

FARAGÓ ISTVÁN – HORVÁTH RÓBERT

NUMERIKUS MÓDSZEREK

2013

Ismertető
Tartalomjegyzék
Pályázati támogatás
Gondozó

Szakmai vezető
Lektor
Technikai szerkesztő
Copyright

Az Olvasó most egy egyetemi jegyzetet tart a kezében, vagy néz a számítógépe képernyőjén. E jegyzetet a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen illetve az Eötvös Loránd Tudományegyetemen tartott numerikus módszerek kurzusainkhoz írtuk. Az írás során mindvégig azt vettük figyelembe, hogy a jegyzet segítségével hallgatóink alapos ismereteket tudjanak elsajátítani a tárgy témájában és egyben eredményesebben tudjanak felkészülni a vizsgákra.

A jegyzet elején összefoglaljuk a szükséges előismereteket. Ezután a matematikai modellalkotással foglalkozunk, részletesen kitérve a számítógépes számábrázolásra és az ebből eredő hibákra. Ezután a klasszikus numerikus analízis egyes fejezeteit vesszük sorra: numerikus lineáris algebra, polinominterpoláció, numerikus deriválás és integrálás, közönséges differenciálegyenletek kezdeti- és peremérték-feladatai. A jegyzetet a parciális differenciálegyenletek véges differenciás megoldásainak bemutatásával zárjuk.

A jegyzetbe nem akartunk több dolgot belezsúfolni, mint amiről egy két féléves kurzus során az előadásokon is szó lehet, de igyekeztünk azért az érdeklődő hallgatóknak is kitekintést nyújtani az előadások anyagán túlmutató elméletek felvillantásával vagy az ezeket tárgyaló irodalom megadásával. Mivel ez a jegyzet elektronikus formában lesz elérhető, így kihasználtuk azokat a lehetőségeket is, amiket az elektronikus forma megenged. Így számos helyen megadtunk internet-hivatkozásokat valamilyen szemléltető programhoz, bővebb leíráshoz vagy életrajzhoz.

Kulcsszavak: numerikus módszerek, numerikus lineáris algebra, numerikus deriválás és integrálás, interpoláció, differenciálegyenletek numerikus megoldása

Támogatás:

Készülte TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0027 számú, a „ Természettudományos (matematika és fizika) képzés a műszaki és informatikai felsőoktatásban” című projekt keretében.



Készült:

a BME TTK Matematika Intézet gondozásában

Szakmai felelős vezető:

Ferenczi Miklós

Lektorálta:

Havasi Ágnes


Az elektronikus kiadást előkészítette:

Horváth Róbert

Címlap grafikai terve:

Csépány Gergely László, Tóth Norbert

Copyright: 2011–2016, Faragó István, ELTE, Horváth Róbert, BME

„A  terminusai: A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.”

Második, javított kiadás, 2013

Tartalomjegyzék

1. Előismeretek	9
1.1. Vektorterek	9
1.1.1. Valós és komplex vektorterek	9
1.1.2. Normált terek	11
1.1.3. Euklideszi terek	18
1.2. Mátrixok	20
1.2.1. Mátrixok sajátértékei és sajátvektorai	22
1.2.2. Diagonalizálhatóság	25
1.2.3. Normák és sajátértékek	28
1.2.4. M-mátrixok	31
1.3. Sorozatok és függvények konvergenciájának jellemzése	33
1.3.1. Sorozatok konvergenciasebessége	33
1.3.2. Függvények konvergenciavizsgálata	36
1.4. A MATLAB programcsomag	39
1.5. A fejezettel kapcsolatos MATLAB parancsok	40
1.6. Feladatok	42
2. Modellalkotás és hibaforrásai	45
2.1. Modellalkotás	45
2.2. A modellalkotás hibaforrásai	46
2.3. A hiba mérése	48
2.4. Feladatok kondicionáltsága	49
2.5. Gépi számábrázolás és következményei	51
2.6. A fejezettel kapcsolatos MATLAB parancsok	56
2.7. Feladatok	56
3. Lineáris egyenletrendszerek megoldása	59
3.1. Lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága	59
3.2. Lineáris egyenletrendszerek kondicionáltsága	60
3.3. Gauss-módszer	63
3.4. LU-felbontás	69
3.5. Főelemkiválasztás, általános LU-felbontás, Cholesky-felbontás	71
3.5.1. Főelemkiválasztás	71
3.5.2. Általános LU-felbontás	72
3.5.3. Cholesky-felbontás	74
3.6. Lineáris egyenletrendszerek klasszikus iterációs megoldása	76
3.6.1. Jacobi-iteráció	78
3.6.2. Gauss–Seidel-iteráció	78
3.6.3. Relaxációs módszerek	80
3.6.4. Iterációs módszerek konvergenciája	82
3.6.5. Leállási feltételek	85
3.7. Variációs módszerek	86

3.7.1.	Gradiens-módszer	88
3.7.2.	Konjugált gradiens-módszer	90
3.8.	A QR-felbontás	95
3.8.1.	QR-felbontás Householder-tükrözésekkel	96
3.8.2.	QR-felbontás Givens-forgatásokkal	98
3.9.	Túlhatározott rendszerek megoldása	100
	Megoldás a normálegyenlet segítségével	101
	Megoldás a QR-felbontás segítségével	102
3.10.	Lineáris egyenletrendszerek megoldása a MATLAB-ban	102
3.11.	Feladatok	105
4.	Sajátérték-feladatok numerikus megoldása	111
4.1.	Sajátérték-feladatok kondicionáltsága	111
4.2.	A sajátértékeket egyenként közelítő eljárások	112
4.2.1.	A hatványmódszer	114
4.2.2.	Inverz iteráció	116
4.2.3.	Rayleigh-hányados iteráció	117
4.2.4.	Deflációs eljárások	118
	Householder-defláció	118
	Rangdefláció	118
	Blokk háromszögmátrix defláció	119
4.3.	A sajátértékeket egyszerre közelítő eljárások	119
4.3.1.	A Jacobi-módszer	119
4.3.2.	QR-iteráció	122
4.4.	Sajátértékszámítás a MATLAB-ban	125
4.5.	Feladatok	127
5.	Nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldása	129
5.1.	Nemlineáris egyenletek	129
5.1.1.	A gyökök elkülönítése	129
5.1.2.	Nemlineáris egyenletek megoldásának kondicionáltsága	131
5.1.3.	Geometriai módszerek	132
	Intervallumfelezési módszer	132
	Húrmódszer	133
	Szelőmódszer	137
	Newton-módszer	140
5.2.	Fixpont-iterációk	143
5.2.1.	Aitken-gyorsítás	145
5.3.	Mintafeladat	146
5.4.	Nemlineáris egyenletrendszerek megoldása	149
5.5.	Feladatok	150
6.	Interpolációs feladatok	153
6.1.	Globális polinominterpoláció	153
6.1.1.	Az interpolációs polinom Lagrange-féle előállítás	154
6.1.2.	A baricentrikus interpolációs formula	157
6.1.3.	Az interpolációs polinom előállítás Newton-féle osztott differenciákkal	158
6.2.	Az interpolációs hiba	161
6.3.	Interpoláció Csebisev-alappontokon	165
6.4.	Hermite-interpoláció	169

6.5.	Szakaszonként polinomiális interpoláció	171
6.5.1.	Szakaszonként lineáris interpoláció	171
6.5.2.	Szakaszonként kvadratikus interpoláció	172
6.5.3.	Szakaszonként harmadfokú interpoláció	172
6.6.	Trigonometrikus interpoláció	177
6.7.	Gyors Fourier-transzformáció	181
6.8.	Közelítés legkisebb négyzetek értelemben	184
6.9.	Interpolációs feladatok megoldása a MATLAB-ban	187
6.10.	Feladatok	189
7.	Numerikus deriválás	193
7.1.	A numerikus deriválás alapfeladata	193
7.2.	Az első derivált közelítése	194
7.3.	A második derivált közelítése	195
7.4.	A deriváltak másfajta közelítései	196
7.5.	Lépéstávolság-dilemma	196
7.6.	Feladatok	197
8.	Numerikus integrálás	199
8.1.	A numerikus integrálás alapfeladata	199
8.2.	Newton–Cotes-féle kvadratúraformulák	201
8.3.	Összetett kvadratúraformulák	206
8.3.1.	Összetett trapézformula	207
8.3.2.	Összetett érintőformula	209
8.3.3.	Összetett Simpson-formula	211
8.4.	Romberg-módszer	213
8.5.	Gauss-kvadratúra	214
8.6.	Numerikus integrálási eljárások a MATLAB-ban	217
8.7.	Feladatok	218
9.	A kezdetiérték-feladatok numerikus módszerei	221
9.1.	Bevezetés	221
9.2.	A közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték-feladata	221
9.3.	Egylépéses módszerek	224
9.3.1.	Taylor-sorba fejtéses módszer	224
9.3.2.	Néhány nevezetes egylépéses módszer	229
	Az explicit Euler-módszer	230
	Az implicit Euler-módszer	235
	A Crank–Nicolson-módszer	236
9.3.3.	Az általános alakú egylépéses módszerek alapfogalmai és pontbeli konvergenciája	239
	Az egylépéses módszerek pontbeli konvergenciája	240
9.4.	A Runge–Kutta típusú módszerek	243
9.4.1.	A másodrendű Runge–Kutta típusú módszerek	244
9.4.2.	A magasabb rendű Runge–Kutta típusú módszerek	247
9.4.3.	Az implicit Runge–Kutta típusú módszerek	251
9.4.4.	Az egylépéses módszerek egy tesztfeladaton	254
9.5.	A többlépéses módszerek	256
9.5.1.	A lineáris többlépéses módszer általános alakja és rendje	257
9.5.2.	A kezdeti értékek megválasztása és a módszer konvergenciája	261

9.5.3.	Adams-típusú módszerek	263
9.5.4.	Retrográd differencia módszerek	265
9.6.	A lineáris és a merev rendszerek numerikus megoldása	267
9.7.	A kezdetiérték-feladatok numerikus megoldása MATLAB segítségével	270
9.8.	Feladatok	277
10.A	peremérték-feladatok numerikus módszerei	283
10.1.	Bevezetés	283
10.2.	Peremértékfeladatok megoldása véges differenciákkal	285
10.2.1.	A véges differenciás séma felépítése	285
10.2.2.	A véges differenciás séma megoldhatósága és tulajdonságai	286
10.2.3.	A véges differenciás módszer konvergenciája	287
10.2.4.	Összefoglalás	289
10.3.	A közönséges differenciálegyenletek peremérték-feladatának megoldhatósága	290
10.3.1.	A lineáris peremérték-feladat megoldhatósága	292
10.4.	A peremérték-feladat numerikus megoldása Cauchy-feladatra való visszavezetéssel	294
10.4.1.	A belövéses módszer	295
10.4.2.	Lineáris peremérték-feladatok numerikus megoldása	298
10.5.	A peremérték-feladat numerikus megoldása véges differenciák módszerével	300
10.5.1.	Véges differenciás approximáció	300
10.5.2.	Az általános alakú peremérték-feladat megoldása a véges differenciák módszerével	301
10.5.3.	A lineáris peremérték-feladatok approximációja a véges differenciák módszerével	303
10.5.4.	A lineáris peremérték-feladatok numerikus megoldásának általános vizsgálata	309
10.5.5.	A lineáris peremérték-feladatok M-mátrixokkal	315
10.5.6.	A diszkrét maximumelv és következményei	317
10.6.	A peremérték-feladatok numerikus megoldása MATLAB segítségével	324
10.6.1.	A modellfeladat: stacionárius hőeloszlás homogén vezetékben	324
10.6.2.	A tesztfeladat numerikus megoldása MATLAB segítségével	326
10.7.	Feladatok	334
11.A	parciális differenciálegyenletek numerikus módszerei	341
11.1.	A parciális differenciálegyenletek alapfogalmai	341
11.2.	Lineáris, másodrendű, elliptikus parciális differenciálegyenletek	344
11.2.1.	A Laplace-egyenlet analitikus megoldása egységnyezeten	344
11.2.2.	Elliptikus egyenletek közelítő megoldása véges differenciák módszerével	348
11.2.3.	Általános kitérés és az alaptétel	350
11.2.4.	Az elliptikus feladatok numerikus közelítésének konvergenciája	352
11.2.5.	A numerikus módszer realizálásának algoritmusai	354
11.3.	Lineáris, másodrendű, parabolikus parciális differenciálegyenletek	356
11.3.1.	Az egydimenziós hővezetési egyenlet analitikus megoldása	356
11.3.2.	A hővezetési feladat numerikus megoldása véges differenciák módszerével	358
11.3.3.	A véges differenciás közelítés konvergenciája	361
11.3.4.	A numerikus módszer realizálásának algoritmusai	363
11.3.5.	Egy másik véges differenciás séma és vizsgálata	365
11.3.6.	Általánosítás és magasabb rendű módszerek	369
11.4.	A parciális differenciálegyenletek numerikus megoldása MATLAB segítségével	376
11.4.1.	A Poisson-egyenlet megoldása első (Dirichlet-féle) peremfeltétellel	376

11.4.2. A hővezetési egyenlet megoldása véges differenciák módszerével	382
11.5. Feladatok	388
Tárgymutató	395
Irodalomjegyzék	397