Holló Gábor

Geometria a matematikaversenyeken

Holló Gábor

Geometria a matematikaversenyeken

Felkészítő feladatok, ötletek és megoldások

TYPOTEX

A könyv megjelenését a Magyar Tudományos Akadémia támogatta.

Szakmailag lektorálta:
Kiss György egyetemi docens, ELTE Geometriai Tanszék

ISBN 978 963 493 136 2

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Gerner József
A borítót készítette: Szalay Éva
Nyomdai kivitelezés: Belvárosi Nyomda Zrt.
Felelős vezető: Derecskey László

Tartalom

Előszó

Tapasztalataim alapján a középiskolai matematikaversenyeken a diákok többségének az egyik legnagyobb problémát a geometriafeladatok jelentik. Évekkel ezelőtt összeállítottam egy néhány tucatnyi feladatból álló válogatást azzal a céllal, hogy ezen feladatok ismerete már jó belépő lenne a versenyeken előforduló geometriai témájú feladatok megoldásához. Végül addig bővült, alakult az anyag, hogy ez a könyv lett a végeredmény.

A könyv feladatai között találhatók régi OKTV-n, Arany Dániel-versenyeken vagy KöMaL-pontversenyben kitűzött feladatok és nagyon sok olyan feladat, amely a magam megfigyeléseiből származik – ezek közül több a *Középiskolai Matematikai Lapok*ban is megjelent kitűzött feladatként.

A könyv felépítése a versenyeken leggyakrabban előforduló témákat követi, kiegészítve olyan témakörökkel, amelyek kisebb szerepet kapnak a középiskolai geometriaoktatásban, mint pl. az érintőnégyszögekkel vagy a parabolával kapcsolatos feladatok. Terjedelmi okokból a térgeometriai feladatok közül csak néhány szerepel a feladatok között.

A feladatok megoldásához (egy-két kivétellel) az emelt szintű geometriai ismeretek elegendők.

A könyvben a háromszögekkel kapcsolatosan általában a szokásos jelöléseket alkalmaztam (kivéve, ha az eredeti feladat szövegében más volt a jelölés), tehát az ABC háromszögre: az A, B, C csúcsoknál lévő szögek rendre α, β, γ, a csúcsokkal szemközti oldalak rendre a, b, c, a háromszög félkerülete s.
Nevezetes vonalak az A, B, C csúcsokból:
magasságvonalak: m_a, m_b, m_c,
súlyvonalak: s_a, s_b, s_c,
belső szögfelezők: f_a, f_b, f_c.
Nevezetes pontok: magasságpont M, súlypont S, körülírt kör középpontja K, beírt kör középpontja O, az a oldalhoz írt kör középpontja O_a.
Nevezetes körök: a körülírt kör sugara r, a beírt kör sugara ϱ, a hozzáírt körök sugarai az a, b, c oldalhoz írt érintő körökre rendre ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c.

A könyv használatáról: A feladatgyűjteményben a nagyon könnyűtől az elég nehézig mindenféle feladat előfordul. Célszerű a feladatokkal sorban haladva próbálkozni, előfordul ugyanis, hogy egyes feladatok megoldásához egy korábbi feladatban megfogalmazott állítást felhasználva jutunk. A könyv elején lévő *Néhány bevezető feladat* című fejezet olyan feladatokat tartalmaz, amelyekre egyes későbbi feladatok hivatkoznak. Ha egy feladattal nem boldogulunk, a *Bizonyítási módszerek, megoldási ötletek* fejezetben próbáljunk először ötletet találni. Ha így sem sikerül, az *Útmutatások* fejezetben található néhány mondatos iránymutatás segíthet. A geometriában egy jó ábra a fél megoldással felér, ne sajnáljuk rá az időt. A megoldások részletesen kidolgozottak, esetenként több megoldást láthatunk, érdemes mindet áttanulmányozni a feladatmegoldó képességünk fejlődése érdekében. Bár igyekeztem a legegyszerűbb megoldást is megmutatni, előfordulhat, hogy itt-ott elkerülte a figyelmemet a legelegánsabb megoldás.

A könyvet ajánlom a geometria iránt érdeklődő középiskolás diákoknak, versenyekre készülőknek, tanár szakos egyetemi hallgatóknak, de az emelt szintű érettségi geometriaanyagának elmélyítésére is jól használható. Az anyag alkalmas önálló felkészülésre, tanároknak szakköri feldolgozásra.

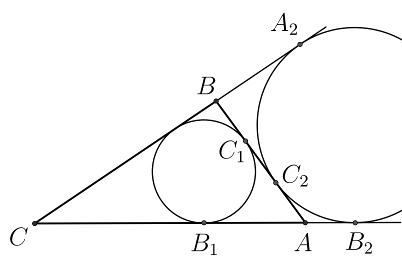
Köszönettel tartozom a könyv szakmai lektorának, dr. Kiss György egyetemi docensnek az alapos lektori munkáért, az értékes megjegyzésekért és kiegészítésekért.

Budapest, 2019. november

Holló Gábor

Néhány összefüggés háromszögekben

1. **Súlyvonal hossza**:
$$s_c = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}.$$
2. **Belső szögfelező hossza**:
$$f_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}, \qquad \text{vagy} \qquad f_c = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}.$$
3. **Külső szögfelező hossza**:
$$f'_c = \frac{2ab\sin\frac{\gamma}{2}}{|a-b|}, \qquad \text{vagy} \qquad f'_c = \frac{2\sqrt{ab(s-a)(s-b)}}{|a-b|}.$$
4. **Magasságpont, magasság**:
   a) Magasságpont helyvektora a körülírt kör középpontjából:
   $$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}.$$
   b) $CM = c \cdot \operatorname{ctg}\gamma$.
   c) A C csúcsból induló magasságvonal C_0 talppontjának távolsága az A csúcstól előjelesen:
   $$AC_0 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} = b\cos\alpha.$$
5. **Érintőkörökkel kapcsolatos összefüggések**:
   a) Érintési pontok távolságai (435. ábra):



435. ábra

$$CB_1 = s - c, \quad AB_1 = s - a, \quad BC_1 = s - b, \quad CA_2 = CB_2 = s,$$
$$B_1B_2 = c, \quad AB_2 = AC_2 = s - b, \quad C_1C_2 = |a - b|.$$

b) $\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b}+\frac{1}{\varrho_c}=\frac{1}{\varrho}$.

c) $T^2=\varrho\cdot\varrho_a\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c$.

d) Beírt kör középpontjának helyvektora:

$$\frac{a\cdot\mathbf{a}+b\cdot\mathbf{b}+c\cdot\mathbf{c}}{a+b+c}.$$

e) A c oldalhoz írt kör középpontjának helyvektora:

$$\frac{a\cdot\mathbf{a}+b\cdot\mathbf{b}-c\cdot\mathbf{c}}{a+b-c}.$$

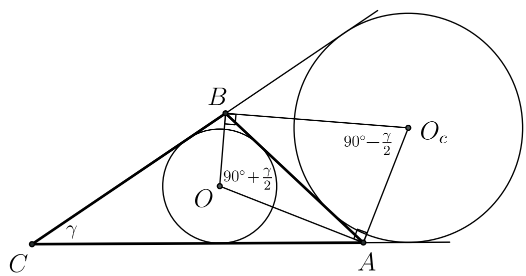
f) A c átfogójú *derékszögű* háromszögben:

$$\varrho=s-c,\qquad \varrho_a=s-b,\quad \varrho_b=s-a,\qquad \varrho_c=s.$$

g) Az AB oldal a beírt kör O középpontjából, illetve az AB oldalhoz írt kör O_c középpontjából

$$90^\circ+\frac{\gamma}{2},\qquad \text{illetve}\qquad 90^\circ-\frac{\gamma}{2}$$

szög alatt látszik (436. ábra).



436. ábra

6. **Egyéb összefüggések**:

a) $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}=\frac{1}{\varrho}$.

b) $\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}-\frac{1}{m_c}=\frac{1}{\varrho_c}$.

c) A beírt és körülírt kör középpontjának távolsága (Euler):

$$d=\sqrt{r^2-2r\varrho}.$$

d) A c oldalhoz írt kör és a körülírt kör középpontjának távolsága:

$$d = \sqrt{r^2 + 2r\varrho_c}.$$

e) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \dfrac{s}{r}$.

f) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \dfrac{\varrho}{r}$.

Irodalom

[1] Reiman István. *A geometria és határterületei*, Gondolat, Budapest, 1986.

[2] Rácz János. *Matematika Feladatok – ötletek – megoldások I.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

[3] Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega, Rogelio Valdez Delgado. *Inequalities*, Basel–Boston–Berlin, 2009.

[4] *Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek*, Bolyai János Matematikai Társulat, 1970–2008.

[5] *Arany Dániel Versenyek*, 1990–2008.

[6] *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, 1980–2010.

[7] Ross Honsberger. *Matemathical Diamonds*, The Mathematical Association of America, 2003.

[8] Ross Honsberger. *Matemathical Gems II.*, The Mathematical Association of America, 1976.

[9] Zdravko Cvetkovski. *Inequalities*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012.