

Tóth–Simon

# Differenciálegyenletek



Tóth János  
Simon L. Péter

# Differenciálegyenletek

Bevezetés az elméletbe  
és az alkalmazásokba



A mű elektronikus kiadása  
a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz. projekt  
keretén belül készült.

© Tóth János, Simon L. Péter, Typotex, Budapest, 2020  
Engedély nélkül semmilyen formában nem másolható!

ISBN 978 963 493 053 2  
ISSN 1788-1811

Kedves Olvasó!  
Köszönjük, hogy kínálatunkból választott olvasnivalót!  
Újabb kiadványainkról és akcióinkról a [www.typotex.hu](http://www.typotex.hu)  
és a [facebook.com/typotexkiado](https://facebook.com/typotexkiado) oldalakon értesülhet.

Typotex Kiadó  
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989  
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók  
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.  
Felelős kiadó: Németh Kinga  
Főszerkesztő: Horváth Balázs  
A kötetet gondozta: Gerner József  
A borítót készítette: Szalay Éva

# Tartalom

Előszó a harmadik kiadáshoz . . . . .	11
Előszó . . . . .	12
<b>I. Alapismeretek</b>	<b>13</b>
<b>1. Bevezetés</b>	<b>14</b>
1.1. Jelölések . . . . .	16
<b>2. Alapfogalmak</b>	<b>19</b>
2.1. Motiváció, példák . . . . .	19
2.1.1. A radioaktív bomlás egy modellje . . . . .	19
2.1.2. A barometrikus nyomásformula . . . . .	21
2.1.3. Baktériumok szaporodásáról . . . . .	21
2.1.4. Egy egyszerű kémiai reakció . . . . .	22
2.1.5. Newton II. törvénye . . . . .	23
2.1.6. Diffúzió, hővezetés . . . . .	24
2.2. Elemi kvalitatív módszerek . . . . .	25
2.2.1. A függvényvizsgálat módszereinek kiterjesztése . . . . .	25
2.2.2. Iránymező . . . . .	27
2.3. Elemi kvantitatív módszerek . . . . .	27
2.3.1. Verifikálás . . . . .	27
2.3.2. Közvetlenül megoldható („integrálható”) egyenletek . . . . .	28
2.4. Definíciók, egzisztencia- és unicitási tételek . . . . .	29
2.4.1. Explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenlet . . . . .	30
2.4.2. Kezdetiérték-probléma, avagy Cauchy-feladat . . . . .	32
2.4.3. A megoldás létezése és egyértelmősége . . . . .	33
2.5. A Peano-egyenlőtlenség . . . . .	44
2.5.1. Gronwall és Bihari lemmája . . . . .	44
2.5.2. Mérési és modellhibák hatása a megoldásokra . . . . .	46
2.5.3. A karakterisztikus függvény és a variációs egyenlet . . . . .	48
2.6. A <i>Mathematica</i> alkalmazása az alapfogalmak illusztrálására . . . . .	50

<b>3. Néhány egyszerű típus</b>	53
3.1. Közvetlenül integrálható egyenletek	53
3.2. Autonóm egyenletek	54
3.3. Szétválasztható változójú egyenletek	56
3.3.1. Homogén egyenletek	58
3.3.2. Homogénre visszavezethető egyenletek	60
3.4. Elsőrendű lineáris egyenletek	60
3.5. Egzakt egyenletek	63
3.5.1. A megoldások inverzére vonatkozó egyenlet	67
3.5.2. A primitív függvény meghatározása	68
3.6. Integráló tényező	71
3.7. Alkalmazások	72
3.7.1. Gépkocsi fékútjának kiszámítása	72
3.7.2. Radioaktív kormeghatározás	72
3.7.3. Oldatok; áramlás	73
3.7.4. Fényelnyelés, láncgörbe	73
3.8. <i>Mathematica</i> az egyszerű típusok megoldásánál	74
<b>II. Lineáris egyenletek</b>	<b>77</b>
<b>4. Lineáris differenciálegyenletek</b>	78
4.1. Alapfogalmak, alaptételek	78
4.2. A megoldások előállítása	81
4.2.1. Homogén egyenlet	81
4.2.2. Inhomogén egyenlet	84
4.2.3. Az állandó együtthatós egyenlet alaprendszere	85
4.2.4. Mátrix exponenciális függvényének kiszámítása	89
Hermite-interpoláció mátrixfüggvényekhez	90
Jordan-alak mátrixfüggvényekhez	91
4.3. Alkalmazások	93
4.3.1. Rekeszrendszerek	93
4.3.2. Egy tanulási modell	95
4.4. <i>Mathematica</i> és lineáris differenciálegyenlet-rendszerek	95
<b>5. Magasabb rendű egyenletek</b>	97
5.1. Az átviteli elv	97
5.2. Általános állítások	101
5.3. A megoldások előállítása	103
5.3.1. Másodrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenlet	103
5.3.2. Az általános eset	104
5.3.3. Inhomogén egyenletek	109
5.3.4. Kezdetiérték-feladatok	111
5.3.5. Euler-egyenletek	111
5.4. Lineáris peremérték-feladatok	112

5.4.1.	A peremérték-feladatok eredete . . . . .	113
5.4.2.	A peremérték-feladatok osztályozása . . . . .	113
5.4.3.	Sturm-típusú egyenletekre vonatkozó kezdetiérték-feladatok . . . . .	115
5.4.4.	A homogén egyenletre vonatkozó peremérték-feladat megoldása . . . . .	115
5.4.5.	Az inhomogén egyenletre vonatkozó peremérték-feladat megoldása. A Green-függvény . . . . .	117
5.4.6.	A Green-függvény előállítása . . . . .	119
5.4.7.	Inhomogén egyenlet inhomogén peremfeltétellel . . . . .	120
5.5.	Peremérték-feladatok rendszerekre . . . . .	120
5.6.	Sajátérték-feladatok . . . . .	122
5.7.	Kvalitatív vizsgálat . . . . .	122
5.8.	Alkalmazások . . . . .	127
5.8.1.	Pontmechanika . . . . .	127
5.8.2.	Kvantummechanika . . . . .	128
5.9.	<i>Mathematica</i> és magasabb rendű egyenletek . . . . .	129
<b>6.</b>	<b>A Laplace-transzformáció</b> . . . . .	<b>130</b>
6.1.	Alapvető fogalmak és tulajdonságok . . . . .	131
6.2.	Alkalmazások magasabb rendű lineáris egyenletekre . . . . .	135
6.2.1.	Állandó együtthatós egyenletek . . . . .	135
6.2.2.	Változó együtthatós egyenletek . . . . .	136
6.3.	Alkalmazások lineáris egyenletrendszerekre . . . . .	137
6.4.	Néhány további példa . . . . .	138
6.4.1.	Bemenet-kimenet rendszerek . . . . .	138
6.5.	Számítások <i>Mathematicával</i> . . . . .	138
<b>III.</b>	<b>A kvalitatív elmélet elemei</b> . . . . .	<b>141</b>
<b>7.</b>	<b>A stabilitáselmélet elemei</b> . . . . .	<b>142</b>
7.1.	A stabilitáselmélet alapfogalmai . . . . .	142
7.2.	Lineáris rendszerek . . . . .	152
7.3.	Ljapunov tételei . . . . .	156
7.4.	Ljapunov-függvények szerkesztése . . . . .	162
7.5.	Alkalmazások . . . . .	165
7.5.1.	Mechanika . . . . .	165
7.5.2.	Populációdinamika és kémiai kinetika . . . . .	168
7.5.3.	Részletesen kiegyensúlyozott reakciók . . . . .	171
7.6.	<i>Mathematica</i> és stabilitáselmélet . . . . .	174
<b>8.</b>	<b>Autonóm egyenletek, dinamikai rendszerek</b> . . . . .	<b>177</b>
8.1.	Alapfogalmak . . . . .	177
8.1.1.	Az autonóm egyenlet fogalma és tulajdonságai . . . . .	178
8.1.2.	Dinamikai rendszerek . . . . .	183

8.1.3.	Autonóm egyenletek és dinamikai rendszerek kapcsolata	187
8.2.	Lineáris rendszerek	190
8.2.1.	Kétdimenziós rendszerek	190
	Jordan-féle normálalak	190
	Valós sajátértékek, kétdimenziós sajátaltér	191
	Kétszeres valós sajátérték, egydimenziós sajátaltér	192
	Konjugált komplex sajátértékek	193
	Szinguláris együtthatómátrix esete	194
	Visszatranszformálás	195
8.2.2.	Magasabb dimenziós rendszerek	198
8.3.	Nemlineáris rendszerek	202
8.3.1.	Globális vizsgálat az egyenesen	203
8.3.2.	Lokális vizsgálat az egyensúlyi pontok körül	205
	Általános állítások	205
	Kétdimenziós rendszerek	208
8.3.3.	Periodikus megoldások	210
	Periodikus pálya stabilitásának vizsgálata	212
	Kétdimenziós rendszerek	215
8.3.4.	Globális vizsgálat a síkon	220
8.3.5.	Egy kaotikus modell	225
8.4.	Diszkrét dinamikai rendszerek	228
8.5.	Alkalmazások	230
8.5.1.	Dinamika	230
	Ingamozgás	230
	Bolygómozgás	230
8.5.2.	Reakciókinetika	232
8.5.3.	Populációdinamika	234
	Egydimenziós folytonos idejű modellek	234
	Egydimenziós diszkrét idejű modell	235
	Kétdimenziós modellek	235
8.5.4.	Fertőzésterjedési modellek	237
8.6.	<i>Mathematica</i> és autonóm egyenletek	239

## IV. Kiegészítő fejezetek 241

9.	Parciális differenciálegyenletek	242
9.1.	Bevezetés	242
9.1.1.	Fontos parciális differenciálegyenletek a fizikában és a kémiában	242
9.1.2.	Verifikálás	245
9.1.3.	Egyszerű megoldási módszerek	246
9.1.4.	Parciális differenciálegyenletek osztályozása	248
9.2.	Elsőrendű egyenletek	248
9.3.	Másodrendű lineáris egyenletek	251



9.3.1.	A fő részükben lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletek osztályozása . . . . .	251
9.3.2.	A Laplace-egyenlet és a Poisson-egyenlet . . . . .	252
	Megoldás a teljes téren . . . . .	253
	Megoldás korlátos tartományon . . . . .	254
9.3.3.	A hővezetési vagy diffúziós egyenlet . . . . .	255
	Megoldás a teljes téren . . . . .	256
	Megoldás korlátos tartományon . . . . .	257
9.3.4.	A hullámeqyenlet . . . . .	259
	Megoldás a teljes téren . . . . .	260
	Megoldás korlátos tartományon . . . . .	261
9.4.	A Laplace-transzformáció alkalmazása . . . . .	263
9.5.	<i>Mathematica</i> és parciális differenciálegyenletek . . . . .	264
<b>10.</b>	<b>A variációszámítás elemei</b> . . . . .	<b>267</b>
10.1.	Bevezetés: optimalizálási feladatokról . . . . .	267
10.2.	A variációszámítás alapfeladata . . . . .	268
10.3.	Euler–Lagrange-egyenletek . . . . .	271
	10.3.1. A minimális forgásfelület . . . . .	276
	10.3.2. A brachisztocron-probléma . . . . .	277
10.4.	Elégséges feltétel . . . . .	279
10.5.	Alkalmazások . . . . .	282
	10.5.1. Dinamika . . . . .	282
	10.5.2. Optika . . . . .	283
	Az állandó törésmutató esete . . . . .	284
	Fénytörés . . . . .	284
	Tükröződés a talajon . . . . .	284
	Optikai szál . . . . .	285
	10.5.3. Egy közgazdasági példa . . . . .	286
	10.5.4. Egy geometriai feladat . . . . .	288
	10.5.5. Kitekintés és filozófiai megjegyzések . . . . .	289
10.6.	<i>Mathematica</i> és variációszámítás . . . . .	290
<b>11.</b>	<b>A feladatok megoldása</b> . . . . .	<b>292</b>
11.1.	A megoldások elé . . . . .	292
11.2.	A 2. fejezet feladatainak megoldása . . . . .	292
11.3.	A 3. fejezet feladatainak megoldása . . . . .	297
11.4.	A 4. fejezet feladatainak megoldása . . . . .	304
11.5.	Az 5. fejezet feladatainak megoldása . . . . .	307
11.6.	A 6. fejezet feladatainak megoldása . . . . .	312
11.7.	A 7. fejezet feladatainak megoldása . . . . .	313
11.8.	A 8. fejezet feladatainak megoldása . . . . .	319
11.9.	A 9. fejezet feladatainak megoldása . . . . .	327
11.10.	A 10. fejezet feladatainak megoldása . . . . .	333
	Hivatkozások és bibliográfia . . . . .	339
	Tárgy- és névmutató . . . . .	351



# Előszó a harmadik kiadáshoz

Miután könyvünk második, változatlan kiadása is elfogyott, szükségessé vált egy újabb kiadás. Ebben a megtalált kisebb hibákat, elírásokat javítottuk, az irodalomjegyzéket korszerűsítettük, az ábrákat egységesítettük, figyelembe vettük a *Mathematica* (újabb nevén: Wolfram-nyelv) fejlődését is.

Köszönettel tartozunk Horváth Gábornak, aki az előző kiadás alapos végigolvasása közben számos figyelembe veendő megjegyzést tett. Rác András mindenekelőtt az olvashatóságra és érthetőségre koncentrálnak végezte lektori tevékenységét; megjegyzéseinek túlnyomó többségét hasznosítottuk. Az újabb kiadást támogatta a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal is (SNN 125739).

A velünk együtt tanító kollégák közül a korábbiakban megemlítették mellett megköszönjük Csikja Rudolf, Király Mariann és Nagy Ilona segítségét. Garay Barnabás nevét is külön meg kell említenünk, mert számos megjegyzést kaptunk tőle az előző kiadások megjelenése után.

A technikai támogatást most Gerner Józsefnek köszönhetjük.

2019. október

**Tóth János és Simon L. Péter**

# Előszó

A jelen könyv egyrészt azokon az előadásokon alapul, amelyeket az Eötvös Loránd Tudományegyetemen tartottunk egymást követően matematikus- és alkalmazottmatematikus-hallgatók számára, másrészt pedig amelyeket Tóth János tartott a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Vegyészmérnöki Karának hallgatói számára. Ennek megfelelően elsősorban vegyész- és biomérnök-, valamint alkalmazottmatematikus-hallgatókat céloztunk meg vele, de nagyon reméljük, hogy más egyetemek matematikus és differenciálegyenleteket tanuló és alkalmazó nem matematikus hallgatói is haszonnal forgatják majd.

A könyv létrejöttének körülményei indokolják, hogy mindenképp az ELTE-n és a BME-n velünk együtt tanító kollégáknak mondjunk köszönetet, így Frits Erika Ritának, G. Horváth Ágotának, Hári Józsefnek, Kollárné Hunek Klárának, Lángné Lázi Mártának, Mátrai Tamásnak, Rácz Andrásnak és Sánta Zsuzsának.

Nagyon sokat köszönhetünk Garay Barnabásnak, a könyv lektorának, aki mindenre kiterjedő figyelemmel igyekezett kigyomlálni a hibákat, valamint értetőbbé és logikusabbá tenni a szöveget.

Korábbi változatok, illetve egyes fejezetek elolvasásával segített bennünket Andai Attila, Gelencsér Tímea, Halmschlager Andrea, Horváth Miklós, Karátszon János, Kánnai Zoltán, Lóczi Lajos, Papp Dávid, Pfeil Tamás, Simon László, Szili László és Ván Péter. Sok technikai segítséget kaptunk Tikk Domonkostól és Wettl Ferencről. Végül, de nem utolsó sorban hálásak vagyunk munkahelyi vezetőinknek a BME-n és az ELTE-n, mert támogatták a könyv megírását.

A könyv részben a T037491 és a T047132 számú OTKA-pályázat támogatásával készült.

2004. augusztus

**Tóth János és Simon L. Péter**