Kovács Sándor

Differenciaegyenletek

Kovács Sándor

Differenciaegyenletek

TYPOTEX

Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Regionális Fejlesztési Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE
SZÉCHENYI 2020

A mű elektronikus kiadása
a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz.
projekt keretén belül készült.

Lektorálta: György Szilvia

ISBN 978 963 493 099 0

Kedves Olvasó!
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a *www.typotex.hu*
és a *facebook.com/typotexkiado* oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Erő Zsuzsa
A borítót készítette: Szalay Éva
Nyomta és kötötte: László András és Társa Nyomdaipari Bt.
Felelős vezető: László András

Tartalom

Előszó

Rég letűntek azok az idők, amikor a matematikusok olyan módszerek és technikák kifejlesztésével foglalkoztak, amelyek segítségével kezdetiérték-feladatok megoldásait kívánták közelítőleg vagy teljesen pontosan meghatározni. Hosszú idő után kiderült, hogy csak igen csekély esetben lehet a megoldást „zárt alakban” megadni, továbbá a számítástechnika időközben bekövetkezett rohamos fejlődése lehetővé tette bizonyos megoldások közelítő meghatározását. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a számítások mögötti elméleti háttér megismerése haszontalan időtöltés volna, már csak azért sem, mert sok esetben a gépesített számítások nem tükrözik hűen a megoldások globális viselkedését. A természet- és műszaki tudományokban, sőt a közgazdaságtudományban is egyre gyakrabban foglalkoznak diszkrét idejű modellek kvalitatív tulajdonságainak vizsgálatával: a modellezendő jelenség kapcsán differenciaegyenletet, illetve diszkrét dinamikai rendszereket vizsgálnak. Ezután rendszerint egy határátmenet segítségével a diszkrét modellt differenciálegyenletté alakítják. Ennek a – különösképpen a fizikában, illetve a társdalomtudományokban kedvelt – eljárásnak megvan az az előnye, hogy a differenciálegyenletek, illetve a differenciálható dinamikai rendszerek hatalmas eszköztárát használja. A hátránya viszont az, hogy a numerikus kiértékelés kapcsán a folytonos modell helyett ismét annak diszkrét változatát kell vizsgálni, ami különösen a nemlineáris jelenségek tekintetében újabb feladatok megoldásával jár. Ezen okból kifolyólag egyre inkább erősödik az a tendencia, miszerint a felállított diszkrét modellt közvetlenül a differenciaegyenletek, illetve a diszkrét dinamikai rendszerek eszköztárával vizsgáljuk. Ez a módszer azonban csak akkor kifizetődő, ha a differenciaegyenletek, illetve a diszkrét dinamikai rendszerek eszköztára elegendően jól van fejlesztve.

Könyvünk egyrészt azokon az előadásokon alapul, amelyeket a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gazdaság- és Társadalomtudományi Karán tartottunk éveken át a Dinamikus modellek a közgazdaságtanban elnevezésű tárgy keretében közgazdasági elemző mesterszakos hallgatóknak, másrészt pedig a mérnök-doktorandusz képzésben részt vevő hallgatóknak tartott kurzusokon.

A könyv felépítése önmagában olvasható-tanulható egészet alkot, amely elsősorban programtervező informatikus és alkalmazott matematikus hallgatóknak készült, de haszonnal forgathatják fizikus-, közgazdász-, illetve mérnökhallgatók is, akik megalapozott „elméleti” tudás birtokában szeretnének a gyakorlatban felmerülő problémák megoldásához segítséget kapni. Célunk, hogy a hallgatók képesek legyenek az előadásokon megszerzett ismereteiket a gyakorlatban alkalmazni és az ebben a témában fellelhető szakirodalmat megérteni.

Feltételezzük a bevezető matematikai kurzusok anyagának ismeretét, de azokra nem minden esetben építünk. Bizonyos – szükségesnek vélt – ismereteket a Függelékben dolgoztunk fel (ezek előzetes tanulmányozását az egyes fejezetekben való elmélyülés előtt kifejezetten ajánljuk), amelyekre aztán hivatkozás is történik, bizonyos alapvető ismeretek tekintetében pedig az irodalomjegyzékben lévő kitűnő szakkönyvekre, illetve monográfiákra utalunk (szögletes zárójelbe tett számokkal).

Köszönetünket fejezzük ki György Szilviának a kézirat igen alapos és gondos lektorálásáért, továbbá értékes megjegyzéseiért.

Budapest, 2020. nyár

Kovács Sándor

Jelölések

$:=$	definiáló egyenlőség
$:\Longleftrightarrow$	definiáló ekvivalencia
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{N}$	$:= \mathbb{Z}^+ := \{x \in \mathbb{Z} :\ x > 0\}$, a pozitív egész számok halmaza
$\mathbb{N}_0$	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$, a természetes számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{C}$	a komplex számok halmaza
$\mathbb{K}$	az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ közül valamelyik
$\mathcal{D}_f$	az f függvény értelmezési tartománya
$\mathcal{R}_f$	az f függvény értékkészlete
$f(x)$, f_x	az f függvény $x \in \mathcal{D}_f$ helyen felvett értéke
$f : A \to B$	az A halmazt a B halmazba képező függvény ($\mathcal{D}_f = A$)
$f \in A \to B$	azoknak az f függvényeknek a halmaza, amelyekre $\mathcal{D}_f \subset A$, $\mathcal{R}_f \subset B$
$f\|_H$	az f függvénynek a H halmazra való leszűkítése
$f[H]$	a H halmaz f függvény szerinti képe
$f^{-1}[H]$	a H halmaz f függvény szerinti ősképe
$\mathrm{Fix}(f)$	az f leképezés fixpontjainak halmaza
$\mathrm{Per}_p(f)$	az f leképezés p-periodikus pontjainak halmaza
$\mathfrak{C}(A, B)$	az A halmazt a B halmazba képező, folytonos függvények halmaza
$\mathfrak{C}^r(A, B)$	az A halmazt a B halmazba képező, r-szer folytonosan differenciálható függvények halmaza ($r \in \mathbb{N}$)
$\mathfrak{D}(A, B)$	az A halmazt a B halmazba képező, deriválható függvények halmaza
d.e.	differenciaegyenlet
d.e.r.	differenciaegyenlet-rendszer
k.é.f.	kezdetiérték-feladat
p.é.f.	peremérték-feladat
$\square$	megjegyzés, ill. tétel vége
$\lozenge$	példa, ill. definíció vége
$\blacksquare$	útmutatás, bizonyítás vége

Görög betűk

A	α	alfa	I	ι	ióta	P	ρ, ϱ	ró
B	β	béta	K	κ, $\varkappa$	kappa	Σ	σ, ς	szigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mű	Υ	υ	üpszilon
E	ε, ϵ	epszilon	N	ν	nű	Φ	ϕ, φ	fí
Z	ζ	(d)zéta	Ξ	ξ	kszí	X	χ	khí
H	η	éta	O	o	omikron	Ψ	ψ	pszí
Θ	θ, ϑ	théta	Π	π, ϖ	pí	Ω	ω	ómega
						$\digamma$		digamma

Gót betűk

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}$	a	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{h}$	h	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{o}$	o	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{v}$	v (fau)
$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{b}$	b	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{i}$	i	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{p}$	p	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{w}$	w (vé)
$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{c}$	c	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{j}$	j (jot,jé)	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{q}$	q	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{x}$	x
$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{d}$	d	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{k}$	k	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{r}$	r	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{y}$	y (üpszilon)
$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{e}$	e	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{l}$	l	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{s}$	s (esz)	$\mathfrak{Z}$	$\mathfrak{z}$	z (cet)
$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{f}$	f	$\mathfrak{M}$	$\mathfrak{m}$	m	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{t}$	t			
$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{g}$	g	$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{n}$	n	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{u}$	u			