Vetier András

Valószínűségszámítás

1. rész

Vetier András

Valószínűségszámítás

1. rész

Valószínűségek és diszkrét valószínűségi változók

TYPOTEX

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA
Európai Unió
Európai Regionális Fejlesztési Alap
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE
SZÉCHENYI 2020

A mű elektronikus kiadása
a VEKOP-2.1.1-15-2016-00152 sz.
projekt keretén belül készült.

ISBN 978 963 493 032 7

Typotex Kiadó
Alapította Votisky Zsuzsa, 1989
A kiadó az 1795-ben alapított Magyar Könyvkiadók
és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
Felelős kiadó: Németh Kinga
Főszerkesztő: Horváth Balázs
A kötetet gondozta: Erő Zsuzsa
A borítót készítette: Szalay Éva

Tartalom

1. Esemény, valószínűség **11**
- 1.1. Kimenetelek 11
- 1.2. Esemény 11
- 1.3. Valószínűség 12
- 1.4. Műveletek eseményekkel 12
- 1.5. A valószínűség alapvető tulajdonságai 14
- 1.6. Klasszikus problémák 16
- 1.7. Számlálási alapszabályok 16
- 1.8. Kombinatorikus alapképletek 17
- 1.9. Az eseménytér megválasztása nem egyértelmű 22
- 1.10. RAND.BETWEEN (magyarul: VÉLETLEN.KÖZÖTT) utasítás 25

2. Diszkrét eloszlás **33**
- 2.1. Valószínűségi változó 33
- 2.2. Eloszlás és súlyfüggvény 33
- 2.3. Eloszlásfüggvény 37
- 2.4. Jobb oldali eloszlásfüggvény 41
- 2.5. Medián 46
- 2.6. Kétdimenziós valószínűségi változó 48
- 2.7. Kétdimenziós eloszlás és súlyfüggvény 51
- 2.8. Módusz 51
- 2.9. Valószínűségek megadása súlyokkal 52
- 2.10. Konstans értékű valószínűségi változók 54

3. Folytonos egyenletes eloszlás **55**
- 3.1. Folytonos egyenletes eloszlás 55
- 3.2. RAND utasítás 62
- 3.3. Random számok tulajdonságai 63
- 3.4. Lineáris transzformációk 64

4. További fogalmak és szabályok **67**
- 4.1. További fogalmak eseményekre 67
- 4.2. További szabályok eseményekre 68
- 4.3. Eloszlás transzformációja 68
- 4.4. Síkbeli eloszlás vetületei 71
- 4.5. További szabályok valószínűségekre 74

5. Feltételes valószínűség és eloszlás 77
5.1. Feltételes valószínűség . . . 77
5.2. Szorzási szabályok . . . 79
5.3. Fa-gráf valószínűségekkel súlyozva . . . 82
5.4. További szorzási szabályok . . . 83
5.5. Teljes valószínűség formulája és Bayes-formula . . . 85
5.6. Feladatok vizsgálatokról . . . 88
5.7. Feladatok vizsgákról és bögrékről . . . 90
5.8. Elérhető-e az Örök Boldogság? *(Extra tananyag)* . . . 96
5.8.1. Amikor biztos, hogy elérjük . . . 96
5.8.2. Mikor érjük el? . . . 97
5.8.3. Amikor biztos, hogy nem érjük el . . . 101
5.9. Optimális taktika előre nem látható helyzetekben *(Extra tananyag)* . . . 103
5.9.1. Segédfeladat . . . 103
5.9.2. Szindbád és a háremhölgyek . . . 106
5.10. Feltételes eloszlás egy eseményen belül . . . 107
5.11. Feltételes eloszlások rendszere síkbeli eloszlás esetén . . . 109
5.11.1. Példák feltételes eloszlások meghatározására . . . 109
5.11.2. Általános összefüggések . . . 113
5.12. Óvakodjunk a félreérthető feladatoktól! . . . 114

6. Függetlenség 117
6.1. Események függetlensége . . . 117
6.2. Valószínűségi változók függetlensége . . . 122
6.3. Direkt szorzat . . . 122
6.3.1. Konvolúció . . . 123

7. Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt 125
7.1. Szabályos dobókockák esete . . . 125
7.2. Hamis dobókockák esete . . . 132
7.3. Különböző dobókockák esete . . . 140

8. Általános formulák kétdimenziós eloszlásokkal kapcsolatban 143
8.1. Összegzési szabály vetületeloszlásokkal kapcsolatban . . . 143
8.2. Szorzási szabály független koordináták esetére . . . 143
8.3. Osztási és szorzási szabályok feltételes súlyfüggvényekkel . . . 144
8.4. Eloszlások keverése . . . 144
8.5. Eloszlás transzformációja egy dimenzióban . . . 145
8.6. Eloszlás transzformációja két dimenzióból egy dimenzióba . . . 145
8.7. Példák . . . 146
8.8. Független valószínűségi változók összege – konvolúció . . . 150

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a könyvben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** e-mail-címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam.** Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki számítógépen olvassa a könyvet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t,
- behívja a PAINT programot,
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást,
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit ír oda,
- elmenti a JPG-fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám,
- a JPG-fájlokat csatolt fájlként elküldi a fent megadott címre.

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az *„Extra tananyag”*, *„Extra feladat”* címkékkel megjelölt anyagrészek és feladatok nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki ezekből az anyagrészekből és feladatokból

- szépen, okosan megtanul annyit, amennyit a tárgy aktuális honlapján kérünk, és
- szándékát a honlapon megadott e-mail-címen a megadott határidőig jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején írásban bemutatja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből felkészült, és
- utána a vizsgáztató által feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért közepes (3) vagy jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

Kedves Kollégák!

Itt hívom fel a figyelmüket arra, hogy egy oktatási félév során a könyv egyes fejezeteit a leírt sorrendtől eltérően a következő oldalon megadott ütemezésben is lehet tanítani, tanulni.

Ennek az ütemezésnek előnye, hogy a nehezebb, bonyolultabb folytonos eset nem tolódik a félév második felére. Azt tapasztaltam, hogy a hallgatóink is nagyobb érdeklődéssel fordulnak a folytonos modellek felé, hiszen a diszkrét esetről sokan már tanultak a középiskolában is.

Eredményes, örömteli, jó munkát kívánok kollégáimnak is, diákjainknak is!

2019. február 25.

Üdvözlettel,

Vetier András

	A hét témájának címe Fejezetek a tankönyvből
1. hét	**Diszkrét és folytonos egyenletes eloszlások** 1. rész: 1. Esemény, valószínűség 1. rész: 2. Diszkrét eloszlás 1. rész: 3. Folytonos egyenletes eloszlás
2. hét	**Példák nem egyenletes folytonos eloszlásokra** 3. rész: 1. Folytonos eloszlások 3. rész: 2. Folytonos eloszlások szemléltetése festékkel, pontfelhővel 3. rész: 3.1. Random szám négyzete, négyzetgyöke, reciproka 3. rész: 3.2. Összeg, szorzat, hányados – eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény 3. rész: 3.3. A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése 3. rész: 3.4. Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások
3. hét	**Feltételes valószínűség és függetlenség** 1. rész: 4. További fogalmak és szabályok 1. rész: 5. Feltételes valószínűség és eloszlás 1. rész: 6. Függetlenség
4. hét	**Monoton transzformációk; kétdimenziós folytonos eloszlások** 3. rész: 3.5. Monoton transzformációk 3. rész: 3.6. Folytonos szimuláció 4. rész: 1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók 4. rész: 2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás
5. hét	**Nevezetes diszkrét eloszlások** 2. rész: 1. Nevezetes eloszlások 2. rész: 2. Módusz megkeresése 2. rész: 3. Szimuláció
6. hét	**Béta eloszlások** 3. rész: 3.7. Béta eloszlások 4. rész: 3. Béta eloszlások két dimenzióban
7. hét	**Várható érték, variancia, szórás (– diszkrét eset)** 2. rész: 4. Tömegpont-rendszerek súlypontja és tehetetlenségi nyomatéka 2. rész: 5. Egydimenziós adatrendszerek 2. rész: 6. Valószínűségi változók és eloszlások várható értéke, varianciája, szórása 2. rész: 7. Nagy számok törvényei 2. rész: 8. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai
8. hét	**Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke, varianciája, szórása** 2. rész: 9. Nevezetes eloszlások várható értéke, varianciája, szórása – formulák 2. rész: 10. Nevezetes eloszlások várható értékei – bizonyítások 2. rész: 11. Binomiális eloszlással kapcsolatos levezetések

9. hét	**Várható érték, variancia, szórás (– folytonos eset);** **sok független tag összegének eloszlása** 3. rész: 4. Várható érték, variancia, szórás (– folytonos eset) 3. rész: 5. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai (– diszkrét és folytonos eset) 4. rész: 4. Kísérleti eredmények függvényének a várható értéke 4. rész: 5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára 1. rész: 7. Sok független tag összegének eloszlása harang alakot ölt
10. hét	**Nevezetes folytonos eloszlások** 3. rész: 6. Nevezetes folytonos eloszlások 3. rész: 7. Közelítések normális eloszlással
11. hét	**Feltételes eloszlás, várható érték, variancia, szórás** 1. rész: 8. Általános formulák kétdimenziós eloszlásokkal kapcsolatban 2. rész: 12. Feltételes várható érték, variancia, szórás 4. rész: 6. Vetület- és feltételes eloszlások
12. hét	**Eloszlások transzformációi** 3. rész: 8. Eloszlások transzformációi 4. rész: 7. Transzformáció síkról síkra 4. rész: 8. Lineáris transzformáció síkról síkra 4. rész: 9. Transzformáció síkról egyenesre
13. hét	**Regresszió** 4. rész: 10. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel
14. hét	**Kétdimenziós normális eloszlások** 4. rész: 11. Normális eloszlások a síkon

1. fejezet

Esemény, valószínűség

1.1. Kimenetelek

Véletlen jelenség: Adott körülmények között valami történik. Például két szabályos dobódobókockát szabályosan feldobunk.

Kísérlet: A jelenség önmagától vagy az én szándékom miatt lezajlik. Például korrekt módon gurítom a két dobókockát.

Megfigyelés: Megmondjuk, kijelentjük, hogy mi érdekel minket, mire figylünk oda. Például megfigyelhetjük két dobókocka kapcsán a dobott számok összegét vagy szorzatát, hányadosát, de megfigyelhetném azt is, hogy a dobókocka mennyi ideig gurul, hogy hol áll meg, stb.

Kimenetelek, más néven: **lehetséges kimenetelek, elemi események:** A megfigyelésünk lehetséges eredményei. Például két dobókockával dobva az összeg lehetséges eredményei: $2, 3, \ldots, 12$.

Eseménytér: Az összes lehetséges kimenetelek halmaza. Példánkban az eseménytér a 11 elemű $\{2, 3, \ldots, 12\}$ halmaz.

1.2. Esemény

Esemény: Állítás a jelenséggel kapcsolatban, ami minden kísérletnél

vagy IGAZ – másképpen mondva – BEKÖVETKEZIK,

vagy HAMIS – másképpen mondva – NEM KÖVETKEZIK BE.

Például az az állítás, hogy két kocka esetén *a dobott számok összege nagyobb, mint* 7, egy eseményt definiál.

Siker és kudarc: A bekövetkezést az esemény szempontjából SIKER-nek, a nem bekövetkezést KUDARC-nak is szokás hívni.

Események egyenlősége: Egy eseményt általában többféleképpen is körül lehet írni. A két állítás, hogy két dobókockával

az összeg 10 *vagy* 11 *vagy* 12, illetve

az összeg kilencnél nagyobb,

másképpen hangzanak, de ugyanazt jelentik. Ez a két állítás egy és ugyanazon eseménynek két különböző megfogalmazása. Két eseményt – különböző megfogalmazásuk ellenére is – **egyenlőek**nek tekintünk, ha mindig egyidejűleg kövekezhetnek be: akkor és csak akkor következik be az egyik, ha a másik is bekövetkezik.

Kísérletsorozat: Több (egymásra semmi hatást kifejtő) kísérletet hajtunk végre. Például a két kockát, vagyis a kockapárt – mondjuk – 10-szer szabályosan elgurítom.

1.3. Valószínűség

Gyakoriság: Ahányszor bekövetkezik az esemény az elvégzett valahány kísérlet során. Másképpen mondva a gyakoriság a sikeres kísérletek számát jelenti.

Relatív gyakoriság: Gyakoriság (=sikerek száma) osztva az összes kísérletek számával. Például ha 10 kísérletből 4-szer következik be a szóban forgó esemény, akkor az elvégzett kísérletsorozatban az esemény relatív gyakorisága $0{,}4$. A relatív gyakoriság azt mutatja, hogy az összes kísérlet hányad részében következett be az esemény. Van aki ezt az arányt százalékokban szereti kifejezni, és azért a $0{,}4$ helyett 40%-ot mond, ami teljesen rendben is van, hiszen a 40% igazából $0{,}4$-et jelent.

Valószínűség: Egy adott eseményt vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy sok kísérlet esetén a relatív gyakoriság közel van egy olyan értékhez, ami nem függ a véletlentől, hanem az eseményre jellemző. Ezt az értéket nevezzük az esemény valószínűségének. A relatív gyakoriság kevés kísérlet esetén erősen eltérhet a valószínűségtől, de a kísérletszám növekedtével egyre közelebb kerül hozzá.

Egy esemény valószínűségét általában úgy jelöljük, hogy egy P betű mögé zárójelek közé írjuk az eseményt definiáló állítást szavakkal vagy jelekkel, vagy bármi módon, ami az adott környezetben világosan utal az eseményre. Például annak a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával 4-nél nagyobb számot dobunk, így jelölhetjük:

- $\mathrm{P}($négynél nagyobbat dobunk$)$,
- $\mathrm{P}($ötöst vagy hatost dobunk$)$,
- $\mathrm{P}(5, 6)$,
- $\mathrm{P}(X > 4)$, ahol X jelenti a kockával dobott számot,
- $\mathrm{P}(A)$, ahol A jelenti azt az eseményt, hogy a kockával ötöst vagy hatost dobunk,
- stb.

A valószínűségszámítás megtanít arra, hogy a valószínűségeket kísérletek elvégzése nélkül, elméleti módszerekkel meghatározzuk.

1.4. Műveletek eseményekkel

Események – halmazok: Az eseményeket az eseménytér (mint „alaphalmaz”) részhalmazaival reprezentáljuk. Minden egyes esemény megfelel annak a halmaznak, mely a (szóban forgó eseményre nézve) kedvező kimenetelekből áll.

Biztos esemény: Mindig bekövetkezik. Az alaphalmazzal reprezentáljuk, amit S-sel jelölünk. Más jelölések: U, I, Ω.

Lehetetlen esemény: Sohasem következik be. Az üres halmazzal reprezentáljuk. A $\emptyset$ jellel jelöljük.

Ellentett esemény – másképpen mondva – **komplementer esemény, „tagadás", „nem"**: Pontosan akkor következik be, amikor az eredeti esemény nem. Felülvonással jelöljük, pl.: $\overline{A}$.

Események „és" kapcsolata – másképpen mondva – **metszete, közös része, szorzata**: A szóban forgó események mindegyike bekövetkezik. Jelölések:

Két esemény metszete: $A \cap B$.

Véges sok $A_1, A_2, \ldots, A_n$ esemény metszete: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

Végtelen sok $A_1, A_2, \ldots$ esemény metszete: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots$

Kizáró események: A szóban forgó események közül legfeljebb egy következhet be. Bármely kettő kizárja egymást, egyidejű bekövetkezésük lehetetlen.

Két eseményre: $A \cap B = \emptyset$.

Több (véges vagy végtelen sok) eseményre: ha $i \neq j$, akkor $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Események „vagy" kapcsolata – másképpen mondva – **uniója, egyesítése, összege**: A szóban forgó események közül legalább egy bekövetkezik. Jelölések:

Két esemény uniója: $A \cup B$.

Véges sok $A_1, A_2, \ldots, A_n$ esemény uniója: $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$.

Végtelen sok $A_1, A_2, \ldots$ esemény uniója: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

Kizáró események „vagy" kapcsolata – másképpen mondva – **uniója, egyesítése, összege**: A szóban forgó események közül pontosan egy bekövetkezik. A jelölések általában nem különböznek a korábbi jelölésektől:

Két kizáró esemény uniója: $A \cup B$.

Véges sok kizáró esemény uniója: $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$.

Végtelen sok kizáró esemény uniója: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

Kizáró eseményekre bizonyos szabályok egyszerűbbek az általános szabályoknál. Ezért egyes könyvek a * jellel hívják fel a figyelmet arra a tényre, hogy a műveletben szereplő események kizáróak:

Két kizáró esemény uniója: $A \cup^* B$.

Véges sok kizáró esemény uniója: $A_1 \cup^* A_2 \ldots \cup^* A_n$.

Végtelen sok kizáró esemény uniója: $A_1 \cup^* A_2 \cup^* \ldots$

„Maga után vonja": Azt mondjuk, hogy a B esemény maga után vonja az A eseményt, ha teljesül az, hogy amikor a B esemény bekövetkezik, akkor szükségképpen az A esemény is bekövetkezik, azaz a B halmaz része az A halmaznak. Jelölés: $B \subset A$ vagy $A \supset B$.

Események különbsége: Ha A, B tetszőleges események, akkor A mínusz B-nek (avagy A és B különbségének) nevezzük, és $A \backslash B$-vel jelöljük azt az eseményt, ami akkor következik be, ha A bekövetkezik, de B nem következik be. A különbség jelölése: $A \backslash B$. Tehát $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.

1.5. A valószínűség alapvető tulajdonságai

Ebben az alfejezetben a valószínűség alapvető tulajdonságait soroljuk fel, melyek – a relatív gyakoriság ugyanilyen tulajdonságai alalpján – kézenfekvőek. Fontos, hogy az olvasó ne csak memorizálja ezeket a tulajdonságokat, hanem értse, lássa, hogy *a valószínűségnek ezek a tulajdonságai a relatív gyakoriság (triviális!) hasonló tulajdonságai miatt igazak*. Néhány bonyolultabb szabályt egy későbbi fejezetben sorolunk fel. Megjegyezzük, hogy az első, a második és az ötödik tulajdonságból logikai úton le lehet vezetni a valószínűség összes többi tuldajdonságát, ezért a valószínűségszámítás axiomatikus felépítésekor ezek szolgálnak axiómákként. Ebben a könyvben nem célunk az axiomatikus tárgyalás. A technikásabb bizonyításokat is leegyszerűsítve, a szemléletre támaszkodva mutatjuk majd be. Fő célunk az elmélet és a valóság kapcsolatátának világos tálalása.

1. **Minden esemény valószínűsége 0 és 1 közé esik:**

$$0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1.$$

2. **A biztos esemény valószínűsége 1:**

$$\mathrm{P}(S) = 1.$$

3. **A lehetetlen esemény valószínűsége 0:**

$$\mathrm{P}(\emptyset) = 0.$$

4. **Komplementer szabály**:
   Minden A eseményre igaz, hogy

$$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1, \qquad \mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}), \qquad \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \mathrm{P}(A).$$

5. **Összegzési szabály *kizáró* eseményekre:**
   Ha A, B kizáró események, és $C = A \cup B$, akkor

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

   Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ véges sok kizáró esemény, és $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, akkor

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n).$$

   Ha $A_1, A_2, A_3, \ldots$ végtelen sok kizáró esemény, és $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$, akkor

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) + \ldots$$

6. **Általános összegzési szabály** (még csak) **két eseményre**:
   Ha A, B tetszőleges események, akkor

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

7. **Általános kivonási szabály**:
   Ha a A, B tetszőleges események, akkor

$$\mathrm{P}(\,A \backslash B\,) = \mathrm{P}(\,A\,) - \mathrm{P}(\,A \cap B\,).$$

8. **Speciális kivonási szabály**:
   Ha a B esemény maga után vonja az A eseményt, vagyis $B \subseteq A$, akkor

$$\mathrm{P}(\,A \backslash B\,) = \mathrm{P}(\,A\,) - \mathrm{P}(\,B\,).$$

Feladat: Páros vagy páratlan? Egy érmét dobálunk az első fejig. Megfigyeljük az ehhez szükséges dobások számát. Mi a valószínűsége annak, hogy az ehhez szükséges dobások száma páros szám?

Megoldás: A lehetséges kimenetelek: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$, *„soha”*, ahol a *„soha”* akkor következik be, ha mindig csak írást dobunk, vagyis sohasem dobunk fejet. Az alábbi valószínűségek triviálisak:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\,\text{az első fej a 2. dobásra adódik}\,) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4},\\
&\mathrm{P}(\,\text{az első fej a 4. dobásra adódik}\,) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16},\\
&\mathrm{P}(\,\text{az első fej a 6. dobásra adódik}\,) = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ezekből a feladat kérdésére a válasz összegzéssel adódik:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\,\text{az első fej eléréséhez páros sok dobás kell}\,) =\\
&= \mathrm{P}(\,\text{az első fej a 2. dobásra adódik}\,) +\\
&+ \mathrm{P}(\,\text{az első fej a 4. dobásra adódik}\,) +\\
&+ \mathrm{P}(\,\text{az első fej a 6. dobásra adódik}\,) +\\
&\vdots\\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Az utolsó sorban, a végtelen sor összegzésénél felhasználtuk a jól ismert tényt, hogy egy végtelen mértani sor összegére igaz:

$$\text{összeg} = \frac{\text{első tag}}{1 - \text{kvóciens}}\,.$$