Pintér Gergő

ÚJ VILÁGOK TEREMTÉSE

Pintér Gergő

ÚJ VILÁGOK TEREMTÉSE

Geometriai képzetek és képződmények

TYPOTEX

A könyv megjelenését a Nemzeti Kulturális Alap
a kiadói program keretében támogatta.

Nemzeti Kulturális Alap

Lektorálta: Bodnár József

ISBN 978 963 493 050 1

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a *www.typotex.hu*
és a *facebook.com/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Balázs Péter
Felelős szerkesztő: Gerner József
Műszaki szerkesztő: Fried Katalin
Az ábrákat készítette: Szabari Mátyás
Borítóterv: Fániszló Ádám
Készült a Séd Kft.-ben, Szekszárdon
Felelős vezető: Dránovits Anna

TARTALOM

NÉGY- ÉS TÖBBDIMENZIÓS TEREK

Hol a negyedik dimenzió?

T: Az első három dimenziót még értem, a negyediket is úgy-ahogy; de mi az ötödik dimenzió?

G: Hogyan érted az első négyet?

T: A minket körülvevő világ (a tér) a háromdimenziós tér, a negyedik dimenzió pedig az idő.

G: Ez a felfogás valóban azt sugallja, mintha újdonság, vagy legalábbis szokatlan volna háromnál nagyobb dimenziójú terekkel, terekben dolgozni. Pedig a matematikában nem az!

T: És mégis hol vannak ezek a terek?

G: Ahhoz, hogy ezt megérthessük, rombolással kell kezdenünk. Ez minden teremtés első fázisa. Le kell rombolnunk azt az illúziót, hogy a három dimenziót értjük. A matematikai felfogás szerint az első három dimenzió nem a teret jelenti, és a negyedik nem az időt.

T: Akkor mi értelme ennek? Tér, ami mégsem a tér…

G: A matematikai dimenzió- (illetve tér-) fogalom jóval szabadabb és általánosabb. Illusztrációs eszköz, egy szemléletmód, ami hasznos és eredményes számtalan teljesen különböző – és általában nem is geometriai természetű – probléma kezelésében. És persze háromnál nincs megállás, semmilyen értelemben! Miért is lenne? Ami pedig a minket körülvevő fizikai teret illeti: annak csak egy lehetséges modellje a matematikai háromdimenziós tér. A matematikai háromdimenziós térre pedig csak egy példa a tér, amelyben élünk. Ugyanez mondható el a négydimenziós tér és a téridő kapcsolatáról is.

G: Kezdjük akkor az elején! Miért gondolod, hogy háromdimenziós térben élünk?

T: Például ez a szoba, ahol ülünk, háromdimenziós: van magassága, szélessége, mélysége. A sarkokban 3 él fut össze, ezek egy koordináta-rendszert alkotnak, így a szoba bármely pontját 3 számmal lehet megadni, pl. $(10, 20, 30)$ azt jelenti, hogy az egyik él mentén menj 10 centit (vagy 10 métert, ez a mértékegység megválasztásától függ), a másik él mentén 20-at, majd 30-at a harmadik éllel párhuzamosan.

G: Csakhogy te a szobáról beszélsz… holott a térről volt szó!

T: A szoba éleit gondolatban meghosszabbíthatjuk a végtelenségig, így elvileg egy olyan koordináta-rendszert kapunk, amellyel az egész világegyetem koordinátázható. Ezért mondjuk, hogy a bennünket körülvevő tér háromdimenziós. Ha még a dátumot is hozzávesszük, láthatjuk, hogy a téridő négydimenziós. Például $(10, 20, 30, 736796)$ azt jelenti, hogy a tér imént megadott pontját Krisztus után 736796 nappal tekintjük.

G: És mi lenne, ha nem szobában, hanem barlangban vagy dombtetőn ülve beszélgetnénk? Máris nehezebb lenne elmagyarázni, miért háromdimenziós a tér. Nincsenek élekben összefutó falak, sarkokban összefutó élek, amikre mutogathatnék. Pihenésképp elmondom ezzel kapcsolatban a *Van valami* című mesém egyik részletét, amit egy kiállításmegnyitóra írtam néhány évvel ezelőtt.

Valami van – ezt az elejétől fogva éreztük. Láttuk magunk körül a tájat, amelyet hegyek és síkságok tagoltak, láttuk a tengereket és fölöttünk az eget. Az égen megcsodáltuk a fényes képződményeket, meséket, történeteket költöttünk róluk, beszéltünk hozzájuk. A kunyhóinkat lassan házakra cseréltük, szépen kimért, függőleges falakkal, majd a sarokra mutatva így szóltunk: a szoba bármelyik pontját három számmal tudjuk beazonosítani, amelyek megmondják, mennyit kell menni az egyes falak mentén, hogy a pontba érjünk. Így a tér, amelyben élünk, háromdimenziós. Na persze, nemcsak a szoba, hanem ez a nagy minden itt körülöttünk. A hegyes-völgyes tájat szemlélve tökéletesen egyenletesre csiszolt, végtelenségbe nyúló, láthatatlan falakat képzeltünk el, és a kereszteződéseikben koordináta-tengelyeket.

Éreztük az évszakokat, az öregedést, az ismétlődéseket, a változást, emlékeztünk, mi történt velünk az életünk során, és izgatottan vártuk, mi jöhet még. Ezek szerint a háromdimenziós terek egymás után következnek, egyenes vonalban fölfűzve – gondoltuk. Ezt az egyenes vonalat elneveztük időnek. Megszületett bennünk a négydimenziós téridő víziója, tökéletesen szabályos falaival rendet vágva a természet lüktetésébe.

A mozgást elképzeltük a téridőben, lerajzoltuk a koordinátarendszerben, matematikai fogalmakkal, függvényekkel írtuk le. A matematikai kép alapján mennyiségeket találtunk ki: sebesség, lendület, erő, energia. Ezek nagyon jó hasonlatoknak bizonyultak, és élmény volt őket valóságosnak képzelni. A mozgásunk sebességét ismerve előre ki tudtuk számolni, mikor fogunk megérkezni, és ha egy régi ismerősünk megbökött, éreztük a hátunkon az erővektor irányát és nagyságát.

T: Szép mese, de megint csak azt erősítetted meg, hogy a tér háromdimenziós, a téridő pedig négy. Mi többet lehet még erről beszélni? Mi lehet ezzel a baj?

G: Nem biztos például, hogy a szoba éleit a végtelenségig meg lehet hosszabbítani. Lehet, hogy egyszer csak körbeérnének. Próbáljuk meg illusztrálni ezt kevesebb dimenzióban! A fürdőszoba csempézésére ránézve el tudjuk képzelni, hogy a négyzetes háló, a párhuzamos vonalak tetszőlegesen meghosszabbíthatóak, kicsempézve ezzel a teljes, végtelen síkot. Ha jó nagy fürdőszobánk van, akkor el sem tudjuk képzelni, hogyan is lehetne ez másképp.

T: Biztosan arra akarsz kilyukadni, hogy a Föld felszíne görbül, tehát a földfelszín mentén haladva biztosan nem tudjuk sokáig folytatni a csempézést. Egyeneseink a földfelszínnel együtt görbülnének, ráadásul közelednének is egymáshoz, egyszer csak összefutnának, tovább folytatva őket pedig körbeérnének. De ettől még a fürdőszobapadló csempézését tudnánk folytatni a négyzetes-párhuzamos rendben, ha nem a földfelszínt követjük. Arról letérve a világűrben folytatódó képzeletbeli síkot csempézzük ki.

G: De honnan tudjuk, hogy az a sík nem fog körbeérni? Ha a világegyetem is önmagába zárul valami módon, akkor ez a csempézési kísérletünk is csődöt mond előbb-utóbb. Semmi nem garantálja, hogy ez nem történhet meg, sőt, az Einstein-féle általános relativitáselmélet olyan lehetséges világegyetem-alakokkal dolgozik, amelyek görbültek, és valami módon önmagukba fordulhatnak.

T: Aha, tehát arra gondolsz, hogy a tér görbült, ezért nem helytálló egyszerűen háromdimenziós térről beszélni?

G: Ez csak egy példa volt, ami a szobából a végtelen térre történő általánosítás létjogosultságát kérdőjelezi meg. A szoba éleiből vizionált koordináta-rendszerünk azonban más módon is el tud romlani! Lehet, hogy a tér nem is folytonos, hanem pixeles, mint a monitoron megjelenő kép. És az idő is lehet filmszerű: ha másodpercenként 30 képkockát vetítenek le nekünk, azt az agyunk már folytonos mozgássá rakja össze. Mi garantálja, hogy a valódi idő nem ilyen? Semmi. Sőt, a kvantummechanikában megjelenő Planck-hossz, Planck-idő mint legkisebb mérhető távolság és időtartam éppen ilyesmit pedzeget: a tér és az idő megszűnik folytonos lenni, szemcséssé válik.

T: És a szuperhúr-elméletet még nem is említetted, ami 10 vagy épp 23 dimenziós téridőt feltételez az egyenletei működéséhez! Mégis mire akarunk kilyukadni a 20. századi fizikai elméletek felsorolásával?

G: A fizikai világnak csak egy lehetséges modellje a matematikai háromdimenziós tér, illetve a téridő, mint négydimenziós tér. A fizika különböző ágai különböző modelleket használnak. Földi körülmények között, emberi léptékkel fölfogható mozgások leírására tökéletesen alkalmas és célszerű a klasszikus téridőmodell. Csillagászati méretekben, kozmológiai kérdésekhez, a világegyetem alakjának és keletkezésének vizsgálatára ez a kép nem alkalmas – itt az általános relativitáselmélet önmagukba forduló, görbült terei a megfelelő modellek. Az elemi részecskék mérettartományában pedig a kvantummechanika szemcsés téridőmodellje működik jobban. De ez mind csak példa, ki tudja, még hányféle fizikai elmélet van, hányféle módon képzelik el a téridőt most és fogják néhány év múlva. Mindenesetre érdemes tudatában lenni annak, hogy a fizika nem a világ egészét írja le, csak a valóság önkényesen kiválasztott jelenségköreit modellezi.

T: Akkor kicsit távolodjunk el a fizikától, és nézzük meg, mi az, amit mi magunk érzékelünk! Mindenki számára természetes a végtelen háromdimenziós tér és az egydimenziós idő.

G: Ennek szerintem részben praktikus okai vannak, részben a belénk nevelt megszokás következménye. Legfontosabb érzékszerveink kusza fény- és hangmasszát fognak be a külvilágból, amely aztán soklépéses földolgozási folyamaton megy keresztül az agyunkban, míg kialakul a látott kép és a hallott hang. A földolgozási folyamatot egyetlen vezérelv irányítja, a praktikum: a látóközpontok azokat a mintázatokat keresik ki a masszából, amelyek az eddigi életünk során hasznosnak bizonyultak a tájékozódáshoz. Ráadásul az általunk érzékelt ingerek is csak egy piciny szeletét alkotják a természetben cikázó információknak, sugárzásoknak, hullámoknak. És talán olyan dolgoknak is, amelyekről nem is tudunk, vagy nem veszünk róluk tudomást.

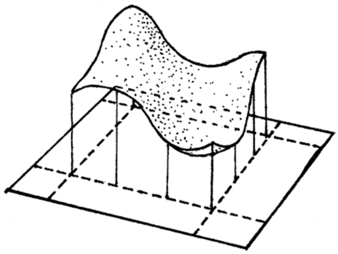
T: Azt akarod mondani, hogy nem is háromdimenziós térben élünk, csak az érzékszerveink becsapnak minket, és a neveltetésünk miatt nem látjuk a magasabb dimenziókat?

G: Nem! Csak azt, hogy a háromdimenziós teret sem értjük, csak megszoktuk. A végtelenségig meghosszabbítható koordináta-rendszerek pedig a tudományos világkép és a városok struktúrája által belénk nevelt paradigmák. És az idő – ha kicsit is figyelünk magunkra, észrevehetjük – hangulatunktól, állapotunktól, várakozásainktól függően nagyon különbözőképpen telik. ef. Zámbó Istvánt idézve: „…amikor pedig megáll az idő, ott kezdődik a hangulat”. Az időérzékelésünk egyéni és szubjektív. Mi mégis ütemesen kattogó külső eszközökre hagyatkozunk az idő mérésénél, hogy a társadalom többi tagjával könnyebb legyen összehangolódnunk.

T: „Megnézem a doktor karján az órát, és hozzáigazítom magam” – ahogy a Kontroll Csoport énekelte.

Példák mindenféle dimenziójú terekre

A matematikai térre csak egy példa a minket körülvevő fizikai tér. A matematikai tér jóval szabadabb fogalom: akármi létrehozhatja, amit három független adattal lehet meghatározni. A matematikai tér olyan problémák megértésében is segít, amelyek eredetileg nem geometriai jellegűek. Egy illusztrációs segédeszköz, amelyet más tudományok is segítségül hívhatnak. Lássunk erre néhány példát!



1. példa: Egy vékony fémlemezt melegítünk, különböző pontjain különböző mértékben. A fémlemez hőmérsékletviszonyait az egyes pontokba állított pálcikákkal szemléltethetjük: a pálcikát olyan hosszúra vágjuk, amennyi az adott pont hőmérséklete a melegítés után. A pálcikák végpontjai valamiféle domborzatot rajzolnak ki a fémlemez fölött: ez a lemez hőmérsékleti grafikonja. A kétdimenziósnak tekinthető lemez hőmérsékleti grafikonját a háromdimenziós térben tudjuk ábrázolni: két irány a sík (a lemez síkjának) dimenzióit, a harmadik irány a hőmérsékletet szimbolizálja. És mi történne, ha nem egy fémlemez, hanem a háromdimenziós szoba levegőjének hőmérsékletét szeretnénk ábrázolni? Minden pont hőmérsékletét továbbra is egy megfelelő hosszúságú pálcikával szemléltethetnénk, de ezeknek egy negyedik, a térből kimutató irányba kellene állniuk. Szobánk hőmérsékleti grafikonját négydimenziós térben tudnánk ábrázolni, ahol a negyedik dimenzió a hőmérsékletet jelenti.

Ahogyan a hőmérséklet, úgy szinte bármilyen – folytonosan változó – számszerűsíthető tulajdonság jelenthet új dimenziót. Vagyis egy ilyen tulajdonsággal megjeleníthetünk új dimenziót, és ezt a tulajdonságot meg lehet jeleníteni új dimenzió használatával.

T: Például a szín is tekinthető új dimenziónak?

G: A domborzati térképeken éppen ez történik, a szín jeleníti meg a magasságot. Amikor a különböző agyterületek aktivitását az agy színezésével ábrázolják, az is értelmezhető az intenzitás négydimenziós diagramjaként.

2. példa: Edward Lorenz a 60-as években egy egyszerűsített időjárási modellt vizsgált. Ennek eredményéből szüle-

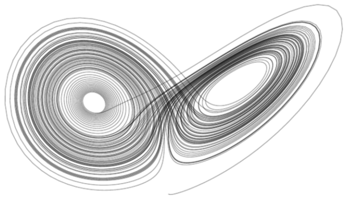
tett meg a káoszelmélet és a „pillangóhatás” elnevezés, amely a Lorenz-attraktor alakjára is utal.[1] Lorenz három időjárási adat – a hőmérséklet, a nyomás és az áramlási sebesség – egymást befolyásoló változását vizsgálta egy egyszerűsített rendszerben. Az adatok együttes időbeli változását leíró egyenlet megoldását számítógéppel szimulálta. Az érdekesség az volt, hogy amikor visszatáplálta az adatokat, a rendszer teljesen másképpen fejlődött, mint előzőleg. Először hibára gyanakodott, aztán rájött, mi okozza az eltérést: másodszorra néhány tizedes jegyre kerekítve adta meg az adatokat, tehát nem pontosan ugyanabból indult ki, mint előző alkalommal. Egy klasszikus rendszernél ez nem kellene, hogy számítson, picike eltérés a bemeneti adatokban hasonlóan picike eltérést eredményez a rendszer fejlődésében. Lorenz esetében azonban a bemenő adatok picike pontatlansága teljesen különböző futást eredményezett. Az ilyen rendszereket hívják azóta kaotikus dinamikai rendszereknek, amelyeknek tehát az időbeli változása, fejlődése végtelenül érzékeny a kezdeti adatokra. Az időjárás-előrejelzésben nagy nehézséget okoz a rendszer kaotikussága: mint azt Lorenz modellje megmutatta, már három adat és egyszerűsített modell esetén, kevés idő elteltével is nagy az eltérés.

T: Oké, de hogy jön ez ide?

G: Három adat meghatároz egy pontot a háromdimenziós térben. A három adat időbeli változása a térbeli pont mozgását eredményezi. Így a rendszer fejlődése (időbeli változása) egy térben mozgó pont pályájával, egy térbeli görbe megrajzolásával szemléltethető. Az említett időjárási modell változását a pillangószerű Lorenz-attraktor mutatja. Ez tehát egy olyan háromdimenziós térben lévő alakzat, amely

[1] A kifejezés eredete az a hasonlat, miszerint a légköri mozgások olyan kiszámíthatatlanok és annyira érzékenyek a légköri változásokra, hogy a pillangó szárnyának rebbenése akár egy tornádó kialakulásához is vezethet.

térnek a dimenziói a hőmérséklet, a nyomás és az áramlási sebesség. Mennyivel érthetőbb a kaotikus jelenség az ábra alapján! Picit megváltoztatva a bemenő adatokat a pont



helye egy picit arrébb kerül, és lehet, hogy az a szál hamarosan átmegy a pillangó másik szárnyába, míg az eredeti pont pályája az eredeti szárnyon marad. Ha Lorenz négy adatot vizsgált volna, akkor négydimenziós képpel tudnánk szemléltetni a rendszer változását.

3. példa: Egy részecske helyét a háromdimenziós térben 3 koordináta írja le. Két részecske helyét együttesen 6 koordináta írja le. Néha két részecske mozgását célszerűbb úgy leírni, mintha egyetlen részecskét alkotnának a hatdimenziós térben, amit ugyanúgy 6 számadat ad meg, mint a két háromdimenziós részecskét.

T: Miért lenne egyszerűbb egy darab hatdimenziós részecskével dolgozni?

G: Általában olyankor előnyös ez, ha nagyobb, átfogó elméletet akarnak alkotni. Igazából nem is egy darab hatdimenziós részecskét kellene mondanom, hanem azt, hogy a két részecskéből álló rendszer ilyen értelemben hatdimenziós rendszer, így egy hatdimenziós térbeli pont mozgásával szemléltethető a rendszer változása. És nem is biztos, hogy egyszerűbb ezzel dolgozni. Csak ad egy másik képet, más rálátást – és az sosem baj! Nézzük meg az előző példán, mennyiben segíti a megértést a rendszer geometriai ábrázolása!

4. példa: Másképpen is keletkezhetnek háromdimenziós jelenségekből újabb dimenziók. Tekintsük egy nem szimmetrikus merev test, például egy szikla összes lehetséges állását a

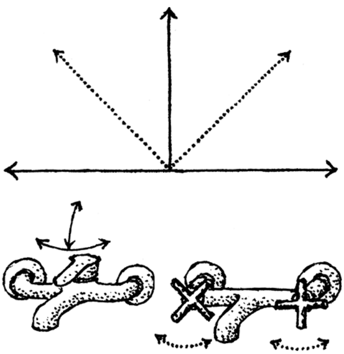
térben. Ezeket úgy kapjuk meg, hogy a testet egy pontja körül elforgatjuk, tehát az a pont helyben marad. Az összes ilyen pozíciók alkotják a háromdimenziós tér origó körüli forgatásainak a terét, amelyet $SO(3)$-mal szoktak jelölni. Ez egy másik, a képzeletünkben létező tér, amelynek minden pontja a merev test egy állását, a háromdimenziós tér egy origó körüli forgatását jelképezi. Később sok szó esik majd erről a térről, föltérképezzük a geometriai szerkezetét. Kiderül például, hogy ez is háromdimenziós, de önmagába forduló tér.

Ehhez a térhez egy történet kapcsolódik, ami a MateMorfózis kezdeteihez nyúlik vissza. 2011-ben újonnan megismert barátommal, Kristóffal Taliándörögdön, a Művészetek Völgye fesztiválon csatangoltunk, s ő a szóban forgó témáról érdeklődött: hol van a negyedik dimenzió, mi szükségünk van háromnál magasabb dimenziós terek vizsgálatára? Akkor még nem volt gyakorlatom abban, hogy mit lehet és mit érdemes elmondani hirtelen támadt érdeklődésű laikusoknak, bedobtam hát a következő példát: A taliándörögdi gólya repülés közben forog is. Forgásának összes lehetséges pozíciói egy háromdimenziós teret alkotnak. Ha hozzávesszük, hogy a mi háromdimenziós terünkben el is mozdulhat, az még 3 dimenziót jelent, tehát összesen 6 dimenzió írja le a gólya lehetséges pozícióit. Taliándörögdön gyorsan terjednek a pletykák: másnap egy maroknyi ember állt a villanyoszlop alatt, és bámulták a gólyafészket. Alig várták, hogy arra járjak, mert nem értették, mitől hatdimenziós a gólya. (És persze nem hatdimenziós a gólya pozícióinak tere, ez egy rossz modell! Hiszen a gólya nem merev test, nem csak forogni és elmozdulni tud a térben, másfajta változásokra is képes a teste.)

5. példa: Nemrég láttam olyan csapot, aminek a kallantyúját csak jobbra-balra lehetett csavarni, felfelé és lefelé nem. Egydimenziós a kallantyú mozgása, akkor egydimenziós kell, hogy legyen a víz lehetséges állapotainak tere is. És valóban!

Ha középen áll a kallantyú, nem jön víz, jobbra húzva hideg víz jön. Annál több, minél inkább jobbra húzzuk a kallantyút. A hőmérsékletét nem lehet állítani, a víz gyárilag belőtt hideg víz. Balra forgatva a kallantyút meleg víz folyik, a mennyiségét lehet változtatni, de a hőmérsékletét nem. A víz lehetséges állapotait tehát két egydimenziós vonallal (egyenessel) lehet szemléltetni: egyik a hideg víznek, másik a meleg víznek felel meg. Előre haladva mindkét egyenes mentén növekszik a víz mennyisége. Két darab egyenes egydimenziós teret alkot.

Vessük össze a fenti csapot más, megszokottabb csapokkal! A keverőcsap kallantyúját jobbra-balra, valamint föl-le is lehet mozgatni. A víz lehetséges állapotait egy síkon (a sík egy részén) tudjuk szemléltetni, a víz hőmérséklete és a mennyisége a két koordináta. A klasszikus kéttekerős csapnak is kettő a szabadsági foka: egyik kar elforgatása meleget ad hozzá, a másik hideget. Mindkét tekerő változtatja egyszerre a mennyiséget és a hőmérsékletet is, de kettejük együttes használatával ki lehet keverni a víz kétdimenziós állapotait, azaz adott intenzitást és hőmérsékletet, bizonyos kereteken belül. A kéttekerős csap és a keverős, kallantyús csap különbözőképp koordinátázzák a víz állapotainak síkját.



Ilyen értelemben a dimenzió: szabadsági fok! A csapos példa azt mutatja, hogy ahány szabadsági foka van az irányítóberendezésnek, annyi dimenziós rendszert lehet vele kezelni.

T: Hiszen ez magától értetődő!

G: Éppen ezért érdemes alaposabban megvizsgálni a tanulságait! Egy kétdimenziós térben általában nincsen kijelölve, merre van az első és a második dimenzió: az egyik típusú csap által kijelölt irányok a másik csap szerint ferdén állnak az állapotok terében. A tereket éppen a dimenziók keveredése hozza létre, de utólag más irányokat is kijelölhetünk alapértelmezettnek. Az utolsó fejezetben a speciális relativitáselmélet furcsaságai éppen ilyesfajta átkoordinátázáson múlnak!

T: Az eddigi példák nagy része a természettudomány területéről származik, ami pedig hétköznapi, mint a csapos, az triviálisnak és semmitmondónak tűnik első látásra!

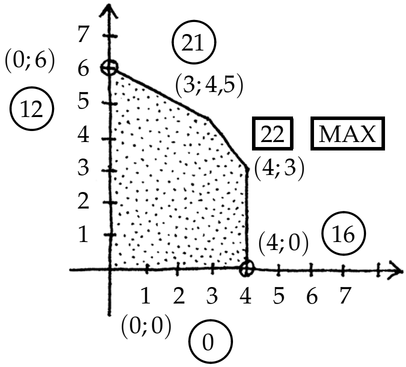
G: A következő példa a hétköznapi (gazdasági) életből való, és megoldásában valóban fontos szerepet játszanak a magasabb dimenziós terek. Cserébe viszont kicsit konkrétabb matematikát fogunk használni, akinek ehhez nincsen kedve, ugorja át nyugodtan ezt a példát!

6. példa: Egyetemek gazdasági képzésein szokás tanítani a lineáris optimalizálási feladatok megoldását, más néven a lineáris programozást. Egy gyárban kétféle terméket állítanak elő valahány, mondjuk háromféle nyersanyagból. A termelési táblázat megmondja, hogy az egyes termékek legyártásához mennyi nyersanyag szükséges.

	I	II	Készlet
A	3	2	18
B	4	0	16
C	2	4	24
Ár	4	2	

Minden sor végén ott áll, hogy mekkora mennyiség áll rendelkezésre az adott nyersanyagból, azaz mennyi van készleten. Az oszlopok alá pedig oda van írva, hogy az adott termékeket milyen egységáron tudják eladni. A feladat adja magát: az a kérdés, hogy mennyit kell gyártani az egyes termékekből, hogy minél több bevételünk legyen. A raktáron lévő alapanyag mennyisége a korlátozó tényező.

T: Amit keresünk tehát, az két szám, x és y, amelyek megmondják, hogy mennyit gyártsunk az egyik, illetve a másik termékből. Két szám a sík egy pontjának feleltethető meg. A korlátozó tényezők egyenlőtlenségek, amelyek megmondják, hogy egy-egy egyenes melyik oldalán lehet az (x, y) pont, például $3x + 2y \leq 18$. Mivel x és y nem lehet negatív, mert nem lehet negatív mennyiséget gyártani, azt kapjuk, hogy a keresett pont egy sokszög valamely pontja, a korlátozó tényezőknek megfelelően.



G: Ezen a sokszögön belül szeretnénk minél nagyobb bevételre szert tenni. Rendszerint a sokszög valamelyik csúcsa adja meg az optimális gyártási mennyiséget. Nem kell tehát mást tennünk, mint a sokszög csúcsait végigpróbálgatni, melyikhez tartozik a legnagyobb bevétel, és az lesz a megoldás.

T: Milyen sokat segít a geometriai kép! Eredetileg teljesen megfoghatatlan a probléma, azt sem tudjuk, hogyan álljunk neki, számtalan lehetőséget látunk. A rajz alapján pedig már szinte nyilvánvaló a megoldás.

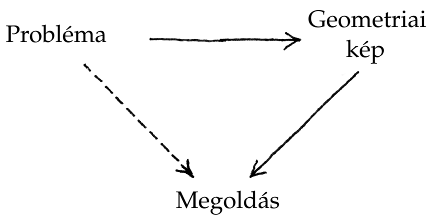
G: Mi van akkor, ha a gyár többféle terméket gyárt?

T: Három termék esetén az x, y és z mennyiségeket keressük, vagyis a háromdimenziós tér egy pontját. A korlátozó tényezők egy térbeli testet (ún. poliédert) rajzolnak ki, annak a csúcsain kell kiszámolni az adott ponthoz tartozó nyereséget.

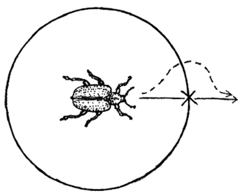
G: Négy termék esetén már nem tudjuk ilyen szépen lerajzolni a testet, mivel az ábra négydimenziós, de az eddigiekkel összhangban mondhatjuk, hogy egy négydimenziós poliéder csúcsai adhatják az optimális megoldást. Bár a poliéder csúcsait nem látjuk, a feladatot ennek ellenére le tudtuk redukálni néhány eset kipróbálására. A módszer tetszőleges számú termék esetén működik, a termékek számának megfelelő dimenziós test csúcsai közül kell kiválasztani a megoldást.

Az egyetemeken az ún. „szimplex algoritmust" tanítjuk ilyen feladatok megoldására. Ez olyan eljárás, amely szisztematikusan sorra veszi a megfelelő dimenziós test csúcsait, és kiválasztja közülük az optimálist. Az az érdekes, hogy általában senki nem beszél többdimenziós testekről és azok csúcsairól. A szimplex algoritmus ugyanis egy számolási eljárás: a termelési táblázatból (mátrixból) kiindulva osztunk, szorzunk, hozzáadunk, kivonunk, végül kijön az eredmény. A gyakorlatban ezt a műveletsort természetesen számítógép végzi, ha nagy a termelési táblázat, sok az alapanyag és a termék.

T: A geometriai modellre valójában nincs is szükség?



G: A geometriai kép csak segít megérteni a problémát és megtalálni a megfelelő megoldási módot. A megoldás menete ezután már olyan formában is tálalható, amihez nincs szükség a geometriai képre. Ahhoz akkor érdemes visszanyúlni, ha valaki meg akarja érteni, hogy valójában miért is használható a megoldási algoritmus.



7. példa: Egy matematikai tér akárhány dimenziós lehet – ebben semmi újdonság nincsen. A háromnál nagyobb dimenziójú terek tulajdonságait gyakran az alacsonyabb dimenziójú jelenségek mintájára tudjuk elképzelni. A síkban élő és mozgó bodobács nem tud átlépni a vonalon,

körbe van zárva, a harmadik dimenzió felől azonban könnyedén ki tudnánk őt szabadítani. Ugyanígy tudnánk kiszabadulni egy cellából a 4. dimenzió segítségével: a 3 dimenzióban elzárt térrész a negyedik irányból nyitott.

Éppen emiatt a tulajdonságuk miatt tanulságosak a többdimenziós terek a hétköznapi életben is! Egy problémás helyzet megoldásához előbb ki kell lépni a szokásos gondolatkörből, felül kell emelkedni rajta, más oldaláról, más nézőpontból kell megvizsgálni. Új dimenziót kell teremteni, amely rálátást nyújt a problémára. Ez a megközelítés egészen új megvilágításba (új dimenzióba) helyezi a dimenzió fogalmát! Bár a bennünket körülvevő fizikai tér háromdimenziós(nak tűnik), belül ennél több van! Gondolatvilágunk, lehetőségeink, életmódunk, stratégiáink mind többdimenziós terek, több szabadsági fokkal. Szerkezetük saját belső teremtő munkánk eredménye.

8. példa: T: Hogy lehet az, hogy a pontnak nincs kiterjedése? Anyagi világunkban mindennek van kiterjedése, a hajszálnak van vastagsága, a papírlapnak magassága – még egy elektronnak is van kiterjedése.

G: A pontot nehéz azonosítani a bennünket körülvevő fizikai térben. Az előző példákban a pont a rendszer egy adott állapotát jelentette. Mit jelent egy állapot esetén az, hogy nincs kiterjedés? Annyit jelent, hogy az adott állapotból icipicit is kimozdítva a rendszert, az már másik állapotban lesz, amit az állapottér másik pontja jelképez. Egy pont – egy állapot.

A pontnak nincs kiterjedése,
de ki mondta, hogy nincs beterjedése se?
Menj bele!
Kibomlik előtted lehetőségeid végtelen tere!

Hogyha jön a hullám,
ne menj vele, ne menj vele szembe,
legyél rá merőleges!

Ha elkap az áramlás,
ne ússz vele, ne ússz vele szembe,
legyél más!

(R) Nem elég a perspektíva-váltás,
igazi rálátást, igazi rálátást!
Nem elég a végtelenbe látás!
Dimenzióváltást, dimenzióváltást!

Önkonfliktusban találod magad,
ha csak a nézőpont változik, de a rendszer marad.

Ha lejárt a minősége,
(Kérjük fáradjon a másik kasszához!)
azonnal ürítse ki!
(Kérjük fáradjon a másik kasszához!)
Nem kell az átcsomagolás,
(Kérjük fáradjon a másik kasszához!)
új tartalmat neki!
(Felmondok!)

(R) Nem elég az állás-váltás,
rendszerváltás, rendszerváltás!
Nem elég az állás-váltás,
rendszerváltás, rendszerváltás!

Egysíkú-csőlátássá-szűkült-látókör,
oldjuk föl, oldjuk föl!
Önmagába-botló-gondolati kör,
húzzuk föl, húzzuk föl!

Iszapba ragadt lovas,
hajadnál fogva húzd ki magad,
dimenzió szárnyaidon
repülj át önmagadon!

(R) Nem elég a perspektíva-váltás,
igazi rálátást, igazi rálátást!
Nem elég a végtelenbe látás!
Dimenzióváltást, dimenzióváltást!

Nem elég a perspektíva-váltás,
(Ámítás, ámítás!)
igazi rálátást, igazi rálátást!
(Rávilágítás, átvilágítás!)

Nem elég a végtelenbe látás!
(Új jel, új csel, gyújtsd fel!)
Dimenzióváltást, dimenzióváltást!
(Újirány, újirány, újirány!)

Dimenzió szárnyaidon
repülj át önmagadon!

Dömötör Luca – Pintér Gergő
(Kronoszinklasztikus Infundibulum): *Dimenzióváltás*

Többdimenziós kockák

A könyv nagy részében konkrét geometriai alakzatokról és jelenségekről lesz szó. Mi lehet az az alakzat a négydimenziós térben, amit először érdemes megvizsgálni? A három dimenzió illusztrálásához a szoba sarkaiba mutogatunk. Vagyis egy téglatest, speciálisan a kocka az a térrész, aminek segítségével képet kaphatunk a tér egészéről. Négy- és többdimenziós terekben is ezt vizsgáljuk meg először. Hogyan néz ki a többdimenziós kocka? (Szokták hiperkockának is nevezni, konkrétan a négydimenziósat *tesseract*nak hívják. Mi itt mindenre egyszerűen azt mondjuk, hogy kocka. Egyébként már az általános iskolában is népszerű nevezéktani probléma, hogy a füzet nem kockás, hanem négyzetrácsos. Ezek szerint a portás bácsi inge is négyzetrácsos? A négyzet a kétdimenziós kocka, nincs rajta mit szépíteni.)