m_a = \frac{m_c \cdot r}{m_c - 2r}.} \tag{16}$$

min $m_a \approx 28{,}1920$; max $m_a \approx 44{,}2344$.



94-3. ábra

Az oldalak permutálása a visszaforgatása után (a, b, c, m_a) helyére (c, a, b, m_c) lép, vagyis az $a = b$, max m_c, ill. a $b = a$, min m_c esetét kapjuk, tehát:

$$\min m_c = \min m_a,$$
$$\max m_c = \max m_a$$

lesz (94-3. ábra).

Az R, r $(2r \le R)$ induló adatok felvétele után tehát:

$$\boxed{2r \le R, \qquad \min m_c \le m_c \le \max m_c,} \tag{17}$$

a példánál

$$2 \cdot 11{,}2132 < 25; \qquad 28{,}1920 < 35 < 44{,}2344;$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

együttes teljesülése szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

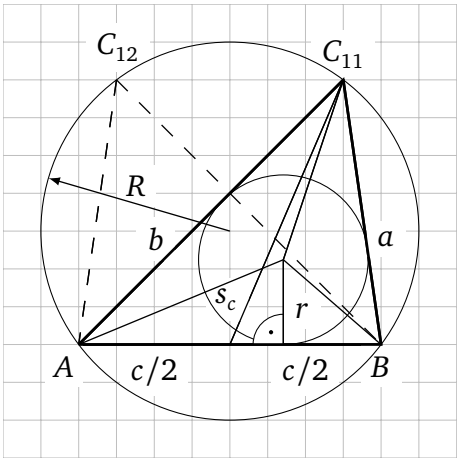
A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.
Lásd a 94-1. és a 94-2. ábrákat. A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

Megjegyzés: A 94-2. ábrán szárnyprofil jellegű zárt görbét kapunk. A szárnyprofilok elmélete, amivel a komplex függvénytan foglalkozik, messze túlmutat e könyv keretein. Lásd még ebben a témában: Fazekas Ferenc: Műszaki Matematikai Gyakorlatok B IV. Komplex Függvénytan 190., 191., 192. oldal, Zsukovszkij-féle szárnyprofil.

95. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy súlyvonal (R, r, s_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (95-1. ábra).



95-1. ábra

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből* (1), valamint s_c súlyvonal és $2R$ egyenlőtlenségéből (2):

E. 17(1) $$2r \le R, \tag{1}$$

$$s_c < 2R. \tag{2}$$

(1) *és* (2) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele.*

Folytassuk a következő ötismeretlenes (a,b,c,s,t) egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} R = \dfrac{abc}{4t}, & \text{E. 11(17)} \quad (3) \\ t = r \cdot s, & \text{E. 32(4)} \quad (4) \\ t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (5) \\ a+b = 2s-c \quad \Leftrightarrow \quad s-c = (a+b)-s, & \quad (6) \\ 4s_c^2 = 2a^2+2b^2-c^2. & \text{E. 24(8)} \quad (7) \end{cases}$$

(3)-ból és (4)-ből fejezzük ki c-t:

$$\boxed{c = \frac{4Rrs}{ab}.} \tag{8}$$

$$\begin{cases} 4Rrs = ab \cdot c, & (9) \\ r^2 s = ab \cdot (s-c) - s \cdot (s-c)^2, & (10) \\ 4s_c^2 = 2 \cdot (a+b)^2 - 4ab - c^2. & (11) \end{cases}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Majd (9)-ből és (10)-ből:

$$r^2 = ab - 4Rr - (s-c)^2, \tag{12}$$

$$(s-c)^2 = ab - 4Rr - r^2, \tag{13}$$

$$\left(s - \frac{4Rrs}{ab}\right)^2 = ab - 4Rr - r^2, \tag{14}$$

$$s^2 \cdot \left(1 - \frac{4Rr}{ab}\right)^2 = ab - 4Rr - r^2, \tag{15}$$

$$s^2 = \frac{(ab)^2 \cdot (ab - 4Rr - r^2)}{(ab - 4Rr)^2} \qquad \Big/\sqrt{\ }. \tag{16}$$

$$\boxed{s = \frac{ab}{ab - 4Rr}\sqrt{ab - 4Rr - r^2}.} \tag{17}$$

Az $ab - 4Rr - r^2 > 0 \quad (s \in \mathbf{R}^+)$ *a megoldás további szükséges feltétele.* (18)

Ezután alakítsuk át (11)-et:

$$4s_c^2 = (a+b)^2 - 4ab + (a+b+c)\cdot(a+b-c), \tag{19}$$

$$4s_c^2 = \big(s + (s-c)\big)^2 - 4ab + 4s\cdot(s-c), \tag{20}$$

majd (8) és (13) felhasználásával:

$$4s_c^2 = s^2 + 6s\cdot(s-c) - 3ab - 4Rr - r^2, \tag{21}$$

$$4s_c^2 = 7s^2 - 6s\cdot\frac{4Rr\cdot s}{ab} - 3ab - 4Rr - r^2, \tag{22}$$

$$4s_c^2 = s^2\cdot\left(7 - \frac{24Rr}{ab}\right) - 3ab - 4Rr - r^2. \tag{23}$$

Most (16) helyettesítésével küszöböljük ki s^2-et:

$$4s_c^2 = \frac{(ab)^2(ab - 4Rr - r^2)}{(ab-4Rr)^2}\cdot\frac{7ab - 24Rr}{ab} - (3ab + 4Rr + r^2). \tag{24}$$

Átalakítás után rendezzük az egyenletet ab fogyó hatványai szerint nullára. Így ab harmadfokú egyenletéhez jutunk R, r, s_c paraméterekkel:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\begin{aligned}(ab)^3-(8Rr+2r^2+s_c^2)(ab)^2+\\+(20R^2r^2+8Rr^3+8s_c^2Rr)\,ab-\\-(16R^3r^3+4R^2r^4+16s_c^2R^2r^2)=0.\end{aligned}\tag{25}$$

Ezután s (17)-ből, c (8)-ból, végül $a+b$ (6)-ból számolható:

Az $ab,s,c,(a+b)\in\mathbf{R}^+$ *a megoldás további szükséges feltétele.* (26)

$$\begin{aligned}a+b&=p, & b&=p-a,\\ ab&=q, & a^2-pa+q&=0,\\ a_1&=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}; & a_2&=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2};\\ b_1&=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; & b_2&=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.\end{aligned}\tag{27}$$

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p>0,\qquad q>0,\qquad p^2-4q\geq 0.\tag{28}$$

A pozitív a,b,c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3) $$|a-b|<c<a+b.\tag{29}$$

Az $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ *és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Ha $a=b$ vagy $a=c$ vagy $b=c$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Ha $2r=R$, akkor $a=b=c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot s_c=\sqrt{3}R$, a háromszög egyenlő oldalú.

Példa. A 95-1. ábra adataiból elindulva:

$$R=25;\quad r=\frac{700}{20+30\sqrt{2}}\approx 11{,}2132;\quad s_c=5\sqrt{58}\approx 38{,}0789,$$

$$(ab)^3-3944{,}11\cdot(ab)^2+5105508{,}65\cdot ab-2215170458{,}90=0,$$

$$\begin{aligned}(ab)_1&\approx 1750; & (ab)_2&=\text{komplex}; & (ab)_3&=\text{komplex},\\ s_1&\approx 62{,}4264;\\ c_1&\approx 40;\\ (a+b)_1&\approx 84{,}8528;\\ a_{11}&\approx 35{,}3553; & a_{12}&\approx 49{,}4975;\\ b_{11}&\approx 49{,}4975; & b_{12}&\approx 35{,}3553.\end{aligned}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Látható, hogy csak az (1) indexszel jelölt eset ad megoldást. Az a_{12}, b_{12} megoldást a 95-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, amely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

A részletesebb vizsgálat: Hasonlóképpen zajlik, mint a 94. feladatnál. R, r $(2r \le R)$ felvétele után itt is várhatóan s_c egy minimum és egy-egy maximum között kell legyen. A $\min s_c(R,r)$ és $\max s_c(R,r)$ kiszámításához első lépésben számoljuk ki s_c-t $\max s$, illetve $\min s$-nél. Ezt (17) $s(ab)$ (R, r paraméterek) függvény ab szerinti deriválásával, majd $s'(ab)=0$ egyenletből nyert

$$\boxed{(ab)^2 - 12Rr(ab) + 8Rr^2(4R+r) = 0} \tag{30}$$

egyenletből számolhatjuk. Ahol $s''(ab) < 0$, ott lesz a maximum, ahol $s''(ab) > 0$, ott lesz a minimum. A 95-1. ábra adataival:

$$R = 25; \quad r = \frac{700}{20 + 30\sqrt{2}} \approx 11{,}2132;$$

$$(ab)_1 \approx 1502{,}0936; \qquad (ab)_2 \approx 1861{,}8675,$$

$$s = \frac{ab}{ab - 4Rr}\sqrt{ab - 4Rr - r^2},$$

$$\max s \approx 62{,}9988; \qquad \min s \approx 62{,}3400,$$

$$c = \frac{4Rrs}{ab},$$

$$c \approx 47{,}0289; \qquad c \approx 37{,}5446,$$

$$a + b = 2s - c,$$

$$a + b \approx 78{,}9687; \qquad a + b \approx 87{,}1354,$$

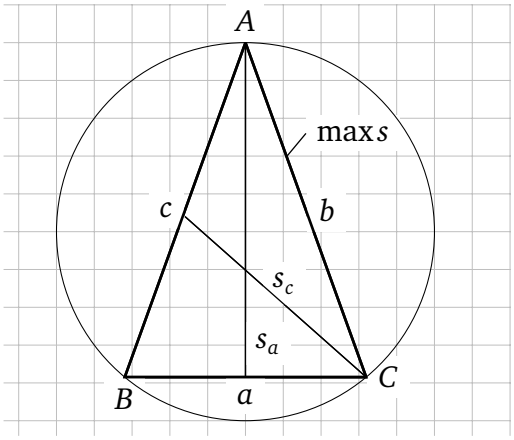
$$s_c = \frac{\sqrt{2(a+b)^2 - 4ab - c^2}}{2},$$

$$s_c \approx 32{,}6038; \qquad s_c \approx 39{,}7746.$$

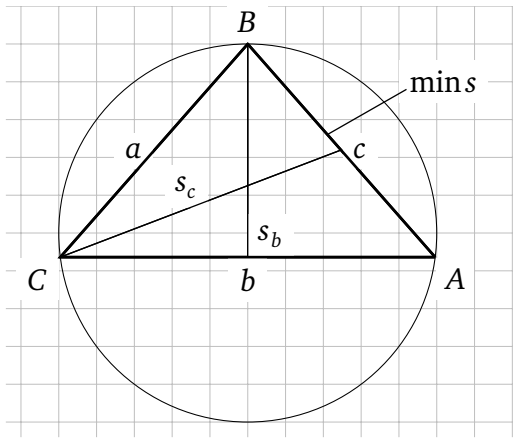
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Most $a+b$ és ab-ből számolható a és b:

$$a \approx 31{,}9398; \quad b \approx 47{,}0289; \quad c \approx 47{,}0289; \quad b = c; \qquad a \approx 37{,}5446; \quad b \approx 49{,}5908; \quad c \approx 37{,}5446; \quad a = c.$$



95-2. ábra



95-3. ábra

$$s_a = \frac{\sqrt{2(b+c)^2 - 4bc - a^2}}{2}; \qquad s_b = \frac{\sqrt{2(c+a)^2 - 4ca - b^2}}{2},$$

$$\max s_a \approx 44{,}2344; \qquad \min s_b \approx 28{,}1920.$$

Látható, hogy itt is, mint az a 94-2. ábránál volt, három egyenlő szárú, egybevágó párról van szó, ahol a három pár egymás elforgatottja, és a pár egyik tagja max s-hez, a másik tagja min s-hez tartozik. A kapott két háromszög oldalainak permutálása (visszaforgatása) után éppen a keresett max s_c-t, illetve min s_c-t kapjuk, lásd a 95-2. és a 95-3. ábrákat.

$$\max s_c = \max s_a; \qquad \min s_c = \min s_b.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az R, r induló adatok felvétele után tehát:

$$\boxed{2r \le R; \qquad \min s_c \le s_c \le \max s_c,} \tag{31}$$

a példában $2 \cdot 11{,}2132 < 25; \quad 28{,}1920 < 38{,}0789 < 44{,}2344,$

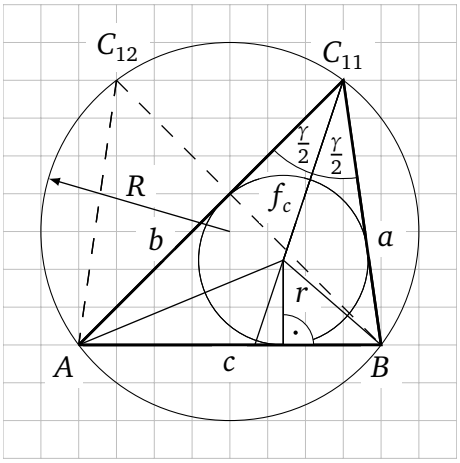
együttes teljesülése szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

96. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy belső szögfelező (R, r, f_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (96-1. ábra).



96-1. ábra

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből* (1), valamint f_c belső szögfelező és $2R$ egyenlőtlenségéből (2):

E. 17(1) $\qquad 2r \le R, \tag{1}$

$$f_c < 2R. \tag{2}$$

(1) *és* (2) *a megoldás szükséges feltétele*.

Folytassuk a következő ötismeretlenes (a, b, c, s, t) egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} R = \dfrac{abc}{4t}, & \text{E. 11(17)} \quad (3) \\ t = r \cdot s, & \text{E. 32(4)} \quad (4) \\ t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (5) \\ a + b = 2s - c \quad \Leftrightarrow \quad s - c = (a+b) - s, & (6) \\ f_c^2 = ab \cdot \left(1 - \dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right). & \text{E. 29(3)} \quad (7) \end{cases}$$

(3)-ból és (4)-ből fejezzük ki c-t:

$$\boxed{c = \frac{4Rrs}{ab},} \tag{8}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\begin{cases} 4Rrs = ab\cdot c, & (9)\\ r^2\cdot s = ab\cdot(s-c) - s\cdot(s-c)^2, & (10)\\ f_c^2\cdot(a+b)^2 = ab\cdot(a+b+c)\cdot(a+b-c), & (11)\end{cases}$$

majd (9)-ből és (10)-ből:

$$r^2 = ab - 4Rr - (s-c)^2, \tag{12}$$

$$(s-c)^2 = ab - 4Rr - r^2. \tag{13}$$

A 95. feladatban található átalakítás után (14)-hez jutunk:

$$\boxed{s = \frac{ab}{ab-4Rr}\sqrt{ab-4Rr-r^2}.} \tag{14}$$

Az $ab - 4Rr - r^2 > 0 \quad (s\in\mathbf{R}^+)$ *a megoldás további szükséges feltétele.* (15)

Ezután alakítsuk át (11)-et:

$$f_c^2\cdot\big(s+(s-c)\big)^2 = ab\cdot 4\cdot s\cdot(s-c), \tag{16}$$
$$f_c^2 s^2 + 2f_c^2 s\cdot(s-c) + f_c^2\cdot(s-c)^2 = 4s\cdot(s-c)\cdot ab, \tag{17}$$
$$f_c^2 s^2 + \big(2f_c^2 - 4ab\big)\cdot s\cdot(s-c) + f_c^2\cdot(s-c)^2 = 0, \tag{18}$$
$$f_c^2 s^2 + \big(2f_c^2 - 4ab\big)\cdot\left(s^2 - s\cdot\frac{4Rrs}{ab}\right) + f_c^2\cdot\big(ab-4Rr-r^2\big) = 0. \tag{19}$$

Beszorzás után helyettesítsük s^2-et (14)-ből, és rendezzük az egyenletet ab fogyó hatványai szerint nullára. Így az ab ismeretlen harmadfokú egyenletéhez jutunk R, r, f_c paraméterekkel:

$$\boxed{(ab)^3 - \big(f_c^2 + 4Rr\big)(ab)^2 + 4f_c^2 Rr(ab) - 4f_c^2 R^2 r^2 = 0.} \tag{20}$$

Ezután s (14)-ből, c (8)-ból, végül $a+b$ (6)-ból számolható:

Az $ab, s, c, (a+b)\in\mathbf{R}^+$ *a megoldás további szükséges feltétele.* (21)

$$\boxed{\begin{aligned} a+b &= p, & b &= p-a,\\ ab &= q, & a^2 - pa + q &= 0,\\ a_1 &= \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}; & a_2 &= \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2};\\ b_1 &= \frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; & b_2 &= \frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}. \end{aligned}} \tag{22}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p > 0, \qquad q > 0, \qquad p^2 - 4q \geq 0. \tag{23}$$

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3) $$|a - b| < c < a + b. \tag{24}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Ha $a = b$ vagy $a = c$ vagy $b = c$, akkor a háromszög egyenlő szárú.

Ha $2r = R$, akkor $a = b = c = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot f_c = \sqrt{3}R$, a háromszög egyenlő oldalú.

Példa. A 96-1. ábra adataiból elindulva:

$$R = 25; \quad r = \frac{700}{20 + 30\sqrt{2}} \approx 11{,}2132; \quad f_c = \frac{35\sqrt{10}}{3} \approx 36{,}8932;$$

$$\begin{aligned} (ab)^3 - 2482{,}4315 \cdot (ab)^2 + \\ + 1526241{,}5788 \cdot (ab) - \\ - 427851432{,}858 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ab)_1 &\approx 1750; \qquad (ab)_2 = \text{komplex}; \qquad (ab)_3 = \text{komplex}; \\ s_1 &\approx 62{,}4264; \\ c_1 &\approx 40; \\ (a+b)_1 &\approx 84{,}8528; \\ a_{11} &\approx 35{,}3553; \qquad a_{12} \approx 49{,}4975; \\ b_{11} &\approx 49{,}4975; \qquad b_{12} \approx 35{,}3553. \end{aligned}$$

Látható, hogy csak az (1) indexszel jelölt eset ad megoldást. Az a_{12}, b_{12} megoldást a 96-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, amely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

A részletesebb vizsgálat: Most mellőzzük. Az azonban az eddigiekből is látszik, hogy $R, r (2r \leq R)$ induló adatok felvétele után f_c egy minimum és egy maximum között kell legyen, vagyis:

$$\boxed{2r \leq R, \qquad \min f_c \leq f_c \leq \max f_c,} \tag{25}$$

ami csak R-től és r-től függ és így (1) *és* (25) *egyenlőtlenségek együttes teljesülése szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele*. Lásd még a 94. (R, r, m_c) és a 95. (R, r, s_c) feladatokat.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Ha R és r ugyanaz, akkor $a = b$-nél $\min m_c = \min f_c = \min s_c$ és $\max m_c = \max f_c = \max s_c$, lásd még az E. 23., *Magasság, szögfelező és a súlyvonal közötti egyenlőtlenséget*.

Ha $R = 25, \quad r = \dfrac{700}{20 + 30\sqrt{2}} \approx 11{,}2132,$ akkor

$$\min f_c \approx 28{,}1920; \qquad \max f_c \approx 44{,}2344; \tag{26}$$

$$b = a \approx 37{,}5446; \qquad a = b \approx 47{,}0289. \tag{27}$$

Lásd még a 94-2. ábrát.

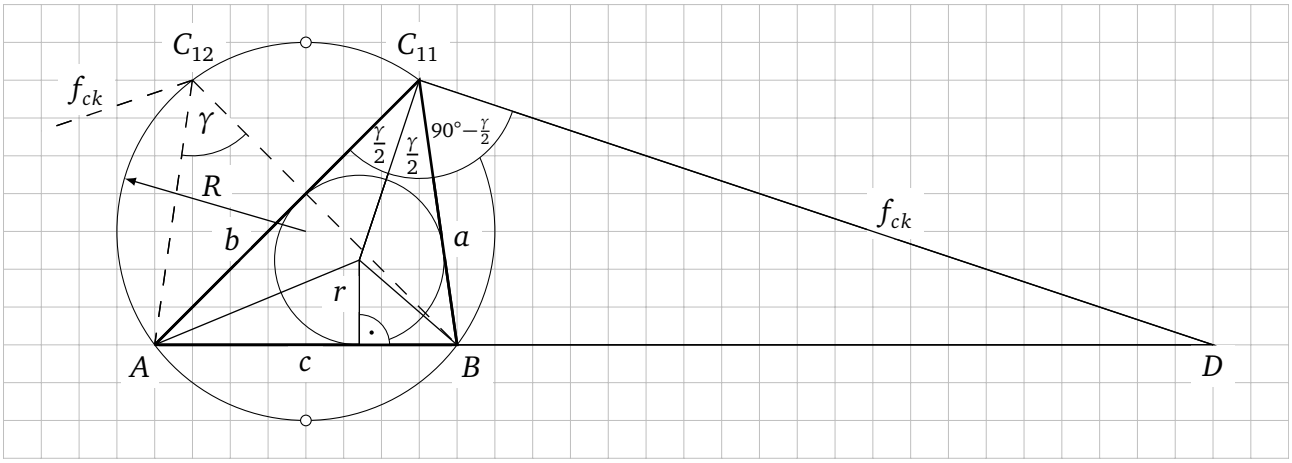
Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

97. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy külső szögfelező (R, r, f_{ck})

Rajzoljunk fel egy ABC háromszöget úgy, hogy:

E. 2(3) $$a < b \iff \alpha < \beta < 180^\circ - \alpha \Rightarrow \alpha < 90^\circ,$$

és jelöljük a választott adatokat (97-1. ábra).



97-1. ábra

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből*:

E. 17(1) $$2r < R, \qquad a \neq b, \tag{1}$$

hiszen a háromszög most egyenlő oldalú nem lehet.

(1) *a megoldás szükséges feltétele*.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Folytassuk a következő ötismeretlenes (a, b, c, s, t) egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} R = \dfrac{abc}{4t}, & \text{E. 11(17)} \quad (2) \\ t = r \cdot s, & \text{E. 32(4)} \quad (3) \\ t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (4) \\ a+b = 2s-c; \quad \Leftrightarrow \qquad s-c = (a+b)-s, & (5) \\ f_{ck}^2 = ab \cdot \left(\dfrac{c^2}{(a-b)^2} - 1 \right), \qquad a \neq b. & \text{E. 31(3)} \quad (6) \end{cases}$$

(2)-ből és (3)-ból fejezzük ki c-t:

$$\boxed{c = \frac{4Rrs}{ab},} \tag{7}$$

$$\begin{cases} 4Rrs = ab \cdot c, & (8) \\ r^2 \cdot s = ab \cdot (s-c) - s \cdot (s-c)^2, & (9) \\ f_{ck}^2 \cdot (a-b)^2 = ab \cdot \underbrace{(c+a-b)}_{2s-2b} \cdot \underbrace{(c-a+b)}_{2s-2a}, & (10) \end{cases}$$

majd (8)-ból és (9)-ből kapjuk, hogy:

$$r^2 = ab - 4Rr - (s-c)^2, \tag{11}$$

$$(s-c)^2 = ab - 4Rr - r^2. \tag{12}$$

A 95. feladatban található átalakítás után (13)-hoz jutunk:

$$\boxed{s = \frac{ab}{ab-4Rr}\sqrt{ab-4Rr-r^2}.} \tag{13}$$

Az $ab - 4Rr - r^2 > 0 \quad (s \in \mathbf{R}^+)$ *a megoldás további szükséges feltétele.* (14)

Ezután alakítsuk át (10)-et:

$$f_{ck}^2 \cdot \left((a+b)^2 - 4ab \right) = 4ab \cdot (s-a) \cdot (s-b), \tag{15}$$

$$f_{ck}^2 \cdot \left((2s-c)^2 - 4ab \right) = 4ab \cdot \frac{r^2 s}{s-c}. \tag{16}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Helyettesítsük c-t (7)-ből:

$$f_{ck}^2 \cdot \left(2s - \frac{4Rrs}{ab}\right)^2 - f_{ck}^2 \cdot 4ab = 4ab \cdot \frac{r^2 \cdot s}{s - \frac{4Rrs}{ab}}, \tag{17}$$

$$f_{ck}^2 \cdot s^2 \cdot \left(\frac{2ab - 4Rr}{ab}\right)^2 - f_{ck}^2 \cdot 4ab = 4ab \cdot \frac{r^2 \cdot ab}{ab - 4Rr}. \tag{18}$$

Helyettesítsük (13) négyzetét, így s^2-et kiküszöbölhetjük:

$$f_{ck}^2 \cdot \frac{(ab)^2 \cdot (ab - 4Rr - r^2)}{(ab - 4Rr)^2} \cdot \frac{(2ab - 4Rr)^2}{(ab)^2} - f_{ck}^2 \cdot 4ab = \frac{4r^2 \cdot (ab)^2}{ab - 4Rr}. \tag{19}$$

Átalakítás után az ab ismeretlen harmadfokú egyenletéhez jutunk R, r, f_{ck} paraméterekkel:

$$\begin{aligned}(ab)^3 - \left(4Rr - f_{ck}^2\right)(ab)^2 - \\ - 4Rf_{ck}^2\left(R + r\right) ab + \\ + 4R^2 r f_{ck}^2\left(4R + r\right) = 0.\end{aligned} \tag{20}$$

Ezután s (13)-ból, c (7)-ből, végül $a + b$ (5)-ből számolható:

Az $ab, s, c, (a+b) \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás további szükséges feltétele.* (21)

$$\begin{aligned} a + b &= p, & b &= p - a, \\ ab &= q, & a^2 - pa + q &= 0, \\ a_1 &= \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}; & a_2 &= \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}; \\ b_1 &= \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}; & b_2 &= \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p > 0, \qquad q > 0, \qquad p^2 - 4q > 0, \tag{23}$$

hiszen a háromszög most sem $a = b$ egyenlő szárú, sem egyenlő oldalú nem lehet.

A c (7)-ből számolható és pozitív lesz, ha ab és s pozitív.

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3) $$0 < |a - b| < c < a + b, \qquad a \neq b. \tag{24}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ *és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

A háromszög egyenlő szárú lesz $a = c$ vagy $b = c$ esetén, de egyenlő oldalú nem lehet.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Példa. A 97-1. ábra adataiból elindulva:

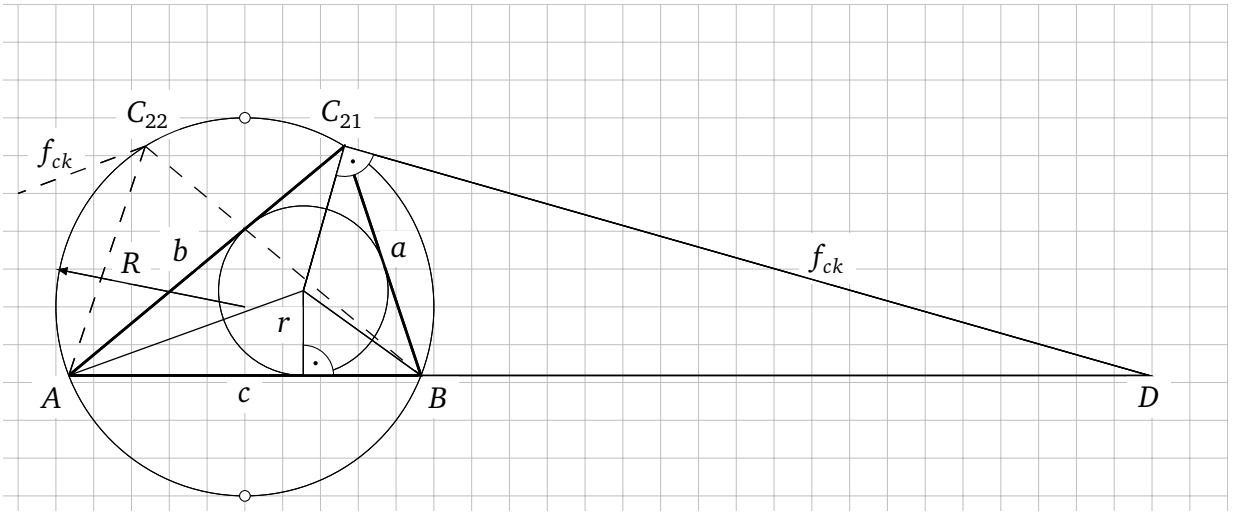
$$R = 25; \quad r = \frac{700}{20 + 30\sqrt{2}} \approx 11{,}2132; \quad f_{ck} = 35\sqrt{10} \approx 110{,}6797,$$

$$\begin{aligned}(ab)^3 + 11\,128{,}6802 \cdot (ab)^2 - \\ - 44\,361\,176{,}4271 \cdot ab + \\ + 38\,191\,098\,417{,}3 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ab)_1 &\approx 1750; & (ab)_2 &\approx 1516{,}0723; & (ab)_3 &\approx -14394{,}7520; \\ s_1 &\approx 62{,}4264; & s_2 &\approx 62{,}9919; & & \\ c_1 &\approx 40; & c_2 &\approx 46{,}5902; & & \\ (a+b)_1 &\approx 84{,}8528; & (a+b)_2 &\approx 79{,}3936; & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &\approx 35{,}3553; & a_{12} &\approx 49{,}4975; & a_{21} &\approx 31{,}9661; & a_{22} &\approx 47{,}4275; \\ b_{11} &\approx 49{,}4975; & b_{12} &\approx 35{,}3553; & b_{21} &\approx 47{,}4275; & b_{22} &\approx 31{,}9661. \end{aligned}$$

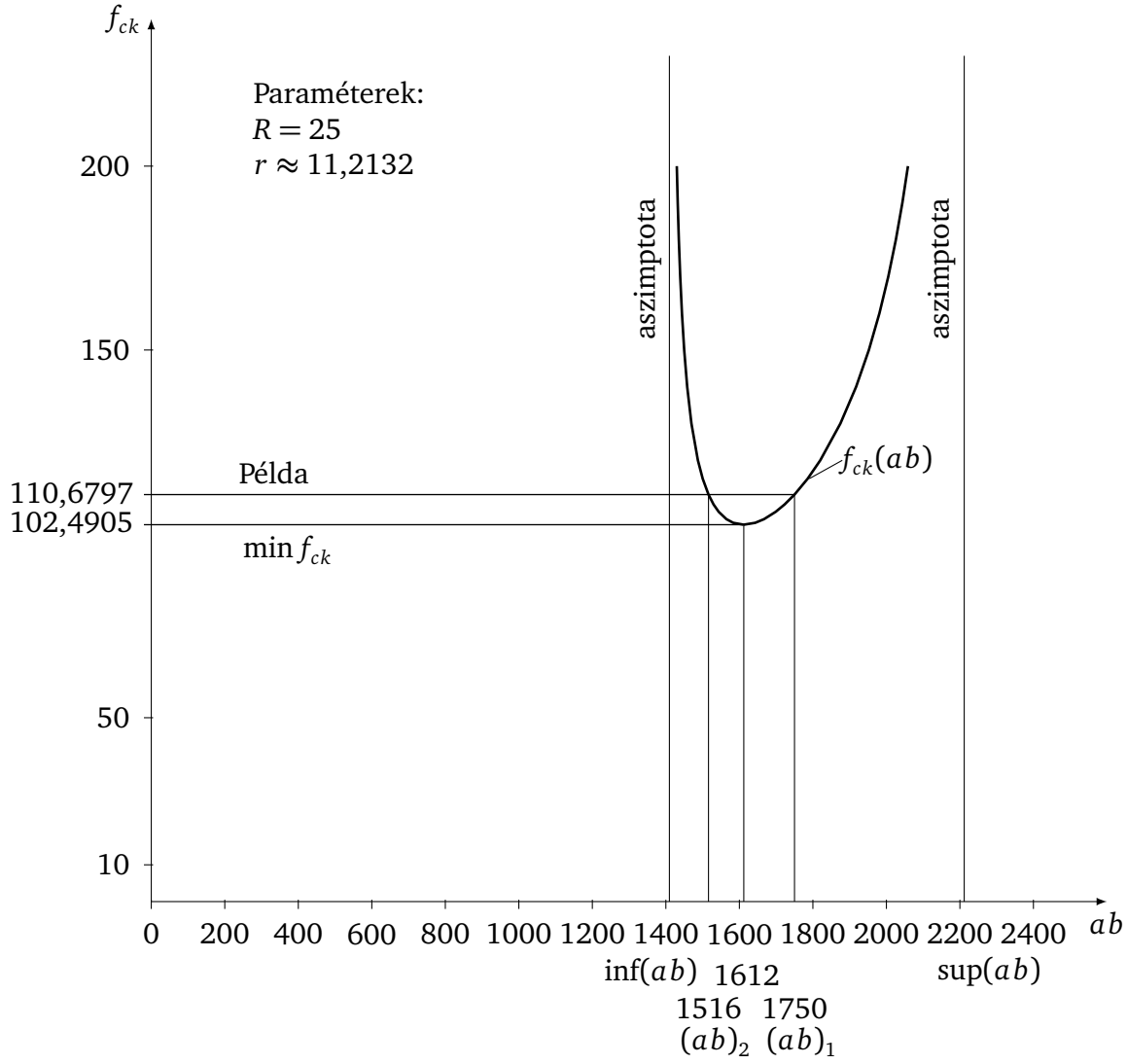
Látható, hogy csak az (1) és a (2) indexszel jelölt eset ad megoldást. A példa (2) indexszel jelölt két megoldását a 97-2. ábra mutatja. Az a_{12}, b_{12} megoldást a 97-1. ábrán, az a_{22}, b_{22} megoldást pedig a 97-2. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.
A megoldások száma 0, 2 (egy szimmetrikus pár), vagy 4 (két szimmetrikus pár) lehet. A példában 4, két szimmetrikus pár.



97-2. ábra

A részletesebb vizsgálat: Az R, r, f_{ck} adatok felvétele után kiszámoljuk ab-t, majd a-t és b-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon R-et és r-et paraméternek választva, majd felrajzoljuk a síkgörbe grafikonját egy ab, f_{ck} koordináta-rendszerben. Látható, hogy függvényt kapunk (97-3. ábra).

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



97-3. ábra

Az ábrából a példa megoldása ($(ab)_1$, $(ab)_2$) is leolvasható.

Az $f_{ck}(ab)$ függvénynek minimuma van az

$$\inf(ab) < ab < \sup(ab) \tag{25}$$

határokon belül, ezért (25) *a megoldás további szükséges feltétele.*

Az $\inf(ab)$ **és a** $\sup(ab)$ **kiszámítása.**

Keressük azt a két ab-t, ahol az $f_{ck}(ab)$ függvény határértéke (jobb oldali, bal oldali) végtelen (97-3. ábra).

Mivel a külső f_{ck} és a belső f_c szögfelező egyenese merőleges egymásra, így:

$$\inf(ab) = (ab)_{\min f_c} \quad \text{a } \min f_c\text{-nél}, \qquad \sup(ab) = (ab)_{\max f_c} \quad \text{a } \max f_c\text{-nél}. \tag{26}$$

Lásd még a 96. (26)-ot és 96. (27)-et.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Így a 97-3. ábra paramétereivel, ha

$$R = 25; \quad r = \frac{700}{20 + 30\sqrt{2}} \approx 11{,}2132,$$

akkor

$$\inf(ab) \approx 37{,}5446^2 \approx 1409{,}5996, \qquad \sup(ab) \approx 47{,}0289^2 \approx 2211{,}7207.$$

Egy másik út a (20)-ból kifejezett $f_{ck}(ab)$ függvény vizsgálata:

$$f_{ck}(ab) = \sqrt{\frac{-(ab)^3 + 4Rr(ab)^2}{(ab)^2 - \left(4R^2 + 4Rr\right) ab + 16R^3r + 4R^2r^2}}. \tag{27}$$

A függvény határértéke (jobb oldali, bal oldali) végtelen, ha a gyök alatti törtben $ab > 0$, és véges számláló mellett az azonos előjelű nevező közelít a nullához (97-3. ábra).

$$2R \cdot \left(R + r - \sqrt{R \cdot (R - 2r)}\right) < ab < 2R \cdot \left(R + r + \sqrt{R \cdot (R - 2r)}\right). \tag{28}$$

Az ábra paramétereivel: $R = 25$, $r \approx 11{,}2132$.

$$\inf(ab) \approx 1409{,}5996 < ab < 2211{,}7207 \approx \sup(ab). \tag{29}$$

A $\min f_{ck}(ab)$ **kiszámítása.**

A $\min f_{ck}(ab)$-hoz tartozó ab-t az $f'_{ck}(ab) = 0$ egyenletből nyert

$$\boxed{\begin{aligned}(ab)^3 - (8R^2 + 8Rr)(ab)^2 + \\ + (64R^3r + 28R^2r^2)\, ab - \\ - (128R^4r^2 + 32R^3r^3) = 0\end{aligned}} \tag{30}$$

egyenletből számoljuk. A 97-3. ábra paramétereivel:

$$R = 25; \quad r = \frac{700}{20 + 30\sqrt{2}} \approx 11{,}2132,$$

$$(ab)_1 \approx 921{,}0433; \qquad (ab)_2 \approx 1611{,}7566; \qquad (ab)_3 \approx 4709{,}8407,$$

$$(ab)_1 < \inf(ab); \qquad\qquad (ab)_3 > \sup(ab).$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A keresett minimum hely tehát $(ab)_2 \approx 1611{,}7566$. Mivel $f''_{ck}(ab)$ előállítása nehézkes, hogy valóban minimum helyről van szó, azt (27) $f_{ck}(ab)$ függvény néhány ponton történő helyettesítéséből is lehet látni.

Most

$$\min f_{ck}(ab) = f_{ck}\big((ab)_2\big) = f_{ck}(1611{,}7566) \approx 102{,}4905,$$

lásd a 97-3. ábrát.

Az R, r $(2r < R)$ és végül f_{ck} induló adatok felvétele után

$$f_{ck} \geq \min f_{ck}(ab). \tag{31}$$

Az (1), (25) *és* (31) *egyenlőtlenségek együttes teljesülése szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

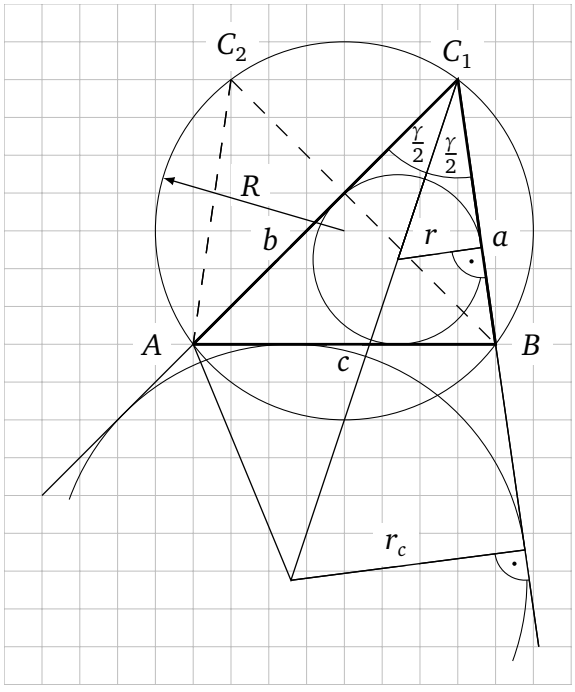
A pozitív a, b, c ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.

A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

98. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és egy hozzáírt kör sugara (R, r, r_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (98-1. ábra).



98-1. ábra

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből*:

E. 17(1) $\qquad 2r \leq R.$ (1)

(1) *a megoldás szükséges feltétele*.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Folytassuk a következő hétismeretlenes $(a, b, c, s, t, r_a, r_b)$ egyenletrendszerrel, ahol (6) tulajdonképpen három egyenlet:

$$\begin{cases} t = r \cdot s, & \text{E. 32(4)} \quad (2) \\ t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (3) \\ 4R = r_a + r_b + r_c - r, & \text{E. 7(2)} \quad (4) \\ \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}, & \text{E. 7(1)} \quad (5) \\ r_a = \dfrac{t}{s-a}; \qquad r_b = \dfrac{t}{s-b}; \qquad r_c = \dfrac{t}{s-c}. & \text{E. 34(3)} \quad (6) \end{cases}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{cases} r_a + r_b = 4R + r - r_c = u, & (7) \\ \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_c} = v, & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_a + r_b = u, & (9) \\ \dfrac{r_a + r_b}{r_a \cdot r_b} = v, & (10) \end{cases}$$

$$r_a \cdot r_b = \frac{u}{v}. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} r_a + r_b &= u, & r_b &= u - r_a, \\ r_a \cdot r_b &= \frac{u}{v}, & r_a^2 - u \cdot r_a + \frac{u}{v} &= 0, \\ r_{a1} &= \frac{u - \sqrt{u^2 - \frac{4u}{v}}}{2}; & r_{a2} &= \frac{u + \sqrt{u^2 - \frac{4u}{v}}}{2}; \\ r_{b1} &= \frac{u + \sqrt{u^2 - \frac{4u}{v}}}{2}; & r_{b2} &= \frac{u - \sqrt{u^2 - \frac{4u}{v}}}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Az r_a és r_b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$u > 0, \qquad \frac{u}{v} > 0, \qquad u^2 - \frac{4u}{v} \geq 0. \quad (13)$$

Ha $r_a = r_b$ vagy $r_a = r_c$, vagy $r_b = r_c$, akkor a háromszög egyenlő szárú,

ha $r_a = r_b = r_c$, akkor pedig egyenlő oldalú.

Most (6)-ból, (3)-ból, majd (2)-ből:

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{t^3}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{t^2 \cdot t \cdot s}{t^2} = t \cdot s = r \cdot s \cdot s = r \cdot s^2, \quad (14)$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\boxed{s=\sqrt{\frac{r_a\cdot r_b\cdot r_c}{r}},} \tag{15}$$

amiből

$$t=r\cdot s, \tag{16}$$

és így (6)-ból:

$$\boxed{a=s-\frac{t}{r_a},\qquad b=s-\frac{t}{r_b},\qquad c=s-\frac{t}{r_c}.} \tag{17}$$

Példa. A 98-1. ábra adataiból elindulva:

$$R=25;\quad r=\frac{700}{20+30\sqrt{2}}\approx 11{,}2132;\quad r_c=10+15\sqrt{2}\approx 31{,}2132,$$

$$\begin{aligned} u&=4R+r-r_c=80,\\ v&=\frac{1}{r}-\frac{1}{r_c}=\frac{2}{35},\\ \frac{u}{v}&=1400, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{a1}&=40-10\sqrt{2}; & r_{a2}&=40+10\sqrt{2};\\ r_{b1}&=40+10\sqrt{2}; & r_{b2}&=40-10\sqrt{2}; \end{aligned}$$

$$s=20+30\sqrt{2}.$$

$$t=\frac{700}{20+30\sqrt{2}}\cdot(20+30\sqrt{2})=700.$$

$$\begin{aligned} a_1&\approx 35{,}3553; & a_2&\approx 49{,}4975;\\ b_1&\approx 49{,}4975; & b_2&\approx 35{,}3553; \end{aligned}$$

$$c\approx 40.$$

Az a_2, b_2 megoldást a 98-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

(1) *és* (13) *egyenlőtlenségek együttes teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Teljesül a háromszög-egyenlőtlenség is, lásd a 23. (r_a, r_b, r_c) feladatot.

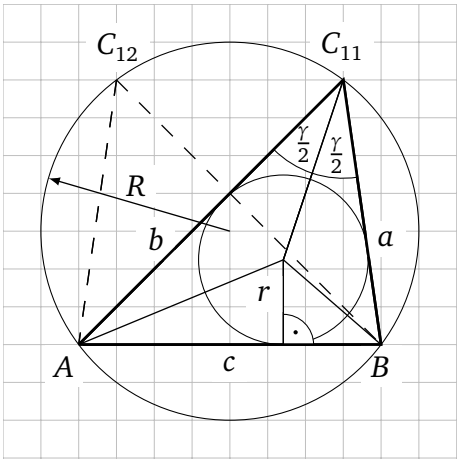
A megoldások száma 0, 1 ha a háromszög egyenlő oldalú, 1 vagy 2 (egy szimmetrikus pár), ha egyenlő szárú és 2 (egy szimmetrikus pár), ha minden oldala különböző, mint a példában.

Most három oldal $(a,b,c)\overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

99. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és két oldal összege $(R, r, a+b)$

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (99-1. ábra).



99-1. ábra

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből*:

E. 17(1) $\qquad 2r \le R.$ (1)

(1) *a megoldás szükséges feltétele.*

Folytassuk a következő négyismeretlenes (ab, c, s, t) egyenletrendszerrel:

$$\begin{cases} R = \dfrac{abc}{4t}, & \text{E. 11(17)} \quad (2) \\ t = r \cdot s, & \text{E. 32(4)} \quad (3) \\ t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (4) \\ c = 2s-(a+b); \quad \Leftrightarrow \quad s-c = (a+b)-s. & (5) \end{cases}$$

Küszöböljük ki t-t (2)-ből és (3)-ból, majd (3)-ból és (4)-ből:

$$\boxed{ab = \frac{4Rrs}{c},} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} 4Rrs = ab \cdot c, & (7) \\ r^2 \cdot s = ab \cdot (s-c) - s \cdot (s-c)^2. & (8) \end{cases}$$

Fejezzük ki ab-t (7)-ből, használjuk fel c-t, $(s-c)$-t (5)-ből, és helyettesítsük (8)-ba:

$$r^2 \cdot \not{s} = \frac{4Rr \cdot \not{s}}{2s-(a+b)} \cdot \big((a+b)-s\big) - \not{s} \cdot \big((a+b)-s\big)^2, \qquad (9)$$

$$r^2 \cdot \big(2s-(a+b)\big) = 4Rr \cdot \big((a+b)-s\big) - \big(s-(a+b)\big)^2 \cdot \big(s+s-(a+b)\big), \qquad (10)$$

$$r^2 \cdot \big(2s-(a+b)\big) = 4Rr \cdot \big((a+b)-s\big) - \big(s-(a+b)\big)^2 \cdot s - \big(s-(a+b)\big)^3. \qquad (11)$$

Átalakítás után az s ismeretlen félkerület harmadfokú egyenletéhez jutunk $R, r, (a+b)$ paraméterekkel:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\begin{aligned} &2s^3-5(a+b)\,s^2+\\ &\quad+\left(2r^2+4Rr+4(a+b)^2\right)s-\\ &\qquad-(r^2+4Rr)(a+b)-(a+b)^3=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Ezután c (5)-ből, ab (6)-ból számolható:

Az $s, c, ab \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás további szükséges feltétele.* (13)

$$\begin{aligned} a+b&=p, & b&=p-a,\\ ab&=q, & a^2-pa+q&=0,\\ a_1&=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}; & a_2&=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2};\\ b_1&=\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}; & b_2&=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Az a és b valós gyökök akkor és csak akkor pozitívak, ha:

$$p>0, \qquad q>0, \qquad p^2-4q\geq 0. \tag{15}$$

A pozitív a, b, c ismeretében felírható a *háromszög-egyenlőtlenség:*

E. 1(3) $$|a-b|<c<a+b. \tag{16}$$

Az $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ *és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Ha $a=b$ vagy $a=c$, vagy $b=c$, akkor a háromszög egyenlő szárú,

ha $2r=R$, akkor pedig egyenlő oldalú, és $a+b=2\sqrt{3}\,R=4\sqrt{3}\,r$.

Példa. A 99-1. ábra adataiból elindulva:

$$R=25; \quad r=\frac{700}{20+30\sqrt{2}}\approx 11{,}2132; \quad a+b=60\sqrt{2}\approx 84{,}8528,$$

$$2s^3-424{,}2641\cdot s^2+30172{,}7922\cdot s-716\,756{,}4928=0,$$

$$\begin{aligned} s_1&\approx 62{,}4264; & s_2&=\text{komplex}; & s_3&=\text{komplex};\\ c_1&\approx 40;\\ (ab)_1&\approx 1750;\\ a_{11}&\approx 35{,}3553; & a_{12}&\approx 49{,}4975;\\ b_{11}&\approx 49{,}4975; & b_{12}&\approx 35{,}3553. \end{aligned}$$

Látszik, hogy csak az (1) indexű eset ad megoldást.

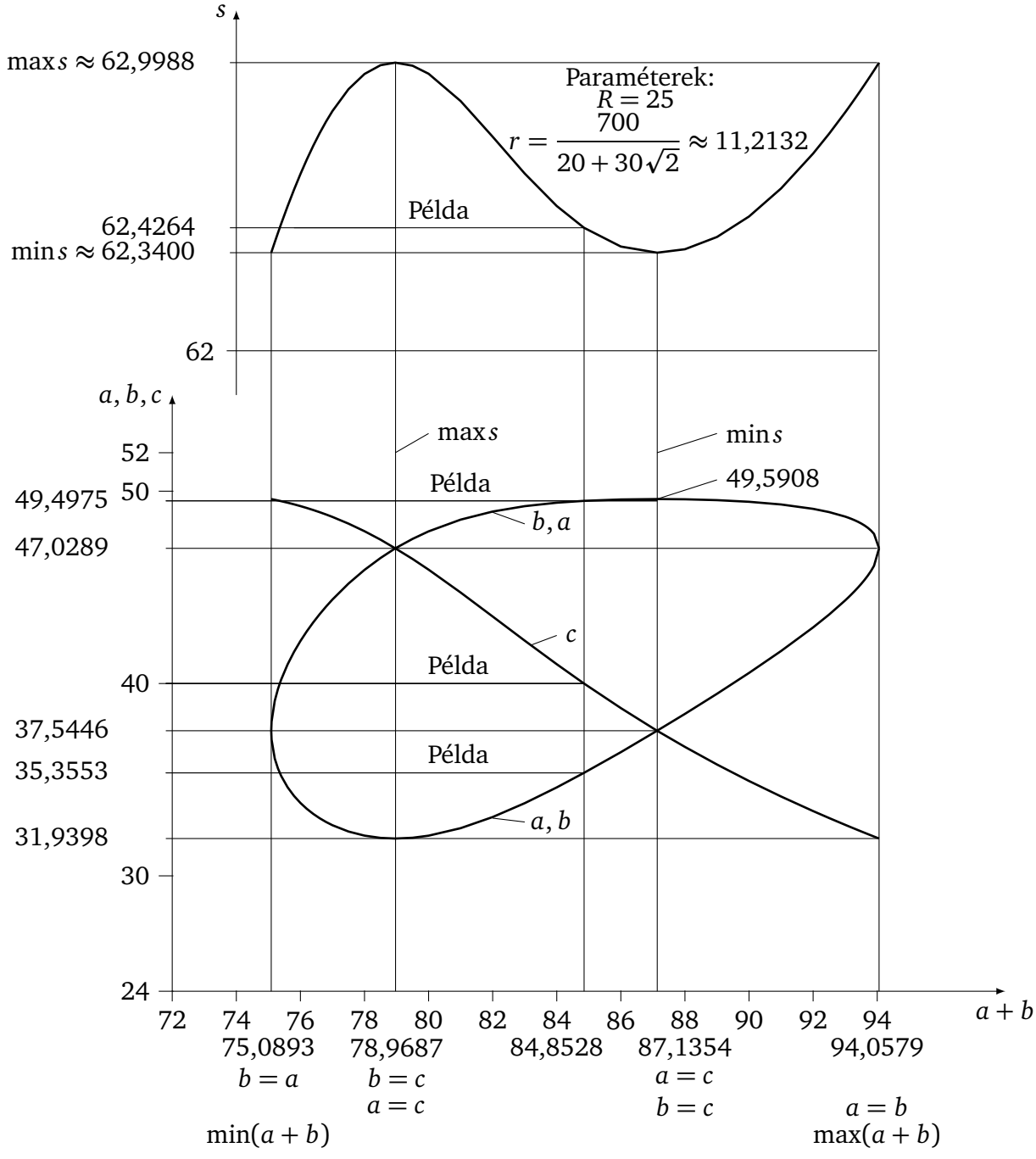
Az a_{12}, b_{12} megoldást a 99-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A részletesebb vizsgálat:

Az $R, r, (a+b)$ adatok felvétele után kiszámítjuk s-et, a, b, c-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon, R-et és r-et paraméternek választva, majd felrajzoljuk a kapott síkgörbéket egy $(a+b)$, a, b, c, s koordináta-rendszerben. Látható, hogy $s(a+b)$, $c(a+b)$ függvények, a, b síkgörbéje pedig egy $a(a+b)$, $b(a+b)$ függvényre bontható (99-2. ábra).

Az ábrában a függvényeknél az $(a+b)$ független változó jelölését az egyszerűség kedvéért most elhagytuk, továbbá az a, b és b, a első betűi azt az esetet jelölik, amikor $a \le b$, második betűinél pedig $b \le a$, ugyanis a két függvény felcserélhető, ami a példából is látszik.



99-2. ábra

Az ábrából a példa $a < b$ megoldása is leolvasható.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az R, r ($2r \le R$) felvétele után a 99-2. ábrából is látható, hogy $a+b$ egy minimum és egy maximum között kell legyen, ami csak R-től és r-től függ. A $\min(a+b)(R,r)$ és a $\max(a+b)(R,r)$ kiszámításához első lépésben számoljuk ki $(a+b)$-t $\max s$, illetve $\min s$-nél. Ezt 95. (17) $s(ab,R,r)$ (R,r paraméterek) függvény ab szerinti deriválásával, majd $s'(ab)=0$ egyenletből nyert

$$(ab)^2 - 12Rr(ab) + 8Rr^2(4R+r) = 0 \tag{17}$$

egyenletből számolhatjuk. Ahol $s''(ab) < 0$, ott lesz a maximum, ahol $s''(ab) > 0$, ott lesz a minimum. Lásd 95. (30)-at.

A 99-2. ábra paramétereivel:

$$R = 25; \quad r = \frac{700}{20+30\sqrt{2}} \approx 11{,}2132,$$

$$(ab)_1 \approx 1502{,}0936; \qquad (ab)_2 \approx 1861{,}8675,$$

így az

$$s = \frac{ab}{ab-4Rr}\sqrt{ab-4Rr-r^2}$$

összefüggésből

$$\max s \approx 62{,}9988; \qquad \min s \approx 62{,}3400,$$

majd

$$c = \frac{4Rrs}{ab}$$

felhasználásával

$$c \approx 47{,}0289; \qquad c \approx 37{,}5446,$$

továbbá

$$a+b = 2s-c,$$

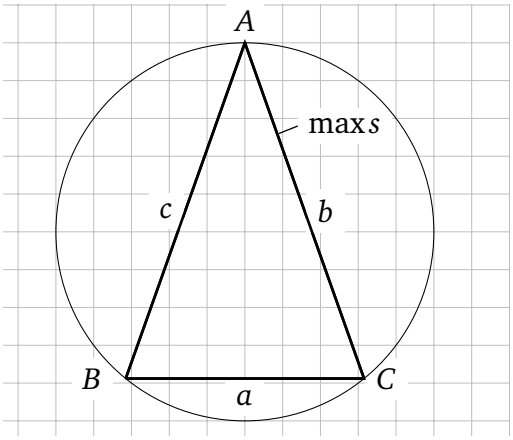
és így

$$a+b \approx 78{,}9687; \qquad a+b \approx 87{,}1354.$$

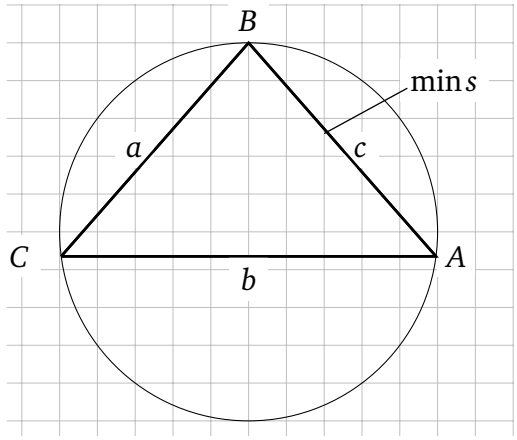
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Most $(a+b)$ és ab-ből (14) szerint számolhatjuk a-t és b-t:

$$a \approx 31{,}9398; \qquad a \approx 37{,}5446;$$
$$b \approx 47{,}0289; \qquad b \approx 49{,}5908;$$
$$c \approx 47{,}0289; \qquad c \approx 37{,}5446;$$
$$b = c; \qquad a = c.$$

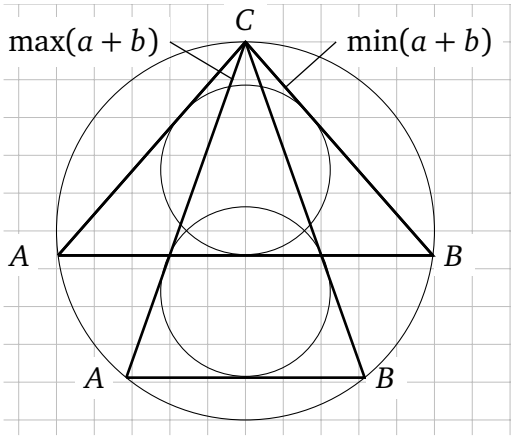


99-3. ábra



99-4. ábra

A 99-2. ábrából is látható, hogy három egyenlő szárú, egybevágó párról van szó, ahol a három pár egymás elforgatottja, és a pár egyik tagja max$s$-hez, a másik tagja min$s$-hez tartozik. Lásd a 99-3. és a 99-4. ábrákat.



99-5. ábra

A kapott két háromszög oldalainak permutálása (visszaforgatása) után épp a keresett szélső értékeket kapjuk,

min$s$-nél a $\min(a+b)$-t,

max$s$-nél a $\max(a+b)$-t.

Lásd a 99-5. ábrát.

$$\min(a+b) \approx 75{,}0893; \qquad \max(a+b) \approx 94{,}0579;$$

Az R, r és $(a+b)$ induló adatok felvétele után:

$$\boxed{2r \le R, \qquad \min(a+b) \le (a+b) \le \max(a+b),} \tag{18}$$

a példánál $\qquad 2 \cdot 11{,}2132 < 25, \qquad 75{,}0893 < 84{,}8528 < 94{,}0579,$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

egyenlőtlenségek együttes teljesülése szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

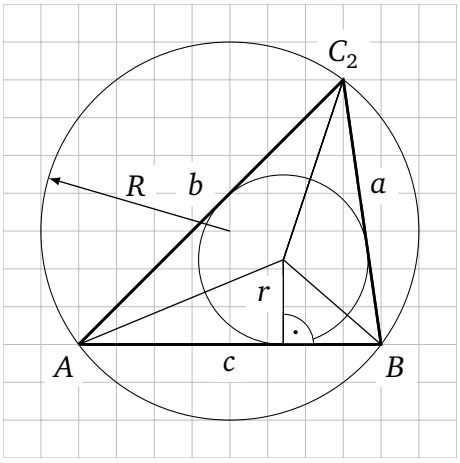
A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

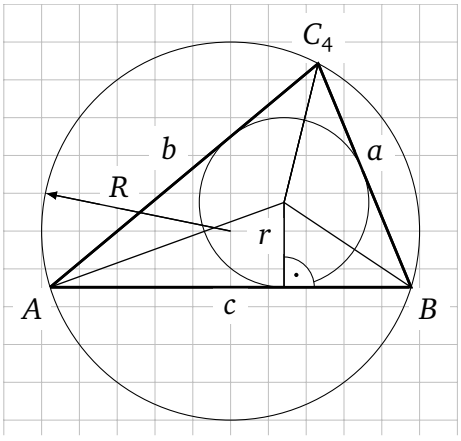
100. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és két oldal különbsége $(R, r, a-b)$

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (100-1. ábra).

Most $R, r \in \mathbf{R}^+$, és $(a-b) \in \mathbf{R}$.



100-1. ábra



100-2. ábra

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből* (1), a *háromszög-egyenlőtlenségből* (3), valamint a kerület és a sugarak (R, r) egyenlőtlenségéből (4):

E. 17(1) $$2r \le R, \tag{1}$$

$$s = \frac{k}{2} = \frac{a+b+c}{2}, \tag{2}$$

E. 1(3) $$2 \cdot |a-b| < 2c < 2s < 2 \cdot (a+b), \tag{3}$$

E. 19(9) $$6\sqrt{3}\, r \le 2s \le 3\sqrt{3}\, R. \tag{4}$$

(4)-ben az egyenlőség egyszerre lép föl mindkét helyen az egyenlő oldalú háromszög esetén.

(1), (3) *és* (4) *egyenlőtlenségek teljesülése a megoldás szükséges feltétele*.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Folytassuk a következő ötismeretlenes (a,b,c,s,t) egyenletrendszerrel, ahol $|a-b|=u$, és (8) következményeként kapott (9) és (10) vagylagos mint ötödik egyenlet. Ezt lehet tudni, hiszen $(a-b)$-t ismerjük. Emiatt (8)-hoz hasonlóan, a és b két egyenlete sem független:

$$\begin{cases} R=\dfrac{abc}{4t}, & \text{E. 11(17)} \quad (5)\\ t=r\cdot s, & \text{E. 32(4)} \quad (6)\\ t^2=s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (7)\\ a+b=2s-c, \quad \Leftrightarrow \quad s-c=(a+b)-s, & (8)\\ |a-b|=u \begin{cases} a=\dfrac{2s-c+u}{2}, \quad b=\dfrac{2s-c-u}{2}, \quad a\geq b. & (9)\\ a=\dfrac{2s-c-u}{2}, \quad b=\dfrac{2s-c+u}{2}, \quad a<b. & (10) \end{cases} \end{cases}$$

Küszöböljük ki t-t (5)-ből és (6)-ból, valamint helyettesítsük (9)-et vagy (10)-et. Ezután küszöböljük ki t-t (6)-ból és (7)-ből.

Vegyük észre, hogy ab-t és u^2-et (9)-ből vagy (10)-ből számoljuk, az ugyanaz.

$$\begin{cases} 4Rrs=\dfrac{2s-c+u}{2}\cdot\dfrac{2s-c-u}{2}\cdot c, & (11)\\ r^2\cdot s=(s-a)(s-b)(s-c), & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4Rrs=\dfrac{2s-c+u}{2}\cdot\dfrac{2s-c-u}{2}\cdot c, & (13)\\ r^2\cdot s=\dfrac{c-u}{2}\cdot\dfrac{c+u}{2}\cdot(s-c), \qquad c^2-u^2>0 \quad \text{ld.(3)-at} & (14) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16Rrs=\left((2s-c)^2-u^2\right)\cdot c, & (15)\\ 4r^2\cdot s=(c^2-u^2)\cdot(s-c), & (16) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16Rrs=\left((2s-c)^2-u^2\right)\cdot c, & (17)\\ 4r^2\cdot s=(c^2-u^2)\cdot s-(c^2-u^2)\cdot c. & (18) \end{cases}$$

Az s-et (18)-ból kapjuk:

$$\boxed{s=\frac{(c^2-u^2)\cdot c}{c^2-u^2-4r^2}.} \qquad (19)$$

Az $s\in\mathbf{R}^+$ *a megoldás további szükséges feltétele.* (20)

Folytassuk (17) átalakításával:

$$16Rr\cdot s=4cs^2-4c^2s+c^3-u^2c, \qquad (21)$$

$$4c\cdot s^2-\left(16Rr+4c^2\right)\cdot s+c\cdot\left(c^2-u^2\right)=0. \qquad (22)$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Helyettesítsük s^2, illetve s helyére (19)-et:

$$4c\cdot\frac{\left(c^2-u^2\right)^2\cdot c^2}{\left(c^2-u^2-4r^2\right)^2}-\left(16Rr+4c^2\right)\cdot\frac{(c^2-u^2)\cdot c}{c^2-u^2-4r^2}+c\cdot(c^2-u^2)=0. \tag{23}$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $\dfrac{\left(c^2-u^2-4r^2\right)^2}{c\cdot(c^2-u^2)}>0$ törttel:

$$4c^2\cdot(c^2-u^2)-(16Rr+4c^2)\cdot(c^2-u^2-4r^2)+(c^2-u^2-4r^2)^2=0. \tag{24}$$

Beszorzás és összevonás után rendezzük az egyenletet c fogyó hatványai szerint nullára.

Így a c ismeretlen oldal negyedfokú egyenletéhez jutunk R, r, u paraméterekkel:

$$\boxed{c^4+\left(8r^2-16Rr-2u^2\right)c^2+\left(16Rru^2+64Rr^3+u^4+16r^4+8r^2u^2\right)=0.} \tag{25}$$

A $c\in\mathbf{R}^+$ a megoldás további szükséges feltétele.

Ezután az s félkerület (19)-ből, $(a+b)$ (8)-ból, végül a és b (9), illetve (10)-ből számolható attól függően, hogy melyik a nagyobb. Ezt lehet tudni, hiszen $(a-b)$-t ismerjük.

Az $a,b,c\in\mathbf{R}^+$ és a háromszög-egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.

Az $a=b$, $|a-b|=u=0$ esetén a háromszög egyenlő szárú. Lásd még a 101. feladatot. Egyenlő szárú lehet még $a=c$ vagy $b=c$ esetén is.

Ha $2r=R$, akkor a háromszög egyenlő oldalú, és $|a-b|=u=0$.

Példa. A 100-1. ábra adataiból elindulva:

$$R=25;\quad r=\frac{700}{20+30\sqrt{2}}\approx 11{,}2132;\quad a-b=-10\sqrt{2}\approx -14{,}1421\quad (a<b);$$

$$\text{ekkor } u=|a-b|=|-10\sqrt{2}|=10\sqrt{2}\approx 14{,}1421;$$

$$c^4-3879{,}3939\cdot c^2+3\,647\,030{,}2783=0,$$

$$c_1\approx -40;\qquad c_2\approx 40;\qquad c_3\approx -47{,}7430;\qquad c_4\approx 47{,}7430;$$
$$s_2\approx 62{,}4264;\qquad s_4\approx 62{,}9747;$$
$$(a+b)_2\approx 84{,}8528;\qquad (a+b)_4\approx 78{,}2064;$$
$$a_2\approx 35{,}3553;\quad b_2\approx 49{,}4975;\qquad a_4\approx 32{,}0321;\quad b_4\approx 46{,}1743.$$

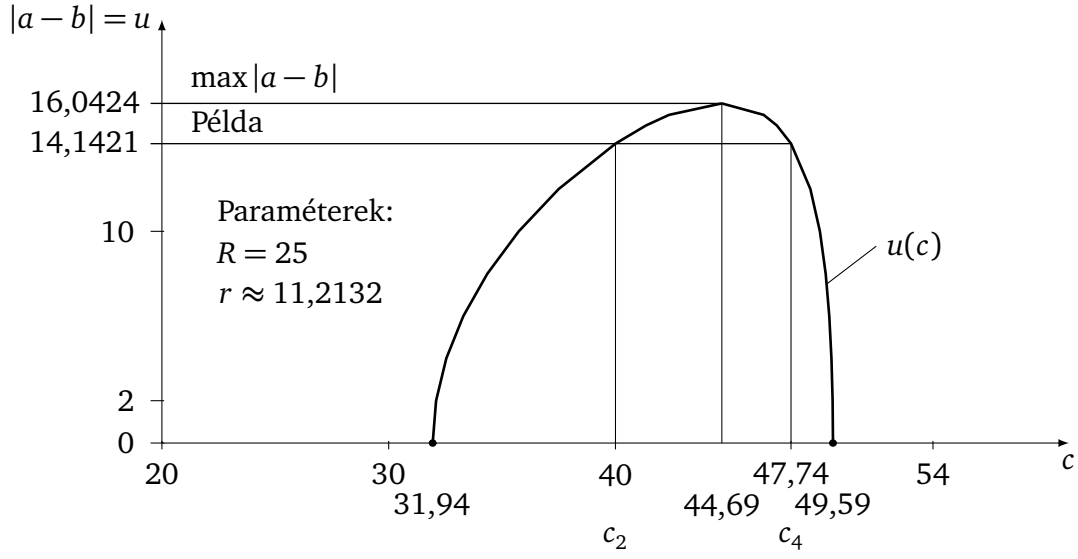
Látható, hogy csak a (2), illetve a (4) indexű eset ad megoldást.
Az a_2, b_2, c_2 megoldás a 100-1. ábrán, az a_4, b_4, c_4 megoldás pedig a 100-2. ábrán látható.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A részletesebb vizsgálat: R, r, $|a-b|$ adatok felvétele után kiszámoljuk c-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon R-et és r-et paraméternek választva, majd felrajzoljuk a síkgörbe grafikonját egy c, $|a-b|=u$ koordináta-rendszerben. Látható, hogy függvényt kapunk (100-3. ábra). Az ábrából is látszik, hogy $|a-b|$-ra igaz kell legyen:

$$0 \le |a-b| \le \max|a-b|. \tag{26}$$

(1), (3), (4) *és* (26) *egyenlőtlenségek együttes teljesülése szintén a megoldás szükséges és elégséges feltétele.* (3) *miatt a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül.*



100-3. ábra

Az ábrából a példa mindkét megoldása is leolvasható.

A $\max|a-b| = \max u(c)$ kiszámításához első lépésben deriváljuk az $u(c)$ implicit függvényt c szerint (R, r paraméterek), lásd (25)-öt. Majd $u'(c)=0$ és $4c\,(c>0)$-val való osztás után kapjuk, hogy

$$c^2 + 4r^2 - 8Rr = u^2(c). \tag{27}$$

Ha ezt visszahelyettesítjük (25)-be, akkor megkapjuk azt az egyenletet, amiből $\max|a-b| = \max u(c)$-hoz tartozó c számolható:

$$c^2 + 4r^2 - 4R^2 = 0. \tag{28}$$

A 100-3. ábra paramétereivel: $R=25$; $r = \dfrac{700}{20+30\sqrt{2}} \approx 11{,}2132$;

$$c_1 \approx 44{,}6884; \qquad c_2 \approx -44{,}6884.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A negatív érték nyilván nem értelmezett, ezért $c = c_1$, és most $\max u(c)$ (27)-ből:

$$\max u(c) \approx 16{,}0424.$$

Mivel $u''(c)$ előállítása nehézkes, hogy maximumról van szó, azt az $u(c)$ függvény néhány ponton történő helyettesítéséből is lehet látni.

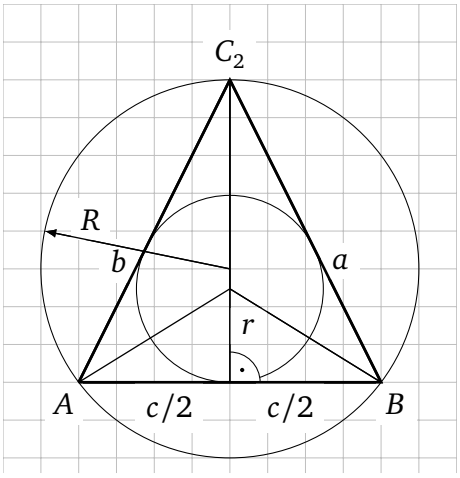
A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, a példában 2. Lásd a 100-1., 100-2. és 100-3. ábrákat.

A vizsgálat programmal készült.

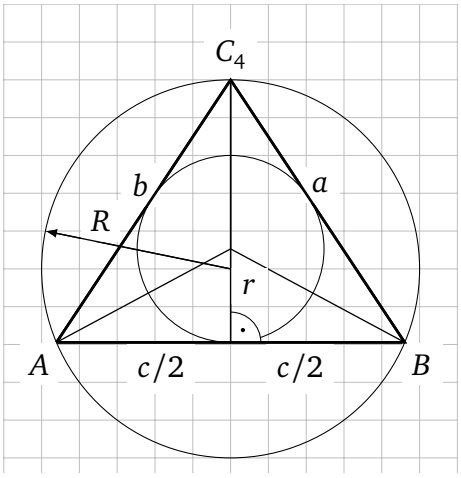
Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

101. Körülírt kör sugara, a beírt kör sugara és a háromszög egyenlő szárú $(R, r, a = b)$

Rajzoljunk fel egy ilyen ABC háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (101-1. ábra).



101-1. ábra



101-2. ábra

Induljunk el a *sugáregyenlőtlenségből* (1), az $a = b$ feltételből (3), valamint a kerület és a sugarak (R, r) egyenlőtlenségéből (4):

E. 17(1) $$2r \le R, \tag{1}$$

$$s = \frac{k}{2} = \frac{a+b+c}{2}, \tag{2}$$

E. 1(3) $$0 < 2c < 2s = 2a + c = 2b + c < 2(a+b) = 4a = 4b, \tag{3}$$

E. 19(9) $$6\sqrt{3}\, r \le 2s \le 3\sqrt{3}\, R. \tag{4}$$

(4)-ben az egyenlőség egyszerre lép föl mindkét helyen az egyenlő oldalú háromszög esetén.

(1), (3) *és* (4) *egyenlőtlenségek teljesülése a megoldás szükséges feltétele.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Folytassuk a következő ötismeretlenes (a,b,c,s,t) egyenletrendszerrel, ahol (9) a feltételt és annak következményeit tartalmazó ötödik egyenlet:

$$\begin{cases} R=\dfrac{abc}{4t}, & \text{E. 11(17)} \quad (5)\\ t=r\cdot s, & \text{E. 32(4)} \quad (6)\\ t^2=s(s-a)(s-b)(s-c), & \text{E. 36(4)} \quad (7)\\ a+b=2s-c \quad\Leftrightarrow\quad s-c=(a+b)-s, & (8)\\ |a-b|=u=0;\quad a=\dfrac{2s-c}{2};\quad b=\dfrac{2s-c}{2};\quad a=b. & (9) \end{cases}$$

A továbbiakban úgy, mint ahogy a 100. feladatban láttuk, azzal a különbséggel, hogy most $u=0$:

$$\boxed{s=\frac{c^3}{c^2-4r^2}.} \qquad (10)$$

$$\boxed{c^4+(8r^2-16Rr)\,c^2+64Rr^3+16r^4=0.} \qquad (11)$$

A $c\in\mathbf{R}^+$ *a megoldás szükséges feltétele (lásd* (3)*-at).* (12)

Ezután az s félkerület (10)-ből, $a+b$ (8)-ból, majd a és b (9)-ből számolható.

Példa. A 101-1. ábra adataiból elindulva:

$$R=25;\quad r=10\sqrt{5}-10\approx 12{,}3607;\quad a=b,$$

$$c^4-3721{,}9807\cdot c^2+3\,395\,169{,}0784=0,$$

$$\begin{aligned} c_1&=-40; & c_2&=40; & c_3&\approx -46{,}0650; & c_4&\approx 46{,}0650;\\ & & s_2&\approx 64{,}7214; & & & s_4&\approx 64{,}6986;\\ & & (a+b)_2&\approx 89{,}4427; & & & (a+b)_4&\approx 83{,}3323;\\ & & a_2=b_2&\approx 44{,}7214; & & & a_4=b_4&\approx 41{,}6661. \end{aligned}$$

Látható, hogy csak a (2), illetve a (4) indexű eset ad megoldást.
Az a_2, b_2, c_2 megoldás a 101-1. ábrán, az a_4, b_4, c_4 megoldás pedig a 101-2. ábrán látható.
Egyenlő szárú lesz még a háromszög az $a=c$ vagy $b=c$ induló feltétel esetén is,
$2r=R$ esetén pedig egyenlő oldalú.

(1), (3), (4) *egyenlőtlenségek együttes teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*
(3) *miatt a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül.*
A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, a példában 2.

A pozitív a,b,c *ismeretében a megoldást a háromszög-egyenlőtlenség teljesülésével ellenőrizhetjük.*

Most három oldal $(a,b,c)\overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

102. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és még egy oldal (c, m_c, b)

Lásd: $(b, c, m_c) \overset{(29.f.)}{\Longrightarrow} (a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

103. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és az oldalon fekvő egyik szög (egyértelmű) (c, m_c, β)

Lásd: $(c, \beta, m_c) \overset{(61.f.)}{\Longrightarrow} (a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

104. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és ezen oldallal szemben fekvő szög (c, m_c, γ)

Lásd: $(c, \gamma, m_c) \overset{(45.f.)}{\Longrightarrow} (a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

105. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a terület (c, m_c, t)

Ha c, m_c és t felvétele után

$$t = \frac{c \cdot m_c}{2}, \tag{1}$$

akkor nincs három független adat, nincs egyértelmű megoldás.

Ha c, m_c és t felvétele után

$$t \neq \frac{c \cdot m_c}{2}, \tag{2}$$

akkor ellentmondó, nincs megoldás.

106. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a kerület (c, m_c, k)

$$t = \frac{c \cdot m_c}{2}. \tag{1}$$

A c és m_c felvétele után k-nak minimuma van:

$$\min k = \min (a + b) + c = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + m_c^2} + c = \sqrt{c^2 + 4m_c^2} + c, \tag{2}$$

$$k \geq \min k. \tag{3}$$

(3) *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Most $(t, k, c) \overset{(79.f.)}{\Longrightarrow} (a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

107. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és még egy magasság (c, m_c, m_b)

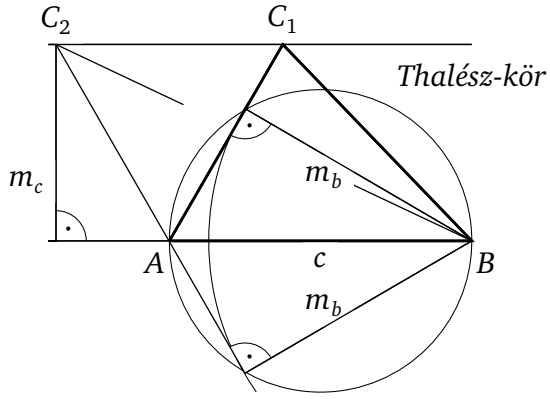
$$t = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{c \cdot m_c}{m_b}. \tag{1}$$

Mivel c és m_c felvétele után $\min b = m_c$ tehát:

$$\min b = m_c \le \frac{c \cdot m_c}{m_b} = b, \tag{2}$$

majd ebből kapjuk a feltételt m_b-re (107-1. ábra).

$$0 < m_b \le \max m_b = c \quad \textit{a megoldás szükséges és elégséges feltétele.} \tag{3}$$



107-1. ábra

A megoldások száma legfeljebb 2, pontosabban:

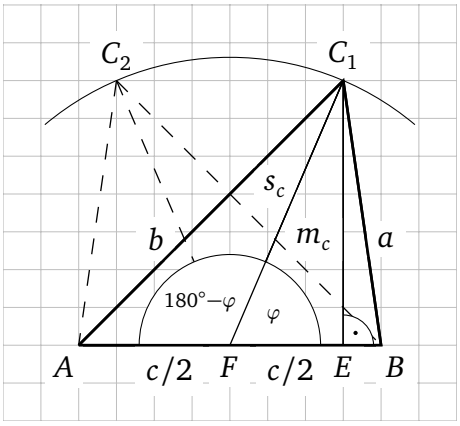
- $b < m_c$ esetén nincs megoldás,
- $b = m_c$ esetén egy megoldás van ($\alpha = 90°$),
- $b > m_c$ esetén két megoldás van, mint a 107-1. ábrán.

Most $(b, c, m_c) \overset{(29.f.)}{\Longrightarrow} (a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

108. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a hozzá tartozó súlyvonal (c, m_c, s_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat, valamint m_c talppontját E-vel, $\overline{AB} = c$ oldal felezőpontját pedig F-fel. (108-1. ábra).



108-1. ábra

Ekkor az EFC_1 háromszögben felírható:

$$\sin\varphi = \frac{m_c}{s_c}. \tag{1}$$

Vizsgáljuk meg a lehetséges értékeket:

- $\sin\varphi > 1, \quad s_c < m_c$ (1.1)

esetén nincs megoldás,

- $\sin\varphi = 1, \quad s_c = m_c$ (1.2)

esetén egy megoldás van,

$$\varphi = 90°, \quad a = b = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_c^2}$$

a háromszög egyenlő szárú (esetlegesen egyenlő oldalú),

- $\sin\varphi < 1, \quad s_c > m_c$ (1.3)

esetén pedig két megoldás van (108-1. ábra):

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{m_c}{s_c} < 90°, \qquad \varphi_2 = 180° - \varphi_1 > 90°.$$

A hiányzó a és b oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22) $$a_1 = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_c^2 - c\cdot s_c\cdot\cos\varphi_1}; \qquad a_2 = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_c^2 - c\cdot s_c\cdot\cos\ \varphi_2};$$

E. 12(22) $$b_1 = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_c^2 - c\cdot s_c\cdot\cos\ \varphi_2}; \qquad b_2 = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + s_c^2 - c\cdot s_c\cdot\cos\varphi_1}.$$

Az a_2, b_2 megoldást a 108-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

Egyenlő szárú lesz még a háromszög $a = c$ vagy $b = c$ esetén is.

Derékszögű lesz a háromszög, ha $s_c = \frac{c}{2}$ $(\gamma = 90°)$ vagy $m_c = a$ $(\beta = 90°)$, vagy $m_c = b$ $(\alpha = 90°)$, $m_c = s_c = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ esetén pedig egyenlő oldalú lesz.

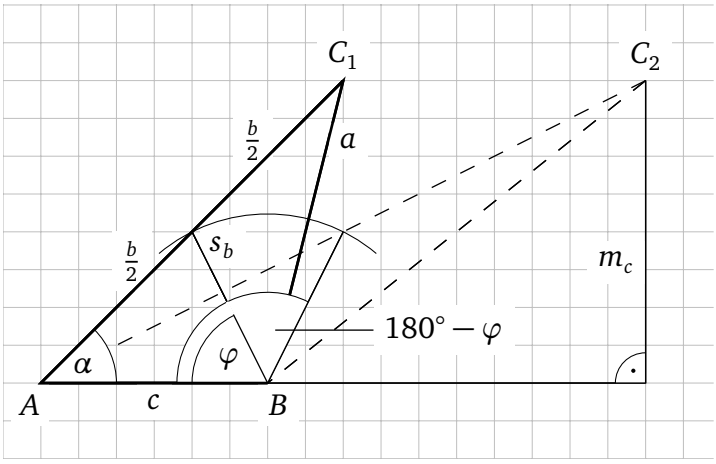
A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi egy szimmetrikus pár, mint a 108-1. ábrán.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

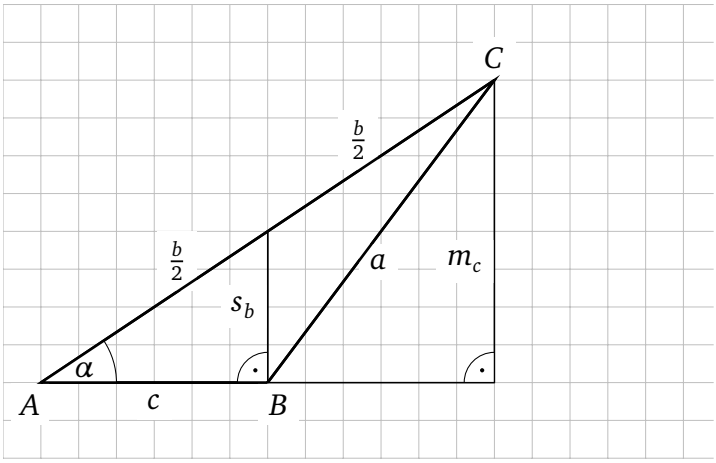
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

109. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és egy másik súlyvonal (c, m_c, s_b)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (109-1. ábra).



109-1. ábra



109-2. ábra

Induljunk el a terület két képletéből:

$$t = \frac{c \cdot m_c}{2} = 2 \cdot \frac{c \cdot s_b \cdot \sin\varphi}{2}, \qquad (1)$$

hiszen a súlyvonal felezi a területet. Ebből:

$$\sin\varphi = \frac{m_c}{2s_b}. \qquad (2)$$

Vizsgáljuk meg a lehetséges értékeket:

- $\sin\varphi > 1, \quad s_b < \frac{m_c}{2}$ (2.1)

esetén nincs megoldás.

- $\sin\varphi = 1, \quad s_b = \frac{m_c}{2}$ (2.2)

esetén egy megoldás van (109-2. ábra),

$$\varphi = 90° \ (s_b \text{ és } c \text{ merőlegesek}),$$
$$b = 2 \cdot \sqrt{c^2 + s_b^2},$$
$$\alpha = \arcsin\frac{m_c}{b} < 90°,$$
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}.$$

- $\sin\varphi < 1, \quad s_b > \frac{m_c}{2}$ (2.3)

esetén pedig két megoldás van (109-1. ábra):

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{m_c}{2s_b} < 90°, \qquad \varphi_2 = 180° - \varphi_1 > 90°.$$

A b oldal ezután két oldal és a közbezárt szög (c, s_b, φ_1, illetve φ_2) ismeretében a *koszinusztétellel* számolható. Ezt követően α-t a tétel átrendezésével, majd a hiányzó a oldalt szintén a koszinusztétellel számolhatjuk:

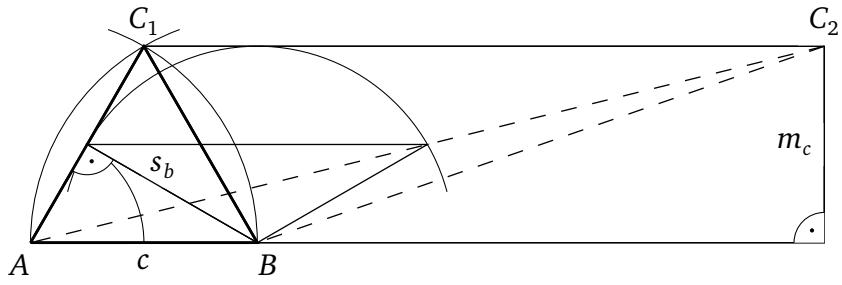
E. 12(22) $\quad b_1 = 2 \cdot \sqrt{c^2 + s_b^2 - 2cs_b \cdot \cos\varphi_1}; \qquad b_2 = 2 \cdot \sqrt{c^2 + s_b^2 - 2cs_b \cdot \cos\varphi_2};$

E. 12(14) $\quad \alpha_1 = \arccos\dfrac{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + c^2 - s_b^2}{b_1 \cdot c}; \qquad \alpha_2 = \arccos\dfrac{\left(\frac{b_2}{2}\right)^2 + c^2 - s_b^2}{b_2 \cdot c};$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

E. 12(22) $a_1 = \sqrt{b_1^2 + c^2 - 2b_1 c \cdot \cos\alpha_1}$; $a_2 = \sqrt{b_2^2 + c^2 - 2b_2 c \cdot \cos\alpha_2}$.

A (2) indexű megoldást a 109-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.



109-3. ábra

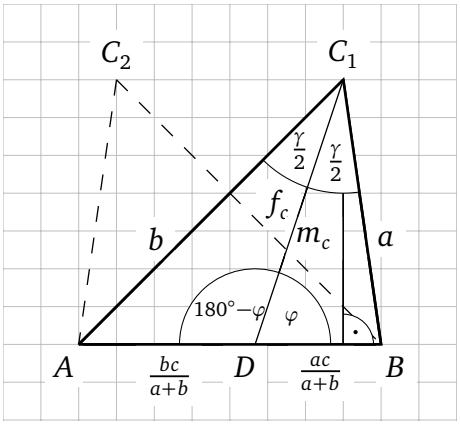
A két megoldás közül az egyik lehet egyenlő szárú, egyenlő oldalú, vagy derékszögű háromszög. A 109-3. ábrán a C_1 megoldás az egyenlő oldalú esetet mutatja.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet $\sin\varphi$*-től függően.*

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

110. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a hozzá tartozó belső szögfelező (c, m_c, f_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat, valamint f_c belső szögfelező c oldali pontját D-vel (110-1. ábra).



110-1. ábra

Induljuk el a könnyen felírható $\sin\varphi$-ből,

$$\sin\varphi = \frac{m_c}{f_c}, \qquad (1)$$

és vizsgáljuk meg a lehetséges értékeket:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

- $\sin\varphi = \dfrac{m_c}{f_c} > 1$ esetén nincs megoldás, (1.1)
- $\sin\varphi = \dfrac{m_c}{f_c} = 1 \Leftrightarrow \varphi = 90°$ esetén egy megoldás van, (1.2)

hiszen $m_c = f_c$ miatt a háromszög egyenlő szárú, és ha még

$$m_c = f_c = \frac{c\sqrt{3}}{2}, \quad \text{akkor a háromszög egyenlő oldalú,}$$

- $\sin\varphi = \dfrac{m_c}{f_c} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \arcsin\dfrac{m_c}{f_c} < 90°, \\ \varphi_2 = 180° - \varphi_1 > 90°, \end{cases}$ esetén két megoldás van. (1.3)

Folytassuk a *szinusztétel* felírásával a BC_1D, illetve az AC_1D háromszögekben.
Vegyük figyelembe, hogy $\sin\beta = \sin(180° - \beta) = \sin\left(\varphi + \dfrac{\gamma}{2}\right)$.

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sin\varphi} = \dfrac{ac}{a+b} \cdot \dfrac{1}{\sin\dfrac{\gamma}{2}} = \dfrac{f_c}{\sin\left(\varphi + \dfrac{\gamma}{2}\right)}, & (2) \\ \dfrac{b}{\sin\varphi} = \dfrac{bc}{a+b} \cdot \dfrac{1}{\sin\dfrac{\gamma}{2}} = \dfrac{f_c}{\sin\left(\varphi - \dfrac{\gamma}{2}\right)}. & (3) \end{cases}$$

A (2) és (3) egyenletekből:

$$\begin{cases} a = \dfrac{f_c \cdot \sin\varphi}{\sin\left(\varphi + \dfrac{\gamma}{2}\right)}, & (4) \\ b = \dfrac{f_c \cdot \sin\varphi}{\sin\left(\varphi - \dfrac{\gamma}{2}\right)}, & (5) \\ (a+b) \cdot \sin\dfrac{\gamma}{2} = c \cdot \sin\varphi. & (6) \end{cases}$$

Most küszöböljük ki a-t és b-t (4), (5) és (6)-ból:

$$\left(\frac{f_c \cdot \cancel{\sin\varphi}}{\sin\left(\varphi + \dfrac{\gamma}{2}\right)} + \frac{f_c \cdot \cancel{\sin\varphi}}{\sin\left(\varphi - \dfrac{\gamma}{2}\right)} \right) \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = c \cdot \cancel{\sin\varphi}, \quad (7)$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$f_c \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = c \cdot \frac{\sin\left(\varphi+\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\sin\left(\varphi-\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\varphi-\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\left(\varphi+\frac{\gamma}{2}\right)}, \tag{8}$$

$$f_c \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = c \cdot \frac{\left(\sin\varphi\cdot\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\varphi\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\left(\sin\varphi\cdot\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\varphi\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\varphi\cdot\cos\frac{\gamma}{2}-\cancel{\cos\varphi\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}+\sin\varphi\cdot\cos\frac{\gamma}{2}+\cancel{\cos\varphi\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}}, \tag{9}$$

$$f_c \cdot \sin\frac{\gamma}{2} = c \cdot \frac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}-\cos^2\varphi\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}}{2\sin\varphi\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}, \tag{10}$$

$$\frac{f_c}{c}\cdot 2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\varphi = \sin^2\varphi\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}-\cos^2\varphi\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}, \qquad \Big/ : \left(\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\right) \tag{11}$$

$$\frac{f_c}{c}\cdot 2\cdot\sin\varphi = \sin^2\varphi\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}-\left(1-\sin^2\varphi\right)\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \qquad \Big/\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \tag{12}$$

Rendezzük az egyenletet $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ fogyó hatványai szerint nullára. Így $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ másodfokú egyenletéhez jutunk c, f_c, $\sin\varphi$ paraméterekkel:

$$\boxed{\left(1-\sin^2\varphi\right)\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+2\cdot\frac{f_c}{c}\cdot\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-\sin^2\varphi=0.} \tag{13}$$

$A\ \ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\in\mathbf{R}^+\ \left(0°<\frac{\gamma}{2}<90°\right)$ *a megoldás szükséges feltétele.* (14)

$$\boxed{\frac{\gamma}{2}=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right).} \tag{15}$$

A φ (1)-ből, $\frac{\gamma}{2}$ (13)-ból, majd eztuán a és b (4), ill. (5)-ből számolható.

Az (1.2) *és* (14) *vagy* (1.3) *és* (14) *együttes teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Példa. A 110-1. ábra adataiból elindulva:

$$c=40;\quad m_c=35;\quad f_c=\frac{35\sqrt{10}}{3}\approx 36{,}8932,$$

$$\sin\varphi=\frac{3\sqrt{10}}{10}\approx 0{,}9487;\quad \varphi_1\approx 71{,}5651°;\quad \varphi_2\approx 108{,}4349°,$$

$$0{,}1\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}+1{,}75\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}-0{,}9=0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2};\qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=-18.$$

A negatív érték nyilván nem értelmezett $0°<\frac{\gamma}{2}<90°$ miatt.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A pozitív értékből pedig $\frac{\gamma}{2} \approx 26{,}5651°$, amivel:

$$\varphi_1 + \frac{\gamma}{2} \approx 98{,}1301°; \qquad \varphi_2 + \frac{\gamma}{2} \approx 135°;$$
$$\varphi_1 - \frac{\gamma}{2} \approx 45°; \qquad \varphi_2 - \frac{\gamma}{2} \approx 81{,}8699°.$$

$$a_1 \approx 35{,}3553; \qquad a_2 \approx 49{,}4975;$$
$$b_1 \approx 49{,}4975; \qquad b_2 \approx 35{,}3553.$$

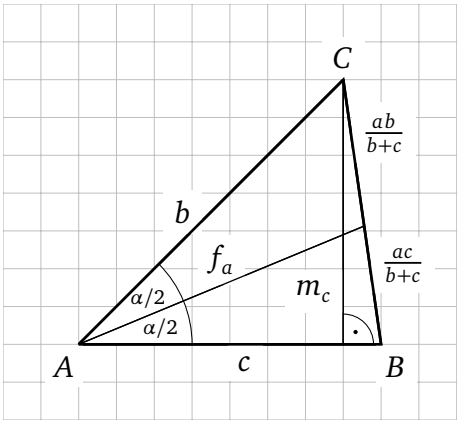
Az a_2, b_2 megoldást a 110-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 (egy szimmetrikus pár) lehet $\sin\varphi$*-től függően, a példában 2.*

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

111. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és egy másik belső szögfelező (egyértelmű) (c, m_c, f_a)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (111-1. ábra).



111-1. ábra

Induljunk el b és f_a belső szögfelező képleteiből (1), (2) mint egy kétismeretlenes (b, α) egyenletrendszerből:

$$b = \frac{m_c}{\sin\alpha}, \tag{1}$$

E. 28(1)
$$f_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}. \tag{2}$$

Helyettesítsük (1)-et (2)-be, így b-t kiküszöbölhetjük:

$$f_a \cdot \left(\frac{m_c}{\sin\alpha} + c\right) = 2 \cdot \frac{m_c}{\sin\alpha} \cdot c \cdot \cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \Big| \cdot \sin\alpha \tag{3}$$
$$f_a \cdot (m_c + c \cdot \sin\alpha) = 2 \cdot c \cdot m_c \cdot \cos\frac{\alpha}{2}, \qquad \Big| : \left(f_a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\frac{m_c}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{c \cdot 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot c \cdot m_c}{f_a}.$$

Áttérünk $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-re, lásd E. 9(28)-at. (4)

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

E. 9(28)
$$m_c \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} + 2c \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2cm_c}{f_a}, \quad \Big| \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{5}$$

$$m_c \cdot \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right) + 2c \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2cm_c}{f_a} \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad |()^2 \tag{6}$$

$$m_c^2 + m_c^2 \cdot \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} + 4c^2 \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 2m_c^2 \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 4cm_c \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 4cm_c \cdot \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} =$$
$$= \frac{4c^2m_c^2}{f_a^2} + \frac{4c^2m_c^2}{f_a^2} \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Rendezzük az egyenletet $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ fogyó hatványai szerint nullára. Így $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ negyedfokú egyenletéhez jutunk c, m_c, f_a paraméterekkel:

$$\begin{aligned} &m_c^2 \cdot \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} + 4cm_c \cdot \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} + \\ &\quad + \left(2m_c^2 + 4c^2 - \frac{4c^2m_c^2}{f_a^2}\right) \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \\ &\quad + 4cm_c \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + m_c^2 - \frac{4c^2m_c^2}{f_a^2} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

A $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \in \mathbf{R}^+ \left(0° < \frac{\alpha}{2} < 90°\right)$ *a megoldás szükséges feltétele.* (8)

$$\alpha = 2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right). \tag{9}$$

Az m_c és α ismeretében a b oldal (1)-ből, majd ezután az a oldal a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}. \tag{10}$$

Példa. A 111-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \quad m_c = 35; \quad f_a = \frac{2 \cdot 35\sqrt{2} \cdot 40 \cdot \cos 22{,}5°}{35\sqrt{2} + 40} \approx 40{,}8769,$$

$$1225 \cdot \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2} + 5600 \cdot \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} + 4157{,}9690 \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 5600 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 3467{,}0310 = 0,$$

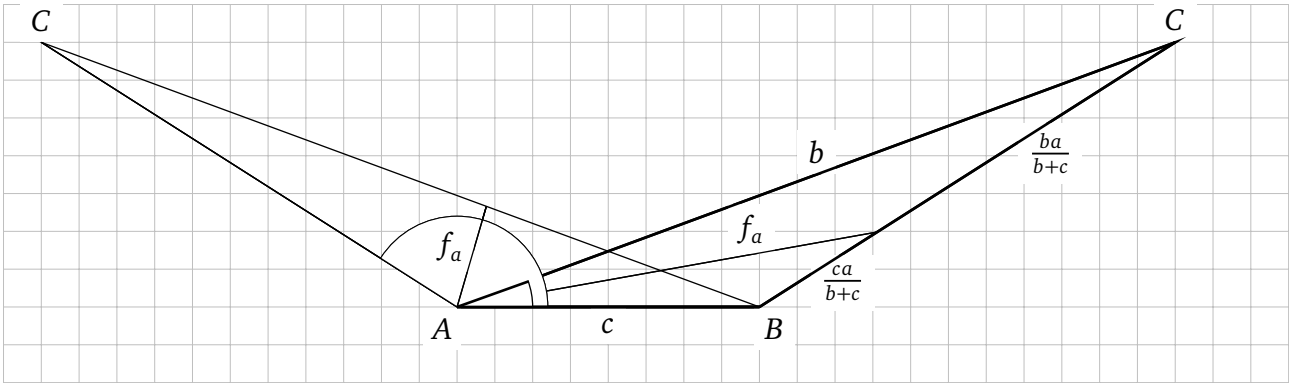
$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_1 \approx 0{,}4142; \quad \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_2 \approx -4{,}0548; \quad \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_3 = \text{komplex}; \quad \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_4 = \text{komplex}.$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Látható, hogy csak az (1) indexű eset ad megoldást:

$$\alpha \approx 45°; \qquad b \approx 49{,}4975; \qquad a \approx 35{,}3553.$$

Ha f_a belső szögfelező (2) képletét megvizsgáljuk, megállapíthatjuk, hogy rögzített c és m_c esetén, ha α tart 180°-hoz, akkor f_a tart nullához, ha pedig α tart nullához, akkor f_a tart $2c$-hez, vagyis f_a-nak felső határa is van (111-2. ábra).



111-2. ábra

$$\lim_{\alpha\to 180°-}\left(\frac{2c}{1+\frac{c}{b}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)=0; \qquad \lim_{\alpha\to 0°+}\left(\frac{2c}{1+\frac{c}{b}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)=2c. \tag{11}$$

Adott $c, m_c \in \mathbf{R}^+$ induló adatok esetén tehát:

$$0=\inf f_a < f_a < \sup f_a = 2c. \tag{12}$$

Így (8) *és* (12) *együttes teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Az $m_c = f_a = \frac{c\sqrt{3}}{2}$ esetén a háromszög egyenlő oldalú.

A megoldások száma (7) *pozitív valós gyökeinek számától függ, 0 vagy 1 lehet, a példában 1.*

Ha van megoldás akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a,b,c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

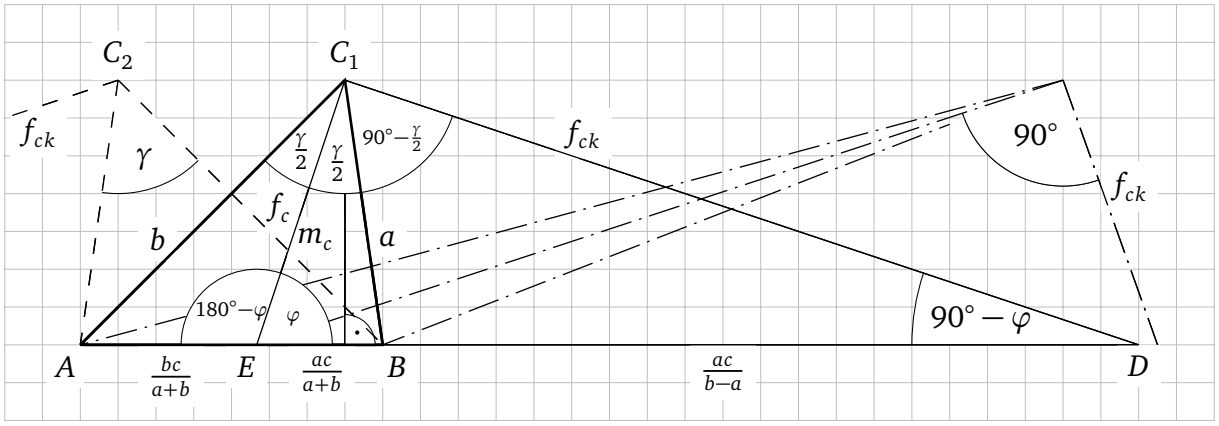
112. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a hozzá tartozó külső szögfelező (c, m_c, f_{ck})

Rajzoljunk fel egy ABC háromszöget úgy, hogy:

E. 2(3) $$a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta < 180° - \alpha \Rightarrow \alpha < 90°, \tag{1}$$

és jelöljük a választott adatokat, valamint f_c *belső szögfelező c oldali pontját E-vel (112-1. ábra).*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



112-1. ábra

Induljunk el a $|\cos\varphi|$ lehetséges értékeinek vizsgálatából:

$$|\cos\varphi| = |\sin(90°-\varphi)| = \frac{m_c}{f_{ck}}. \tag{2}$$

- $|\cos\varphi| \geq 1$ vagy $|\cos\varphi| = 0$ $(\varphi = 90°)$ esetén nincs megoldás, (3)
- $0 < |\cos\varphi| < 1$ esetén két megoldás van: (4)

$$\varphi_1 = \arccos\frac{m_c}{f_{ck}} < 90°, \quad \varphi_2 = 180° - \varphi_1 > 90°. \tag{4.1}$$

Írjuk föl a *szinusztételt* a BC_1E és az AC_1E háromszögekben, ahol $\sin\varphi = \dfrac{m_c}{f_c} < 1$: (5)

E. 11(12)

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\sin\varphi} = \dfrac{ac}{a+b}\cdot\dfrac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{f_c}{\sin\left(\varphi+\frac{\gamma}{2}\right)}, & (6) \\ \dfrac{b}{\sin\varphi} = \dfrac{bc}{a+b}\cdot\dfrac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{f_c}{\sin\left(\varphi-\frac{\gamma}{2}\right)}, & (7) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{m_c}{\sin\left(\varphi+\frac{\gamma}{2}\right)}, \\ b &= \frac{m_c}{\sin\left(\varphi-\frac{\gamma}{2}\right)}. \end{aligned}} \tag{8}$$

Használjuk fel a 110. feladat (13) egyenletét:

$$(1-\sin^2\varphi)\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} + 2\cdot\frac{f_c}{c}\cdot\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - \sin^2\varphi = 0, \tag{9}$$

majd $f_c = \dfrac{m_c}{\sin\varphi}$ (lásd (5)-öt) és $\cos^2\varphi = |\cos\varphi|^2$ figyelembevételével $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$ másodfokú egyenletéhez jutunk $c, m_c, |\cos\varphi|$ paraméterekkel:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$|\cos\varphi|^2 \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} + 2\cdot\frac{m_c}{c}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + |\cos\varphi|^2 - 1 = 0. \tag{10}$$

A $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \in \mathbf{R}^+ \left(0° < \frac{\gamma}{2} < 90°\right)$ *a megoldás szükséges feltétele,* (11)

$$\frac{\gamma}{2} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right). \tag{12}$$

A φ (4)-ből, $\frac{\gamma}{2}$ (10)-ből, majd ezután a és b (8)-ból számolható.

A háromszög egyenlő szárú lehet $a = c$ vagy $b = c$ esetén, egyenlő oldalú azonban az $a \neq b$ miatt nem lehet.

(4) *és* (11) *együttes teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Példa. A 112-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \quad m_c = 35; \quad f_{ck} = 35\sqrt{10} \approx 110{,}6797,$$
$$|\cos\varphi| = \frac{\sqrt{10}}{10} < 1; \qquad \varphi_1 \approx 71{,}5651°; \qquad \varphi_2 \approx 108{,}4349°,$$
$$0{,}1\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} + 1{,}75\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - 0{,}9 = 0,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}; \qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = -18.$$

A negatív érték nyilván nem ad megoldást.

A pozitív értékből pedig $\frac{\gamma}{2} \approx 26{,}5651°$, amivel:

$$\varphi_1 + \frac{\gamma}{2} \approx 98{,}1301°; \qquad \varphi_2 + \frac{\gamma}{2} \approx 135°;$$
$$\varphi_1 - \frac{\gamma}{2} \approx 45°; \qquad \varphi_2 - \frac{\gamma}{2} \approx 81{,}8699°;$$
$$a_1 \approx 35{,}3553; \qquad a_2 \approx 49{,}4975;$$
$$b_1 \approx 49{,}4975; \qquad b_2 \approx 35{,}3553.$$

Az a_2, b_2 megoldást a 112-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

A megoldások száma 0 vagy 2 (egy szimmetrikus pár) lehet, a példában 2.

A (4) azt is jelenti, hogy c és m_c felvétele után f_{ck}-nak alsó határa van, pontosabban $f_{ck} > m_c$ kell legyen (112-1. ábra).

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

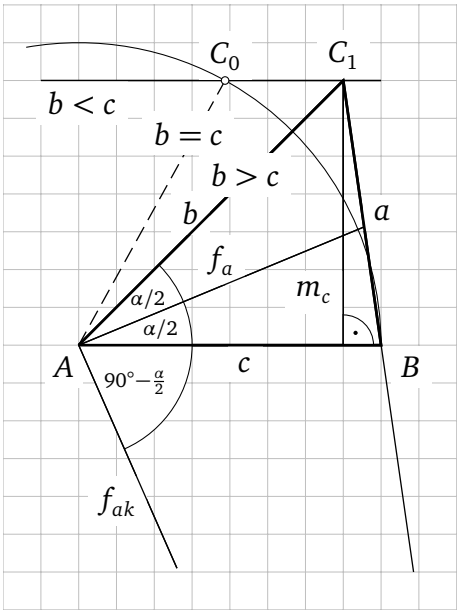
© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

113. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és egy másik oldalhoz tartozó külső szögfelező (c, m_c, f_{ak})

Rajzoljunk fel egy ABC háromszöget úgy, hogy:

$$m_c < c, \qquad \alpha < \arcsin \frac{m_c}{c}, \tag{1}$$

és jelöljük a választott adatokat (113-1. ábra).



113-1. ábra

Induljunk el b (2) és f_{ak} külső szögfelező (3) képletéből, mint egy kétismeretlenes (b, α) egyenletrendszerből:

$$b = \frac{m_c}{\sin \alpha}, \tag{2}$$

E. 30(3) $$f_{ak} = \frac{2bc}{|b-c|} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \qquad b \neq c. \tag{3}$$

$$|b-c| = \begin{cases} b-c, & \text{ha } b > c, \quad (4) \\ -(b-c) = c-b, & \text{ha } b < c. \quad (5) \end{cases}$$

Mivel most $b \neq c$, ezért c és m_c viszonyára a következő esetek lehetségesek (113-1. ábra):

- $m_c > c$, akkor $b \geq \min b = m_c > c$ minden α-ra, (6)
- $m_c = c$, akkor $\alpha \neq \arcsin \frac{m_c}{c} = 90°$, más α-ra $b > c$, (7)
- $m_c < c$ vagy $\alpha < \arcsin \frac{m_c}{c}$, akkor $b > c$, (8.1)

  vagy $\alpha > 180° - \arcsin \frac{m_c}{c}$, akkor $b > c$, (8.2)

  vagy $\arcsin \frac{m_c}{c} < \alpha < 180° - \arcsin \frac{m_c}{c}$, akkor $b < c$. (8.3)

Folytassuk (2) helyettesítésével (3)-ba:

$$f_{ak} \cdot \left| \frac{m_c}{\sin \alpha} - c \right| = 2 \cdot \frac{m_c}{\sin \alpha} \cdot c \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \qquad / \cdot \sin \alpha \tag{9}$$

$$f_{ak} \cdot |m_c - c \cdot \sin \alpha| = 2 \cdot m_c \cdot c \cdot \sin \frac{\alpha}{2}, \qquad \Big/ : \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cdot f_{ak} \right) \tag{10}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$\left|\frac{m_c}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{c\cdot 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right|=\frac{2cm_c}{f_{ak}}. \tag{11}$$

Áttérünk $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$-re, lásd E. 9(28)-at. (12)

$$\left|\frac{m_c\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}-\frac{2c}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}\right|=\frac{2cm_c}{f_{ak}},\qquad \Big/\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{13}$$

$$\left|m_c\cdot\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)-2c\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|=\frac{2cm_c}{f_{ak}}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\qquad /()^2 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}m_c^2+2m_c^2\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+m_c^2\cdot\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}-4cm_c\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-4cm_c\cdot\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}+4c^2\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\\ =\frac{4c^2m_c^2}{f_{ak}^2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\frac{4c^2m_c^2}{f_{ak}^2}\cdot\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}.\end{aligned} \tag{15}$$

Kiemelések után rendezzük az egyenletet $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ fogyó hatványai szerint nullára. Így $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ negyedfokú egyenletéhez jutunk c, m_c, f_{ak} paraméterekkel:

$$\begin{aligned}&\left(m_c^2-\frac{4c^2m_c^2}{f_{ak}^2}\right)\cdot\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}-4cm_c\cdot\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}+\\ &+\left(2m_c^2+4c^2-\frac{4c^2m_c^2}{f_{ak}^2}\right)\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-4cm_c\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+m_c^2=0.\end{aligned} \tag{16}$$

A $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\in\mathbf{R}^+\ \left(0^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ\right)$ *a megoldás szükséges feltétele.* (17)

$$\alpha=2\cdot\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right). \tag{18}$$

$$b=\frac{m_c}{\sin\alpha}. \tag{19}$$

A hiányzó a oldal ezután a *koszinusztétellel* számolható:

E. 12(22)
$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha}. \tag{20}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

1. példa. A 113-1. ábra ABC_1 háromszögének adataiból elindulva:

$$c=40;\quad m_c=35;\quad f_{ak}=\frac{280\sqrt{50+31\sqrt{2}}}{17}\approx 159{,}5528,$$

$$917{,}0310\cdot \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}-5600\cdot \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}+8542{,}0310\cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-5600\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1225=0,$$

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_1\approx 0{,}4142; \qquad \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_2\approx 4{,}2271;$$
$$\alpha_1\approx 45^\circ; \qquad \alpha_2\approx 153{,}3809^\circ;$$
$$b_1\approx 49{,}4975; \qquad b_2\approx 78{,}1149;$$
$$a_1\approx 35{,}3553; \qquad a_2\approx 115{,}2768.$$

2. példa:

$$c=40;\quad m_c=35;\quad f_{ak}=400,$$

$$1176\cdot \operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}-5600\cdot \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}+8801\cdot \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-5600\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1225=0,$$

$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_1\approx 0{,}4970;$	$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_2\approx 0{,}8640;$	$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_3\approx 1{,}0180;$	$\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)_4\approx 2{,}3829;$
$\alpha_1\approx 52{,}8548^\circ;$	$\alpha_2\approx 81{,}6540^\circ;$	$\alpha_3\approx 91{,}0221^\circ;$	$\alpha_4\approx 134{,}4687^\circ;$
$b_1\approx 43{,}9087;$	$b_2\approx 35{,}3746;$	$b_3\approx 35{,}0056;$	$b_4\approx 49{,}0448;$
$a_1\approx 37{,}5084;$	$a_2\approx 49{,}4023;$	$a_3\approx 53{,}6223;$	$a_4\approx 82{,}1824.$

A 113-2. ábrából mindkét példa valamennyi megoldása leolvasható.

A részletesebb vizsgálat:

Látható, hogy f_{ak} megváltozása a gyökök számának megváltozását eredményezi. Ennek megértéséhez először állítsuk elő az $f_{ak}(\alpha)$ függvényt (11)-ből, majd vizsgáljuk meg.

1. Legyen $\dfrac{m_c}{c}<1$ (113-1. ábra, 113-2. ábra). Ekkor:

$$\boxed{f_{ak}(\alpha)=\frac{2m_c\cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\left|\frac{m_c}{c}-\sin\alpha\right|},} \tag{21}$$

$$\alpha_0=\arcsin\frac{m_c}{c}<90^\circ. \tag{22}$$

$$\sin\alpha_0=\sin(180^\circ-\alpha_0)=\frac{m_c}{c}<1,\ \alpha\neq\alpha_0,\ \alpha\neq 180^\circ-\alpha_0. \tag{23}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Vizsgáljuk meg (21) függvény határértékeit:

$$\lim_{\alpha\to 0^\circ+} f_{ak}(\alpha) = 0, \qquad \lim_{\alpha\to 180^\circ-} f_{ak}(\alpha) = 2c, \tag{24}$$

$$\lim_{\alpha\to \alpha_0} f_{ak}(\alpha) = +\infty, \qquad \lim_{\alpha\to 180^\circ-\alpha_0} f_{ak}(\alpha) = +\infty. \tag{25}$$

Az $f_{ak}(\alpha)$-nak tehát $\alpha_0 < \alpha < 180^\circ - \alpha_0$ között lokális minimuma kell legyen, ami az $f'_{ak}(\alpha) = 0$ $\left(\left|\frac{m_c}{c} - \sin\alpha\right| = |\sin\alpha_0 - \sin\alpha| = \sin\alpha - \frac{m_c}{c} > 0\right)$ egyenletből nyert

$$\boxed{2\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2} - \frac{m_c}{c}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \frac{m_c}{c} = 0} \tag{26}$$

egyenletből számolható.

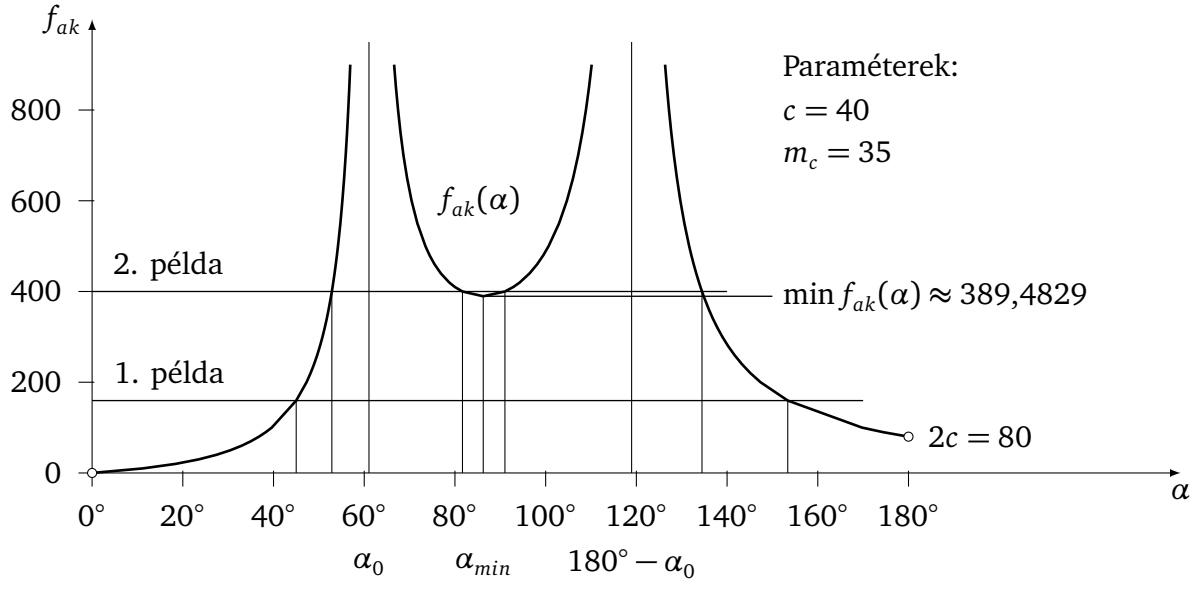
A $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} \in \mathbf{R}^+$ $\left(0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ\right)$, lásd még (17)-et.

A 113-2. ábra paramétereivel tehát:

Ha $c = 40, \quad m_c = 35,$

akkor $\alpha_0 = \arcsin\frac{35}{40} \approx 61{,}0450^\circ; \quad 180^\circ - \alpha_0 \approx 118{,}9550^\circ;$

és $\alpha_{min} \approx 86{,}2391^\circ; \qquad \min f_{ak}(\alpha) \approx 389{,}4829.$



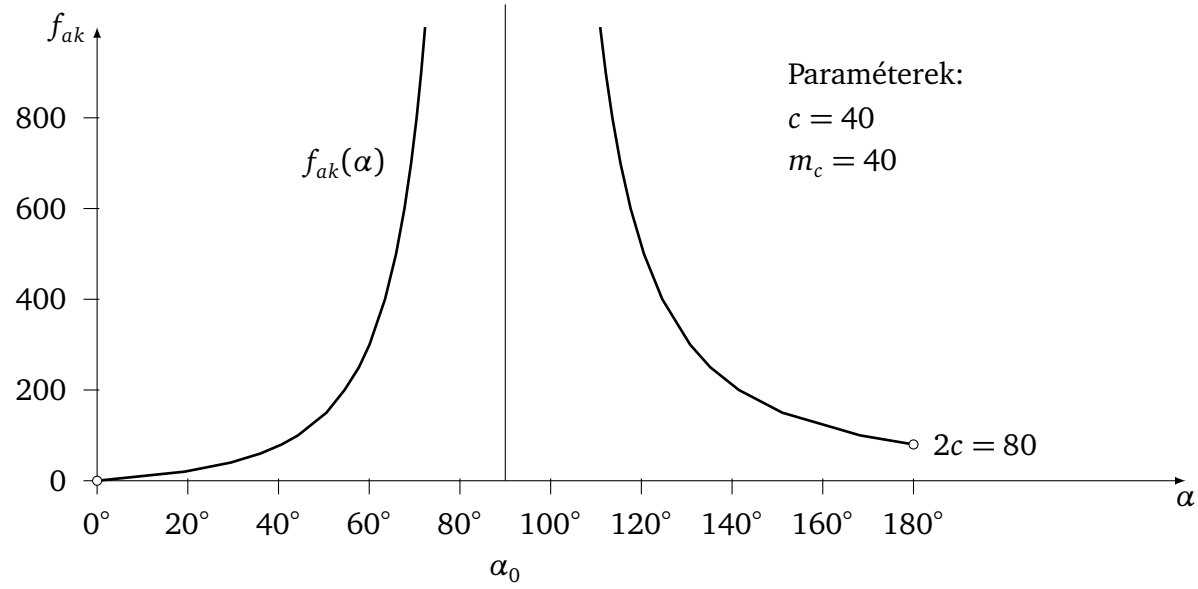
113-2. ábra

2. Legyen $\frac{m_c}{c} = 1$ (113-3. ábra). Ekkor:

$$\boxed{f_{ak}(\alpha) = \frac{2m_c\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\alpha},} \tag{27}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

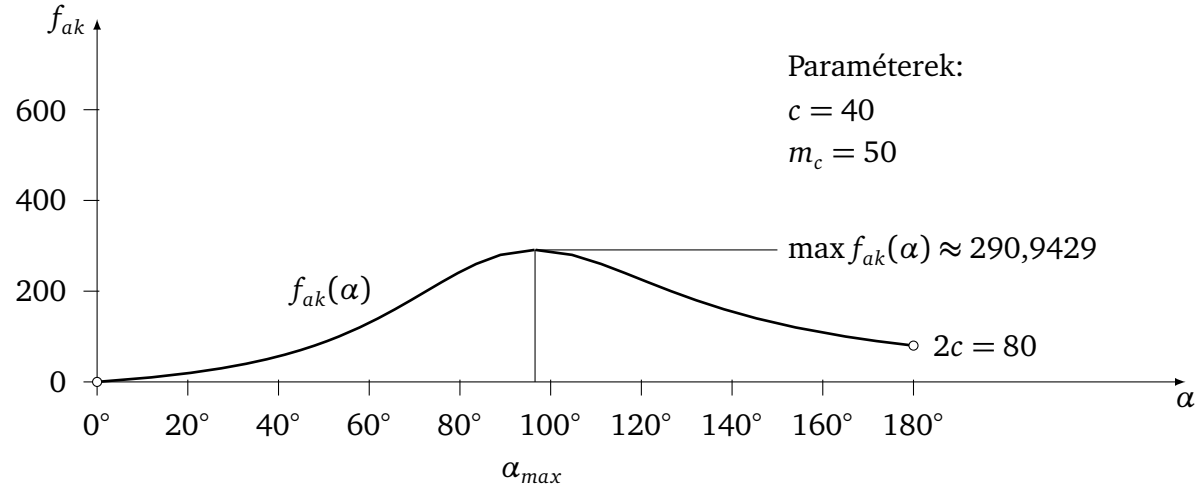
$$\alpha \neq \alpha_0 = \arcsin\frac{m_c}{c} = \arcsin 1 = 90°. \tag{28}$$



113-3. ábra

3. Végül legyen $\frac{m_c}{c} > 1$ (113-4. ábra). Ekkor:

$$f_{ak}(\alpha) = \frac{2m_c \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{m_c}{c} - \sin\alpha}. \tag{29}$$



113-4. ábra

Most az $f'_{ak}(\alpha) = 0$, $\left(\frac{m_c}{c} - \sin\alpha > 0\right)$ egyenletből szintén (26) nyerhető, ami $c = 40$ és $m_c = 50$ paramétereknél:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$2\cdot \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}-1{,}25\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1{,}25=0,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\approx 1{,}1217;\qquad \alpha\approx 2\cdot\operatorname{arctg}1{,}1217\approx 96{,}5667^\circ=\alpha_{max}.$$

A $\max f_{ak}(\alpha)$ ezután (29)-ből számolható: $\max f_{ak}(\alpha)\approx 290{,}9429$.

Látható, hogy $f_{ak}(\alpha)$-nak $m_c > c$ esetén maximuma van, ami azt is jelenti, hogy f_{ak}-t felvéve $f_{ak} > \max f_{ak}(\alpha)$ esetén nincs megoldás.

Visszatérve a 113-1. ábrához, látható, hogy $a = b$ vagy $a = c$ esetén a háromszög egyenlő szárú, $b \neq c$ miatt azonban egyenlő oldalú nem lehet.

A vizsgálatból az is kiderül, hogy a (16)-ból számolt $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\in\mathbf{R}^+$ *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

A megoldások száma (16) *pozitív valós gyökeinek számától függ, 0, 1, 2, 3, ill. 4 lehet, az 1. példában 2, a 2. példában 4.*

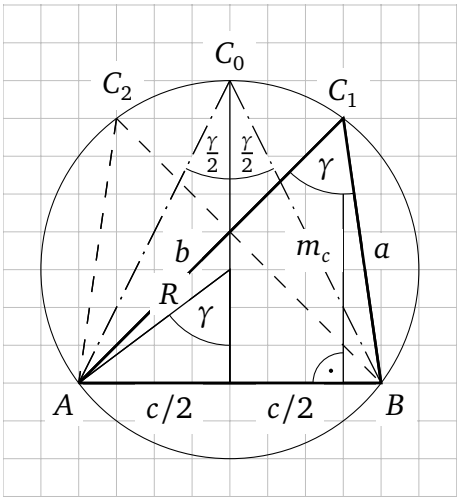
Megjegyzés: Helyi minimumnál $f''_{ak}(\alpha) > 0$, a helyi maximumnál $f''_{ak}(\alpha) < 0$. Mivel $f''_{ak}(\alpha)$ előállítása nehézkes, hogy minimumról vagy maximumról van szó, arra a függvény felvázolása után is lehet következtetni.

A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

114. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a körülírt kör sugara (c, m_c, R)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (114-1. ábra).



114-1. ábra

Induljunk el a könnyen felírható $\sin\gamma$-ból, majd keressünk feltételt az induló adathármasra:

E. 11(11) $$\sin\gamma=\frac{c}{2R}. \tag{1}$$

$$\frac{c}{2R}\le 1, \tag{2}$$

$$\gamma_{12}=\arcsin\frac{c}{2R}\le 90^\circ, \tag{3}$$

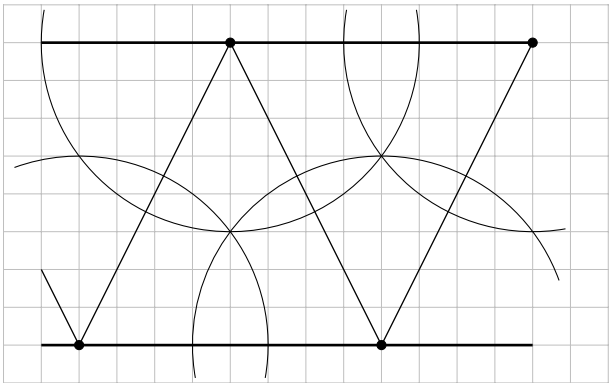
$$\gamma_{34}=180^\circ-\gamma_{12}\ge 90^\circ, \tag{4}$$

$$m_c\le\max m_c=\frac{c}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma_{12}}{2}. \tag{5}$$

(2) *és* (5) *együttes teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Példa. Egy hosszanti kerítés mentén utat, az út mellé lámpasort terveznek. Milyen széles lehet az út legfeljebb, ha tudjuk, hogy két lámpaoszlop távolsága $c = 4$ m, egy lámpa által bevilágított terület sugara $R = 2{,}5$ m, és azt szeretnénk, hogy az úton ne legyen vakfolt, olyan terület, ahol nincs világítás? Lásd a 114-1. és 114-2. ábrákat.



114-2. ábra

$$c = 4 \text{ m}; \quad R = 2{,}5 \text{ m},$$

$$\gamma_{12} = \arcsin \frac{4}{2 \cdot 2{,}5} \approx 53{,}1301°,$$

$$\max m_c = \frac{4}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{53{,}1301°}{2}} \approx 4 \text{ m}.$$

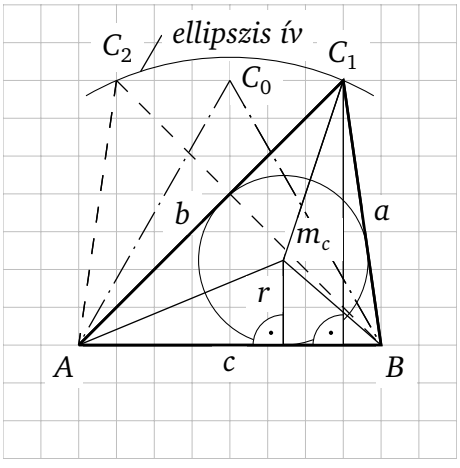
A folytatás c, γ_{12}, m_c-vel, ill. c, γ_{34}, m_c-vel (amennyiben γ_{12} különbözik γ_{34}-től) történik. Lásd a 45. (c, γ, m_c) 1. és a 46. (c, γ, m_c) 2. feladatokat.

Ha ez utóbbit választjuk, akkor: $(c, \gamma, m_c) \overset{\text{(46.f.)}}{\Longrightarrow} \alpha$. *Így egy oldalhoz és két szöghöz jutunk, a 46. feladatban* c, γ, α, *amiből már könnyen számolható a hiányzó két oldal. A c és R felvétele után* ($c \leq 2R$) m_c*-től függően a megoldások száma 0, 1 (egy egyenlő szárú vagy egyenlő oldalú háromszög), 2 (egy szimmetrikus pár, lásd a 114-1. ábrát), 3 (egy egyenlő szárú háromszög és egy szimmetrikus pár), illetve 4 (két szimmetrikus pár) lehet.*

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

115. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a beírt kör sugara (c, m_c, r)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (115-1. ábra).



115-1. ábra

Induljunk el a terület (t) és a félkerület (s) képletéből (1), (2) mint egy kétismeretlenes (s, t) egyenletrendszerből. Keressünk feltételt az induló adathármasra:

$$t = \frac{c \cdot m_c}{2}, \tag{1}$$

E. 32(4)
$$s = \frac{t}{r}; \qquad k = 2s. \tag{2}$$

E. 16(4)
$$t \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}. \tag{3}$$

(3) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

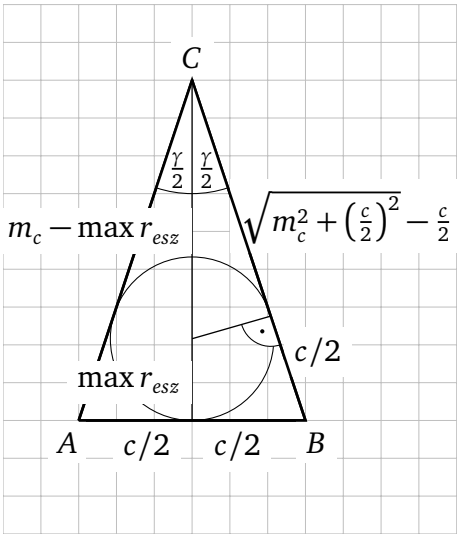
(2)-ből látszik, hogy adott területű háromszögben r maximuma s minimumánál jelentkezik.

Folytassuk r maximumának megkeresésével, jelöljük $\max r_{esz}$-szel.

Rögzített c és m_c esetén $(a+b)$-nek minimuma van C_0-nál az $a=b$ egyenlő szárú esetben, ugyanis $a+b=$ állandónál a C pontok egy A, B *fókuszú ellipszis* vonalon helyezkednek el (a nagytengely hossza $a+b$) (115-1. ábra).

$$\min(a+b)=2\cdot\sqrt{m_c^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}=\sqrt{4m_c^2+c^2}, \tag{4}$$

$$\min s=\frac{\min(a+b)}{2}+\frac{c}{2}=\sqrt{m_c^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}+\frac{c}{2}=\frac{\sqrt{4m_c^2+c^2}+c}{2}. \tag{5}$$



115-2. ábra

$$\max r_{esz}=\frac{t}{\min s}, \tag{6}$$

$$\max r_{esz}=\frac{c\cdot m_c}{\sqrt{4m_c^2+c^2}+c}, \tag{7}$$

vagy a 115-2. ábrából számolható.

$$\boxed{0<r\le\max r_{esz}.} \tag{8}$$

Egyenlőség az $a=b$ egyenlő szárú ($a=b=c$ esetén egyenlő oldalú) háromszögnél áll fenn.

Ha az induló adathármasra igaz, hogy:

$$m_c=\frac{c\sqrt{3}}{2},\qquad r=\frac{c\sqrt{3}}{6},$$

akkor a háromszög egyenlő oldalú.

A c és m_c induló adatok felvétele után (8) *egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

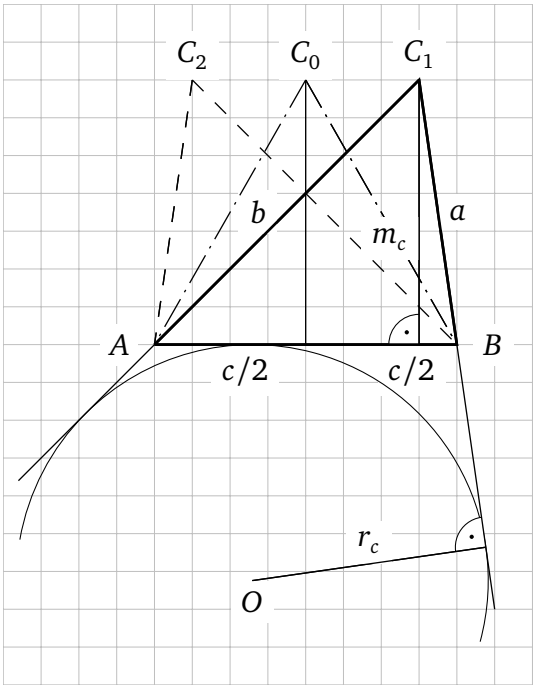
A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, lásd a 115-1. ábrát.

Most a terület, kerület és egy oldal ismeretében $(t,k,c)\overset{(79.f.)}{\Longrightarrow}(a,b,c)\overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

116. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és ezen oldalhoz a hozzáírt kör sugara (c, m_c, r_c)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (116-1. ábra).



116-1. ábra

Induljunk el a terület (t) és a hozzáírt kör sugara (r_c) képletéből (1), (2) mint egy kétismeretlenes (s, t) egyenletrendszerből. Keressünk feltételt az induló adathármasra:

$$t = \frac{c \cdot m_c}{2}, \tag{1}$$

E. 34(3)
$$r_c = \frac{t}{s - c}, \tag{2}$$

$$s = \frac{c \cdot m_c}{2r_c} + c, \tag{3}$$

$$k = 2s, \tag{4}$$

E. 16(4)
$$t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}. \tag{5}$$

(5) *teljesülése a megoldás szükséges feltétele.*

$$\max r_c = \frac{t}{\min s - c} = \frac{\frac{c}{2} \cdot m_c}{\sqrt{m_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \frac{c}{2}} = \frac{c \cdot m_c}{\sqrt{4m_c^2 + c^2} - c}. \tag{6}$$

Lásd még 115. (5)-öt. Adott c és m_c induló adatok esetén tehát igaz kell legyen:

$$\boxed{0 < r_c \le \max r_c.} \tag{7}$$

A (7) *egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

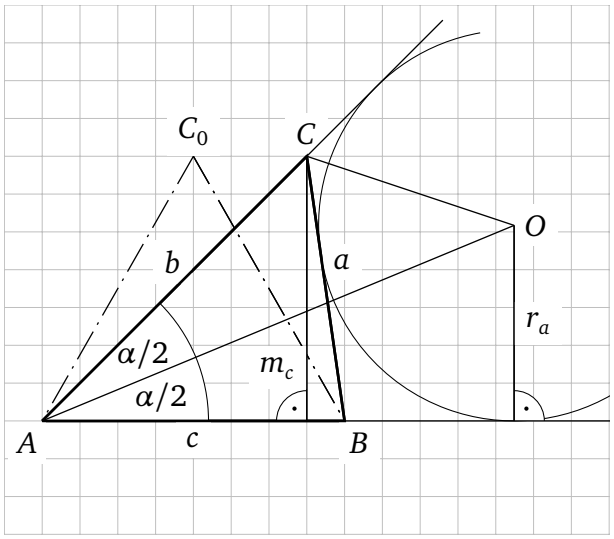
A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, lásd a 116-1. ábrát.

Most terület, kerület és egy oldal ismeretében $(t, k, c) \overset{(79.f.)}{\Longrightarrow} (a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

117. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és egy másik oldalhoz a hozzáírt kör sugara (egyértelmű) (c, m_c, r_a)

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat (117-1. ábra).



117-1. ábra

Induljunk el a terület (t) és a hozzáírt kör sugara (r_a) képletéből (1),(2) valamint (4)-ből és a *Héron-képletből* (5) mint egy négyismeretlenes s, $(s-a)$, $(s-b)$, t egyenletrendszerből:

$$t = \frac{c \cdot m_c}{2}, \tag{1}$$

E. 34(3)
$$r_a = \frac{t}{s-a}, \tag{2}$$

$$s - a = \frac{t}{r_a}, \tag{3}$$

$$s - b = c - (s-a) = c - \frac{t}{r_a}, \tag{4}$$

E. 36(4)
$$t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c). \tag{5}$$

Helyettesítsük (5)-be (3)-at és (4)-et:

$$t = \frac{s}{r_a} \cdot \left(c - \frac{t}{r_a}\right) \cdot (s-c), \tag{6}$$

$$\frac{r_a^2 \cdot t}{c \cdot r_a - t} = s^2 - s \cdot c. \tag{7}$$

Rendezzük a (7) egyenletet s fogyó hatványai szerint nullára. Így az s ismeretlen félkerület másodfokú egyenletéhez jutunk c, t, r_a paraméterekkel:

$$\boxed{s^2 - c \cdot s - \frac{r_a^2 \cdot t}{c \cdot r_a - t} = 0.} \tag{8}$$

Az $s \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás szükséges feltétele.* (9)

$$s - c \geq \sqrt{m_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \frac{c}{2} > 0, \qquad \text{hiszen } s \text{ } C_0\text{-nál lesz minimális,} \tag{10}$$

(10) *a megoldás további szükséges feltétele.*

Keressünk feltételt r_a-ra, ehhez vizsgáljuk meg (4)-et:

$$s - b = c - \frac{t}{r_a} = c - \frac{c \cdot m_c}{2r_a} = c \cdot \left(1 - \frac{m_c}{2r_a}\right) > 0. \tag{11}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

(11) *a megoldás további szükséges feltétele.*

(11)-ből kapjuk a feltételt r_a-ra:

$$r_a > \frac{m_c}{2}. \tag{12}$$

Vizsgáljuk meg a (8) egyenlet *diszkriminánsát* és a gyökök előjelét, ld. a *Viète-féle formulákat*:

$$D = c^2 + \frac{4r_a t}{c - \dfrac{t}{r_a}}, \tag{13}$$

$$s_1 \cdot s_2 = -\frac{r_a \cdot t}{c - \dfrac{t}{r_a}}. \tag{14}$$

Ha $c - \dfrac{t}{r_a} > 0$ (ld. (11)-et), akkor $D > 0$ és $s_1 \cdot s_2 < 0$, vagyis a két különböző gyök mindig valós, és közülük az egyik és csak az egyik mindig pozitív.

(9), (10) *és* (11) *együttes teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Az elégségesség igazolása:

- (9) miatt $s \in \mathbf{R}^+$.
- $\dfrac{t}{r_a} = s - a > 0,$ így $\dfrac{-a+b+c}{2} > 0$ és $b + c > a.$ (15)
- (11) miatt $s - b > 0,$ így $\dfrac{a-b+c}{2} > 0$ és $a + c > b.$ (16)
- (10) miatt $s - c > 0,$ így $\dfrac{a+b-c}{2} > 0$ és $a + b > c.$ (17)

Most a *háromszög-egyenlőtlenség* teljesülése miatt $a, b \in \mathbf{R}^+$ lesz, és (18)-ból számolható:

$$a = s - \frac{t}{r_a}, \qquad b = 2s - (a + c). \tag{18}$$

Példa. A 117-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \quad m_c = 35; \quad r_a = 40 - 10\sqrt{2} \approx 25{,}8579,$$

$$s^2 - 40 \cdot s - 1400 = 0,$$

$$s_1 = 20 - 30\sqrt{2} \approx -22{,}4264; \qquad s_2 = 20 + 30\sqrt{2} \approx 62{,}4264.$$

Látszik, hogy csak s_2 ad megoldást, mint ahogy az várható volt, és ekkor:

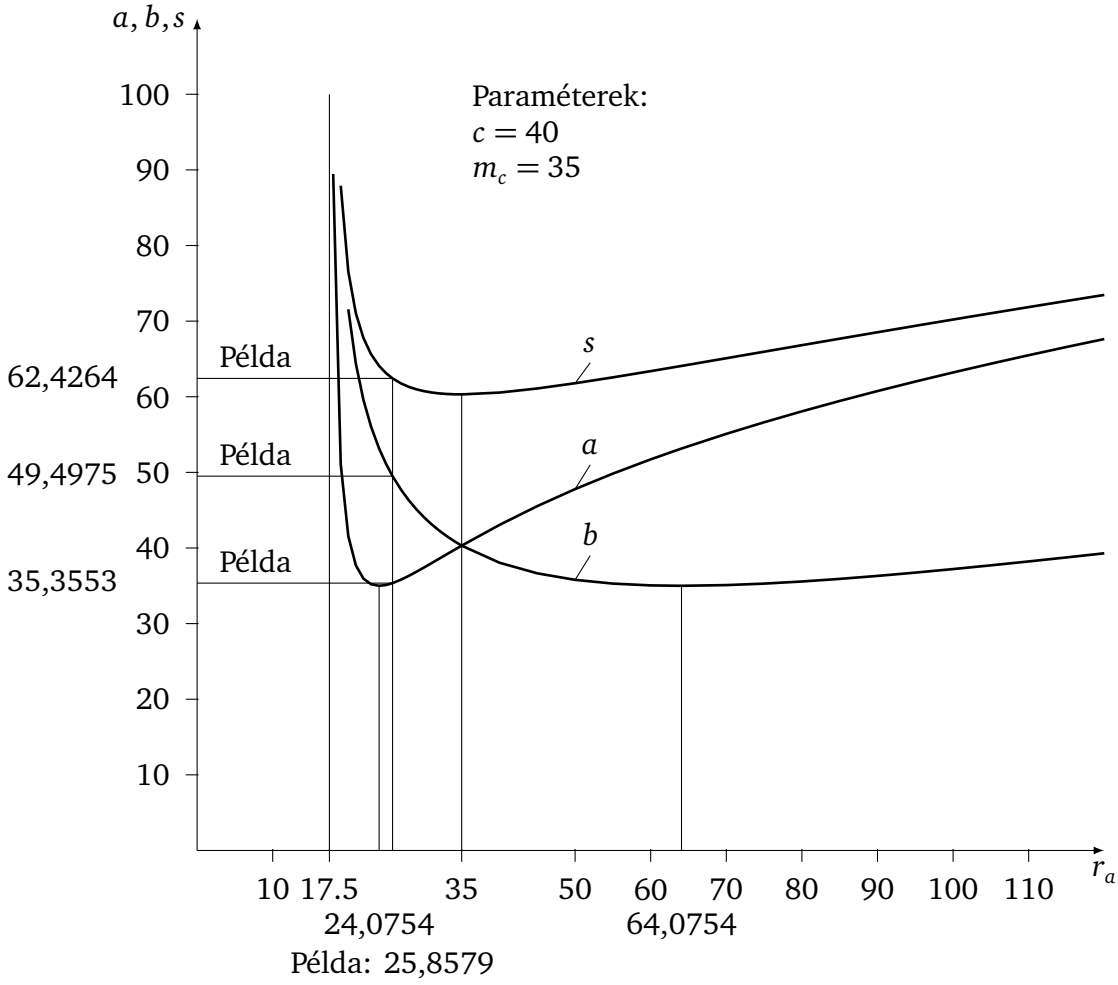
$$a \approx 35{,}3553, \qquad b \approx 49{,}4975.$$

A megoldások száma 0 vagy 1 lehet, a példában 1.
Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A részletesebb vizsgálat: A c, m_c, r_a adatok felvétele után kiszámítjuk s-et, a-t, b-t, mint a példában, ezúttal azonban további pontokon c-t és m_c-t paraméternek választva, majd felrajzoljuk a kapott $s(r_a)$, $a(r_a)$, $b(r_a)$ függvényeket egy r_a, a, b, s koordináta-rendszerben.

Az a, b, s függvényeknél az r_a független változó jelölését az egyszerűség kedvéért most elhagytuk (117-2. ábra). Az ábrából a példa megoldása is leolvasható.



117-2. ábra

A c és m_c felvétele után az $r_a(\alpha)$ függvény határértékei a következőképpen alakulnak:

$$\lim_{\alpha\to 0^\circ+} r_a(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0^\circ+} \frac{t}{s-a} = \lim_{\alpha\to 0^\circ+} \frac{\frac{c\cdot m_c}{2}}{\frac{(b-a)+c}{2}} = \frac{\frac{c\cdot m_c}{2}}{\frac{c+c}{2}} = \frac{m_c}{2}, \tag{19}$$

$$\lim_{\alpha\to 180^\circ-} r_a(\alpha) = \lim_{\alpha\to 180^\circ-} \frac{t}{s-a} = \lim_{\alpha\to 180^\circ-} \frac{\frac{c\cdot m_c}{2}}{\frac{(b-a)+c}{2}} = +\infty. \tag{20}$$

Ezután vizsgáljuk meg a 117-2. ábra függvényeit.

A minimumokat és a hozzájuk tartozó r_a-kat pedig a következőképpen számíthatjuk:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

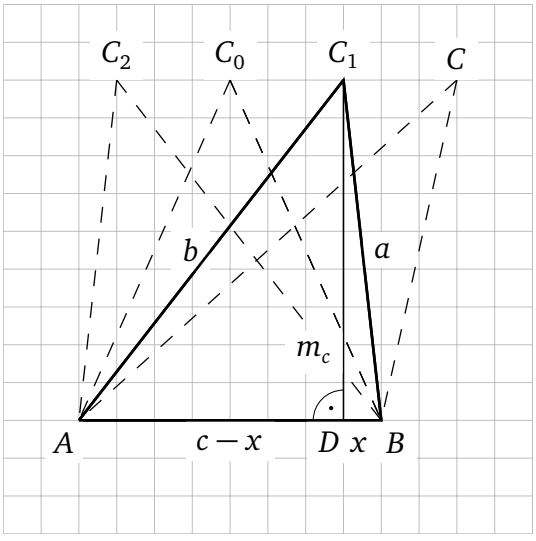
- $\min a = m_c$ (21)
  ha $m_c = 35$, $\min a = 35$,
  a hozzá tartozó r_a pedig: $r_a \approx 24{,}0754$.
- $\min b = m_c$ (22)
  ha $m_c = 35$, $\min b = 35$,
  a hozzá tartozó r_a pedig: $r_a \approx 64{,}0754$.
- $\min s = s_{esz} = \sqrt{m_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} + \frac{c}{2} \qquad (a = b)$ (23)
  ha $m_c = 35$, $c = 40$, $\min s \approx 60{,}3113$,
  a hozzá tartozó r_a pedig: $r_a = 35$,
  ugyanis $r_a = \dfrac{t}{s-a} = \dfrac{\frac{c \cdot m_c}{2}}{\frac{(b-a)+c}{2}} = \dfrac{\frac{c \cdot m_c}{2}}{\frac{c}{2}} = m_c$.

A vizsgálat programmal készült.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{(1.f.)}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

118. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a másik két oldal összege $(c, m_c, a+b)$

Rajzoljunk fel egy ABC általános háromszöget, és jelöljük a választott adatokat, valamint m_c magasság talppontját D-vel (118-1. ábra).



118-1. ábra

Induljunk el a *háromszög-egyenlőtlenségből* (1), a félkerület (s) és a terület (t) képleteiből (2), (3) mint egy kétismeretlenes (s, t) egyenletrendszerből. Keressünk feltételt az induló adathármasra:

E. 1(3) $$a + b > c. \tag{1}$$

$$s = \frac{(a+b)+c}{2} = \frac{k}{2}, \tag{2}$$

$$t = \frac{c \cdot m_c}{2}. \tag{3}$$

E. 16(4) $$t \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}. \tag{4}$$

(1) *és* (4) *egyenlőtlenségek teljesülése a megoldás szükséges feltétele*.

Rögzített c és m_c esetén $(a+b)$-nek minimuma van C_0-nál, az $a = b$ egyenlő szárú esetben jelöljük $(a+b)_{esz}$-szel, ugyanis $a + b =$ állandónál a C pontok egy A, B *fókuszú ellipszis* vonalon helyezkednek el (a nagytengely hossza $a + b$) (115-1. ábra, 118-1. ábra).

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$c < \min(a+b) = (a+b)_{esz} = \sqrt{4m_c^2 + c^2} \le a+b. \tag{5}$$

(5) *egyenlőtlenség teljesülése a megoldás szükséges és elégséges feltétele.*

Írjuk fel a *Pitagorasz-tételt* a BC_1D és az AC_1D háromszögekben:

$$\sqrt{m_c^2 + x^2} + \sqrt{m_c^2 + (c-x)^2} = a+b, \tag{6}$$

$$\sqrt{m_c^2 + (c-x)^2} = (a+b) - \sqrt{m_c^2 + x^2}, \qquad \big/()^2$$

$$\cancel{m_c^2} + (c-x)^2 = (a+b)^2 - 2\cdot(a+b)\cdot\sqrt{m_c^2+x^2} + \cancel{m_c^2} + x^2,$$

$$2\cdot(a+b)\cdot\sqrt{m_c^2+x^2} = (a+b)^2 + \cancel{x^2} - c^2 + 2cx - \cancel{x^2}, \qquad \big/()^2$$

$$4\cdot(a+b)^2\cdot m_c^2 + 4\cdot(a+b)^2\cdot x^2 - 4c^2x^2 - 4cx\cdot\left((a+b)^2-c^2\right) - \left((a+b)^2-c^2\right)^2 = 0,$$

$$4\cdot\left((a+b)^2-c^2\right)\cdot x^2 - 4c\cdot\left((a+b)^2-c^2\right)\cdot x + 4\cdot(a+b)^2\cdot m_c^2 - \left((a+b)^2-c^2\right)^2 = 0.$$

A p, q jelölések bevezetése után az x ismeretlen egyszerűbb másodfokú egyenletéhez jutunk c, m_c, $a+b$ paraméterekkel:

$$\begin{gathered}(a+b)^2 - c^2 = p, \qquad (a+b)^2\cdot m_c^2 = q,\\ 4p\cdot x^2 - 4pc\cdot x + 4q - p^2 = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Az $x \in \mathbf{R}$ *a megoldás további szükséges feltétele.* (8)

$$a = \sqrt{m_c^2 + x^2}, \qquad b = \sqrt{m_c^2 + (c-x)^2}. \tag{9}$$

Példa. A 118-1. ábra ABC_1 háromszögének adataiból elindulva:

$$\begin{aligned} &c = 40; \quad m_c = 45; \quad a+b = 5\sqrt{82} + 5\sqrt{130} \approx 102{,}2857,\\ &p = \left(5\sqrt{82} + 5\sqrt{130}\right)^2 - 40^2 \approx 8862{,}3638,\\ &q = \left(5\sqrt{82} + 5\sqrt{130}\right)^2 \cdot 45^2 \approx 21\,186\,286{,}6943. \end{aligned}$$

A (7) egyenletbe történő helyettesítés és az egyenlet megoldása után kapjuk x értékeit, majd (9)-ből számolhatjuk a-t és b-t:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5; & x_2 &= 35,\\ a_1 &= 5\sqrt{82} \approx 45{,}2769; & a_2 &= 5\sqrt{130} \approx 57{,}0088,\\ b_1 &= 5\sqrt{130} \approx 57{,}0088; & b_2 &= 5\sqrt{82} \approx 45{,}2769. \end{aligned}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Az a_2, b_2 megoldást a 118-1. ábrán szaggatott vonallal jelöltük.

Megjegyzés: Ha D egybeesik B-vel, vagy azon túl helyezkedik el, akkor $x \le 0$, ha pedig D egybeesik A-val, vagy azon túl helyezkedik el, akkor $x \ge c$, a feladat megoldása azonban nem változik.

Ha az induló adathármasra igaz, hogy

$$m_c = \frac{c\sqrt{3}}{2}; \qquad a + b = 2c, \tag{10}$$

akkor a háromszög egyenlő oldalú, és

$$t = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}. \tag{11}$$

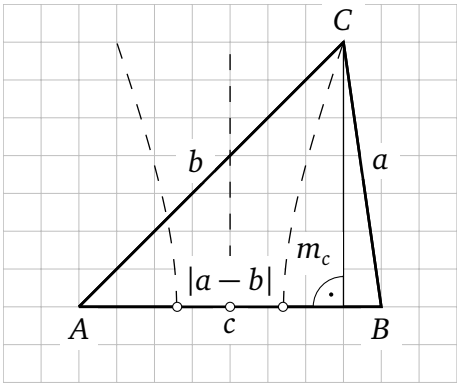
Megjegyzés: A t terület (3), a k kerület (2) adatok ismeretében a megoldás folytatható a 79. (t, k, c) feladatban leírtak szerint is.

A megoldások száma 0, 1 vagy 2 lehet, mely utóbbi szimmetrikus pár, a példában 2.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

119. Egy oldal, a hozzá tartozó magasság és a másik két oldal különbsége $(c, m_c, a-b)$ (egyértelmű)

Most $(a - b) \in \mathbf{R}$. A c és $|a - b| =$ állandó $< c < a + b$ felvétele után a C pontok egy A,B *fókuszú hiperbolán* vagy egy egyenesen helyezkednek el. Pontosabban $-(a + b) < -c < a - b < 0$ esetén a jobb oldali hiperbola ágon, $0 < a - b < c < a + b$ esetén a bal oldali hiperbola ágon, $0 = a - b < c < a + b$ esetén pedig $\overline{AB}$ *felezőmerőlegesén* (119-1. ábra). Mivel a három eset kizárja egymást, ezért $\overline{AB}$-vel párhuzamosan tőle m_c távolságra húzott egyenessel csak egy metszéspont létezhet.



119-1. ábra

Induljunk el a *Héron-képletből* (4), és alakítsuk át. Használjuk föl az (1), (2) és a (3) összefüggéseket:

$$t = \frac{c \cdot m_c}{2}, \tag{1}$$

$$\frac{-(a-b)+c}{2} = s - a, \tag{2}$$

$$\frac{(a-b)+c}{2} = s - b, \tag{3}$$

E. 36(4)
$$t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c). \tag{4}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Átalakítás után egy s-re nézve másodfokú egyenlethez jutunk $c, t, (s-a), (s-b)$ paraméterekkel:

$$\boxed{s^2 - c \cdot s - \frac{t^2}{(s-a)(s-b)} = 0.} \tag{5}$$

Az $s \in \mathbf{R}^+$ *a megoldás szükséges feltétele.* (6)

Vizsgáljuk meg az (5) egyenlet s_1, s_2 gyökeit.

Tegyük fel, hogy c, t pozitív paraméterek, és teljesül a *háromszög-egyenlőtlenség*:

E. 1(3)
$$0 \le |a-b| < c < a+b. \tag{7}$$

A diszkrimináns:

$$D = c^2 + \frac{4t^2}{(s-a)\cdot(s-b)} > 0, \tag{8}$$

ugyanis (7) miatt

$$s-a = \frac{-(a-b)+c}{2} > 0, \qquad s-b = \frac{(a-b)+c}{2} > 0.$$

Az (5) egyenlet valós gyökeinek vizsgálatát folytassuk a *Viète-féle formulákkal*:

$$s_1 + s_2 = c > 0, \quad s_1 \cdot s_2 = -\frac{t^2}{(s-a)\cdot(s-b)} < 0. \tag{9}$$

Vagyis s_1 és s_2 közül az egyik és csak az egyik mindig pozitív.

Továbbá ha s pozitív valós, akkor

$$s - c = \frac{t^2}{s(s-a)(s-b)} > 0,$$
$$\frac{a+b-c}{2} > 0,$$
$$a + b > c.$$

Ezzel teljesül a (7)-ben feltett háromszög-egyenlőtlenség jobb oldala is.

A $0 \le |a-b| < c < s < a+b$ *a megoldás szükséges és elégséges feltétele.* (10)

A pozitív s-et felhasználva (2)-ből és (3)-ból számolhatjuk a-t és b-t:

$$\boxed{a = s - \frac{c-(a-b)}{2}, \qquad b = s - \frac{c+(a-b)}{2}.} \tag{11}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Példa. A 119-1. ábra adataiból elindulva:

$$c = 40; \quad m_c = 35; \quad a - b = -10\sqrt{2}.$$

A feltétel: $|a-b| = |-10\sqrt{2}| = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1421 < 40 = c.$

$$s - a = \frac{10\sqrt{2}+40}{2} = 5\sqrt{2}+20; \quad s - b = \frac{-10\sqrt{2}+40}{2} = -5\sqrt{2}+20; \quad t^2 = 700^2 = 490\,000,$$

$$s^2 - 40 \cdot s - 1400 = 0,$$

$$s_1 = 20 + 30\sqrt{2} \approx 62{,}4264; \qquad s_2 = 20 - 30\sqrt{2} \approx -22{,}4264.$$

Látszik, hogy csak a pozitív s_1 ad megoldást ($s = s_1 > c > 0$), mint az várható volt:

$$a = s - \frac{c-(a-b)}{2} = 25\sqrt{2} \approx 35{,}3553; \qquad b = s - \frac{c+(a-b)}{2} = 35\sqrt{2} \approx 49{,}4975.$$

A megoldások száma 0 vagy 1 lehet, a példában 1.

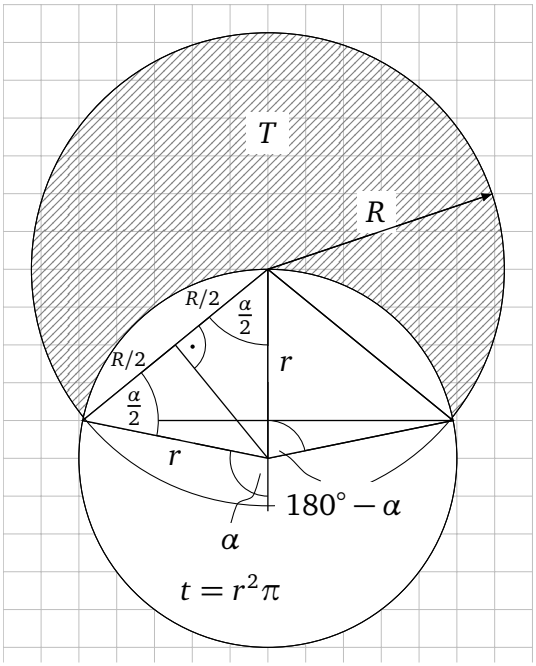
Ha van megoldás, akkor csak egy van. A feladat megoldása egyértelmű.

Most három oldal $(a, b, c) \overset{\text{(1.f.)}}{\Longrightarrow}$ *a többi adat.*

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

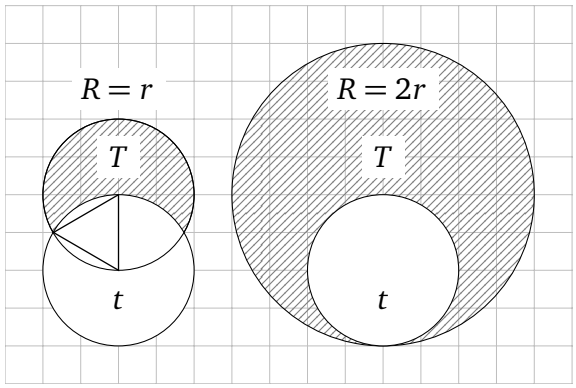
120. Egy játékos feladat

Nemrég meglátogatott egy régi barátom, Pető Sándor, akinek elmeséltem, mivel foglalkozom. Felcsillant a szeme, nekem is van egy feladatom: Egy földműves kiviszi a kecskéjét legelni a mezőre és kiköti egy karóhoz. A kecske estére kör alakban lelegeli a füvet. Másnap a karót a kör egy kerületi pontjára szúrja. Mennyivel kell megnövelnie a zsinórt, ha azt akarja, hogy a kecske ugyanakkora területet legeljen le, mint előző nap?



$\frac{T}{t} = 1$ kell legyen

120-1. ábra



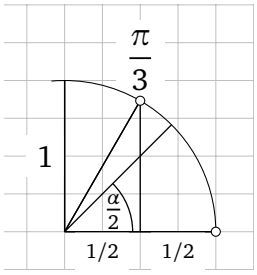
120-2. ábra

$$\frac{T}{t} < 1; \qquad \frac{T}{t} > 1, \tag{1}$$

$$\frac{T}{t} = \frac{R^2\pi - r^2\pi}{r^2\pi} = 3.$$

Következik: $r < R < 2r, \qquad /: 2r$ (2)

$$\frac{1}{2} < \frac{R}{2r} < 1,$$



120-3. ábra

$$\frac{1}{2} < \cos\frac{\widehat{\alpha}}{2} = \frac{R}{2r} < 1, \tag{3}$$

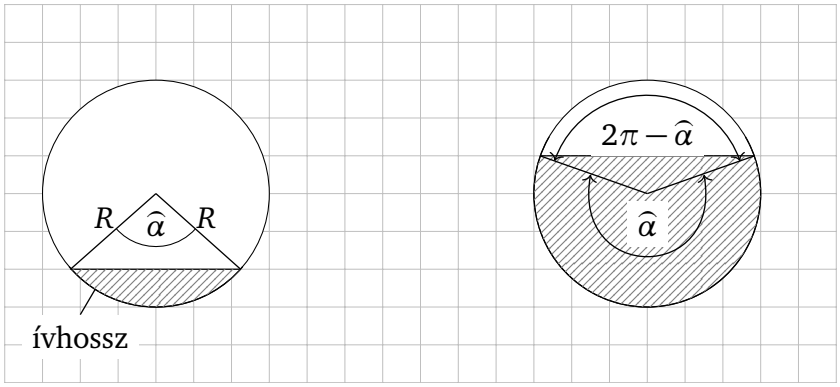
$$0 < \frac{\widehat{\alpha}}{2} < \frac{\pi}{3}; \qquad 0 < \widehat{\alpha} < \frac{2\pi}{3}. \tag{4}$$

Válasszuk paraméternek $\widehat{\alpha}$-t.

$$t_{\triangle} = \frac{R^2 \cdot \sin\widehat{\alpha}}{2}; \qquad \text{ívhossz} = R \cdot \widehat{\alpha}; \qquad t_{cikk} = \frac{\text{ívhossz} \cdot R}{2} = \frac{R^2 \cdot \widehat{\alpha}}{2}. \tag{5}$$

A körszelet területe általában:

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026



120-4. ábra

$$t_{\smile} = t_{cikk} - t_{\triangle}; \qquad t_{\smile} = t_{cikk} + t_{\triangle},$$

$$\frac{R^2 \cdot \widehat{\alpha}}{2} - \frac{R^2 \cdot \sin\widehat{\alpha}}{2} = \frac{R^2 \cdot \widehat{\alpha}}{2} + \frac{R^2 \sin(2\pi - \widehat{\alpha})}{2}. \tag{6}$$

Használjuk föl az (5)-nél és (6)-nál kapott eredményeket.

A 120-1. ábrában az alsó körszelet területe:

$$t_{\smile} = \frac{R^2 \cdot (\widehat{\alpha} - \sin\widehat{\alpha})}{2}. \tag{7}$$

A 120-1. ábrában a felső körszelet területe:

$$t_{\frown} = \frac{r^2((2\pi - 2\widehat{\alpha}) - \sin(2\pi - 2\widehat{\alpha}))}{2} = \frac{r^2(2\pi - 2\widehat{\alpha} + \sin 2\widehat{\alpha})}{2}. \tag{8}$$

A keresett zsinórhosszúság a következő egyenletből számolható:

$$r^2\pi = R^2\pi - (t_{\smile} + t_{\frown}), \tag{9}$$

$$1 = \frac{R^2\pi - (t_{\smile} + t_{\frown})}{r^2\pi}, \tag{10}$$

$$1 = \frac{R^2\pi - \left(\frac{R^2(\widehat{\alpha} - \sin\widehat{\alpha})}{2} + \frac{r^2(2\pi - 2\widehat{\alpha} + \sin 2\widehat{\alpha})}{2}\right)}{r^2\pi}, \tag{11}$$

$$1 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 - \frac{R^2(\widehat{\alpha} - \sin\widehat{\alpha}) + r^2(2\pi - 2\widehat{\alpha} + \sin 2\widehat{\alpha})}{2r^2\pi}, \tag{12}$$

$$1 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 - \left(\frac{R}{r}\right)^2 \cdot \frac{\widehat{\alpha} - \sin\widehat{\alpha}}{2\pi} - \frac{2\pi - 2\widehat{\alpha} + \sin 2\widehat{\alpha}}{2\pi}, \tag{13}$$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$$1=\left(\frac{R}{r}\right)^2\cdot\frac{2\pi-\widehat{\alpha}+\sin\widehat{\alpha}}{2\pi}-\frac{2\pi-2\widehat{\alpha}+\sin 2\widehat{\alpha}}{2\pi}. \tag{14}$$

Azonban $\frac{R}{r}=2\cos\frac{\widehat{\alpha}}{2}$, lásd a 120-1. ábrát. (15)

$$1=4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2\pi-\widehat{\alpha}+\sin\widehat{\alpha}}{2\pi}-\frac{2\pi-2\widehat{\alpha}+\sin 2\widehat{\alpha}}{2\pi}, \tag{16}$$

$$1=2(1+\cos\widehat{\alpha})\cdot\frac{2\pi-\widehat{\alpha}+\sin\widehat{\alpha}}{2\pi}-\frac{2\pi-2\widehat{\alpha}+\sin 2\widehat{\alpha}}{2\pi}, \tag{17}$$

$$2\pi=(2+2\cos\widehat{\alpha})\cdot(2\pi-\widehat{\alpha}+\sin\widehat{\alpha})-(2\pi-2\widehat{\alpha}+\sin 2\widehat{\alpha}), \tag{18}$$

$$\cancel{2\pi}=\cancel{4\pi}-\cancel{2\widehat{\alpha}}+2\sin\widehat{\alpha}+4\pi\cdot\cos\widehat{\alpha}-2\widehat{\alpha}\cdot\cos\widehat{\alpha}+\cancel{2\cdot\sin\widehat{\alpha}\cdot\cos\widehat{\alpha}}-\cancel{2\pi}+\cancel{2\widehat{\alpha}}-\cancel{2\sin\widehat{\alpha}\cdot\cos\widehat{\alpha}}, \tag{19}$$

$$0=2\cdot\sin\widehat{\alpha}+4\pi\cdot\cos\widehat{\alpha}-2\widehat{\alpha}\cdot\cos\widehat{\alpha}, \qquad /:2 \tag{20}$$

$$0=\sin\widehat{\alpha}+2\pi\cdot\cos\widehat{\alpha}-\widehat{\alpha}\cdot\cos\widehat{\alpha}, \tag{21}$$

$$0=\sin\widehat{\alpha}+\cos\widehat{\alpha}\cdot(2\pi-\widehat{\alpha}). \tag{22}$$

Ha $\cos\widehat{\alpha}=0$, akkor $\widehat{\alpha}=\frac{\pi}{2}$, tehát az egyenletből $\sin\widehat{\alpha}=0$, ami ellentmondás, hiszen $\sin^2\widehat{\alpha}+\cos^2\widehat{\alpha}=1$ kell legyen, vagyis fel lehet tenni, hogy $\cos\widehat{\alpha}\neq 0$:

$$0=\sin\widehat{\alpha}+\cos\widehat{\alpha}\cdot(2\pi-\widehat{\alpha}), \qquad /:\cos\widehat{\alpha} \tag{23}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\widehat{\alpha}+2\pi=\widehat{\alpha},} \qquad 0<\widehat{\alpha}<\frac{2\pi}{3}\approx 2{,}094395 \quad \text{ld. (4).} \tag{24}$$

Kézi vagy gépi gyökközelítő iterációs módszerrel,

$$\widehat{\alpha}\approx 1{,}7897758; \qquad \alpha\approx 102{,}546599^\circ.$$

$$\text{Ha } r=100: \quad R=2r\cdot\cos\frac{\widehat{\alpha}}{2}\approx 125{,}121251. \tag{25}$$

Tehát kb. 25,12%-al kell megnövelnie a földművesnek a kecske zsinórját, ha azt akarja, hogy másnap is ugyanakkora területet legeljen le, mint előző nap, lásd a 120-1. ábrát.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Jelölések

Geometriai jelölések:

A, B, C	a háromszög csúcsai
a, b, c	a háromszög (rendre az A, B, C csúcsokkal szemközti) oldalai
α, β, γ	a háromszög (rendre az A, B, C csúcsoknál levő) belső szögei
k, s	a háromszög kerülete és kerületének fele
t	a háromszög területe
m_a, m_b, m_c	a háromszög a, b és c oldalához tartozó (rendre A, B, C csúcsokból induló) magasságai
s_a, s_b, s_c	a háromszög a, b és c oldalához tartozó (rendre A, B, C csúcsokból induló) súlyvonalai
f_a, f_b, f_c	a háromszög a, b és c oldalához tartozó (rendre A, B, C csúcsokból induló) belső szögfelezői
f_{ak}, f_{bk}, f_{ck}	a háromszög a, b és c oldalához tartozó (rendre A, B, C csúcsokból induló) külső szögfelezői
R, r	a háromszög körülírt és beírt körének (belső érintőkör) sugarai
r_a, r_b, r_c	a háromszög a, b és c oldalához tartozó hozzáírt körök (külső érintőkörök) sugarai
R_F	a Feuerbach-féle kör (Euler-féle kör, „kilencpontú kör”) sugara
$e \parallel f$	e egyenes párhuzamos f egyenessel
$\perp$	merőleges
$\measuredangle$	szög
$\triangleleft$	derékszög
$\widehat{\alpha}$	α ívmértéke radián
α°	α fok
$\sim$	hasonló
$\cong$	egybevágó
AB	A és B ponton áthaladó egyenes
$\overline{AB}$	A és B pontot összekötő szakasz
$\overset{\frown}{AB}$	A és B pontot összekötő körív
$\overset{\frown}{ABC}$	A, B és C pontot összekötő körív
$\overrightarrow{AB}$	A pontból B pontba mutató vektor

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$\mathbf{a}$	vektor
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	$\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor skaláris szorzata

Matematikai logikai jelölések:

A , B	állítások
$A \Leftarrow B$	A, a B szükséges feltétele
	B csak akkor igaz, ha A igaz
$A \Rightarrow B$	A, a B elégséges feltétele
	B akkor igaz, ha A igaz
$A \Leftrightarrow B$	A, a B szükséges és elégséges feltétele
	B akkor és csak akkor igaz, ha A igaz
	(ekvivalens átalakítás)

Halmaz jelölések:

$a \in A$	a eleme az A halmaznak
$a \notin A$	a nem eleme az A halmaznak
$A = B$	halmazok egyenlősége
$A \neq B$	különböző halmazok
$\{a, b, c\}$	halmaz megadása elemeivel
$\{x \mid P(x)\}$	a P állítást kielégítő elemekből álló halmaz
$\emptyset$	üres halmaz
$A \subseteq B$	részhalmaz (más tankönyvekben előfordulhat más jelölés)
$A \subset B$	valódi részhalmaz (más tankönyvekben előfordulhat más jelölés)
$A \cup B$	halmazok uniója
$A \cap B$	halmazok metszete
$A \setminus B$	halmazok különbsége
$A \subseteq \mathbf{R}$	intervallum (számköz)
$\mathbf{N}$	a természetes számok halmaza, $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{Z}$	az egész számok halmaza, $\mathbf{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{Q}$	a racionális számok halmaza,
	$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z},\ q \in \mathbf{Z}^+, \quad p, q \text{ relatív prímek}\}$
$\mathbf{Q}^*$	az irracionális számok halmaza, pl. $\sqrt{2}$, π, e stb.
$\mathbf{R}$	a valós számok halmaza, $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^*$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$\mathbf{R}^+$	a pozitív valós számok halmaza
$\mathbf{R}_0^+$	a nulla, pozitív, valós számok halmaza
$\mathbf{C}$	a komplex számok halmaza, $\mathbf{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbf{R},\ i = \sqrt{-1}\}$
	i: képzetes (imaginárius) egység
$[a, b]$	zárt intervallum
$[a, b[$	balról (alulról) zárt, jobbról (felülről) nyílt intervallum
$[a, b)$	ugyanaz
$]a, b]$	balról (alulról) nyílt, jobbról (felülről) zárt intervallum
$(a, b]$	ugyanaz
$]a, b[$	nyílt intervallum
(a, b)	ugyanaz
$[c, +\infty[$	balról (alulról) zárt, jobb felé (felülről) végtelen intervallum
$[c, +\infty)$	ugyanaz
$]c, +\infty[$	jobb felé (felülről) végtelen, nyílt intervallum
$(c, +\infty)$	ugyanaz
$+\infty$	plusz végtelen

Algebrai jelölések:

$a + b$	valós számok összege
ab	valós számok szorzata
$a \cdot b$	ugyanaz
0	nulla
1	az „egy” szám
$a + b + c$	három szám összege
abc	három szám szorzata
$-a$	szám mínusz egyszerese
$a - b$	számok különbsége
$-a + b$	ugyanaz
$1/a$	valós szám reciproka
a/b	valós számok hányadosa
$-a - b$	$-a$ és $-b$ összege
$a = b$	a egyenlő b-vel
$a \neq b$	a nem egyenlő b-vel
$a \approx b$	a közelítőleg egyenlő b-vel

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$a := b$	a definíció szerint egyenlő b-vel
$a < b$	a kisebb, mint b
$a > b$	a nagyobb, mint b
$a \leq b$	a kisebb vagy egyenlő, mint b
$a \geq b$	a nagyobb vagy egyenlő, mint b
$\|a\|$	abszolút érték
a^n	valós szám hatványa
$\sqrt{a}$	valós szám négyzetgyöke
$\sqrt[3]{a}$	valós szám köbgyöke

Trigonometrikus jelölések:

π	a pi szám
sin	szinuszfüggvény
cos	koszinuszfüggvény
tg	tangensfüggvény
ctg	kotangensfüggvény
arcsin	inverz szinusz függvény
arccos	inverz koszinusz függvény
arctg	inverz tangens függvény
arcctg	inverz kotangens függvény

Analízis jelölések:

$f(x)$	az x független változó f függvénye, helyettesítési érték
$y(x)$	ugyanaz
$F(x,y)$	síkgörbe
$F(x,y(x))$	implicit függvény
$x \mapsto f(x)$	függvény megadása hozzárendeléssel
D_f	az f függvény értelmezési tartománya (domain of function)
R_f	az f függvény értékkészlete (range of function)
$f : A \to B$	$D_f = A$, $R_f \subseteq B$
$\max A$	(ejtsd “A maximuma”) számhalmaz legnagyobb eleme
$\max a$	ugyanaz, ha $A \subset \mathbf{R}^+$ felülről zárt és $a \in A$

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

$\min A$	(ejtsd “A minimuma”) számhalmaz legkisebb eleme
$\min a$	ugyanaz, ha $A \subset \mathbf{R}^+$ alulról zárt és $a \in A$
$\sup A$	(ejtsd “A szuprémuma”) számhalmaz felső határa (legkisebb felső korlát)
$\sup a$	ugyanaz, ha $A \subseteq \mathbf{R}^+$ felülről nyílt vagy végtelen és $a \in A$
$\inf A$	(ejtsd “A infimuma”) számhalmaz alsó határa (legnagyobb alsó korlát)
$\inf a$	ugyanaz, ha $A \subseteq \mathbf{R}^+$ alulról nyílt és $a \in A$
$\max R(f(x))$	az $f(x)$ függvény értékkészletének maximuma
$\max R_f$	ugyanaz
$\max f(x)$	az $f(x)$ függvény maximuma
$\max f$	ugyanaz
$\min R(f(x))$	az $f(x)$ függvény értékkészletének minimuma
$\min R_f$	ugyanaz
$\min f(x)$	az $f(x)$ függvény minimuma
$\min f$	ugyanaz
$\lim_{x \to a} f(x)$	egyváltozós függvény határértéke
$\lim_{x \to a+} f(x)$	jobb oldali határérték
$\lim_{x \to a-} f(x)$	bal oldali határérték
$\lim_{x \to +\infty} f(x)$	határérték a plusz végtelenben
f'	deriváltfüggvény
f''	második derivált
α_{min}	az α független változó a függvény lokális minimum helyénél
α_{max}	az α független változó a függvény lokális maximum helyénél

Rövidítések:

D	Diszkrimináns
E.	Elméleti ismeretek
c.	című
db.	darab
eo.	egyenlő oldalú
esz.	egyenlő szárú
ill.	illetve
ld.	lásd

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

pl.	például
stb.	és így tovább
ui.	ugyanis
(1.f.)	1. feladat

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A matematikában használatos betűk

Görög ábécé:

1.	A	α	alfa
2.	B	β	béta
3.	Γ	γ	gamma
4.	Δ	δ	delta
5.	E	ϵ	epszilon
6.	Z	ζ	zéta
7.	H	η	éta
8.	Θ	θ	théta
9.	I	ι	ióta
10.	K	κ	kappa
11.	Λ	λ	lambda
12.	M	μ	mű
13.	N	ν	nű
14.	Ξ	ξ	kszi
15.	O	o	omikron
16.	Π	π	pí
17.	P	ρ	ró
18.	Σ	σ	szigma
19.	T	τ	tau
20.	Υ	υ	üpszilon
21.	Φ	φ	fí
22.	X	χ	khi
23.	Ψ	ψ	pszi
24.	Ω	ω	omega

Szűkített latin ábécé:

1.	A	a
2.	B	b
3.	C	c
4.	D	d
5.	E	e
6.	F	f
7.	G	g
8.	H	h
9.	I	i
10.	J	j
11.	K	k
12.	L	l
13.	M	m
14.	N	n
15.	O	o
16.	P	p
17.	Q	q
18.	R	r
19.	S	s
20.	T	t
21.	U	u
22.	V	v
23.	W	w
24.	X	x
25.	Y	y
26.	Z	z

Matematikai képletekben csak azok a görög betűk használatosak, amelyeket nem lehet valamely latin betűvel összetéveszteni.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Irodalom

[1] Hajós György
Bevezetés a geometriába. Egyetemi tankönyv
Tankönyvkiadó, Budapest, 1972

[2] H. S. M. Coxeter
A geometriák alapjai
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973

[3] Dr. Farkas Miklós
Matematikai kislexikon
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974

[4] Hajós Gy., Neukomm Gy., Surányi J.
Matematikai versenytételek II. rész
Tankönyvkiadó, Budapest, 1988

[5] Szász Gábor
Matematika I. Egyetemi tankönyv
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1988

[6] Reiman István
Matematika
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1992

[7] Kósa András
Útban a felsőbb matematikához
LSI Oktatóközpont, Budapest–Gödöllő, 1995

[8] Hajnal Imre
Matematika, a speciális matematika I. osztálya számára
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996

[9] Reiman István
Fejezetek az elemi geometriából
Typotex – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998

[10] Pogáts Ferenc
Vektorok, koordinátageometria, trigonometria
Typotex – Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998

[11] Császár Ákos
Valós analízis I. Egyetemi tankönyv
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999

[12] Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Dr. Urbán J., Vincze I.
Sokszínű matematika 9.
Mozaik Kiadó, Szeged, 2001

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

[13] Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Dr. Urbán J., Vincze I.
Sokszínű matematika 10.
Mozaik Kiadó, Szeged, 2002

[14] Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Dr. Urbán J., Vincze I.
Sokszínű matematika 11.
Mozaik Kiadó, Szeged, 2003

[15] Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Dr. Urbán J., Vincze I.
Sokszínű matematika 12.
Mozaik Kiadó, Szeged, 2004

[16] Göndör András
Nagy tételkönyv
Scolar Kiadó, Budapest, 2005

[17] Juhász I., Orosz Gy., Paróczay J., Szászné dr. Simon J.
Matematika 9. Az érthető matematika
Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., Budapest, 2009

[18] Juhász I., Orosz Gy., Paróczay J., Szászné dr. Simon J.
Matematika 10. Az érthető matematika
Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., Budapest, 2010

[19] Juhász I., Orosz Gy., Paróczay J., Szászné dr. Simon J.
Matematika 11. Az érthető matematika
Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., Budapest, 2011

[20] Juhász I., Orosz Gy., Paróczay J., Szászné dr. Simon J.
Matematika 12. Az érthető matematika
Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt., Budapest, 2012

[21] *Négyjegyű függvénytáblázatok, összefüggések és adatok*
Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet, Budapest, 2014

[22] Holló Gábor
Geometria a matematikaversenyeken.
Felkészítő feladatok ötletek és megoldások
Typotex Kiadó, Budapest, 2021

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

Köszönetnyilvánítás



Ez a könyv egy rövid elméleti bevezetőt követően 119 háromszög- és egy játékos feladatot tartalmaz. Itt szeretném megköszönni az együttműködést mindazoknak, akiknek a segítsége nélkül ez a könyv nem születhetett volna meg.



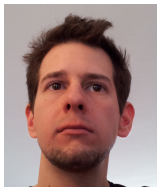
Köszönet mindenekelőtt feleségemnek, Halpert Máriának az otthoni teendők átvállalásáért.



Unokánknak, Balogh Judit tanárnőnek a közreműködésért.



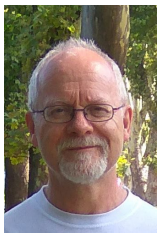
Horváth István Andrásnak a szerkesztés elindításáért és az ábrák egy részének elkészítéséért.



Dr. Csépány Gergely fizikusnak a szerkesztés átvételéért, a menetközbeni javításokért és végül a tördelésért, aminek eredményeként a könyv elnyerte a mostani formáját.



Barátomnak, Knopp Ferenc mérnök matematikusnak a konzultációkért, néhány feladat egyszerűbb megoldásáért és a lektorálás elindításáért.



Holló Gábor Ericsson-díjas matematikatanárnak, a *Geometria a matematikaversenyeken* szerzőjének a konzultációkért és a könyv gondos lektorálásáért.

Itt szeretném megköszönni Horváth Balázs volt főszerkesztőnek és Balázs Péter főszerkesztőnek a Typotex Kiadó részéről nyújtott együttműködését.

© Hompola István, Typotex, Budapest, 2026

A könyv egy rövid elméleti összefoglaló után kizárólag háromszög-feladatokkal foglalkozik. A nehezebb feladatokat példák és vizsgálatok követik, néhány esetben grafikus vizsgálattal és grafikus megoldással. Kimaradtak az elméletből ismertnek tekintett alapvető háromszögtételek, például a Pitagorasz-tétel vagy a Thalész-tétel, ugyanis ezek a középiskolai tananyagban megtalálhatók. Elsősorban azok a tételek, összefüggések kerülnek említésre, amelyek egy-egy feladat megoldása során leginkább használhatók. Újszerű benne az egyes feladatoknál a megoldhatóság, a megoldások számának vizsgálata (diszkusszió). Hasonlóképpen egyedi néhány nehezebb feladatnál a kettőnél magasabb fokú paraméteres egyenletek megoldása a valós számok halmazán, ami a felsőfokú algebra körébe tartozik, és esetenként a kapott síkgörbék felrajzolása, függvényekre bontása, majd ezen függvények vizsgálata, ami a felsőfokú analízis körébe tartozik. A feladatgyűjtemény remélhetőleg ösztönzést ad az olvasónak a további kutatásra.

TYPOTEX

9 789634 933595