Vetier András

Valószínűségszámítás

3. rész

Vetier András

Valószínűségszámítás

3. rész

Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

TYPOTEX

Magyarország Kormánya
Európai Unió
Európai Regionális Fejlesztési Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE
SZÉCHENYI 2020

A mű elektronikus kiadása
a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz.
projekt keretén belül készült.

ISBN 978 963 493 034 1

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Erő Zsuzsa
A borítót készítette: Szalay Éva

Tartalom

1. Folytonos eloszlások **9**
1.1. Ismétlés kalkulusból . . . 9
1.2. Folytonos valószínűségi változók . . . 10
1.3. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény . . . 10
1.4. Intervallum valószínűsége . . . 12
1.5. Medián . . . 13
1.6. Kvantilis, kvartilis és percentilis . . . 13

2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékkel, pontfelhővel **17**
2.1. Szemléltetés festékkel (tömeggel) . . . 17
2.1.1. Festék a megvastagított számegyenesen . . . 18
2.2. Szemléltetés pontfelhővel . . . 19
2.2.1. Pontfelhő a számegyenesen . . . 19
2.2.2. Pontfelhő egy keskeny sávban . . . 20
2.2.3. Pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt . . . 21

3. Random számok transzformációi **25**
3.1. Random szám négyzete, négyzetgyöke, reciproka . . . 25
3.1.1. Szemléltetés pontfelhőkkel . . . 25
3.1.2. Elméleti számítások: eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény . . . 27
3.2. Összeg, szorzat, hányados – eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény . . . 32
3.3. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése . . . 39
3.3.1. Random számok összege . . . 39
3.3.2. Két random szám maximuma . . . 41
3.4. Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások . . . 41
3.4.1. Arkusz-szinusz eloszlás . . . 42
3.4.2. Cauchy-eloszlás . . . 45
3.5. Monoton transzformációk . . . 49
3.6. Folytonos szimuláció . . . 51
3.7. Béta-eloszlások . . . 51
3.7.1. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése . . . 52
3.7.2. Az eloszlásfüggvény képletének levezetése . . . 56
3.7.3. Nem egyenletes alapeloszlás esete *(Extra tananyag)* . . . 57

4. Várható érték, variancia, szórás *(– folytonos eset)* **61**
4.1. Definíciók . . . 61
4.2. Nagy számok törvényei . . . 62
4.2.1. NSZT a kísérleti eredmények átlagára . . . 62

4.2.2. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára . . . 65
4.2.3. NSZT a második momentumra . . . 67
4.2.4. NSZT a varianciára . . . 67
4.2.5. NSZT a szórásra . . . 68
4.2.6. NSZT a mediánra . . . 68
4.3. Példa: Csónak bérbeadása extra haszonnal . . . 68

5. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai ***(– diszkrét és folytonos eset)*** **73**

6. Nevezetes folytonos eloszlások **75**
6.1. Exponenciális eloszlás . . . 75
6.1.1. Örökifjú tulajdonság . . . 77
6.1.2. Exponenciális eloszlások alkalmazásai . . . 79
6.1.3. Öregedő tulajdonság . . . 80
6.1.4. Fiatalodó tulajdonság . . . 80
6.2. Gamma-eloszlás . . . 81
6.2.1. Mennyi idő múlva történik az n-edik baleset? . . . 85
6.2.2. Mennyi ideig tudjuk a világosságot biztosítani a pincénkben, ha n darab izzónk van? 87
6.3. Normális eloszlások . . . 87
6.3.1. Standard normális eloszlás . . . 87
6.3.2. Normális eloszlás μ, σ paraméterekkel . . . 91
6.3.3. Centrális határeloszlás-tétel . . . 96
6.3.4. Normális eloszlások alkalmazásai . . . 97
6.4. Béta-eloszlások várható értéke, szórása *(Extra tananyag)* . . . 100

7. Közelítések normális eloszlással **103**
7.1. Binomiális eloszlás közelítése normális eloszlással . . . 103
7.1.1. Előkészítés egy példával . . . 103
7.1.2. A De Moivre – Laplace-tétel . . . 106
7.1.3. A De Moivre – Laplace-tétel, mint a centrális határeloszlás-tétel speciális esete . . . 107
7.2. Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal . . . 107
7.2.1. A relatív gyakoriság közelítő eloszlása . . . 107
7.2.2. Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal . . . 108
7.2.3. Hány kísérletből közelítsük a valószínűséget, hogy. . . ? . . . 109
7.3. Összeg eloszlásának közelítése normális eloszlással . . . 111
7.4. Várható érték közelítése átlaggal . . . 111
7.4.1. Az átlag közelítő eloszlása . . . 111
7.4.2. Várható érték közelítése átlaggal . . . 112
7.4.3. Hány kísérletből közelítsük a várható értéket, hogy. . . ? . . . 112

8. Eloszlások transzformációi **115**
8.1. Szemléltetés vezérvonalakkal, pontfelhővel, festékkel . . . 115
8.1.1. Szemléltetés vezérvonalakkal . . . 115
8.1.2. Egyenletes eloszlás lineáris transzformációi . . . 117
8.1.3. Egyenletes eloszlás monoton transzformációi . . . 119
8.1.4. Exponenciális eloszlás transzformációi . . . 121
8.2. Lineáris transzformációk leírása képletekkel . . . 122
8.2.1. Növekedő eset $(a > 0)$ . . . 123

8.2.2. Csökkenő eset $(a < 0)$ . . . 124
8.2.3. A két képlet egységesítése . . . 126
8.3. Monoton transzformációk leírása képletekkel . . . 126
8.3.1. Növekedő transzformációk . . . 127
8.3.2. Csökkenő transzformációk . . . 128
8.3.3. A két képlet egységesítése . . . 129
8.4. Lognormális eloszlások . . . 129

9. Diszkrét és folytonos eloszlások keverése *(Extra tananyag)* **133**

10. A főnökök halmaza nem mérhető *(Extra tananyag)* **135**
10.1. Trükkös eltolás . . . 135
10.2. Barátok és osztályok . . . 135
10.3. Főnökök . . . 136
10.4. Ellentmondásra jutunk . . . 136

11. A nagy számok *erős törvénye* eseményekre *(Extra tananyag)* **139**
11.1. A probléma megfogalmazása . . . 139
11.2. A valószínűség meghatározása . . . 140
11.2.1. Egy egyenlőtlenség állítása és igazolása . . . 142
11.3. Az általános eset megfogalmazása . . . 143
11.4. Miért hívjuk az erős törvényt *erős*nek? . . . 143

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam.** Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t,
- behívja a PAINT programot,
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást,
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit ír oda,
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám,
- a JPG fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre.

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

2019. október 17.

Üdvözlettel,

Vetier András

1. fejezet

Folytonos eloszlások

1.1. Ismétlés kalkulusból

Válasszunk egy olyan $f(x)$ függvényt, melyre az alábbi két feltétel teljesül:

- $f(x) \geq 0$ minden x-re,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Az első feltétel miatt beszélhetünk az $f(x)$ függvény alatti és az x tengely feletti T tartományról. A második feltétel miatt a T tartomány területe 1-gyel egyenlő. Kalkulusból jól ismerjük **az** $f(x)$ **területfüggvényeként** adódó **primitív függvényét**:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx,$$

aminek deriváltjaként – minden olyan x helyen, ahol az f függvény folytonos – az $f(x)$-et kapjuk vissza:

$$F'(x) = f(x).$$

A derivált – mint tudjuk – különbségek határértéke: $a < x < b$ fennállása mellett $a \to x, b \to x$ esetén:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \to f(x).$$

Ezt a tény hétköznapi nyelven úgy lehet mondani, hogy $a < x < b$ fennállása mellett x-hez közeli a és b esetén:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \approx f(x),$$

vagy átrendezéssel:

$$F(b) - F(a) \approx f(x)(b - a).$$

A primitív függvény jól ismert tulajdonsága, hogy segítségével egy határozott integrál értékét egyszerűen különbségként kaphatjuk meg:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ez a jól ismert Newton–Leibniz-formula. Hangsúlyozzuk, hogy a Newton–Leibniz-formulában a és b nem kell, hogy közel legyenek egymáshoz.

1.2. Folytonos valószínűségi változók

Az élet szinte mindenhol produkál olyan valószínűségi változókat, melyek lehetséges értékei külön-külön nulla valószínűségűek, de ennek ellenére a lehetséges értékek együttesen egy intervallumot tesznek ki. Mivel az intervallumok több mint megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaznak, az ilyen valószínűségi változók nem tekinthetőek diszkréteknek. Példák:

- $X =$ a hőmérséklet (mondjuk Celsius fokokban mérve) egy adott helyen éjfélkor
- $X =$ amennyi időt reggelente várnom kell a villamosra
- $X =$ egy véletlenszerűen választott ember testmagassága
- $X =$ egy véletlenszerűen választott ember testsúlya
- $X =$ a tényleges áramerősség egy áramkörben egy adott pontban

Ezekre a valószínűségi változókra teljesül, hogy minden lehetséges értéküket nulla valószínűséggel veszik fel. Ha egy valószínűségi változó lehetséges értékei egy intervallumot tesznek ki, és a valószínűségi változó minden lehetséges értékét nulla valószínűséggel veszi fel, akkor a valószínűségi változót **folytonos**nak mondjuk.

Emlékeztetünk rá, hogy – a fentiekkel ellentétben – egy diszkrét valószínűségi változó a lehetséges értékeit pozitív valószínűséggel veszi fel.

1.3. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény

Egy X valószínűségi változó **eloszlásfüggvény**ének nevezzük azt az F függvényt, melynek egy x helyen vett értékét (vagyis az $F(x)$-szel jelölt számot) így definiáljuk:

$$F(x) = \mathrm{P}(X \leq x).$$

Az eloszlásfüggvénynek egy x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó milyen valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb vagy egyenlő értéket. Folytonos valószínűségi változó esetén minden x érték valószínűsége 0-val egyenlő, ezért a definícióban „kisebb vagy egyenlő” helyett „kisebb” is írható:

$$F(x) = \mathrm{P}(X < x).$$

Megjegyezzük, hogy ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor minden pozitív valószínűségű x lehetséges érték esetén a $\mathrm{P}(X \leq x)$ valószínűség nagyobb a $\mathrm{P}(X < x)$ valószínűségnél éppen annyival, amennyi az x valószínűsége:

$$\mathrm{P}(X \leq x) - \mathrm{P}(X < x) = \mathrm{P}(X = x).$$

Könnyű látni, hogy teljesülnek az alábbiak:

Egy **diszkrét** valószínűségi változó eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. monoton növekvő,
2. ha x tart a $(-\infty)$-hez, akkor $F(x)$ tart a 0-hoz,
3. ha x tart a $(+\infty)$-hez, akkor $F(x)$ tart az 1-hez,
4. az eloszlásfüggvény grafikonja vízszintes vonalakból és ugrásokból áll: az ugrások azoknál az x értékeknél vannak, melyeket a valószínűségi változó pozitív valószínűséggel vesz fel. Egy ilyen x helyen az ugrás nagysága pedig megegyezik az x érték valószínűségével.

Igaz a következő állítás: *Ha egy $F(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan **diszkrét** valószínűségi változót definiálni, melynek eloszlásfüggvénye ez a függvény.*

Egy **folytonos** valószínűségi változó eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. monoton növekvő,
2. ha x tart a $(-\infty)$-hez, akkor $F(x)$ tart a 0-hoz,
3. ha x tart a $(+\infty)$-hez, akkor $F(x)$ tart az 1-hez,
4. mindenhol folytonos.

Igaz a következő állítás: *Ha egy $F(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan **folytonos** valószínűségi változót definiálni, melynek eloszlásfüggvénye ez a függvény.*

Vegyük észre, hogy a diszkrét és a folytonos esetek az 1–3. pontokban megegyeznek, és csak a 4. pontban térnek el.

A **jobb oldali eloszlásfüggvény** is definiálható a

$$T(x) = \mathrm{P}(X \geq x)$$

képlettel. A jobb oldali eloszlásfüggvény tulajdonságait itt nem soroljuk fel. A tulajdonságok kigondolása az Olvasó dolga lesz a gyakorló feladatok között.

A könyvnek ebben a részében a folytonos esetre fókuszálunk. Az $F(x)$ függvény deriváltját jelöljük $f(x)$-szel:

$$F'(x) = f(x).$$

Az $f(x)$ függvény neve: **sűrűségfüggvény**.

A sűrűségfüggvény jellemzői:

1. $f(x) \geq 0$ minden x-re,

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$

Igaz a következő állítás: *Ha egy $f(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan valószínűségi változót definiálni, melynek sűrűségfüggvénye ez a függvény.*

Nyilvánvaló tény, hogy ha egy sűrűségfüggvény egy intervallumban mindenhol pozitív, akkor ebben az intervallumban az eloszlásfüggvény szigorúan monoton növekszik.

Tekintsünk most az x pont körül egy pici intervallumot, ami lehet például az $[x; x+\Delta x]$ intervallum, ahol Δx egy pici pozitív szám. Az előbbieket az $a = x$, $b = x + \Delta x$ szereposztás mellett alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{P}\,(\,x \le X \le x+\Delta x\,) \;=\; \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

A jobb oldalon álló integrált $f(x)\Delta x$-szel közelíthetjük, ezért

$$\mathrm{P}\,(\,x \le X \le x+\Delta x\,) \;\approx\; f(x)\Delta x,$$

vagyis

$$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}\,(\,x \le X \le x+\Delta x\,)}{\Delta x}.$$

Előfordulhat, hogy az $[x; x+\Delta x]$ intervallum helyett kényelmesebb az x pont körüli $[x_1, x_2]$ intervallummal dolgozni. Ilyenkor

$$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}(x_1 \le X \le x_2)}{x_2 - x_1},$$

ahol $[x_1, x_2]$ egy picike intervallum x körül.

1. megjegyzés: Jól jegyezzük meg: ***a sűrűségfüggvény értéke egy*** x ***helyen*** azt mutatja, hogy az x körüli pici intervallumot véve, ***a pici intervallum valószínűsége körülbelül hányszorosa a pici intervallum hosszának.***

2. megjegyzés: Hangsúlyozzuk, hogy a sűrűségfüggvény $f(x)$-szel jelölt értéke ***semminek sem a valószínűsége***. Ennek a ténynek az elfogadását és megjegyzését segítheti, ha észben tartjuk: *a sűrűségfüggvény értéke lehet 1-nél nagyobb is, ámde semmilyen valószínűség értéke sem lehet 1-nél nagyobb*. Mint néhány sorral feljebb már említettük, a sűrűségfüggvény értéke egy arány közelítő értékét jelenti.

1.4. Intervallum valószínűsége

Tetszőleges $[a, b]$ intervallum esetén az intervallumba esés

$$\mathrm{P}\,(\,a \le X \le b\,)$$

valószínűsége az $F(x)$-nek az $[a, b]$ intervallumon vett megváltozásával adható meg:

$$\mathrm{P}\,(\,a \le X \le b\,) \;=\; F(b) - F(a).$$

Az $F(x)$ megváltozása pedig – a Newton–Leibniz-szabály szerint – az $f(x)$-nek az $[a,b]$ intervallumon vett határozott integráljával egyenlő:

$$\mathrm{P}\,(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Mivel most csak folytonos valószínűségi változókról beszélünk, ha a zárt $[a,b]$ intervallum helyett a nyílt (a,b) intervallumot tekintettük volna, ugyanezt az értéket kaptuk volna:

$$\mathrm{P}\,(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

1.5. Medián

Adott folytonos valószínűségi változó vagy eloszlás esetén az

$$F(x) = \frac{1}{2}$$

egyenlet megoldása olyan x számot ad, ami úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a tőle balra lévő rész és és a tőle jobbra lévő rész is pontosan $\frac{1}{2}$ valószínűségű:

$$\mathrm{P}\,((-\infty; x)) = \mathrm{P}\,((x;\, +\infty)) = \frac{1}{2}.$$

Ilyenkor az x számot **medián**nak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy olyan eloszlásnak, mely szimmetrikus valamilyen pontra, a szimmetriapont a mediánja.

Megjegyzés. Bár gyakorlati jelentősége nincs, megemlítjük, hogy ha x_1 és x_2 olyan számok, hogy a $(-\infty; x_1)$ és az $(x_2;\, +\infty)$ intervallumok mindegyikének $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, akkor az $[x_1; x_2]$ intervallum minden pontja medián.

1.6. Kvantilis, kvartilis és percentilis

Adott folytonos valószínűségi változó vagy eloszlás és 0 és 1 közötti akármilyen p esetén az

$$F(x) = p$$

egyenlet megoldása olyan x számot ad, ami úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a tőle balra lévő rész valószínűsége p, és a tőle jobbra lévő rész valószínűsége $(1-p)$:

$$\mathrm{P}\,((-\infty; x)) = p, \quad \mathrm{P}\,((x;\, +\infty)) = 1 - p.$$

Ilyenkor az x számot **a** p **értékhez tartozó kvantilis**nek, vagy rövidebben mondva p**-kvantilis**nek nevezzük. Azt a függvényt, ami a 0 és 1 közötti p számokhoz hozzárendeli a p-kvantilis értékét, **kvantilis függvény**nek nevezhetjük.

Nyilvánvaló, hogy *a p-kvantilis értéke megegyezik az eloszlásfüggvény inverzének a p helyen vett értékével:*

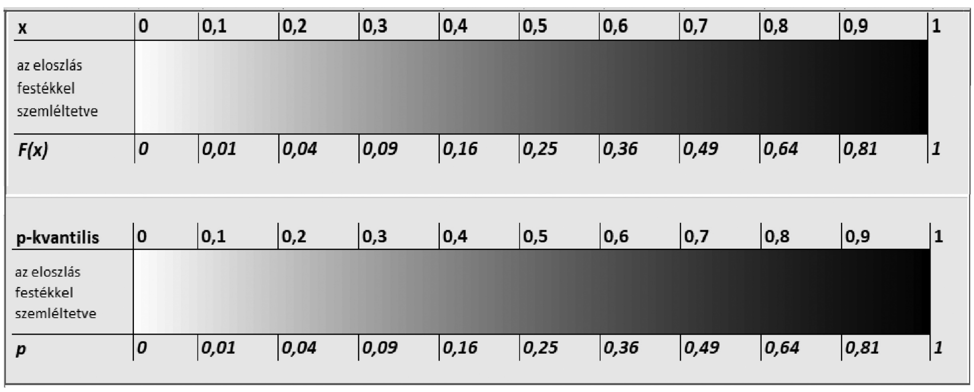
$$p\text{-kvantilis} = F^{-1}(p).$$

Tehát *a kvantilis függvény megegyezik az eloszlásfüggvény inverzével.*

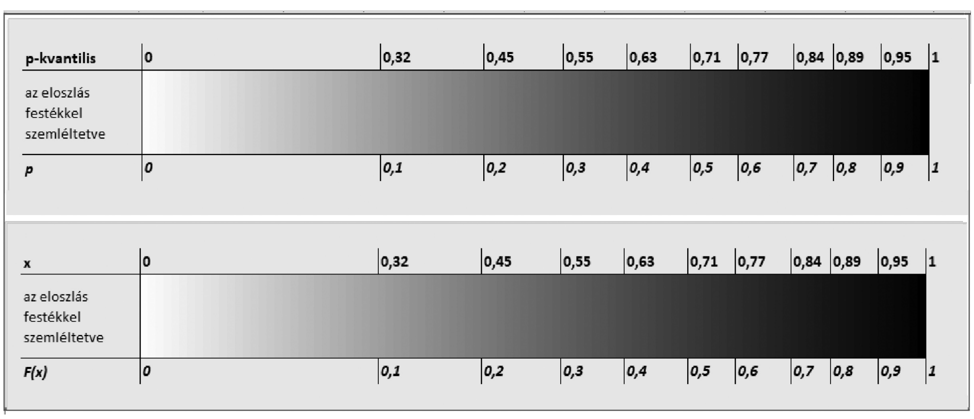
Az alábbi ábrán az

$$f(x) = 2x \quad (0 < x < 1) \quad \text{sűrűségfüggvényű,}$$
$$F(x) = x^2 \quad (0 < x < 1) \quad \text{eloszlásfüggvényű}$$

eloszlással kapcsolatban szemléltetjük az eloszlásfüggvényt, illetve annak inverzét, a kvantilis függvényt:



1.1. ábra. *Eloszlásfüggvény és kvantilis függvény – egymás inverzei*



1.2. ábra. *Eloszlásfüggvény és kvantilis függvény – egymás inverzei (más számokkal)*

A szóban forgó eloszlásra a kvantilis függvény képletét így adhatjuk meg: $F^{-1}(p) = \sqrt{p} \quad (0 < p < 1)$.

Vegyük észre, hogy tetszőleges eloszlásra $p = 0{,}5$ *esetén a p-kvantilis éppen a medián*. A $0{,}25$-kvantilis neve: **alsó kvartilis**, a $0{,}75$-kvantilis neve: **felső kvartilis**. (Figyelem: a kvantilis és kvartilis szavak csak egyetlen betűben különböznek. Ne keverjük őket össze!) Az ábrán szemléltetett eloszlásra

- az alsó kvartilis $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$,
- a medián $\sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71$,
- a felső kvartilis $\sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$.

Azok, akik törtek helyett százalékokban szeretnek gondolkodni, a p-kvantilis helyett a megfelelő százalékértéket és **percentilis**t mondhatnak. Például:

- $0{,}1$-kvantilis helyett 10 százalékos percentilist,
- $0{,}9$-kvantilis helyett 90 százalékos percentilist,
- $0{,}99$-kvantilis helyett 99 százalékos percentilist

lehet mondani.