

Simonovits András

Közgazdaságtani modellek

(nem csak középiskolásoknak)

Simonovits András

Közgazdaságtani modellek

(nem csak középiskolásoknak)

A könyv a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.



© Simonovits András, Typotex, Budapest, 2020
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 121 8

Kedves Olvasó!

Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a www.typotex.hu
és a facebook.com/typotexkiado oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó

Alapította Votisky Zsuzsa, 1989

A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Németh Kinga

Főszerkesztő: Horváth Balázs

A kötetet gondozta: Erő Zsuzsa

A borítót készítette: Szalay Éva

Tartalom

Előszó	iii
Jelölések	vi
1. Bevezetés	1
1.1. Miért fontosak a közgazdaságtani modellek?	1
1.2. A legfontosabb gondolatok	3
2. Egyszerű lineáris dinamika	11
2.1. Elsőrendű lineáris differenciaegyenletek	11
2.2. A klasszikus növekedési modell	15
2.3. A piaci árigazodás modelljei	19
2.4. Az államadósság dinamikája	23
3. Játékelméleti bevezető és elemi optimalizálás	27
3.1. Racionális játékok	27
3.2. Játékelméleti rendellenességek	33
3.3. Optimalizálás elemi módszerrel	36
4. Bonyolultabb lineáris dinamika	43
4.1. Másodrendű lineáris differenciaegyenletek: pozitív diszkrimináns	43
4.2. Nempozitív diszkrimináns	47
4.3. Többváltozós dinamika	52
4.4. Beruházási ciklusok	55
5. Fogyasztói döntések és hasznosságmaximum	59
5.1. Egy egyszerű keresleti függvény	59

5.2. Két termék közti választás	61
5.3. Jelen és jövő idejű fogyasztás: két időszak	65
5.4. Három időszak, halasztás*	70
6. Vállalati döntések	73
6.1. Kínálati függvények	73
6.2. Termelés	74
6.3. Költséggfüggvény	78
6.4. Profit	81
7. Stabilitás, ciklus és káosz*	87
7.1. Nemlineáris dinamikus rendszerek	87
7.2. A kaotikus viselkedés matematikája	96
7.3. Határciklus és kaotikus beruházási ingadozások	97
8. Jövedelemeloszlás, adómorál, adóztatás	101
8.1. Jövedelemeloszlás egyenlőtlenségei	101
8.2. Adócsalás egyéni optimalizálás nélkül	103
8.3. Optimális adócsalás	106
9. Népeségdinamikai modellek	109
9.1. Születés és halálozás	110
9.2. Gyermekek, szülők, nagyszülők	111
9.3. Fiatal és idős szülők	116
9.4. Egy évjáratati modell	118
10. Elemi tb-nyugdíjmodellek	121
10.1. A tb-nyugdíjrendszer makroökonómiája	122
10.2. A tb-nyugdíjrendszer mikroökonómiája	125
11. Önkéntes nyugdíjrendszerek	131
11.1. Előrelátó dolgozók támogatott megtakarítása (nincs tb-nyugdíj)	132
11.2. Passzív rövidlátó dolgozók (van tb-nyugdíj)	134
11.3. Aktív rövidlátó dolgozók	136
12. Nyugdíjindexálás	141
12.1. Áttekintés	141
12.2. Bérindexált nyugdíjak	143

12.3. Árindexált nyugdíjak	146
12.4. Kombinált indexálás	152
13. A jelzáloghitel elemi modelljei	155
13.1. Hagyományos jelzáloghitel	156
13.2. Kettősen indexált hitel	159
13.3. Devizaalapú hitel	161
13.4. Időben változó kamatlábak	165
14. Egy általános egyensúlyelméleti modell	167
14.1. Általános egyensúly	167
14.2. Kivételek	174
15. Együtt élő nemzedékek modellje	179
15.1. Dinamika racionális várakozások esetén	179
15.2. Dinamika naiv várakozás esetén	182
16. Valószínűségszámítási bevezetés	185
16.1. Elemek	185
16.2. Várható érték és szórás	188
16.3. A nagy számok törvényei	194
17. A biztosítás és a szerencsejátékok alapmodelljei	197
17.1. Klasszikus biztosítási modell	197
17.2. Morális kockázat a biztosításban	201
17.3. Kontraszelekció a biztosításban	202
17.4. Szerencsejátékok	206
18. Regressziószámítás és korreláció*	211
18.1. A módszer	211
18.2. Hibás alkalmazások	218
19. A regressziószámítás közgazdasági alkalmazásai*	221
19.1. Az árszint és a fejlettség kapcsolata	221
19.2. A nyugdíjba vonulási kor és a szolgálati idő kapcsolata	224

20. Járvány és válság	227
20.1. Egy járványmodell	227
20.2. Járványok és gazdasági válságok	232
21. Utószó helyett	237
21.1. Kritika	238
21.2. Ami a könyvből kimaradt	240
21.3. Emlékek	241
22. Feladatmegoldások	249
23. Fogalomtár [első előfordulás]	263
Hivatkozások	275

Előszó

Ebben a könyvben a közgazdaságtani modellek világába vezetem be a matematikában jártas középiskolásokat, tanáraikat és más érdeklődőket. Tömör könyvem nem tömeges oktatást szolgál. Viszont haszonnal forgathatják azok az olvasók, akik túl akarnak lépni a közgazdasági közhelyeken (például: „addig nyújtózkodjál, ameddig a takaród ér”), és igényes középiskolai szinten képesek követni és alkalmazni a matematikai gondolkodásmódot. Hajlandók képleteket böngészni, és levezetéseket megérteni.

A 19. században a közgazdaságtan zöme nélkülözötte a (matematikai) modelleket, azóta viszont egyre növekszik a szerepük. Ez a folyamat egyrészt szabatosabbá és számszerűsíthetővé teszi a közgazdaságtant, másrészt öncélú matematikai ujjgyakorlattá silányíthatja azt. Remélem, az előadandó modellek valóban segítenek a valóság jobb megértésében és a matematika viszonylag új alkalmazásainak elsajátításában.

Nem követtem a hagyományos közgazdasági tankönyveket, amelyek eleve mikro- és makrorészre különülnek el. (Ettől függetlenül érdemes elolvasni egy jó közgazdasági bevezetést, pl. Horváth Áron ajánlotta a figyelmembe a *The Core Teams: The Economy* c. könyvét, amely a világhálóról is letölthető.) A mikróban az egyéni fogyasztói és termelői választás után eljutnak a piaci egyensúlyhoz; a makróban pedig a növekedés és az infláció után az egyéb problémákhoz. A témák kiválasztásakor legfontosabb szempontom az volt, hogy lehetőleg középiskolás szinten érthető, ugyanakkor érdekes és fontos modelleket mutassak be. Az utolsó pillanatban még egy járványmodellt is sikerült becsempésznem a könyvbe.

A bemutatott modellek egy részét a KöMaLban (Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok) már publikáltam. Ezek és más modellek bonyolultabb változatban előfordultak társszerzőkkel írott cikkeimben. Ehelyütt mondok köszönetet társszerzőimnek ábécé sorrendben: Czeglédi Tibornak, Eső Péternek, Garay Barnabásnak, Király Balázsnak, Király Júliának, Molnár Györgynek, Szabó Endrének, Tir Melindának és Tóth Jánosnak. Méréő László könyvét (1996) szabadon hasz-

náltam a játékelméleti bevezetőben, és Eső Péter is segített kigyomlálni néhány bántó pongyolaságot.

Hálával tartozom Halpern Lászlónak, Katona Tamásnak, Király Júliának, Oblath Gábornak és Rézmovits Ádámnak egy-egy adatsorért, Ferenczi Miklósnak a valószínűségszámítási, Fleischer Tamásnak a közjavakról szóló gondolataiért, Kőrösi Gábornak és Vincze Jánosnak a statisztikai rész konstruktív bírálatáért, Polónyi Jánosnak a járványügyi részhez fűzött tanácsaiért, Réti Jánosnak a nyugdíjrések kommentálásáért. Különleges köszönet illeti Horváth Dianát, Juhász Pétert, Király Júliát, Langer Tamást, Patkós Annát, Rácz Andrást, Simonovits Miklóst, Szabó Juditot és Széphelyi Attilát, akik a könyv egy-egy korábbi változatát részletesen átnézték. Sokat tanultam Tóth Attilától (Fazekas Mihály Gyakorló Iskola 11. évfolyamos diákja), akivel hónapokon át hetente 1–1 órában átbeszéltük az anyagot. Köllő János győzött meg arról, hogy az ábrák ebben a könyvben is nélkülözhetetlenek; kivitelezésük Fried Katalint és Juhász Lehelt dicséri. A gépirat véglegesítéséért Erő Zsuzsának tartozom hálával. Hálás vagyok Drága Balásznak, Hámori Veronikának, Pataki Jánosnak (középiskolai tanároknak) és Lovics Gábornak, valamint Somlai Péternek, akik figyelmeztettek arra, hogy könyvemben milyen nehézségekkel találja szembe magát egy közgazdaságban járatlan önálló olvasó: például mi egy absztrakt dinamikus rendszer, mi az árszabályozás? Külön nehézséget jelenthet a szöveg tömörsége. Sajnos, csak részben sikerült eleget tennem kritikai észrevételeiknek. A megmaradó hibákért kizárólag a szerzőt terheli a felelősség.

Számos hazai és külföldi egyetemen tanítottam diákokat és tanultam diákjaimtól. Köszönet illeti a jelenlegi Budapesti Corvinus Egyetemet, a Rajk László Szakkollégiumot, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemet és a Közép-Európai Egyetemet (CEU-t) a tanítási és tanulási lehetőségekért. Egyes fejezetek írását a NKFI 108668. és a 129078. pályázat támogatta.

A könyv számos példát és feladatot tartalmaz, ez utóbbiak megoldása a könyv végén található. Azt tanácsolom az Olvasónak, hogy először próbálja meg a feladatokat saját maga megoldani, és csak kellő mennyiségű próbálkozás után forduljon a feladatmegoldásokhoz. Néhány feladat megoldásához számítógépes programra van szükség, ezek megírását nyomatékosan javaslom. A 18. és 19. fejezet statisztikai feladatainak megoldásához ingyen szoftverek is rendelkezésre állnak. A nehezebb fogalmakat a könyv végén fogalomtárban foglalom össze.

Mivel tankönyvről van szó, fölöslegesnek tartottam részletes hivatkozásjegyzékkel terhelni az Olvasót. Csak néhány esetben tüntettem föl a forrást, például a társszerzős vagy a KöMaLban megjelent cikkeimet. De nem fukarkodtam a modellek kapcsán nevekkkel és az évszámokkal, ezek alapján az Olvasó a világhálón tovább érdeklődhet, s láthatja a fejlődés kanyargós útját.

Saját középiskolai élményeim alapján meg vagyok győződve arról, hogy a könyvet – részben vagy egészben – érdemes lenne középiskolás matematikai szakkörökön feldolgozni. Bár az itt előadott témák gyakran nélkülözik a tiszta matematika eleganciáját, elősegíthetik az alkalmazott matematika újabb lehetőségeinek megismerését. De a közeljövőben legfeljebb egy-két ilyen szakkörrel számolhatok (2019 szeptemberében a Fazekasban elindult az első szakkör), ezért az olvasók jelentős része nem mondhat le a könyv tartalmának önálló elsajátításáról. Két megjegyzést tennék a matematika fizikai és közgazdasági alkalmazásának középiskolás fokon adódó különbségéről: 1. mindenki tanul fizikát, nagyon kevesen tanulnak közgazdaságtant (ez utóbbi egyébként kiküszöbölendő hiba); 2. bizonyos fizikai fogalmak (tehetetlenség, munka stb.) ellentmondanak a hétköznapi tapasztalatoknak, míg a zsebpénzt beosztó és pályát választó középiskolásnak nehéz közgazdasági feladatokat kell megoldania.

A tartalomjegyzékben *-gal jelölt fejezetek vagy alfejezetek viszonylag nehezek, első olvasásra kihagyhatók.

Kiegészítésként megemlítem, hogy egyes témák vetítéses kidolgozása megtalálható a honlapomon: <https://kozgazmodellek.wordpress.com/>

Kedvcsináló: komal1, 3. fejezet: jatek1, 8. fejezet: moral, 9. fejezet: nep-sl, 10. fejezet: nyug-sl és csebisev, 11. fejezet: onkent, 12. fejezet: valind-szirak, 13. fejezet: jelzalog1, 14. fejezet: karrow.

Kérem az olvasókat, hogy megjegyzéseiket jutassák el a következő címre:

simonov@econ.core.hu

Köszönettel:

Simonovits András

Jelölések

Görög kisbetűk A könyvben sokszor használunk görög kisbetűket, főleg együtt-
hatók jelölésére. Igyekszünk úgy megválasztani őket, hogy „rímeljének” a megfe-
lelő latin betűre: például x és ξ . A középiskolások egy része nem ismeri az összes
görög kisbetűt, ezért a görög ábécé sorrendjében sorfolytonosan nevesítve felsor-
oljuk őket.

Görög betűk listája

α = alfa	β = béta	γ = gamma	δ = delta	ε = varepszilon
ζ = dzéta	η = éta	θ = teta	ι = jóta	κ = kappa
λ = lambda	μ = mú	ν = nú	ξ = kszi	ϑ = varteta
π = pi	ρ = ró	σ = szigma	τ = tau	φ = varfi
χ = khi	ψ = pszi	ω = omega		

Néha görög nagybetűt is használunk, mindenekelőtt a nagy szigmát az (a_i) számok össze-
gének a jelölésére: $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + \dots + a_i + \dots + a_n$, de Ω = nagy omega.

Fontosabb jelölések jegyzéke

A memorizálást megkönnyítendő, alkalmanként a változó angol nevét is megad-
juk. Sajnos a szokás és a memorizálhatóság kedvéért időnként még egyes fejeze-
teken belül is azonos betűt kell alkalmaznunk különböző változókra, de az alfe-
jezeteken belül ilyen egybeesés nincs. A sorvégi üres négyzet a bizonyítás végét
jelöli.

Általános jelölések

t = időszak (time) indexe	x_t = t -edik állapot
i = szereplő (típus) indexe	f_i = i -edik típus részaránya
a, b, c, d = együtthatók	p, q = valószínűségek
$^\circ$ = optimális/egyensúlyi	$*$ = normális (egyensúlyi) érték
$\hat{x} = x - x^\circ$ = eltérés	P = periódus
x = független változó	y = függő változó
x, y = fogyasztási pár	m = jövedelem
p, q = árak (price)	P = ár
u = hasznosságfüggvény	α = preferenciasúly
w = szuperbruttó bér (wage)	ν = létszámnövekedési együttható
τ = nyugdíjjárulék-kulcs	θ = adókulcs
L = alacsony típus indexe (low)	H = magas típus indexe (high)
E = várható érték	D = szórás
ε = relatív hatékonyság	f = függvény
Y = GDP (kibocsátás)	

2. fejezet. Egyszerű lineáris dinamika

A = együttható	B = állandó
S_t = mértani sor összege	λ = megoldási hányados
K = tőke (capital)	s = megtakarítási hányad (saving)
I = beruházás (investment)	κ = reakció-együttható
j = tagország indexe	J = a tagországok száma
y_{jt} = a tagország fejlettsége	y_t = átlagos fejlettség
N_{jt} = a j -edik tagország létszáma	N_t = az unió összlétszáma
$'$ = a Brexit utáni mutatók	ν_t = a kilépő tagország relatív súlya
D = kereslet (demand)	S = kínálat (supply)
P_t^e = árvárakozás	ω = adaptációs súly
D = adósság (debt)	
B = költségvetési egyenleg (balance)	E = elsődleges egyenleg
d = adósságráta	e = egyenlegráta
r = kamatláb (rate)	$R = 1 + r$ = kamategyüttható
G = növekedési együttható (growth)	$\rho = R/G$ = relatív kamategyüttható

3. fejezet. Játékelméleti bevezető és optimalizálás

s = stratégia	S = stratégiahalmaz
p = valószínűség	q = valószínűség
A = számtani közép	G = mértani közép
λ = súly	

4. fejezet. Bonyolultabb lineáris dinamika

A_1 = első együttható	A_2 = második együttható
λ_k = alapmegoldás hányadosa	ξ_k = alapmegoldás együtthatója
n = a skalárváltozók száma	x_i = az i -edik változó
x'_i = a transzformált i -edik változó	d_i = szomszédok távolsága
ξ = alapmegoldás együtthatója	r = amplitúdó
P = periódus	φ = szögsebesség
δ = fázisszög	a = csillapítási együttható
I = beruházás	C = fogyasztás
ψ = üzembe helyezési arány	A = autonóm
β = akcelerátor	γ = fogyasztási hajlandóság

5. fejezet. Fogyasztói döntések és hasznosságmaximum

ε = árrugalmasság (elasticity)	η = jövedelemrugalmasság
M = összjövedelem	M_α = súlyozott összjövedelem
$MU_x = \frac{\partial}{\partial x} U(x, y) = x$ szerinti határhaszon	
c = jelen fogyasztás	d = jövő fogyasztás
e = későbbi fogyasztás	
δ = leszámítolási (discount) együttható	φ = hiperbolikus leszámítolási együttható
w = életpálya-kereset	s = megtakarítás (saving)

6. fejezet. Vállalati döntések

F = termelési függvény	Q = kibocsátás (quantity)
K = tőke (capital)	L = munka (labor)
α, β = együtthatók	
$G_x = x$ növekedési együtthatója	$g_x = x$ növekedési üteme
$k = K/L$ = tőkeellátottság	$l = L/Y$ = munkaigény
C = költség (cost)	π = profit
M = monopólium	C = verseny (competition)

7. fejezet. Stabilitás, ciklus és káosz

f, g = függvény	L = tágulási korlát
φ, ψ = szögsebesség	P = tervezett (planned)

8. fejezet. Adómorál és adózás: három modell

d = szórás	h = max-min hányados
I = típusok száma	μ = adómorál
γ = alapjövedelem	e = jövedelemeltitkolás
w_m = minimális bér	w_M = maximális bér

9. fejezet. Népeségdinamikai modellek (fh = függőségi hányados)

N = népességszám	B = születésszám (birth)
E = halálozási szám (exit)	K_t = gyermekszám (kid)
$b = B/N$ = születési arány	$e = E/N$ = halálozási arány
M = dolgozók száma	P = nagyszülők száma (pensioner)
$k = K/M$ = fiatalkori fh	$p = P/M$ = időskori fh
$d = (K + P)/M$ = teljes fh	$f_k = k$ gyermekesek aránya
Q = munkába lépés kora	R = nyugdíjba vonulási kor (retirement)
D = halálozási életkor (death)	F = szülési kor
φ = teljes termékenységi arány	d = differenciál

10. fejezet. Elemi tb-nyugdíjmodellek

u = bruttó bér	v = nettó bér
b = nyugdíj (benefit)	γ = helyettesítési arány
μ = munkarészvételi hányados	ζ = nyugdíjjogosultsági hányados
p = rendszer-függőségi hányados	$*$ = demográfiai mutatók jele
Q = munkába lépési életkor	R = nyugdíjba vonulási kor (retirement)
D = halálozási életkor (death)	z = életpálya-egyenleg
N = eszmei számla indexe	A = igazított számla indexe
$e(u)$ = hátralévő élettartam	γ = korrekciós tényező

11. fejezet. Önkéntes nyugdíjrendszer

S = szolgálati idő	T = nyugdíjban töltött idő
$\eta = S/T$ = eltartási arány	ρ = munka/felnőtt élettartam
α = támogatási arány	γ = megtakarítási hajlandóság
ε_I = belső (internal) szórás	ε_E = külső (external) szórás
e = életpálya-fogyasztás	

12. fejezet. Nyugdíjindexálás

G = halmozott növekedési tényező	
S = szolgálati idő	T = nyugdíjban töltött idő
P_t = árszint	$\eta = S/T$ = eltartási arány
b_t = folyóáras nyugdíj	v_t = folyóáras nettó bér
b_t^y = bérindexált nyugdíj t -ben	b_t^p = árindexált nyugdíj t -ben kezdve
E = munkavállaló (employee) indexe	F = munkáltató (firm) indexe
k = életkor	$b_{k,t}$ = k éves nyugdíj, t -ben
γ = általános helyettesítési arány	ι = bérindex súlya

13. fejezet. A jelzáloghitel elemi modelljei

R = nominális kamategyüttható	B = nominális törlesztőrészlet
T = futamidő	D_t = tartozás (debt) a t -edik időszak végén
P_t = halmozott árindex	p = inflációs együttható
E = árfolyam (exchange)	F = reálárfolyam
$r = R/p$ = reálkamat-együttható	ρ = forintos ekvivalens kamat eh.
d = reáltartozás	
b = reáltörlesztés	$e = E/E_{-1}$ = relatív árfolyamváltozás
x^* = devizaváltozó	\tilde{x} = forintosított devizaváltozó

14. fejezet. Egy általános egyensúlyelméleti modell

h = a háztartás (household) indexe	
v_h = a v termék kezdőkészlete	w_h = a w termék kezdőkészlete
x_h = a v termék cseréje	y_h = a w termék cseréje
n = termékek száma	H = szereplők száma
c_i = tb-költség	d_i = magánköltség
az i -edik szereplőnél	az i -edik szereplőnél
\bar{c}_i = az i -edik személynél	
betegberek átlagkölsége	

15. fejezet. Együtt élő nemzedékek modellje

y = fiatalkori jövedelem	z = időskori jövedelem
R = kamategyüttható	g = átmenet függvénye

16. fejezet. Valószínűségszámítási bevezetés

$\omega_i = i$ -edik elemi esemény	$p_i = i$ -edik elemi valószínűség
$A, B =$ események	
$\emptyset =$ kizárt esemény	$\Omega =$ biztos esemény
$q_j =$ másik peremeloszlás	$r_{ij} =$ együttes eloszlás
$X, Y =$ valószínűségi változó	$S_n =$ átlag
$\mu =$ várható érték	$\sigma =$ szórás
$\alpha, \beta =$ átmeneti valószínűségek	$p_{k,n} =$ binomiális eloszlás
$P(\cdot) =$ valószínűség (probability)	$\varepsilon =$ eltérés

17. fejezet. Biztosítás és szerencsejáték

$d =$ kár (damage)	$w =$ vagyon (wealth)
$h =$ biztosítói haszon	$\pi =$ haszonkulcs
$p =$ kárvalószínűség	$e =$ biztosítási díj
$s =$ önrészesedés	$\rho =$ morális kár együtthatója
$c =$ fogadási díj	$b =$ nyeresemény

18. fejezet. Regressziószámítás és korreláció

$m =$ tömeg (mass)	$h =$ magasság (height)
$X =$ független változó	$Y =$ függő változó
$\beta =$ regressziós együttható	$\alpha =$ regressziós állandó
$e =$ hiba	$r =$ korrelációs együttható
$F =$ apa (father) magassága	$S =$ fiú (son) magassága

19. fejezet. Regressziószámítás közgazdasági alkalmazásai

$y_i =$ GDP/fő	$P_i =$ árszint
$Q =$ munkába lépési kor	$R =$ nyugdíjkor
$S =$ szolgálati idő	$\varphi =$ folytonossági együttható

20. fejezet. Járvány és válság

$s_t =$ a megfertőzhető részaránya	$i_t =$ a fertőzők részaránya
$r_t =$ a gyógyultak részaránya	
$\beta =$ fertőzési ráta	$\gamma =$ gyógyulási ráta