Függelék:
A centrális erők és a bolygópályák

Lenny görnyedten bandzsít bele a távcső nézőkéjébe. Korábban még sohase csinált ilyet. Nézi a Szaturnusz gyűrűit és fütyörészik a gyönyörűségtől.

– Láttad már a gyűrűket, George?

– Ühüm, persze – bólogat George.

Lenny felegyenesedik és faggatni kezdi a barátját.

– Honnan kerültek ezek oda?

– Ahonnan a Föld is a Nap köré – válaszolja George.

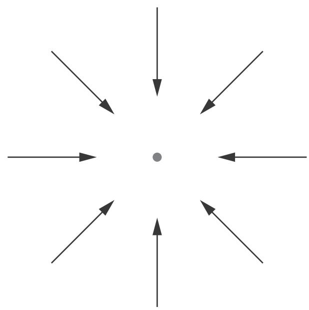
Lenny bólogat.

– Mitől kering ez az egész?

A centrális erő és a gravitáció

A centrális erőtérben az erő a centrum felé mutat – vagyis a tér egy pontja felé (ld. az 1. ábrát). De még az is igaz rá, hogy a centrumtól adott távolságra az erő nagysága ugyanakkora minden irányban.

Matematikai szempontból a centrális erőkben nincs semmi különös azon kívül, hogy van egy nyilvánvaló szimmetriájuk, a



1. ábra: A centrális erő

forgási szimmetria. A fizikában és a fizika történetében azonban egészen különleges a szerepük. Az első feladat, amelyet Newton megoldott – a bolygómozgás problémája – a centrális erővel kapcsolatos. Ugyancsak centrális erőtér probléma az elektron keringése a hidrogénatom magja körül. Amikor egy egyszerű molekula két atomja egymás körül kering, ez a feladat is visszavezethető centrális erőre, amelynek centruma a tömegközépponttal esik egybe. Mivel időhiány miatt erre a témára az előadásokban nem sikerült sort keríteni, ebben a kiegészítésben foglalkozunk vele.

A határozottság kedvéért a Föld keringésére fogunk koncentrálni a nála sokkal nagyobb tömegű Nap körül. A Newton-törvények szerint a Nap által a Földre gyakorolt erő egyenlő és ellentétes irányú a Föld által a Napra gyakorolt erővel. Mi több, mindkét erő iránya a két égitestet összekötő egyenessel esik egybe. Mivel a Nap tömege mellett a Föld tömege szinte elhanyagolható, ezért a Nap mozgásától eltekinthetünk, feltehetjük, hogy a térben fix helyzetű. A koordináta-rendszerünket célszerű úgy megválasztanunk, hogy az $x = y = z = 0$ origó a Nap középpontjával essen egybe. A Föld azonban mozog valamilyen pályán az origó körül. Jelöljük a Föld helyzetvektorát $\vec{r}$-rel, amelynek a három komponense legyen x, y és z. Mivel a Nap az origóban nyugszik, a Földre ható erő az origó felé mutat, ahogy az 1. ábrán látható. Az erő nagysága pedig csak az origótól számított r távolságtól függ. Az ilyen tulajdonságú erőket – az origó felé mutatnak és a nagyságuk csak a távolságtól függ – *centrális erőknek* hívjuk.

Idézzük fel az 1. közjátékban bevezetett

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

egységvektort. A centrális erőt általános formában az

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}$$

képlet definiálja, amelyben $f(r)$ az erő két tulajdonságát tartalmazza. Egyrészt az $f(r)$ abszolút értéke az r távolságban lévő Földre ható erő nagyságával egyenlő, másrészt az $f(r)$ előjele határozza meg, hogy az erő a Nap irányába vagy az azzal ellentétes irányba mutat – azaz vonzó vagy taszító. Amikor $f(r)$ pozitív, az erő a Naptól elfele mutat (taszító), amikor pedig negatív, akkor a Nap felé irányul (vonzó).

A Nap és a Föld között természetesen a gravitációs erő hat. Newton általános tömegvonzási törvénye szerint az m_1 és az m_2 tömegű testek között ható gravitációs erő a következő két alaptulajdonsággal rendelkezik:

N1: Az erő vonzó és arányos a tömegek, valamint egy bizonyos G konstans szorzatával. A G-t gravitációs állandónak hívjuk, és az értéke $G \approx 6.673\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$.

N2: Az erő fordítottan arányos a tömegek közötti távolsággal.

Képletben kifejezve: Az erő vonzó és a nagysága $\frac{Gm_1m_2}{r^2}$-tel egyenlő. Az $f(r)$ függvény tehát a következő:

$$f(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2},$$

vagyis

$$\vec{F}_{grav} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}.$$

A Föld–Nap-rendszerre korlátozódva a Nap tömegét M-mel, a Földét m-mel fogjuk jelölni. A Földre ható erő ezért

$$\vec{F}_{grav} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}.$$

A Föld mozgásegyenlete természetesen a szokásos $F = ma$, ami a gravitációs esetben a következő:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}.$$

Van ennek a képletnek egy érdekes tulajdonsága: A Föld tömegével lehet a két oldalt egyszerűsíteni. A mozgásegyenlet tehát független a Föld tömegétől:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}. \tag{1}$$

A Földétől nagyon eltérő tömegű objektum, például egy űrszonda, ugyanolyan pályán keringhet a Nap körül, mint a Föld. De ennek az a feltétele, hogy a Nap tömege legyen sokkal nagyobb a Föld vagy a szonda tömegénél, és ezért a mozgásától el lehessen tekinteni.

A gravitációs potenciális energia

A gravitációs erőt lehet potenciális energiából származtatni. Emlékeztetünk rá, hogy egy adott potenciális energiához tartozó erő a potenciális energia negatív gradiensével egyenlő:

$$F = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V.$$

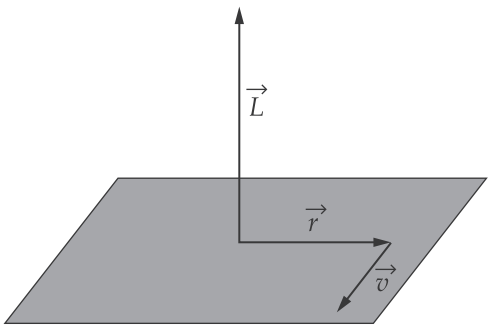
A gravitációs erőt leíró V-t nem túl nehéz kitalálni. Először is, mivel az erő arányos a GMm konstanssal, ennek a tényezőnek a potenciális energiában is szerepelnie kell. Mivel továbbá az erő csak az r távolságtól függ, várható, hogy a $V(r)$ potenciális energia is egyedül az r függvénye. Végül az erő, amely a $V(r)$ differenciálásával kapható meg, $1/r^2$-tel arányos, ily módon a potenciális energiának $1/r$-rel kell arányosnak lennie. Mindent összevéve a

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

függvénnyel próbálkozva kiderül, hogy ez a helyes formula.

A Föld egy síkban mozog

Korábban már említettük, hogy a centrális erőnek van egy szimmetriája, az origó körüli forgási szimmetria. A 7. előadásban láttuk, hogy ennek a szimmetriának a következtében az impulzusmomentum megmarad. Tegyük fel, hogy egy adott pillanatban a Föld helyzetvektora $\vec{r}$, sebessége pedig $\vec{v}$. Ezt a két vektort, valamint a Nap középpontját tartalmazó sík a földpálya síkja az adott pillanatban.



2. ábra: Az $\vec{L}$ impulzusmomentum, az $\vec{r}$ helyzetvektor és a $\vec{v}$ sebességvektor kölcsönös helyzete

Az $\vec{L}$ impulzusmomentum az $\vec{r} \times \vec{v}$ vektorszorzattal arányos, ezért merőleges mind az $\vec{r}$, mind a $\vec{v}$ vektorra (ld. a 2. ábrát), vagyis merőleges a pályasíkra. Ennek az észrevételnek a súlya akkor válik igazán világossá, amikor az impulzusmomentum megmaradásával kombináljuk, amely szerint az $\vec{L}$ időben állandó. Ennek egyenes következménye, hogy a pályasík is változatlan marad. Egyszerűbben szólva, a földpálya és a Nap folyamatosan ugyanabban a változatlan helyzetű síkban fekszik. Ennek ismeretében célszerű a koordinátatengelyeket úgy választani, hogy a pályasík essen egybe az x, y síkkal. Az eredetileg háromdimenziós feladat így kétdimenzióssá válik, mert a z koordináta semmilyen szerepet sem játszik benne.

Polárkoordináták

Dolgozhatnánk az x, y Descartes-koordinátákkal, de a centrális erővel kapcsolatos feladatokat sokkal könnyebb az r, θ polárkoordinátákban megoldani. A kétfajta koordináta kapcsolata a következő:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}.$$

Polarkoordinátákban a Föld mozgási energiájára az elég egyszerű

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) \tag{2}$$

kifejezést kapjuk. A potenciális energia még egyszerűbb, mert egyáltalán nincs benne θ:

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}. \tag{3}$$

A mozgásegyenletek

Mint általában, most is legegyszerűbben a Lagrange-módszerrel lehet a mozgásegyenleteket felírni. Emlékeztetünk rá, hogy a Lagrange-függvény a mozgási és a potenciális energia különbsége: $L = T - V$. A (2) és a (3) alapján polárkoordinátákban

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{GMm}{r}, \tag{4}$$

a mozgásegyenletek pedig a következők:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}.$$

Az L-et ide behelyettesítve kapjuk meg explicit formában a mozgásegyenleteket:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2}, \tag{5}$$

valamint

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0. \tag{6}$$

Ez utóbbi egyenlet megmaradási törvényt fejez ki; mint várható, az impulzusmomentum megmaradását. (Egészen pontosan az impulzusmomentum z komponensének a megmaradását.) Az impulzusmomentumot L-lel szokás jelölni, de hogy a Lagrangefüggvénnyel ne lehessen összetéveszteni, inkább a p_θ jelölést fogjuk használni. Ha ismerjük p_θ értékét egy adott pillanatban akkor minden pillanatban ismerjük. A (6) megoldását ezért írhatjuk

$$mr^2\dot{\theta} = p_\theta \tag{7}$$

alakban, amelyben p_θ-t ismert konstansnak tekinthetjük.

A szögsebességet most kifejezzük a Nap–Föld-távolságon keresztül. Ehhez csak meg kell oldani (7)-t $\dot{\theta}$-ra:

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}. \tag{8}$$

Nemsokára visszatérünk ehhez a képlethez, de először foglalkozzunk az r-re vonatkozó

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r^2} \tag{9}$$

mozgásegyenlettel. Ebben a szögsebesség szerepel, de (8) alapján ezt helyettesíthetjük az impulzusmomentummal:

$$m\ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2}. \tag{10}$$

Ennek az r-re vonatkozó egyenletnek van egy érdekes interpretációja: Olyan, mint valamilyen egyedi r koordinátára vonatkozó mozgásegyenlet egy összetett

$$F_{\text{effektív}} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{GMm}{r^2} \tag{11}$$

„effektív” erő hatása alatt. A $-\frac{GMm}{r^2}$ tag maga a gravitációs erő, de az első tag megjelenése elég váratlan. Valójában ez nem más, mint a fiktív centrifugális erő, amely minden olyan részecskére hat, amelyiknek van impulzusmomentuma az origóhoz viszonyítva[22].

Kifejezetten hasznos felfogásmód az, ha a (10) egyenletre úgy nézünk rá, mintha egy valóságos egydimenziós mozgás egyenlete lenne a gravitációs és a centrifugális erő adott kombinációjának jelenlétében. A különböző impulzusmomentumokhoz persze különböző p_θ tartozik, de mivel p_θ megmarad, rögzített számnak tekinthető.

Az effektív erőhöz meg lehet konstruálni a megfelelő

$$V_{\text{effektív}} = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \tag{12}$$

effektív potenciális energia függvényt, amely számot ad mind a gravitációról, mind pedig a centrifugális erőről. Könnyen igazolható, hogy

$$F_{\text{effektív}} = -\frac{dV_{\text{effektív}}}{dr}.$$

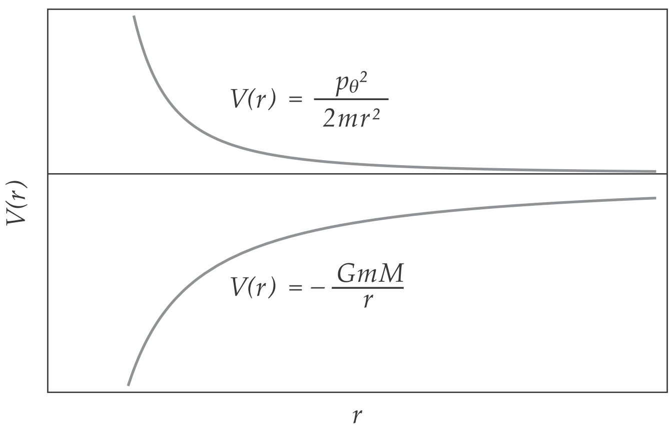
Gyakorlatilag az r mozgása felfogható egyetlen részecske mozgásaként, amelynek kinetikus energiája $\frac{m\dot{r}^2}{2}$, potenciális energiája $V_{\text{effektív}}$, a Lagrange-függvénye pedig

$$L_{\text{effektív}} = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{GMm}{r}. \tag{13}$$

[22]Ez némileg félrevezető magyarázat, mert centrifugális erő csak forgó koordináta-rendszerben hat (ld. a 6. előadást). A (11) első tagja formailag egyezik meg a centrifugális erővel. – *(A fordító)*

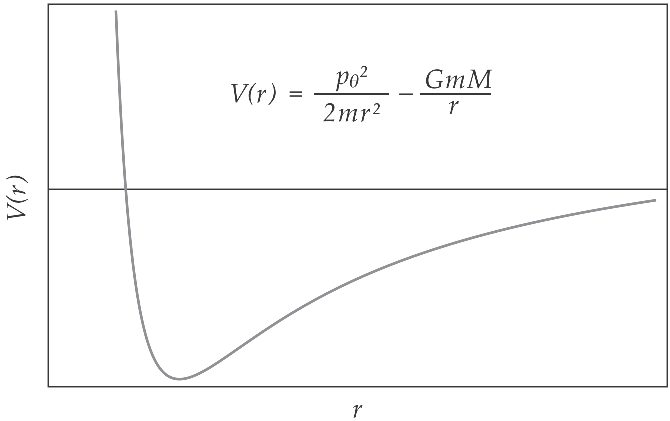
Effektív potenciális energia diagrammok

A potenciális energia függvényalakjának felrajzolása sokat segíthet a tájékozódásban. Az egyensúlyi pontokat például (amelyekben a rendszer nyugodhat), azonosíthatjuk a potenciális energia stacionér pontjaival (minimumaival, maximumaival). Ez érvényes a centrális erő hatására végbemenő mozgásra is, csak ekkor az effektív potenciált kell alapul venni. Ábrázoljuk először a $V_{\text{effektív}}$ tagjait külön-külön, ahogy a 3. ábrán látható. Vegyük észre, hogy a két tag különböző előjelű, a centrifugális tag pozitív, a gravitációs pedig negatív. Ez azzal kapcsolatos, hogy a gravitációs erő vonzó, a centrifugális erő viszont elfele taszítja a részecskét az origótól.



3. ábra: A potenciális energia centrifugális és gravitációs járulékának görbéi

Az origó közelében a centrifugális tag a jelentősebb, de nagy r-nél (abszolút értékben) a gravitációs tag a nagyobb. Amikor összeadjuk őket, a $V_{\text{effektív}}$ 4. ábrán felrajzolt görbéjét kapjuk.



4. ábra: Az effektív potenciális energia görbéje

Figyeljük meg, hogy ennek a kombinált görbének van egy minimuma. Ez elég hihetetlenmek tűnik, hiszen első látásra azt fejezi ki, hogy a Föld mintha nyugodhatna egy meghatározott egyensúlyi pontban. De ez a látszat hamis és annak következménye, hogy csak az r koordinátával foglalkozunk, a θ szögváltozóról nem veszünk tudomást. A minimum helyes értelmezése az, hogy az impulzusmomentum minden értékéhez tartozik egy olyan pálya, amelyen mozogva a Föld állandó távolságban marad a Naptól. Ezek a pályák körök. A $V_{\text{effektív}}$ függvény grafikonján a körpályának a minimumban nyugvó fiktív részecske felel meg.

Számítsuk ki r értékét a minimumban. Ehhez a $V_{\text{effektív}}$ függvényt deriválni kell, és a deriváltat nullával kell egyenlővé tenni.

Ez egy egyszerű számítás, amelynek elvégzését Önökre bízom. Az eredmény az, hogy a minimum az

$$r = \frac{p_\theta^2}{GMm^2} \tag{14}$$

pontban van. A (14) megadja a földpálya sugarát (feltéve, hogy az köralakú, ami nem egészen igaz) az impulzusmomentum függvényben.

A Kepler-törvények

Tycho Brahe dán csillagász volt, aki még a teleszkópok előtti időben, a tizenhatodik század második felében élt. Különleges gonddal elkészített nagyméretű szögmérő eszközei segítségével minden elődjénél pontosabban tudta meghatározni az égitestek pozícióját. A Naprendszer mozgására vonatkozó táblázatai a legpontosabb méréseken alapulnak, amelyeket a távcső megjelenése előtt végeztek. Ami az elméleteit illeti, azok elég áttekinthetetlenek voltak. Legértékesebb örökségként a táblázatait hagyta az utódokra.

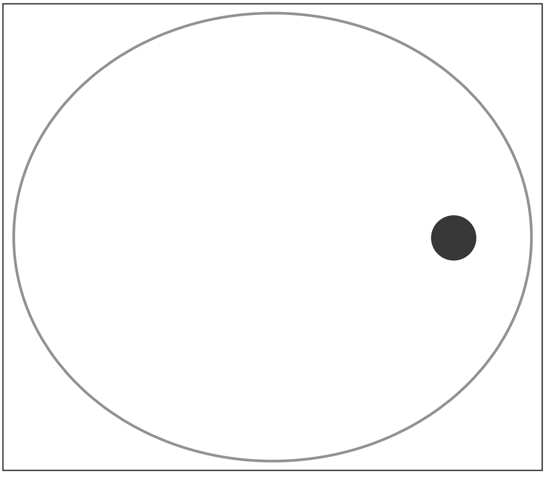
A táblázatok igazi jelentősége munkatársának, Johannes Keplernek köszönhetően vált világossá. Kepler a táblázatok adatait egyszerű geometriai és matematikai tényekhez próbálta hozzáilleszteni. Fogalma se volt róla, hogy a bolygók miért mozognak az így kapható szabályok szerint – a *miértekre* adott válaszai mai szemmel nézve elég zavarosak –, de tény, hogy a szabályok működtek.

Newton rendkívüli teljesítménye – bizonyos értelemben a modern fizika kezdő lépése – az volt, hogy a saját mozgástörvénye, valamint a távolság négyzetével fordítottan arányos gravitációs erőtörvénye alapján magyarázatot adott a bolygómozgás Kepler-féle törvényeire. Emlékeztetek ezekre ez utóbbiakra:

K1: A bolygók ellipszispályán mozognak, amelyek egyik közös gyújtópontjában található a Nap.

K2: A bolygót a Nappal összekötő vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol.

K3: A bolygók keringési idejének négyzete egyenesen arányos a Naptól mért átlagos távolságuk köbével.



5. ábra: A Föld elliptikus pályája a Nap körül

Kezdjük az elliptikus pályára vonatkozó K1-gyel. Korábban láttuk, hogy a körpályák az effektív potenciál minimumához tartozó egyensúlynak felelnek meg. De az effektív egydimenziós rendszernek vannak olyan mozgásai, amelyekben oszcillál a minimum körül. Az ilyen mozgás során a Föld váltakozva foglal el egy Naphoz legközelebbi és egy attól legtávolabbi pontot. Közben persze, mivel van valamekkora $L \equiv p_\theta$ impulzusmomentuma, keringő mozgást is végez a Nap körül. Ez más szavakkal annyit jelent, hogy θ folyamatosan nő az idő függvényében. A távolság oszcillációjából és a szöghelyzet növekedéséből összeálló trajektória egy ellipszis, amelyet az 5. ábrán láthatunk. Ha a trajektórián végighaladva csak a Naptól mért távolságra figyelünk, akkor azt tapasztaljuk, hogy ez a távolság váltakozva nő és csökken, mintha a Föld az effektív potenciálban oszcillálna.

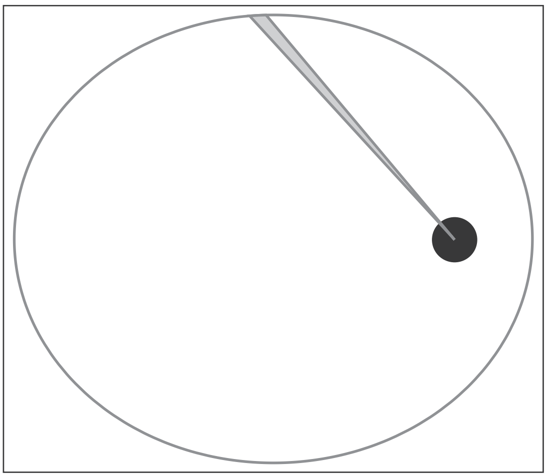
Kicsit nehezebb lenne bebizonyítani, hogy a pálya tényleg egy pontos ellipszis, ezért ezzel a feladattal most nem foglalkozunk.

Vizsgáljunk most egy másik mozgást az effektív potenciálban. Tegyük fel, hogy a részecske energiája elég nagy ahhoz, hogy kiszabaduljon a potenciális energia egyensúlyi pontját tartalmazó gödörből. Egy ilyen pályán a részecske a végtelenből érkezik, az $r = 0$ közelében visszaverődik a potenciálról, majd újra távozik a végtelenbe, ahonnan sohase jön többé vissza. Ilyen pályák léteznek, végtelen hiperbolapályáknak hívják őket.

Foglalkozzunk most a K2-vel. Kepler második törvénye szerint a vezérsugár, miközben végighalad az ellipszisen, egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol. Ennek nagyon megmaradási törvény szaga van, és valóban az is – az impulzusmomentum megmaradását fejezi ki. Osszuk el a (7) egyenlet mindkét oldalát m-mel:

$$r^2\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m}. \tag{15}$$

Kövessük képzeletben a bolygót a Nappal összekötő vezérsugár mozgását. Egy kis dt idő alatt a súrolt terület legyen dA, a középponti szög megváltozása pedig $d\theta$.



6. ábra: A vezérsugár által dt idő alatt súrolt terület

A 6. ábrán besatírozott kis háromszög területe

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta,$$

mert a háromszög területe az alap (r) és a magasság ($r\,d\theta$) szorzatának a felével egyenlő. A dt-vel végigosztva a

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

képletre jutunk. Itt felhasználhatjuk az impulzusmomentum megmaradását kifejező (15) képletet, ezért

$$\frac{dA}{dt} = \frac{p_\theta}{2m}. \tag{16}$$

Mivel p_θ (és persze m is) állandó, látjuk, hogy a súrolt terület konstans ütemben nő, és ez az ütem arányos a pályamozgás impulzusmomentumával.

Vizsgáljuk meg végül a K3-at: *A bolygók keringési idejének négyzete egyenesen arányos a Naptól mért átlagos távolságuk köbével.*

Korlátozódjunk a körpályákra, noha Kepler törvénye az elliptikus pályákra is érvényes. A törvényt több különböző gondolatmenettel is meg lehet kapni, amelyek közül talán a legegyszerűbb az $F = ma$ Newton-törvényből indul ki. A keringő Földre az

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

gravitációs erő hat. Másrészt a 2. előadásban láttuk, hogy egy körpályán egyenletesen mozgó test gyorsulása

$$a = \omega^2 r \tag{17}$$

-rel egyenlő, ahol ω a szögsebesség.

1. Feladat: Igazoljuk a (17)-et a 2. előadás (3) képlete segítségével.

A Newton-törvény tehát a következő:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r.$$

Oldjuk ezt meg ω^2-re:

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3}.$$

Utolsó lépésként vegyük észre, hogy a τ periódusidő – a teljes kör megtételéhez szükséges keringési idő – és a szögsebesség között az egyszerű

$$\tau = \frac{1}{2\pi\omega}$$

kapcsolat áll fenn. A keringési időt hagyományosan nem τ-val, hanem T-vel szokás jelölni, de ezt a jelet már lefoglaltuk a mozgási energiára. Mindent összevéve

$$\tau^2 = \frac{1}{4\pi^2 GM} r^3.$$

Mint látjuk, a keringési idő négyzete valóban arányos a sugár köbével.

