© Typotex Kiadó

PÉNZÜGYI MATEMATIKA



www.interkonyv.hu

© Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához sorozat

Algoritmuselmélet
Algoritmusok bonyolultsága
Analitikus módszerek a pénzügyben és a közgazdaságtanban
Analízis feladatgyűjtemény I
Analízis feladatgyűjtemény II
Bevezetés az analízisbe
Complexity of Algorithms
Differential Geometry
Diszkrét matematikai feladatok
Diszkrét optimalizálás
Geometria
Igazságos elosztások
Introductory Course in Analysis
Mathematical Analysis – Exercises I
Mathematical Analysis – Problems and Exercises II
Mértékelmélet és dinamikus programozás
Numerikus funkcionálanalízis
Operációkutatás
Operációkutatási példatár
Parciális differenciálegyenletek
Példatár az analízishez
Pénzügyi matematika
Szimmetrikus struktúrák
Többváltozós adatelemzés
Variációszámítás és optimális irányítás

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Medvegyev Péter

PÉNZÜGYI MATEMATIKA

Budapesti Corvinus Egyetem

Typotex

2014

www.interkonyv.hu

© Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

© 2014–2019, Dr. Medvegyev Péter, Budapesti Corvinus Egyetem, Matematika tanszék

Lektorálta: Dr. Badics Tamás

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

ISBN 978 963 279 255 2
Készült a Typotex Kiadó (`http://www.typotex.hu`) gondozásában
Felelős vezető: Votisky Zsuzsa
Műszaki szerkesztő: Gerner József

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0045 számú, „Jegyzetek és példatárak a matematika egyetemi oktatásához” című projekt keretében.



KULCSSZAVAK: Arbitrázs, arbitrázs lehetetlensége, martingál, lokális martingál, szemimartingál, opciók, opciók árazása, európai opciók, amerikai opciók, ázsiai opciók, származtatott termékek, sztochasztikus differenciálegyenletek, Itô-formula, sztochasztikus analízis, Wiener-folyamat, kvadratikus variáció, sztochasztikus integrálás, kamatlábmodellek, Black–Scholes-modell.

ÖSSZEFOGLALÁS: A könyv a pénzügyi matematika legismertebb modelljeit foglalja össze. Az első rész a diszkrét és véges időhorizonton definiált modelleket tárgyalja, a második rész a folytonos időábrázolás esetén definiált modellek elméletét ismerteti. A közismert európai és barrier opciók mellett bemutatásra kerülnek az amerikai és az ázsiai opciók is. A könyv a mesterszintű egyetemi pénzügyimatematika-oktatás számára készült, és a közgazdasági alkalmazások mellett tartalmazza a szükséges matematikai alapokat is.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Tartalomjegyzék

Előszó 1

1. A várható jelenérték szabálya és martingálmértékek 3
1.1. Bevezetés 4
1.2. Martingálok és a várható jelenérték szabály 8

2. Az eszközárazás alaptétele diszkrét időhorizonton 17
2.1. A Dalang–Morton–Willinger-tétel 18
2.1.1. A tétel kimondása 18
2.1.2. Az L^0 tér elemi tulajdonságai 20
2.1.3. A Kreps–Yan szeparációs tétel 24
2.1.4. A tétel bizonyítása 26
2.2. A piac teljessége, az eszközárazás második alaptétele 30
2.3. Európai eszközök árazása 35
2.3.1. Nincs diszkontálás 36
2.3.2. Diszkontálás, önfinanszírozó portfóliók 38
2.3.3. Elveszett illúziók 41
2.4. Az amerikai opciók árazása 42
2.4.1. Szuperreplikálás 43
2.4.2. A megállási opciókról szóló tétel 44
2.4.3. Az optimális megállítás problémája 46
2.4.4. Snell-féle burkoló 48
2.4.5. Optimális megállításra vonatkozó példák 54
2.4.6. A Doob–Meyer-felbontás és a szuperhedge létezése . . 59

3. Néhány tétel a sztochasztikus folyamatok elméletéből 63
3.1. Néhány alapfeltevés 64
3.2. Sztochasztikus integrálás folytonos integrandusok esetén . . . 75
3.2.1. A sztochasztikus integrál definíciója 76
3.2.2. Az integrál létezése 78
3.2.3. A Fisk-féle egyértelműségi tétel 89
3.2.4. Az integrál és a határérték felcserélhetősége 90

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.2.5. A kvadratikus variáció 91
3.2.6. Helyettesítéses integrálás 100
3.2.7. Mikor lesz egy sztochasztikus integrál valódi martingál 104
3.2.8. Sztochasztikus integrálás és arbitrázs 108
3.3. Itô-formula 112
3.4. Girszanov-tétel 124
3.4.1. Lokálisan ekvivalens mértékcsere 125
3.4.2. Mértékcserék konstruálása 133
3.4.3. Egy érdekes ellenpélda 139
3.5. Sztochasztikus differenciálegyenletek 144
3.5.1. A megoldás egyértelműsége 147
3.5.2. Erős megoldás létezése 159
3.5.3. A martingálprobléma 164
3.5.4. Gyenge megoldások létezése, Szkorohod tétele 172
3.5.5. Néhány példa 188
3.5.6. Erős Markov-tulajdonság 192
3.5.7. Infinitezimális generátor és a resolvens operátor 199
3.6. Az integrálás kiterjesztése előrejelezhető integrandusokra . . . 206
3.6.1. Előrejelezhető folyamatok és kiterjesztés Itô-izometriával 206
3.6.2. A kiterjesztett integrál tulajdonságai 210
3.6.3. Az integrál további kiterjesztése 215
3.6.4. Folytonos szemimartingálok szerinti integrálás 218
3.6.5. Sztochasztikus integrálás és mértékcsere 221
3.7. Az integrálreprezentációs tétel 224
3.7.1. Lokális martingálokkal való integrálreprezentációs tétel 224
3.7.2. Négyzetesen integrálható martingálokkal való integrál-reprezentációs tétel 231
3.7.3. Lokális martingálok reprezentálása 239

4. Az eszközárazás diffúziós modellje 243
4.1. Önfinanszírozó portfóliók és az ármérce 245
4.2. Ekvivalens lokális martingálmérték és arbitrázs 249
4.3. Új ármércére való áttérés 251
4.4. Az eszközárazás diffúziós modellje 256
4.5. A kockázat piaci ára 260
4.6. Lokális martingálmérték létezése, Girszanov-formula 261
4.7. A lokális martingálmérték egyértelmű 263
4.8. Integrálreprezentációs tétel és mértékcsere 264
4.9. A piac teljessége 266
4.10. Árazási képlet és arbitrázs 267
4.11. A Black–Scholes-differenciálegyenlet 270

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

5. Black–Scholes-világ **273**
5.1. Európai opciók árazása 273
5.1.1. Határidős termékek árazása 274
5.1.2. Vanilia call opciók árazása, Black–Scholes-formula kiszámolása Bayes-formulával 275
5.1.3. Néhány további egyszerű opció 277
5.1.4. Összetett opciók árazása 281
5.1.5. Csere opciók 285
5.1.6. Quanto termékek 287
5.2. Útfüggő opciók 290
5.2.1. A tükrözési elv és a maximumfolyamatok eloszlása . . 290
5.2.2. Barrier opciók 298
5.2.3. Dupla barrier opciók 303
5.2.4. Visszatekintő opciók 310
5.2.5. Ázsiai opciók 318

6. Amerikai opciók folytonos időhorizonton **339**
6.1. Az optimális megállítás problémája 341
6.1.1. A megállási opciókról szóló tétel nem negatív szupermartingálokra 343
6.1.2. A Snell-burkoló konstruálása 344
6.1.3. Az optimalitási kritérium 353
6.1.4. Az optimális megállítási idő létezése 355
6.1.5. Az optimális megállási idő és a találati idő 361
6.2. Homogén Itô-diffúziók és az erős Markov-tulajdonság 362
6.2.1. Az optimális megállítás problémája Itô-diffúziókra . . 365
6.2.2. Szuperharmonikus függvények 365
6.2.3. Szuperharmonikus burkoló és az értékfüggvény 369
6.2.4. A kilépési idő mint legkisebb optimális megállítás . . . 374
6.2.5. Az optimális megállítás létezése 375
6.3. Amerikai put opciók árazása és a Doob–Meyer-dekompozíció 378
6.3.1. Amerikai call opciók árazása 381
6.3.2. Az amerikai put opció árazó függvényének tulajdonságai 382

7. Kamatlábmodellek **403**
7.1. Forward ráták és hozamgörbék 404
7.2. Azonnali rövid kamatlábmodellek 405
7.3. A HJM nincsen arbitrázs feltétel 415
7.3.1. A HJM-feltétel levezetése 415
7.3.2. Markov-tulajdonság 423
7.4. Sztochasztikus diszkontfaktor modellek 424
7.4.1. A feltételes várható értékre vonatkozó Fubini-tétel . . 426

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

7.4.2. A Flesaker–Hughston-formula 428
7.5. Kamat opciók árazása 433
7.5.1. A LIBOR-modell 434
7.5.2. A LIBOR-modell konzisztenciája 436

Tárgymutató **438**

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Előszó

Az alábbi jegyzet a korábbi ötéves gazdaságmatematikai képzés keretében a Corvinus egyetemen tartott matematikai előadásaim kibővített verziója. A könyv lényegében két részből áll. Az egyik rész, amely egyetlen fejezetből a harmadik fejezetből áll, a sztochasztikus integrálás és a sztochasztikus differenciálegyenletek elméletét tartalmazza. Ez utóbbi nem szerepelt az előadásokon, így csak a teljesség kedvéért került az anyagba. A másik rész a többi fejezetből áll, amelyek a matematikai pénzügyek klasszikus, mondhatnám standard elméletét mutatják be. Némiképpen ezt a részt is kibővítettem, ugyanis hozzácsaptam az anyaghoz néhány speciális származtatott termék részletes tárgyalását. Így többek között részletesen bemutatom az ázsiai opciókat vagy a különböző barrier opciókat. Ezektől eltekintve a tananyag megegyezik a korábbi előadások anyagával.

Egy ilyen jellegű tankönyv megírásakor a szerző fő problémája az, hogy milyen típusú előismeretekre építsen. Kár tagadni, a jelen tankönyv önmagában nem igazán követhető, ugyanis a sztochasztikus folyamatok elméletének aktív ismeretét tételezem fel. Először arra gondoltam, hogy a lábjegyzetekben visszautalok korábbi könyveimre, vagy az irodalomban fellelhető egyéb forrásokra, de aztán ezek elhagyása mellett döntöttem, ugyanis ezek az utalások csak elbizonytalanítanák az olvasót és az előképzettséggel nem rendelkező olvasónak amúgy sem segítenének. Általában a jegyzet nem tartalmaz irodalomjegyzéket. Mielőtt ezt valaki a szememre hányná megjegyzem, hogy a pénzügyi matematika irodalma olyan nagy, hogy áttekintése számomra elképzelhetetlenül nehéz lenne, idegen tollakkal, vagyis mások irodalomjegyzékének az átvételével meg nem akartam ékeskedni. Ha valaki a könyv elolvasása után a területen akar kutatni, akkor számos olyan könyvet találhat, amelyek részletesen bemutatják az irodalmat és megfelelő utalásokat tartalmaznak. A legkimerítőbb talán Monique Jeanblanc, Marc Yor és Marc Chesney kiváló monográfiája, amelynek címe Mathematical Methods for Financial Markets, és a Springer kiadó gondozásában jelent meg 2009-ben. Én ezt a könyvet és számos más hasonló művet részletesen áttanulmányozva próbáltam az anyagot összeállítani.

Végezetül kellemes kötelezettségemnek szeretnék eleget tenni. Őszinte hálával tartozom egy sor embernek, akik segítettek a könyv megírásakor. Ezek közül is kiemelkedik Badics Tamás, aki a könyvet átnézte és az abban található számtalan hibát kijavította. Természetesen csak reménykedhetek abban, hogy a megmaradt hibák nem teszik a könyvet használhatatlanná.

Medvegyev Péter

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

© Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

1. fejezet

A várható jelenérték szabálya és martingálmértékek

Ebben a bevezető fejezetben a legegyszerűbb kérdést feszegetjük: Hogyan kell az árakat meghatározni véletlen jövőbeli kifizetések esetén. A tárgyalás szükségszerűen igen absztrakt, de a funkcionálanalízis néhány közismert tételén kívül semmilyen más mélyebb matematikai területre nem kell hivatkozni. A fejezet legfontosabb kérdése, hogy miként indokolható a várható jelenérték szabálya, vagyis hogy minden jövőbeli kifizetés jelen időpontban érvényes ára a jövőbeli kifizetés diszkontált várható értéke. A dologban az egyetlen csavar az, hogy a várható értékhez tartozó valószínűségi mértékről nem tudunk semmit. Csak annyit tudunk, hogy létezik a matematikai pénzügyek legtöbbet hivatkozott fogalma, a misztikus $\mathbf{Q}$ mérték. A fejezet megírásának legfontosabb indoka az volt, hogy megpróbáltam kiiktatni a megengedett portfólió fogalmát a származtatott termékek árazásának elméletéből. Miként látni fogjuk a könyv hátralevő részében a származtatott termékek árazásának elmélete a fedezés fogalmára épül. De milyen módon lehet fedezni? Diszkrét és véges időhorizonton, amelyet a második fejezetben fogunk tárgyalni a fedező portfóliónak egyedül önfinanszírozónak kell lenni. Az önfinanszírozás ilyenkor megadott, definíciója igen egyszerű és meggyőző. Jóval nagyobb problémát jelent azonban a folytonos időhorizont esete, amellyel a könyv többi fejezete foglalkozik Ha el is tekintünk attól, hogy lehetetlen a fedező portfólióban a súlyokat folytonosan változtatni két további probléma marad: Egyrészt az önfinaszírozás definíciójában diszkrét időhorizonton szereplő késleltetés, nevezetesen a t és a $t+1$ időpontok explicit szerepeltetése folytonos időhorizon-

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ton matematikailag nem értelmezhető, másrészt, és ez a fontosabb, a végtelen számú időpont megjelenése miatt lehetségesé váló duplázási stratégia következtében létező arbitrázslehetőség kiiktatására be kell vezetni a megengedett portfóliók fogalmát, amely fogalomra a véges időpontot tartalmazó modellek esetén nincsen szükség. Az első probléma megkerülését avval szokás indokolni, vagy inkább szőnyeg alá söpörni, hogy a harmadik fejezetben tárgyalt Itô-kalkulus integrálfogalma valamiképpen tartalmazza az önfinanszírozásban szereplő időpontkésleltetést. Hogy ez mennyire helyes, vagy helytelen nem érdemes feszegetni, ugyanis jóval nagyobb gondot jelent a megengedett portfóliók bevezetése. Az irodalomban két megközelítés létezik: Az elsőben feltesszük, hogy a megengedett portfólió alulról korlátos. Ennek kétségtelen előnye, hogy viszonylag egyszerűen interpretálható, illetve emlékeztett a tényleges pénzügyi gyakorlatra: Adott valamilyen kezdőösszeg, vagy limit, amiből gazdálkodni kell, és amikor ez a kezdőlimit elfogy, akkor a portfóliót le kell zárni. Ugyanakkor evvel azt érjük el, hogy az eladás, illetve a vétel nem lesz azonosan megengedett, vagyis a fedező portfóliók halmaza nem lesz lineáris tér, hanem kúp lesz, így a származtatott termékek árazásában kulcs szerepet játszó heurisztikus gondolat, miszerint a vevők és az eladók egyszerre vannak jelen elvész, és a vételi és az eladási oldalon más és más gondolatmenetet kell az ár indoklásakor alkalmazni. A másik megoldás szerint pedig a megengedett porfóliók azok a portfóliók, amelyekre a portfólió értéke a kockázatsemleges árrendszer esetén martingál lesz. A kérdés jogos: Miért is? Nem éppen a martingálmértéket akarjuk bevezetni? Mi van akkor, ha több martingálmérték van? Akkor melyik szerint kell a fedező portfóliónak martingálnak lenni? Erre mintha nem lenne válasz. Kétségtelen, hogy a megengedett portfólió ezen definíciója helyreállítja a fedező portfóliók azon véges számú pontból álló időhorizonton esetén fenálló tulajdonságát hogy a vevők és az eladók szempontjából a helyzetet azonosan kell kezeli, de a korrekció durván technikai jellegű és némiképpen kilóg a nevezetes lóláb.

1.1. Bevezetés

A pénzügyi elmélet legfontosabb, sőt talán egyedüli eszköze a várható jelenérték szabály. E rendkívül praktikus és látszólag igen egyszerű szabály szerint egy jövőben esedékes kifizetéskor két tényezőt kell figyelembe venni: Az időtávot, illetve a kifizetés bizonytalanságát. Az időhorizonttól való függést a diszkonttényezővel szokás figyelembe venni. A jövőben biztosan kifizetett összeg értéke a jelenben kevesebb, vagy legalábbis nem több, mint a jövőben kapott érték. Hogy mennyivel kevesebb, az a piaci szereplők idővel kapcsolatos preferenciáinak a függvénye. A jelen és a jövő közötti transzformációt megadó szorzószám közönséges árként viselkedik, és elvileg semmiben nem különbözik két egyszerre megvásárolható termék cserearányától. A kifizetés bizonytalan-

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

sága hasonlóan működik. A módosító érték a bizonytalansággal kapcsolatos preferenciák által meghatározott kereslet és kínálat eredője. Talán az egyetlen eltérés az, hogy a bizonytalanság fogalma nehezebben ragadható meg.

Ebben a bevezető fejezetben vizsgált kérdés a következő: Ha $\pi(\xi)$ jelöli a ξ jövőbeli véletlen kifizetés jelen időpontban érvényes árát, akkor milyen tulajdonságokkal, illetve reprezentációval rendelkezik a π függvény? Az árazó függvény alapvető tulajdonsága a linearitás. Bár ez nem teljességgel nyilvánvaló, mégis a pénzügyi modellekben mindig evvel a hallgatólagos feltétellel élünk. További kézenfekvő tulajdonságnak tűnik a π nem negativitása, vagyis ha $\xi \geq 0$, akkor $\pi(\xi) \geq 0$. Azonban ez a két feltétel egyszerre minden további megkötés nélkül általában nem teljesülhet.

1.1. Példa. A valószínűségi változók L^0 terén általában nincs a triviálistól különböző nem negatív lineáris funkcionál.

Jelölje L^0 a [0,1] szakaszon mérhető függvények Lebesgue-mérték szerinti ekvivalenciaosztályait. Az L^0 téren a topológiát a sztochasztikus konvergenciával szokás definiálni, ugyanakkor vegyük észre, hogy a lineáris funkcionáloktól a folytonosságot nem követeljük meg. Megjegyezzük, hogy a $K \stackrel{\circ}{=} \{\xi \geq 0\}$ függvények olyan kúpot alkotnak, amely zárt a sztochasztikus konvergenciában, de a kúpnak a sztochasztikus konvergencia által generált topológiában nincsen belső pontja, így a végtelen dimenziós szeparációs tétel, a Hahn–Banach-tétel, nem alkalmazható. Tegyük fel, hogy egy alkalmas Λ lineáris funkcionálra $\Lambda(\xi) \geq 0$, ha $\xi \geq 0$, és egy alkalmas $\xi_0 \geq 0$ függvényre $\alpha \stackrel{\circ}{=} \Lambda(\xi_0) > 0$. Nyilvánvalóan a Λ monoton, vagyis ha $\xi \leq \eta$, akkor $\Lambda(\xi) \leq \leq \Lambda(\eta)$, ugyanis $\Lambda(\eta) - \Lambda(\xi) = \Lambda(\eta - \xi) \geq 0$. Ekkor a $\xi_0 \chi[0,1/2]$ és a $\xi_0 \chi(1/2,1]$ függvények összege ξ_0, amiből a kettő közül az egyikre a Λ értéke $\geq \alpha/2$. Jelölje ξ_1 az így kapott függvény négyszeresét. Világos, hogy $\xi_1 \geq 0$, és $\Lambda(\xi_1) \geq 2\alpha$. Felezzük meg az intervallumot és ismételjük meg az eljárást a ξ_1-re, stb. Az így kapott (ξ_n) sorozatra az $\eta \stackrel{\circ}{=} \sup_n \xi_n \in L^0$ függvény véges, ugyanis legfeljebb egyetlen olyan pont van, amelyre nem teljesül, hogy a (ξ_n) sorozat tagjai egy indextől már nullák. Mivel $\xi_n \leq \eta$, ezért a Λ monotonitása miatt $2^n\alpha \leq \Lambda(\xi_n) \leq \Lambda(\eta)$, amiből $\Lambda(\eta) = \infty$, ami lehetetlen, ugyanis a lineáris funkcionálok értéke definíció szerint véges.

□

1.2. Példa. A valószínűségi változók L^0 terén nincsen folytonos lineáris funkcionál.

Az előző példa egyszerű módosításával azonnal látható, hogy tetszőleges olyan ξ_0 esetén, amelyre $\Lambda(\xi_0) \stackrel{\circ}{=} \alpha > 0$, $\xi_n \stackrel{p}{\to} 0$, és $\Lambda(\xi_n) \to \infty$, amiből a Λ nem lehet folytonos a sztochasztikus konvergenciában, vagyis az L^0 téren nem adható meg $\Lambda \neq 0$ a sztochasztikus konvergenciában folytonos lineáris funkcionál. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az L^0 tér a sztochasztikus konvergenciával egy teljes metrizálható lineáris tér. A metrikát az $\|\xi\|_0 \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(|\xi| \wedge 1)$ képlettel definiálhatjuk. Nyilvánvalóan $\|\xi+\eta\|_0 \leq \|\xi\|_0 + \|\eta\|_0$. A két példát a következő egyszerű észrevétellel kapcsolhatjuk össze:

1.3. Állítás. *Legyen $L \subseteq L^0$ egy lineáris tér, és tegyük fel, hogy ha $\xi \in L$, akkor $|\xi| \in L$. Tegyük fel, hogy az L-en adott egy $\|\xi\|$ függvény, amelyre*

1. $\|\xi\| \geq 0$ *és* $\|\xi\| = 0$ *pontosan akkor, ha* $\xi = 0$.
2. $\|\xi\| = \|-\xi\|$.
3. $\|\xi+\eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$.

Ha a $d(\xi,\eta) = \|\xi-\eta\|$ távolságra nézve az L teljes metrikus tér, akkor az L téren értelmezett minden nem negatív lineáris funkcionál folytonos.

Bizonyítás. Legyen Λ az L téren értelmezett nem negatív lineáris funkcionál, és legyen (ξ_n) egy nullához konvergáló sorozat. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy $\|\xi_n\| \to 0$. A linearitás és a nem negativitás miatt $|\Lambda(\xi_n)| \leq \Lambda(|\xi_n|)$. Elegendő tehát belátni, hogy $\Lambda(|\xi_n|) \to 0$. Feltehető tehát, hogy a ξ_n nem negatív. Elegendő belátni, hogy minden (ξ_n) sorozatnak van egy (ξ_{n_k}) részsorozata, amelyre $\Lambda(\xi_{n_k}) \to 0$. Ha $\|\xi_{n_k}\| \leq 2^{-k}$, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{n_k}$ sor szeletei Cauchy-sorozatot alkotnak, ugyanis ha $M > N$, akkor

$$\left\| \sum_{k=1}^{M} \xi_{n_k} - \sum_{k=1}^{N} \xi_{n_k} \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{M} \xi_{n_k} \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{M} \|\xi_{n_k}\| = \sum_{k=N+1}^{M} 2^{-k} \to 0.$$

Az L feltételezett teljessége miatt a sor konvergens. Legyen a sor összege ξ_∞. Mivel a Λ nem negatív és $\xi_{n_k} \geq 0$, ezért

$$\sum_{k=1}^{N} \Lambda(\xi_{n_k}) \leq \Lambda(\xi_\infty) < \infty.$$

Mivel ez minden N-re igaz, ezért a $\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda(\xi_{n_k})$ sor is konvergens, következésképpen $\Lambda(\xi_{n_k}) \to 0$. □

Az idáig tett megfontolásokból evidens, hogy ahhoz, hogy egy értelmes pénzügyi elméletet tudjunk felépíteni, meg kell követelni, hogy a π értelmezési tartománya elég szűk legyen. A legegyszerűbben akkor járunk el, ha feltesszük, hogy a π árazó függvény L értelmezési tartománya egy alkalmas $1 \leq p < \infty$ kitevővel egy $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér[1]. Egy megjegyzés erejéig érdemes

[1] Általában $p = 2$, de időnként a $p = 1$ esettel is találkozhatunk.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

utalni azonban arra, hogy bár a feltétel igen egyszerű, mégsem problémamentes, mert a L^p tér nem invariáns a matematikai pénzügyekben alapvető szerepet játszó mértékcserére. Ugyanakkor a két kézenfekvő alternatíva, az L^0 és az L^∞ terek, bár invariánsak az ekvivalens mértékcserére, egyikük sem megfelelő, ugyanis miként láttuk az L^0 térben nincsenek folytonos lineáris funkcionálok, az L^∞ térben pedig bizonyos értelemben túl sok is van belőlük, mivel miként ismert az L^∞ terekben vannak olyan folytonos lineáris funkcionálok is, amelyek mértékkel nem reprezentálhatóak. További probléma forrása, hogy az $L = L^p$, $1 \leq p < \infty$ feltétel hallgatólagosan megköveteli egy $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték létét[2]. Ennek szokásos interpretációja, hogy adott egy statisztikai valószínűségi mező, és feltételezzük, hogy az árfolyamok alakulása a klasszikus valószínűségszámítási modelleknek megfelelően alakul, ami azonban csak részben tekinthető helyes feltételnek, ugyanis a pénzügyek elvileg, vagy inkább remélhetőleg nem egy szerencsejáték.

Az L^p terekben minden folytonos lineáris funkcionál integrálként reprezentálható, így az $L = L^p$ feltétel legfőbb oka/következménye az alábbi egyszerű észrevétel:

1.4. Lemma. *Létezik, mégpedig egyetlen olyan a* $\mathbf{P}$*-mértékre abszolút folytonos* μ *mérték, amelyre* $\pi(\xi) = \int_\Omega \xi d\mu$.

Mivel a π nem negatív, ezért a μ valódi mérték. Amikor a π értelmezési tartományáról az L-ről megköveteltük, hogy lineáris teret alkosson, akkor hallgatólagosan megköveteltük, hogy az L elemei már eleve diszkontálva vannak, ugyanis ellenkező esetben nem lehetne, őket pénzügyileg értelmes módon összeadni. Egy további triviális megkötés/feltétel, hogy elvárjuk, hogy az 1 konstans kifizetés eleme legyen a lehetséges kifizetések L alterének és

$$1 = \pi(1) = \int_\Omega 1 d\mu,$$

vagyis a μ valószínűségi mérték. A matematikai pénzügyek szokásos jelölését használva a μ reprezentáló mértéket $\mathbf{Q}$-val fogjuk jelölni. Érdemes nyomatékosan hangsúlyozni, hogy az $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ és az $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{Q})$ terek nem azonosak[3]. A π értelmezési tartománya továbbra is az $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér. Hangsúlyozni kell, hogy nem állítjuk, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalensek, vagyis hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ alatti nullmértékű halmazok egybeesnek. Ennek megköveteléséhez szükségünk lenne arra, hogy a π szigorúan monoton növekedő legyen, vagyis hogy minden $\mathbf{P}$ szerint nem nulla, nem negatív változó ára pozitív legyen. Ezt

[2] Az L^0 és az L^∞ terek definiálásához elég megadni a nullmértékű halmazokat, ami a valószínűségszámítás interpretációja alapján azonosítható a logikailag lehetséges, de amúgy lehetetlennek tekintett eseményekkel.

[3] A $p = 2$ esetnek, amikor az L egy Hilbert-tér kétségtelen előnye, hogy ilyenkor a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ alatt négyzetesen integrálható változók halmaza egybeesik.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

azonban nem követeljük meg[4]. Mivel a π árfüggvényt reprezentáló mértékek a $\mathbf{P}$-re nézve abszolút folytonosak, ezt ebben a fejezetben hallgatólagosan, minden további említés nélkül, mindig meg fogjuk követelni.

A megadott matematikai és közgazdasági megkötések együttesét a következő állításban foglalhatjuk össze:

1.5. Tétel (Várható jelenérték szabály)**.** *A megadott feltételek esetén érvényes a várható jelenérték szabálya, vagyis tetszőleges H jövőbeli kifizetés jelenbeli $\pi(H)$ árára érvényes a*

$$\pi(H) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}\right)$$

reprezentáció, ahol $\overline{H}$ a H diszkontált értéke és $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ a $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték szerint vett várható érték operátora.

Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy a tétel meglehetősen semmitmondó, ugyanis nem tartalmaz semmilyen útmutatást arra, hogy hogyan kell a $\mathbf{Q}$ mértéket egy modellben felírni, vagy a modell paraméterei alapján meghatározni.

1.2. Martingálok és a várható jelenérték szabály

A várható jelenérték szabálynak van egy távolról sem triviális következménye. Jelölje $\mathbf{Q}$ azt a mértéket, amelyet a várható jelenérték szabályban használni kell. A várható jelenérték szabály pontosan azt állítja, hogy ilyen $\mathbf{Q}$ mérték létezik. Legyen S valamilyen kereskedett termék árfolyamát megadó sztochasztikus folyamat. Kézenfekvő kérdés, hogy az S milyen típusú folyamatot alkot a $\mathbf{Q}$ mérték alatt?

Természetesen különböző t időpontokban az S folyamat értéke különböző termék. Kézenfekvő megkövetelni, hogy nem csak fix időpontokban számolhatjuk ki az S értékét. Ha a τ időpont véletlen, akkor jelölje $S(\tau)$ azt a változót, amely éppen az S értékét adja meg a τ (véletlen) időpontban. Ha τ egy véges értékeket felvevő megállási idő, akkor az $S(\tau)$ természetesen szintén egy önálló pénzügyi termék. Az S termék kereskedett, ami definíció szerint azt jelenti, hogy a $t = 0$ időpontban bármely fix, vagy az aktuális kimeneteltől függő τ időpontban esedékes értéke eladható, vagy megvehető. Jelölje R a diszkontálásra használt folyamatot és jelölje $\overline{S} \triangleq S/R$ a diszkontált folyamatot. Emlékeztetünk, hogy a π értelmezési tartománya a diszkontált kifizetéseket tartalmazza. Tekintsünk két időpontot: legyenek ezek t_1 és t_2. Az $S(t_1)$ és az $S(t_2)$ két különböző határidős termék, amelyek π ára a várható jelenérték szabály miatt a $t = 0$ időpontban

$$\pi\left(\overline{S}(t_1)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(t_1)\right), \quad \pi\left(\overline{S}(t_2)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(t_2)\right),$$

[4] Bár nem tűnik különösen erős megkötésnek.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ahol a $\mathbf{Q}$ felső index a várható érték során használt mértékre utal. Mi a kapcsolat a két ár között? Megmutatjuk, hogy $\pi\left(\overline{S}\left(t_1\right)\right) = \pi\left(\overline{S}\left(t_2\right)\right)$. Ehhez elegendő megmutatni, hogy a közös érték éppen a kereskedett termék S_0-lal jelölt $t = 0$ időpontban érvényes aktuális ára. Ennek oka nagyon egyszerű. A pénzügyi termékek, szemben a hagyományos termékekkel, költségmentesen tárolhatóak, ugyanis az időből származó értékvesztést már a diszkontáláskor figyelembe vettük. A t_k időpontban esedékes határidős kifizetéshez az ingyenes tárolás feltétele miatt két eltérő módon is hozzájuthatunk. Vagy a $t = 0$ időpontban S_0-ért megvesszük a terméket és kivárjuk a t_k időpontot, vagy a $t = 0$ időpontban $\pi\left(\overline{S}\left(t_k\right)\right)$-ért megvesszük a t_k időpontban való „hozzáférés" jogát. Mivel mind a két esetben a t_k időpontban azonos értékünk lesz, ezért a kifizetett vételáraknak a $t = 0$ időpontban is meg kell egyezniük. Például ha $S_0 < \pi\left(\overline{S}\left(t_k\right)\right)$, akkor a határidős terméket eladva, majd a kapott összegből a terméket magát megvéve, majd költségmentesen tartva a t_k időpontig a $t = 0$ időpontban biztos profithoz juthatunk, annak ellenére, hogy a portfólió értéke a t_k időpontban nulla. Ugyanis a t_k időpontban egyrészt a kezünkben lesz a termék, másrészt azonban kötelesek vagyunk a határidős szerződés alapján a terméket leszállítani. A két pozíció azonban pontosan ellentétes, így az együttes értékük éppen nulla. Mivel ezt bármilyen nagyságrendben megtehetjük, végtelen profitra tehetünk szert, amit definíció szerint kizárunk[5]. Némiképpen másképpen fogalmazva, ha feltesszük, hogy a bármely jövőben esedékes nulla kifizetés jelenbeli ára is nulla, valamint megköveteljük, hogy a π árazó függvény lineáris legyen, akkor a különböző időpontokra vonatkozó határidős termékek jelenben esedékes ára meg kell hogy egyezzen. Következésképpen,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}\left(t_1\right)\right) = \pi\left(\overline{S}\left(t_1\right)\right) = S_0 = \pi\left(\overline{S}\left(t_2\right)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}\left(t_2\right)\right).$$

Mivel a t_1, t_2 időpontok lehetnek megállási idők is, ezért a megállási opciókról szóló tétel alapján igaz a következő állítás:

1.6. Tétel (Kereskedett termékek martingálmértéke)**.** *Ha az S termék kereskedett és a $\mathbf{Q}$ mérték esetén érvényes a várható jelenérték szabály, akkor a diszkontált árfolyamokból álló $\overline{S}$ folyamat martingál a $\mathbf{Q}$ mérték alatt.*

Vegyük észre, hogy a bizonyításhoz a várható jelenérték szabályon kívül csak azt használtuk, hogy egy kereskedett termék bármely jövőbeli időpontra vonatkozó határidős kifizetésének jelenlegi ára független attól, hogy melyik jövőbeli időpontról van szó. Ennek oka az, hogy a modell feltételezése szerint minden pénzügyi termék költségmentesen tárolható, illetve, ugyancsak definíció szerint, a biztos végtelen profitot kizárjuk. Érdemes felfigyelni azonban arra is, hogy hallgatólagosan feltettük, hogy a piac igen fejlett: Tetszőleges

[5] Vegyük észre, hogy a gondolatmenet a matematikai pénzügyekben központi szerepet játszó nincsen arbitrázs feltétel egy igen enyhe verziója.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

megállási idő esetén a megállási időben lehívható határidős terméknek van piaca, következésképpen van ára.

1.7. Definíció. A $\mathbf{Q}$ mértéket az S kereskedett termék martingálmértékének mondjuk, ha az $\overline{S}$ diszkontált folyamat martingál a $\mathbf{Q}$ alatt.

A martingálmértékekkel kapcsolatos legfontosabb kérdés továbbra is a következő: Ha adott az $\overline{S}$ folyamat, miként, és milyen ξ diszkontált kifizetésekre határozhatjuk meg a π függvényt? Természetesen ha egyetlen olyan $\mathbf{Q}$ mérték van, amely esetén az $\overline{S}$ martingál és a ξ kifizetésre érvényes a diszkontált jelenérték szabály, akkor a π függvény értelemszerűen a $\pi(\xi) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi)$ alakot ölti. Ha azonban több martingálmérték is van, akkor nyilvánvalóan csak az

$$\inf_{\mathbf{Q}\in\mathcal{M}(\overline{S})} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi) \leq \pi(\xi) \leq \sup_{\mathbf{Q}\in\mathcal{M}(\overline{S})} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi)$$

egyenlőtlenség írható fel, ahol az $\mathcal{M}\left(\overline{S}\right)$ az $\overline{S}$ diszkontált árfolyam martingálmértékeinek halmaza, ahol értelemszerűen martingálmértéken az olyan mértékeket értjük, amely alatt az $\overline{S}$ martingál. Vagyis a diszkontált jelenérték szabállyal kapcsolatos további fontos kérdés a következő: Mikor létezik egyetlen martingálmérték? Az ezt biztosító feltételekre később mint teljességi feltételre fogunk hivatkozni. Hangsúlyozni kell, hogy a teljesség problémája abból ered, hogy a π értelmezési tartományát megadó $L = L^p$ térnek az $\overline{S}(\tau)$ alakú megállított változók által generált lineáris tér esetlegesen csak az $L = L^p$ egy valódi altere, így bár a π függvényt reprezentáló $\mathbf{Q}$ ezen az altéren adott, de több olyan mérték is létezhet, amely leszűkítése erre az altérre a $\mathbf{Q}$, így az altérre való leszűkítésből a π nem rekonstruálható.

1.8. Példa. A Black–Scholes-modell martingálmértéke.

A matematikai pénzügyek kedvenc modellje az úgynevezett Black–Scholes-modell. Erről később sokat fogunk beszélni, egyenlőre elegendő annyit megjegyezni, hogy a modellben két eszköz van, a diszkontálásra használt kötvény, amely árfolyamának alakulását a $B(t) = B_0 \exp(rt)$ folyamat írja le, illetve az $S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \sigma^2/2\right)t + \sigma w(t)\right)$ árfolyammal rendelkező részvény. A modellben az r, μ, σ, B_0 és az S_0 előre adott konstansok és a részvény árfolyamát megadó folyamat képletében a w egy Wiener-folyamatot jelöl. A diszkontált folyamat értelemszerűen

$$\overline{S}(t) = \frac{S(t)}{B(t)} = \frac{S_0}{B_0} \exp\left(\left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w(t)\right).$$

Mivel a képletben szerepel egy Wiener-folyamat, ezért létezik az $S(t)$ alakulását megadó valamilyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező. Az $\overline{S}(t)$ eloszlása

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

lognormális, és a lognormális valószínűségi változók várható értékére vonatkozó képlet alapján

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\overline{S}(t)\right) = \frac{S_0}{B_0}\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\left(N\left(\left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma\sqrt{t}\right)\right)\right) = \frac{S_0}{B_0}\exp\left(\left(\mu - r\right)t\right).$$

Ha $\mu \neq r$, akkor a diszkontált részvényárfolyam várható értéke nem konstans, így az $\overline{S}$ nem martingál, következésképpen a w Wiener-folyamat mögötti valószínűségi mezőhöz tartozó $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték a π árfunkcionál szempontjából nem releváns.

A Black–Scholes-modellel kapcsolatos legfontosabb matematikai kérdés a következő: Létezik-e, mégpedig egyetlen olyan $\mathbf{Q}$ mérték, amely esetén az $\overline{S}$ martingál? A létezéssel kapcsolatos kérdésre a választ a később részletesen tárgyalt úgynevezett Girszanov-formula tartalmazza, de a legfontosabb gondolatok a Girszanov-formula nélkül is megérthetőek: Egyrészt megmutatható, hogy nincs olyan $\mathbf{Q}$ mérték, amely alatt a diszkontált árfolyam a teljes $[0, \infty)$ időtartományon martingál lesz. Éppen ezért a Black–Scholes-modellben fel kell tenni, hogy az időhorizont egy véges $[0, T]$ időintervallum. Vezessük be a

$$\theta \triangleq \frac{\mu - r}{\sigma}$$

jelölést és legyen

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \triangleq \exp\left(-\theta w(T) - \frac{1}{2}\theta^2 T\right).$$

Ismételten a lognormális eloszlás várható értékének képlete alapján

$$\mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 T + \frac{1}{2}\theta^2 T\right) = 1,$$

vagyis a $\mathbf{Q}$ szintén valószínűségi mérték. Mivel a w független növekményű, ezért

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &\triangleq \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 T\right)\mathbf{E}\left(\exp\left(-\theta\left(w(T) - w(t)\right)\right) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 T\right)\mathbf{E}\left(\exp\left(-\theta\left(w(T) - w(t)\right)\right)\right) = \\
&= \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 T\right)\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2\left(T - t\right)\right) = \\
&= \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right),
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

vagyis a

$$\Lambda(t) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

folyamat martingál. Ez másképpen a feltételes várható érték definíciója alapján azt jelenti, hogy az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrán a $d\mathbf{Q}/\mathbf{dP}$ Radon–Nikodym-derivált éppen a $\Lambda(t)$, ugyanis ha $F \in \mathcal{F}_t$, akkor

$$\mathbf{Q}(F) = \int_F \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{F}_t\right) d\mathbf{P} = \int_F \Lambda(t)\, d\mathbf{P}.$$

Ha $t \leq T$, akkor minden $F \in \mathcal{F}_t$ esetén

$$\int_F \overline{S}(T)\, d\mathbf{Q} = \int_F \overline{S}(T)\,\Lambda(T)\, d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\overline{S}(T)\,\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right) d\mathbf{P} =$$
$$= \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\overline{S}(T)\,\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right)\Lambda^{-1}(t)\, d\mathbf{Q}.$$

Ez a reláció éppen a később bevezetett Bayes-formula speciális esete. Ebből következően

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(T) \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\overline{S}(T)\,\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right)\Lambda^{-1}(t) =$$
$$= \overline{S}(t)\,\frac{\Lambda(t)}{\Lambda(t)}\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\frac{\overline{S}(T)}{\overline{S}(t)}\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)} \mid \mathcal{F}_t\right) =$$
$$= \overline{S}(t)\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\frac{\overline{S}(T)}{\overline{S}(t)}\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \overline{S}(t),$$

ugyanis az $\overline{S}$ és a Λ exponenciális alapjából evidens, hogy a feltételes várható érték mögötti kifejezések a $w(T) - w(t)$ függvénye és mivel a w független növekményű, ezért a feltételes várható kiszámolásakor a feltétel elhagyható, és ha $s \stackrel{\circ}{=} T - t$, akkor a θ definíciója alapján

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\left(\left(\mu - r - \frac{\sigma^2+\theta^2}{2}\right)s + (\sigma-\theta)\,w(s)\right)\right) =$$
$$= \exp\left(\left(\mu - r - \frac{\sigma^2+\theta^2}{2}\right)s + \frac{1}{2}(\sigma-\theta)^2 s\right) =$$
$$= \exp\left((\mu - r)\,s - \frac{1}{2}2\sigma\frac{\mu - r}{\sigma}s\right) = 1.$$

Ebből következően az $\overline{S}$ martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. □

Miként megjegyeztük, a $\mathbf{Q}$ martingálmérték megtalálása csak fél siker, mert nem tudjuk, hogy a martingálmérték egyértelmű-e vagy sem. Általában a matematikai pénzügyek irodalmában a martingálmérték létezése matematikailag egyszerűbb és kézenfekvőbb feltételnek tűnik. Sokkal kevesebbet

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

tudunk a teljességről, vagyis arról, hogy mikor lesz a martingálmérték egyértelmű. Tegyük fel, hogy sikerült találnunk egy martingálmértéket. Milyen termékeket tudunk segítségével beárazni? Tegyük fel, hogy az $\overline{S}_0$ érték ismert. Ekkor a martingálmérték tulajdonság miatt az $\overline{S}(\tau)$ változók ára vagyis az $S(\tau)$ jövőben esedékes kifizetés jelen időpontban érvényes határidős ára is ismert és miként megjegyeztük $\pi\left(\overline{S}(\tau)\right) = \pi\left(\overline{S}(0)\right) = \overline{S}(0)$. Mivel a π lineáris funkcionál, ezért az összes $\xi \stackrel{\circ}{=} c_0 + \sum_k c_k\left(\overline{S}(\tau_k) - \overline{S}(\tau_{k-1})\right)$ alakú kifejezés ára is ismert, nevezetesen a kifejezés ára éppen $\pi(\xi) = c_0$, ugyanis a második összeg ára a π linearitása miatt nulla. Éppen a martingáltulajdonság miatt, ha $\tau_k > \tau_{k-1}$ és a c_k nem konstans, hanem egy θ_k $\mathcal{F}_{\tau_{k-1}}$ mérhető, korlátos valószínűségi változó, akkor a martingáltulajdonság miatt, tetszőleges martingálmérték esetén

$$\begin{aligned}\pi\left(\theta_k\left(\overline{S}(\tau_k) - \overline{S}(\tau_{k-1})\right)\right) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\theta_k\left(\overline{S}(\tau_k) - \overline{S}(\tau_{k-1})\right)\right) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\theta_k\left(\overline{S}(\tau_k) - \overline{S}(\tau_{k-1})\right) \mid \mathcal{F}_{\tau_{k-1}}\right)\right) = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\theta_k \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left(\overline{S}(\tau_k) - \overline{S}(\tau_{k-1})\right) \mid \mathcal{F}_{\tau_{k-1}}\right)\right) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\theta_k \cdot 0) = 0.\end{aligned}$$

A sztochasztikus analízis irodalmában az ilyen alakú kifejezéseket egyszerű integrandusoknak szokás mondani. Ebből következően az egyszerű integrandusként előálló valószínűségi változók mindegyikére a π árfüggvény értéke nulla. Mivel a π folytonos az $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér normájában, ezért az egyszerű integrandusok összegeként előálló valószínűségi változók $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ normában vett határértékeinek ára is nulla. Az egyszerű integrandusok összegeként előálló valószínűségi változók sztochasztikus konvergenciában vett határértékeit szokás sztochasztikus integrálnak mondani. Mivel a Csebisev-egyenlőtlenség miatt az L^p-konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért azt mondhatjuk, hogy az $\int_0^T \theta(s)\, d\overline{S}$ alakú sztochasztikus integrálként előálló valószínűségi változók egy részhalmazának π ára nulla. A harmadik fejezetben szereplő sztochasztikus analízisben részletesen tárgyalásra kerül, hogy milyen alakú folyamatok esetén biztosítható a sztochasztikus integrál létezése, ugyanakkor jóval kevesebbet tudunk arról, hogy milyen további megkötésekkel biztosítható, hogy ne csak sztochasztikus konvergenciában, hanem erősebb értelemben is, vagyis például az $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben is konvergáljon az integrál. Az ezt biztosító alkalmas feltételek esetén érvényes a következő tétel:

1.9. Tétel (Derivatív árazás alaptétele)**.** *Ha valamely a T időszakban esedékes H_T kifizetés $\overline{H}_T$ diszkontált értéke előáll*

$$\overline{H}_T = \lambda + \int_0^T \theta(s)\, d\overline{S} \tag{1.1}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

alakban, ahol az integrál a π folytonosságát biztosító $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben konvergens, akkor[6]

$$\pi(H_T) \stackrel{\circ}{=} \pi\left(\overline{H}_T\right) = \pi(\lambda \cdot 1) + \pi\left(\int_0^T \theta(s)\, d\overline{S}\right) = \lambda\pi(1) + 0 = \lambda.$$

Miként később látni fogjuk, a tételben szereplő (1.1) összefüggés szokásos közgazdasági megfogalmazása az, hogy a H_T kifizetést sikerült önfinanszírozó módon lefedezni. A tétel szerint az önfinanszírozó módon fedezett pénzügyi tranzakciók jelen pillanatban érvényes ára éppen az induló befektetés költségével azonos. A matematikai pénzügyek nem elhanyagolható technikai problémái részben abból erednek, hogy miközben a sztochasztikus integrálás természetes matematikai élettere az L^0 tér, addig a π árazó függvények természetes élettere az L^p tér. Az ebből eredő konfliktus számos nehéz órát okozott és valószínűleg fog is még okozni a területen tevékenykedő kutatóknak.

További kérdés lehet, hogy miként lehet a λ értéket kifejezni a $\overline{H}_T$ és a $\mathbf{Q}$ segítségével, ahol $\mathbf{Q}$ az $\overline{S}$ egy tetszőleges martingálmértéke. Ehhez elegendő lenne azt biztosítani, hogy a sztochasztikus integrál egy tetszőleges $\mathbf{Q}$ martingálmérték szerinti várható értéke nulla legyen, vagyis hogy az integrál martingál legyen a $\mathbf{Q}$ alatt. Ez a sztochasztikus integrálás másik nehéz technikai jellegű kérdésével függ össze, amely szerint egy martingál szerint vett sztochasztikus integrál általában csak lokális martingál és nem valódi martingál. Ha azonban a martingálmérték egyértelmű, és a sztochasztikus integrál az $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben is konvergens, akkor ez a probléma nem lép fel, ugyanis ilyenkor

$$\pi\left(\int_0^T \theta(s)\, d\overline{S}\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^T \theta(s)\, d\overline{S}\right) = 0,$$

következésképpen a nevezetes $\pi(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right)$ árazó képlet, vagyis a diszkontált jelenérték szabály ilyenkor teljesül. Ha azonban a martingálmérték nem egyértelmű, akkor mivel nincsen semmilyen garancia arra, hogy a sztochasztikus integrál a $\mathbf{Q}$ alatt nem valódi lokális martingál, az integrál várható értéke a $\mathbf{Q}$ alatt nem feltétlenül lesz nulla.

De ezzel nincsen vége a technikai jellegű problémáknak. Miként dönthető el egy a T időszakban esedékes H_T kifizetéshez tartozó $\overline{H}_T$ előállítható-e megadott (1.1) alakban? Elegendő-e ehhez az, hogy a H_T mérhető legyen a S folyamat által generált filtráció valamely σ-algebrájára nézve? Az ezt garantáló tételeket szokás integrálreprezentációs tételnek mondani. Általában

[6] Vegyük észre, hogy formálisan nézve a $\pi(H_T)$ kifejezés matematikailag értelmetlen, ugyanis egy T időszakban érvényes kifizetésre értelmeztük, a π árfüggvény pedig a diszkontált kifizetéseket tartalmazó L altéren definiált. Vegyük észre, hogy legalábbis jelölés szintjén, hallgatólagosan kiterjesztettük a π értelmezési tartományát.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

viszonylag enyhe feltételek mellett biztosítható, hogy valamely $\overline{H}_T$ rendelkezzen a kívánt (1.1) előállítással. Ugyanakkor a sztochasztikus integrálok konvergenciája csak sztochasztikus konvergenciában teljesül, és mikor biztosítható az integrálok L^p normában való konvergenciája?

1.10. Példa. Európai call opciók árazása a Black–Scholes-modellben.

A matematikai pénzügyek felvirágozása nagyrészt a következő problémából származik: Legyen adva egy S részvény. Mi lesz a T időpontban esedékes $H_T \triangleq (S(T) - K)^+$ kifizetés $t = 0$ időpontban érvényes ára? Tegyük, fel, hogy az S alakulását a Black–Scholes-modell írja le, és a fejezet alapfeltevésének megfelelően tegyük fel, hogy létezik a π árazó függvény. Természetesen meg kell mondani, hogy mi lesz a π árazó függvény L értelmezési tartománya. A Black–Scholes-modellben hallgatólagosan azt tételezzük fel, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mező éppen az S definíciójában szereplő w Wiener-folyamat T időpontig bezárólag való megfigyeléséből származik, vagyis $\mathcal{A} = \sigma\{w(t) \mid t \leq T\}$. Megmutatjuk, hogy ezen az elegendően szűk $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető téren a martingálmérték egyértelmű. A martingálmérték egyértelműségét a már említett integrálreprezentációs tétellel lehet megmutatni. E szerint a tétel szerint, ha egy ξ mérhető az $\mathcal{A} = \sigma\{w(t) \mid t \leq T\}$ σ-algebrára nézve, és négyzetesen integrálható, akkor előállítható sztochasztikus integrálként.

$$\xi = \lambda + \int_0^T X dw,$$

mégpedig oly módon, hogy a sztochasztikus integrál martingál[7]. Ugyanakkor ez sajnos nekünk nem elegendő, ugyanis nem a w, hanem az $\overline{S}$ szerint vett integrálként való előállításra van szükségünk, ezért a fenti előállítás, bár létezik, közvetlenül használhatatlan. Ahhoz, hogy az előállítást az $\overline{S}$ szerint is meg tudjuk tenni, meg kell mutatni, hogy alkalmas $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{Q})$ martingálmérték alatt egy a másik $\widetilde{w}$ módon jelölt $\mathbf{Q}$ mérték alatti Wiener-folyamattal $d\overline{S} = \sigma\overline{S}d\widetilde{w}$, amely némiképpen tömör jelölés tartalma később, a sztochasztikus integrálás tárgyalásakor, világossá fog válni. Érdemes hangsúlyozni, hogy a $\widetilde{w}$-ra való áttéréskor ugyancsak biztosítani kell, hogy a $\widetilde{w}$ által generált σ-algebra azonos legyen a w által generált σ-algebrával. Az integrálreprezentációs tételt a $\widetilde{w}$ szerint használva, a sztochasztikus integrálokra vonatkozó asszociativitási szabály alapján[8], minden a $\mathbf{Q}$ mérték szerint négyzetesen integrálható ξ változóra, felhasználva, hogy $\overline{S} > 0$

$$\xi = \lambda + \int_0^T X d\widetilde{w} = \lambda + \int_0^T \frac{X}{\sigma\overline{S}} \sigma\overline{S} d\widetilde{w} = \lambda + \int_0^T \frac{X}{\sigma\overline{S}} d\overline{S} \triangleq \lambda + \int_0^T \theta d\overline{S}.$$

[7] Miként látni fogjuk több különböző integrálreprezentációs tétel is igazolható. A gondolatmenet lényege, hogy az előállításban szereplő sztochasztikus integrál valódi martingál, nem csak lokális martingál.

[8] Egyenlőre használjuk formálisan, a pontos tartalom később részletesen kifejtésre fog kerülni.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Mivel a ξ négyzetesen integrálható a $\mathbf{Q}$ alatt, ezért az integrálreprezentációs tétel biztosítja, hogy a sztochasztikus integrál martingál. Speciálisan ha most a ξ korlátos, akkor az $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$ martingál korlátos, így az $\int_0^t \theta d\overline{S} =$ $= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^T \theta d\overline{S} \mid \mathcal{F}_t\right)$ folyamat szintén korlátos. Ha most $\mathbf{R}$ egy másik martingálmérték, és χ_A egy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ halmaz karakterisztikus függvénye, akkor az integrál előállításban szereplő integrál olyan lokális martingál az $\mathbf{R}$ alatt, amely korlátos, ezért az $\mathbf{R}$ szerint is martingál. Az, hogy a sztochasztikus integrál az $\mathbf{R}$ alatt lokális martingál, az abból következik, hogy egyrészt a mértékcsere során a sztochasztikus integrálok nem változnak, másrészt az $\overline{S}$, a feltétel szerint, az $\mathbf{R}$ alatt is martingál, és a martingálok szerint vett sztochasztikus integrálok lokális martingálok. Ebből

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\lambda + \int_0^T \theta d\overline{S}\right) = \lambda = \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\lambda + \int_0^T \theta d\overline{S}\right) = \mathbf{R}(A)$$

minden $A \in \mathcal{A}$ esetén. Így tehát a martingálmérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán egyértelmű. Egyúttal persze azt is igazoltuk, hogy nincs a $\mathbf{Q}$ mértéken kívül olyan másik mérték, amely alatt a $\overline{S}$ esetleg lokális martingál lesz, vagyis a Black–Scholes-modellben az alapul vett Wiener-folyamat által generált σ-algebrán nem csak a martingálmérték, hanem a lokális martingálmérték is egyértelmű. □

1.11. Példa. Amerikai opciók árazása.

Emlékeztetünk, hogy amerikai opción olyan terméket értünk, amely kifizetésének időpontját a termék birtokosa határozza meg. Például az amerikai put opciók esetén az opció birtokosa által megválasztható τ időpontban a termék értéke $(K - S(\tau))^+$, így az opció birtokosa ezt az összeget kapja meg. Mivel a lehívás időpontja utólag nem határozható meg a τ megállási idő. Amerikai opciók esetén tehát nem egy valószínűségi változó a kifizetés, így közvetlenül a π függvény nem alkalmazható. Amerikai opciók árának meghatározásakor abból szokás kiindulni, hogy az eladó a $H(\tau)$ alakú változók közötti választás lehetőségét adja el, ahol H egy folyamat. Mivel a vevő a $H(\tau)$ változók közül bármelyiket választhatja, így kézenfekvő, ha árként az eladó a $\pi(H(\tau))$ lehetséges árak szuprémumát jelöli meg. Ha van $\mathbf{Q}$ egyértelmű martingál mérték, akkor az ár $\sup_\tau \pi(H(\tau)) = \sup_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}(\tau)\right)$. Ha van olyan τ^* optimális lehívási időpont, amelyre

$$\sup_\tau \pi(H(\tau)) = \sup_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}(\tau)\right) = \max_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}(\tau)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}(\tau^*)\right),$$

akkor a $\pi(H(\tau^*))$ a vevő által is elfogadható, ugyanis nem fog szisztematikusan veszíteni. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

2. fejezet

Az eszközárazás alaptétele diszkrét időhorizonton

A matematikai pénzügyekkel való ismerkedés folytatását érdemes a véges, diszkrét időhorizonton definiált modellekkel folytatni. A folytonos időhorizontú elmélet számos olyan technikai bonyodalmat tartalmaz, amely a diszkrét idejű modellekben nem jelentkezik, így a matematikai háttér a tárgyalása során nem vonja el a figyelmet a terület tényleges közgazdasági mondanivalójától. Ez nem jelenti azt, hogy a modellek matematikai szempontból nem izgalmasak, sőt. A terület matematikailag is rendkívül elegáns és lényegében a dualitáselmélet és a konvex analízis egy szellemes fejezetének tekinthető. A pénzügyeket forradalmasító alapvető feltétel az arbitrázs hiányának megkövetelése. A fejezetben szereplő dualitási tételek éppen ennek a feltételnek a meglétét karakterizálják a szeparációs tétel segítségével. A „nincsen arbitrázs" feltétel szokásos, köznapi megfogalmazása a kockázat nélkül nincsen üzlet, vagy ráfordítás nélkül nincsen eredmény közmondásos bölcsessége. A modern pénzügyi elmélet alapvető gondolata, hogy ez az elv elegendő alapot szolgáltat a $\mathbf{Q}$ mérték létezéshez és a származtatott termékek árazásához. Az elmélet szerint a piacon megjelenő termékek között nagyfokú redundancia van. A redundancia miatt az egyes termékek árai szorosan összefüggnek. Mivel a termékek lényegében költségek és korlátozás nélkül egymásba transzformálhatók, ezért az egyetlen korlát, ami az árakat alakítja, hogy veszteség lehetősége nélkül ne lehessen eredményt elérni. Vagyis a nincsen arbitrázs elv. A fejezet legfontosabb állítása annak igazolása, hogy véges számú időpontból álló időtartomány esetén ha a modell arbitrázsmentes és teljes, akkor a lehetséges kimenetelek száma véges. Vagyis „izgalmas" matematikai modellek megfogalmazásához vagy a teljesség feltételét kell elhagyni, vagy az időhorizont végességétől kell eltekinteni. A nem teljes modellek esetén előtérbe

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

kerülnek a hasznossági függvények, vagyis ilyenkor a modellekben explicit módon nem megfigyelhető elemeket is be kell vezetni. Az időhorizont nem véges volta esetén a modellekben fel kell használni a sztochasztikus analízis eszköztárát.

2.1. A Dalang–Morton–Willinger-tétel

A matematikai pénzügyek talán legszebb állítása, a Dalang–Morton–Willinger-tétel szerint véges és diszkrét időhorizont esetén a nincs arbitrázs tulajdonság szükséges és elegendő feltétele annak, hogy létezzen ekvivalens martingálmérték[1]. A tétel több szempontból is figyelmre méltó: egyrészt rendkívül elegáns, másrészt végső soron a legáltalánosabb ilyen irányú állítás, ugyanis a tételben szereplő egyetlen lényegi megkötés, a lehetséges időpontok végességének megkötése, nem ejthető el. A Dalang–Morton–Willinger-tétel majdnem azonos a jóval egyszerűbb, Harrison–Pliska-tételnek is mondott elemi állítással. Az egyetlen eltérés, hogy ez utóbbi állításban a lehetséges kimenetelek tere véges, vagyis az Ω alaptér véges számú atomból áll. A két állítás igazolása közötti eltérés nagyrészt a tételben szereplő feltételekből ered, ugyanis a Dalang–Morton–Willinger-tétel indoklásában, az állítás természetéből eredően, néhány elemi mértékelméleti megfontolás nem kerülhető el.

2.1.1. A tétel kimondása

Az előző fejezetben az L altér tulajdonságait nem különösebben specifikáltuk. Most az L lineáris teret jóval konkrétabban megadjuk: Most az időhorizont nem egyetlen egy időpontból, hanem $T < \infty$ számú diszkrét időpontból áll. Így a T nem csak egy időpontra, hanem az időpontok számára is utal, a lehetséges időpontok halmaza pedig a $t = 0{,}1, \ldots, T$ halmaz. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy általános valószínűségi mező. Miként látni fogjuk a $\mathbf{P}$ szerepe másodlagos, ugyanis alább az $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér, vagyis az ekvivalencia osztályok halmaza játsza a főszerepet, és az L^0 megadásához elegendő megadni a nullmértékű halmazok $\mathcal{N}$ családját. Minden egyes t időponthoz rendeljük hozzá, az addig az időpontig megfigyelhető események $\mathcal{F}_t$ halmazát. Vagyis $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ jelöli a t időpontig bezárólag bekövetkezett eseményeket megadó valószínűségi mezőt. Nyilván $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$. A sztochasztikus folyamatok elméletében bevett terminológiát használva az $\mathcal{F} \triangleq (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ tehát egy véges időhorizontú, de minden más szempontból tetszőleges filtráció. Legyen $(S(t))_{t=0}^T$ tetszőleges m-dimenziós $\mathcal{F}$-adaptált folyamat. Miként közismert, az adaptáltság csak annyit jelent, hogy minden t-re az $S(t)$ vektor értékű valószínűségi változó mérhető az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrára nézve. Az $S(t)$ vektorokat mint a $t = 0{,}1, \ldots, T$ időpontokban

[1] A pontos definíciókra még egy kicsit várni kell, de már nem sokat.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

megfigyelhető m darab kereskedett pénzügyi eszköz diszkontált árának idősorát interpretáljuk. A jelen állapotot reprezentáló $t = 0$ időponttól eltekintve az $S(t)$ vektorok valószínűségi változók, ugyanis az eszközök későbbi értékét nem ismerjük. A pénzügyekben szokásos módon az eszközökből portfóliókat készíthetünk. Az egyes eszközök portfólióban levő nagyságát, vagyis a portfólió súlyokat a $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ sorozat adja meg. Érdemes felfigyelni arra, hogy a $\theta(t)$ indexe nem 0-tól, hanem 1-től indul. Ennek oka, hogy a portfólió súlyokat mindig előre meg kell adni. A $\theta(t)$ értékét a $t-1$ időpontban mondjuk meg, így a $\theta(t)$ nem $\mathcal{F}_t$, hanem $\mathcal{F}_{t-1}$-mérhető. A θ sorozat ezen tulajdonságára mint a θ előrejelezhetőségére szokás hivatkozni[2]. Vezessük be az

$$R \stackrel{\circ}{=} \left\{ H \mid H = \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right\}$$

halmazt, ahol θ az előrejelezhető stratégiákon fut keresztül, vagyis miként jeleztük a $\theta(t)$ minden t-re $\mathcal{F}_{t-1}$-mérhető. Az R az $S(t)$ árfolyamok megváltozásából származó lehetséges kumulált árfolyamnyereségek halmaza. Az analízisben megszokott módon L_+^0 jelölje a nem negatív valószínűségi változók halmazát. Vezessük be az $A \stackrel{\circ}{=} R - L_+^0$, valamint a $\mathrm{cl}(A)$ halmazokat, ahol a lezárás a sztochasztikus konvergenciában értendő, és az A definíciójában a kivonás jel komplexus kivonást jelent. Diszkrét, véges időhorizont esetén az úgynevezett eszközárazás első alaptételének legáltalánosabb alakja a következő:

2.1. Tétel (Dalang–Morton–Willinger)**.** *A modellben a következő állítások ekvivalensek:*

1. $A \cap L_+^0 = \{0\}$.
2. *Megadható olyan* $\mathbf{Q}$ *valószínűség, amely ekvivalens az eredeti* $\mathbf{P}$ *valószínűségi mértékkel, amelyre a* $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ *Radon–Nikodym-derivált korlátos, és amely mellett az* S m*-dimenziós martingál.*

Érdemes hangsúlyozni, hogy a tételben szereplő első állítás azt jelenti, hogy nincsen olyan $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ előrejelezhető stratégia, amelyre

$$\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \geq 0$$

[2] Bárki felvetheti, hogy az előrejelezhetőség definíciója némiképpen furcsa. Talán első ránézésre logikusabb lenne, ha mindenhol a $\theta(t)$ helyett $\theta(t-1)$-et írnánk és a θ folyamatot szintén adaptáltnak mondanánk. A θ előrejelezhetőségének ily módon való bevezetésére a folytonos időhorizonttal való „kompatibiltás” miatt van szükség.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

és egy pozitív mértékű halmazon az egyenlőtlenség szigorú, vagyis nem lehet pozitív valószínűséggel nyerni anélkül, hogy pozitív valószínűséggel vesztenénk is. Ez közgazdaságilag éppen az előző fejezetben is említett nincsen arbitrázs feltétel. Másképpen fogalmazva az első állítás szerint a modellben nincsen arbitrázs.

2.1.2. Az L^0 tér elemi tulajdonságai

Emlékeztetünk, hogy az $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ téren az $\mathcal{F}$ σ-algebrára mérhető valószínűségi változók halmazát értjük. A továbbiakban az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ paramétert elhagyjuk, és a valamivel egyszerűbb L^0 jelölést fogjuk használni. A valószínűségi változókat a szokásos módon a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték szerint ekvivalencia osztályokba soroljuk. Az L^0 téren a konvergenciát a sztochasztikus konvergencia definiálja. Emlékeztetünk, hogy a sztochasztikus konvergencia metrizálható[3], így az L^0 részhalmazainak zártságát elegendő szekvenciális okoskodással igazolni, vagyis egy $Z \subseteq L^0$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden a Z halmazból vett konvergens sorozat határértéke is a Z halmazban van. A sztochasztikus konvergencia alapvetően fontos tulajdonsága, amely a későbbi gondolatmenet alapjául szolgál, hogy minden sztochasztikusan konvergens sorozat tartalmaz egy majdnem mindenhol konvergens részsorozatot, illetve, hogy a majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia. Ennek megfelelően egy $Z \subseteq L^0$ halmaz pontosan akkor zárt, ha a Z-ből vett minden majdnem mindenhol konvergens sorozatnak a határértéke is Z-be esik. Másképpen fogalmazva az L^0 térben a zártságot szekvenciális gondolatmenettel tudjuk igazolni, miközben az egyébként nem metrizálható majdnem mindenhol való konvergenciát[4] használjuk. Az L^0 tér számunkra kulcs tulajdonságát a következő kompaktsági lemma tartalmazza:

2.2. Lemma. *Legyen (η_n) $\mathbb{R}^m$ értékű mérhető függvények egy sorozata és tegyük fel, hogy a sorozat minden kimenetelre korlátos. Ekkor megadható olyan (σ_k) egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre az (η_{σ_k}) sorozat minden kimenetelre konvergens. Másrészről, ha $\sup_n \|\eta_n\| = \infty$, akkor van olyan (σ_k) egész értékű, szigorúan monoton növő, mérhető függvényekből álló sorozat, amelyre $\lim_{k\to\infty} \|\eta_{\sigma_k}\| = \infty$ minden kimenetelre.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a Bolzano–Weierstrass tétel miatt a kimenetelenkénti korlátosság miatt minden ω kimenetel esetén triviálisan található olyan $(\sigma_k(\omega))$ szigorúan monoton növekedő sorozat, amelyre az $\left(\eta_{\sigma_k(\omega)}(\omega)\right)$ sorozat konvergens. A lényeges észrevétel, hogy a σ_k indexsorozat mérhetőnek választható. Legyen először (η_n) skalár értékű sorozat. A feltétel szerint

[3] Könnyen belátható, hogy a $d(\xi, \eta) \triangleq \mathbf{E}(|\xi - \eta| \wedge 1)$ egy alkalmas metrika.

[4] Érdemes megjegyezni, bár ennek nincsen jelentősége, hogy a majdnem mindenhol való konvergencia nem is topologizálható.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

az $\eta_\infty \stackrel{\circ}{=} \liminf_n \eta_n$ minden kimenetelre létezik és véges. Az (η_n) mérhetősége miatt az η_∞ is mérhető. Legyen $\sigma_0 \stackrel{\circ}{=} 0$, és vezessük be a

$$\sigma_k \stackrel{\circ}{=} \inf\left\{ n > \sigma_{k-1} \mid |\eta_n - \eta_\infty| \leq \frac{1}{k} \right\}$$

függvényeket. Elemi megfontolásokkal azonnal belátható, hogy a σ_k minden k-ra mérhető, illetve $\eta_{\sigma_k} \to \eta_\infty$. Következésképpen a lemma állítása ilyenkor teljesül. Többdimenziós esetben először az első koordinátához készítsük el a részsorozatot, majd a már megritkított sorozat második koordinátájához keressük meg a konvergenciát biztosító indexsorozatot. Az eljárást egymás után az összes koordinátákra megismételve a (σ_k) indexsorozatot egyszerű, véges lépésből álló iterációval megkaphatjuk. Az állítás második felének indoklásához elegendő a

$$\sigma_k \stackrel{\circ}{=} \inf\left\{ n > \sigma_{k-1} \mid \|\eta_n\| \geq k \right\}$$

sorozatot venni. □

A lemma közvetlen következménye, hogy a véges számú elem által generált úgynevezett véges kúpok zártságára vonatkozó közismert tétel átvihető véges dimenziós terekből az $L^0(\mathcal{F}, \mathbf{P})$ térbe.

2.3. Lemma. *Legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_m$ valamely $\mathcal{A}$ σ-algebra szerint mérhető tetszőleges függvények. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ és tekintsük az*

$$L \stackrel{\circ}{=} \left\{ f \mid f = \sum_{i=1}^{m} f_i \varphi_i, \quad \varphi_i \in L^0(\mathcal{F}, \mathbf{P}) \right\}$$

lineáris teret. Az L az $L^0(\mathcal{A}, \mathbf{P})$ zárt altere.

Bizonyítás. Vegyünk egy $l_n \in L$ sorozatot, és tegyük fel, hogy $l_n \to l_\infty$, ahol a konvergencián a majdnem mindenhol való konvergenciát értjük. Az $l_n \in L$ feltételből meg kell mutatnunk, hogy $l_\infty \in L$. Vektor jelölésre áttérve az L definíciója szerint $l_n \stackrel{\circ}{=} \langle g, y_n \rangle$, ahol $g \stackrel{\circ}{=} (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ és $y_n \stackrel{\circ}{=} \left(\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \ldots, \varphi_m^{(n)} \right)$, valamint minden n-re az y_n $\mathcal{F}$-mérhető. Vegyük észre, hogy a bizonyítás nehézsége pusztán abból áll, hogy az (l_n) konvergenciájából nem következik az (y_n) konvergenciája[5]. Ugyancsak vegyük észre, hogy elegendő belátni, hogy az (y_n) sorozatnak van az első lemma értelmében konvergens részsorozata, ugyanis ha alkalmas részsorozatra $y_{\sigma_k} \to y_\infty$, akkor az y_∞ $\mathcal{F}$-mérhető, ugyanis a lemma által biztosított (y_{σ_k}) részsorozat tagjai $\mathcal{F}$-mérhetőek, és

$$\langle g, y_{\sigma_k} \rangle \to \langle g, y_\infty \rangle = l_\infty.$$

[5] Érdemes hangsúlyozni, hogy pontosan ez a probléma lép fel akkor, amikor a véges dimenziós terekben azt kell igazolni, hogy minden véges kúp, vagy egy altér zárt. Az alábbi bizonyítás ezen az igen fontos állítás bizonyításának közismert ötletére épül.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A konvergens részsorozat létezéséhez elegendő belátni, hogy az (y_n) sorozat megválasztható úgy, hogy a sorozat majdnem minden kimenetelre pontonként korlátos. Legyen Ω_1 az Ω azon részhalmaza, ahol ez nem teljesül. Mivel (y_k) $\mathcal{F}$-mérhető ezért Ω_1 szintén $\mathcal{F}$-mérhető. A részsorozat megkonstruálásának céljából az Ω_1 halmazon az

$$l_n(\omega) = \langle g(\omega), y_n(\omega) \rangle$$

egyenlőséget osszuk végig az $\|y_n(\omega)\|$ sorozattal:

$$\frac{l_n(\omega)}{\|y_n(\omega)\|} = \left\langle g(\omega), \frac{y_n(\omega)}{\|y_n(\omega)\|} \right\rangle.$$

Az $(y_n(\omega) / \|y_n(\omega)\|)$ sorozat korlátos, így az előző lemma szerint van mérhető módon indexelt konvergens részsorozata. Természetesen előfordulhat, hogy a kiválasztott részsorozat bizonyos kimenetelekre korlátos. Ezen kimenetelek halmaza ismételten $\mathcal{F}$-mérhető. Ezeket a kimeneteleket töröljük az Ω_1 halmazból, és térjünk át a lemma második felében szereplő részsorozatra. A megmaradt kimenetelekre $\|y_{\sigma_n}(\omega)\| \to \infty$. Erre a részsorozatra áttérve az Ω_1-halmazon

$$\frac{l_{\sigma_n}(\omega)}{\|y_{\sigma_n}(\omega)\|} \to 0$$

ugyanis a számláló konvergens a nevező pedig végtelenbe tart. Az $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ halmazon ez azt jelenti, hogy van egy olyan változó, nevezetesen u_∞, amely $\mathcal{F}$-mérhető és amelyre

$$\langle g(\omega), u_\infty(\omega) \rangle = 0, \quad \omega \in \Omega_1.$$

Az $u_\infty(\omega) \in \mathbb{R}^m$ vektor egységnyi hosszú vektorok határértéke, így nem lehet azonosan nulla egyetlen $\omega \in \Omega_1$ esetén sem. Így minden $\omega \in \Omega_1$-re az

$$g(\omega) \stackrel{\circ}{=} (f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_m(\omega))$$

egyik koordinátája, természetesen minden ω-ra esetleg más és más, kifejezhető a többi segítségével. A lényeges gondolat az, hogy amikor a g valamelyik koordinátáját az Ω_1-en kifejezzük a többivel, akkor a súlyok $\mathcal{F}$-mérhetőek. A kifejtéseket az

$$l_{\sigma_n}(\omega) = \langle g(\omega), y_{\sigma_n}(\omega) \rangle$$

egyenlőségbe visszahelyettesítve feltehető, hogy az Ω_1 halmazon minden ω-ra az $y_{\sigma_n}(\omega)$ koordinátái közül csak $m-1$ súly nem nulla, miközben az Ω_1 komplementerén az y_{σ_n} korlátos és az $\omega \mapsto y_{\sigma_n(\omega)}(\omega)$ függvények $\mathcal{F}$-mérhetőek. Ha az így kapott súlyok halmaza még mindig nem korlátos, akkor az eljárást megismételjük. Vagyis létezik egy $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$ pozitív mértékű halmaz, amelyhez már van olyan (y_{σ_N}) részsorozat, amely az Ω_2 komplementerén korlátos

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

és amelynek az Ω_2-ön már legfeljebb csak $m-2$ koordinátája nem nulla. Utolsó lépésként már csak egyetlen koordináta marad, vagyis feltehető például, hogy $l_n = f_1\varphi_1^{(n)}$. Ilyenkor a $\varphi_1^{(n)}(\omega)$ csak akkor lehet nem korlátos, ha az $f_1(\omega)$ nulla, de ilyenkor a $\varphi_1^{(n)}$ is választható nullának, vagyis ha Ω_m jelöli azt az $\mathcal{F}$-mérhető halmazt, ahol a $\left(\varphi_1^{(n)}\right)$ nem korlátos, akkor a $\left(\varphi_1^{(n)}\right)$ sorozat helyett a $\left(\varphi_1^{(n)}\chi_{\Omega_m^c}\right)$ sorozatot véve a (y_n) sorozat $\mathcal{F}$-mérhető marad és korlátos lesz. Mivel az eljárás véges lépésben befejeződik, ezért feltehető, hogy az (y_n) sorozat korlátos, amivel az L zártságát igazoltuk. □

A nincsen arbitrázs feltétel a következő lemmában játszik szerepet[6]:

2.4. Lemma. *Jelölje $L_+^0(\mathcal{A},\mathbf{P})$ az előző lemmában szereplő $\mathcal{A}$ σ-algebrán nem negatív változók halmazát. Ha az előző lemmában szereplő L altérre*

$$L \cap L_+^0(\mathcal{A},\mathbf{P}) = \{0\},$$

akkor az

$$A \stackrel{\circ}{=} L - L_+^0(\mathcal{A},\mathbf{P})$$

kúp zárt az $L^0(\mathcal{A},\mathbf{P})$ térben.

Bizonyítás. A lemma bizonyítása az előző lemma bizonyításának értelemszerű módosításával kapható. Az $l_n \stackrel{\circ}{=} (g, y_n)$ egyenlőség helyett az

$$a_n \stackrel{\circ}{=} \langle g, y_n\rangle - r_n$$

egyenlőségből kell kiindulni, ahol $r_n \geq 0$. A végigosztás, illetve a konvergens részsorozatra való áttérés után az $(r_{\sigma_n}/\|y_{\sigma_n}(\omega)\|)$ sorozat szükségszerűen konvergens, ugyanis az egyenlőségben szereplő másik két sorozat is konvergens. Az Ω előző lemmában szereplő megfelelő Ω_k részhalmazain érvényes a

$$0 = \langle g, y_\infty\rangle - r_\infty, \quad r_\infty \geq 0$$

felbontás, ahol értelemszerűen r_∞ jelöli az $(r_{\sigma_n}/\|y_{\sigma_n}(\omega)\|)$ sorozat határértékét. Értelemszerűen

$$\langle g, y_\infty\chi_{\Omega_k}\rangle = r_\infty\chi_{\Omega_k}.$$

Ebből, felhasználva, hogy az $y_\infty\chi_{\Omega_k}$ változó $\mathcal{F}$-mérhető az $L \cap L_+^0(\mathcal{A},\mathbf{P}) = \{0\}$ feltétel miatt $r_\infty\chi_{\Omega_k} = 0$, vagy ami ugyanaz, az Ω_k halmazon az r_∞ nulla, így a $\langle g, y_\infty\rangle$ is nulla, miközben az y_∞ nem nulla, vagyis a g nem nulla koordinátáinak száma ismételten csökkenthető. Ebből az állítás indoklása az előző lemma gondolatmenetét megismételve már evidens. □

[6] Vegyük észre, hogy ebben a lemmában az előző fejezet végén bemutatott zártsági problémát oldjuk fel.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

2.5. Példa. Az A zártsága a nincsen arbitrázs feltétel nélkül nem igaz.

Az ellenpélda a következő: Legyen $\Omega \stackrel{\circ}{=} [0,1]$, $\mathcal{F}$ legyen a triviális σ-algebra, $\mathcal{A}$ legyen a Borel-mérhető halmazok σ-algebrája és legyen $f(\omega) \stackrel{\circ}{=} \omega$. Legyen

$$g_n(\omega) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} n\omega, \text{ ha } \omega \leq 1/n \\ 1, \text{ ha } \omega \geq 1/n \end{cases}.$$

Triviálisan $g_n \leq n \cdot f \in L$, vagyis $g_n \in A$. Nyilván $g_n \to 1$. Ugyanakkor $1 \notin A$, ugyanis mivel az $\mathcal{F}$ a triviális σ-algebra, ezért az $\mathcal{F}$-mérhető függvények majdnem mindenhol konstansok, így minden $a \in A$ esetén van olyan m, hogy majdnem minden ω-ra

$$a(\omega) \leq m \cdot f(\omega) = m \cdot \omega,$$

ami a konstans $a = 1$ esetén nem teljesülhet. □

2.1.3. A Kreps–Yan szeparációs tétel

A tétel bizonyítása a végtelen dimenziós szeparációs tételre épül. A véges dimenziós esetben a tétel bizonyításakor elegendő az

$$R \stackrel{\circ}{=} \left\{ H \mid H = \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right\}$$

és az $\mathbb{R}^m_+$ konvex halmazokat elválasztani. Az általános esetben, a nehézségek abból erednek, hogy ilyenkor két konvex halmaz csak akkor választható el, ha az egyiknek van belső pontja. Az L^1 térben azonban a nem negatív változók halmazának nincsen belső pontja. Ezt orvosolja a következő lemma.

2.6. Lemma (Kreps–Yan)**.** *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tetszőleges valószínűségi mező. Legyen C a mezőn értelmezett integrálható függvényekből álló $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér olyan zárt, konvex kúpja, amelyre $C \supseteq \left(-L^1_+\right)$ és $C \cap L^1_+ = \{0\}$. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{A})$ téren létezik olyan $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték, amely ekvivalens*[7] *az eredeti $\mathbf{P}$ valószínűségi mértékkel, és amelyre*

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^\infty,$$

valamint

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(c) \stackrel{\circ}{=} \int_\Omega c\, d\mathbf{Q} = \int_\Omega c \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(c \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) \leq 0, \quad \forall c \in C.$$

[7] Emlékeztetünk, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalenciája definíció szerint azt jelenti, hogy $\mathbf{P}(A) = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{Q}(A) = 0$, vagyis a nulla valószínűségű események halmaza a két mérték esetében egybeesik. Természetesen a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ pontosan akkor ekvivalens, ha a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ létezik és pozitív. A $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ mindig normalizálható, vagyis feltehető, hogy a $\mathbf{Q}$ is valószínűségi mérték.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Az L^1 duálisa L^∞ tehát az L^1 téren értelmezett folytonos, lineáris funkcionálok alkalmas L^∞ függvény segítségével integrálként reprezentálhatóak, vagyis minden az L^1 téren értelmezett z folytonos, lineáris funkcionálnak egyértelműen megfeleltethető egy olyan, szintén z-vel jelölt L^∞-beli elem, amelyre tetszőleges $l \in L^1$ esetén

$$\langle z, l\rangle = \int_\Omega z \cdot l \, d\mathbf{P}.$$

Legyen $\mathcal{Z}$ az olyan z folytonos, lineáris funkcionálok halmaza, amelyekre $\langle z, C\rangle \leq 0$. Mivel $C \supseteq \left(-L^1_+\right)$ ezért a $\langle z, C\rangle \leq 0$ egyenlőtlenség miatt $\left\langle z, L^1_+\right\rangle \geq 0$, következésképpen $z \geq 0$ majdnem mindenhol. Mivel $0 \in \mathcal{Z}$, ezért $\mathcal{Z} \neq \emptyset$. Jelölje $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ elemeinek tartóhalmazaiból álló halmazt, vagyis $Y \in \mathcal{Y}$, ha van olyan $z \in \mathcal{Z}$, hogy $Y = \{z > 0\}$. Triviálisan az $\mathcal{Y}$ zárt a megszámlálható egyesítésre, ugyanis ha $z_n \in \mathcal{Z}$, akkor alkalmas α_n pozitív konstansokkal $\sum_n \alpha_n z_n \in \mathcal{Z}$. Ha

$$\lambda_0 = \sup\left\{\mathbf{P}\left(Y\right) \mid Y \in \mathcal{Y}\right\},$$

akkor van olyan $(Y_n) \subseteq \mathcal{Y}$ sorozat, amelyre $\mathbf{P}\left(Y_n\right) \nearrow \lambda_0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy az (Y_n) monoton nő, és miként az imént megjegyeztük, $Y_0 \triangleq \cup_n Y_n \in \mathcal{Y}$, tehát $\mathbf{P}\left(Y_0\right) = \lambda_0$. Az állítást belátjuk, ha megmutatjuk, hogy $\lambda_0 = 1$, ugyanis akkor találtunk egy olyan $z_0 \in \mathcal{Z}$ elemet, vagyis egy olyan $z_0 \in L^\infty$ függvényt, amelyre $\langle z_0, C\rangle \leq 0$, és amelyre $\mathbf{P}\left(z_0 > 0\right) = 1$. Ilyenkor a

$$z_0 \triangleq \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$$

választás mellett a lemma állítása teljesül.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{P}\left(Y_0\right) < 1$, és vegyük az $x \triangleq \chi_{Y_0^c} \in L^1_+ \setminus \{0\}$ függvényt. Mivel a C zárt, konvex halmaz és a lemma $C \cap L^1_+ = \{0\}$ feltétele miatt $x \notin C$, ezért a végtelen dimenziós szeparációs tétel, a Hahn–Banach-tétel, szerint található az L^1 téren értelmezett olyan z_x folytonos, lineáris funkcionál, amelyre

$$\langle z_x, x\rangle > \langle z_x, c\rangle, \quad c \in C. \tag{2.1}$$

A C kúp, így ha $\langle z_x, c\rangle > 0$ valamely $c \in C$ elemre, akkor $\langle z_x, s \cdot c\rangle \nearrow \infty$ ha $s \nearrow \infty$, így az (2.1) szeparációs egyenlőtlenség nem teljesülhet. Ebből következően

$$\langle z_x, c\rangle \leq 0, \quad c \in C.$$

Tetszőleges $B \in \mathcal{A}$ esetén $\chi_B \in L^1_+$, ezért $z_x \geq 0$, ugyanis ha egy pozitív mértékű B halmazon $z_x < 0$, akkor a $-s\chi_B \in -L^1_+ \subseteq C$ halmazon

$$\langle z_x, -s \cdot \chi_B\rangle = -s \int_B z_x d\mathbf{P} > 0,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ami az s növelésével ismét tetszőlegesen naggyá tehető. Következésképpen az (2.1) szeparációs egyenlőtlenség ismét nem teljesülhetne. Mivel $0 \in C$, ezért $\langle z_x, x\rangle > 0$, vagyis $\int_\Omega z_x x d\mathbf{P} > 0$, tehát a z_x tartója egy pozitív mértékű halmazon belemetsz az $x \triangleq \chi_{Y_0^c}$ tartójába, vagyis a z_x az Y_0^c halmaz egy pozitív valószínűségű részhalmazán pozitív. Ebből következően egyrészt

$$\langle z_0 + z_x, C\rangle = \langle z_0, C\rangle + \langle z_x, C\rangle \leq 0$$

másrészt $z_0 + z_x \geq 0$ és a $z_0 + z_x$ tartója nagyobb, mint Y_0, ami ellentmond a $\mathbf{P}(Y_0)$ maximalitásának. □

2.1.4. A tétel bizonyítása

Végezetül rátérhetünk a Dalang–Morton–Willinger-tétel bizonyítására.

1. Tegyük fel, hogy teljesül a nincsen arbitrázs feltétel. Megmutatjuk, hogy ebből következik az ekvivalens martingálmérték létezése. Az állítást T szerinti indukcióval igazoljuk.

Legyen $T = 1$. Megjegyezzük, hogy tetszőleges véges sok η_k, változó esetén a $\mathbf{P}$ valószínűségi mező megválasztható úgy, hogy az η_k változók integrálhatóak lesznek. Elég például a $\mathbf{P}$ helyett a

$$\mathbf{P}'(A) \triangleq \alpha \int_A \exp(-\|\eta\|)\, d\mathbf{P}$$

$\mathbf{P}$-vel ekvivalens teret venni, ahol $\mu = \max|\eta_k| < \infty$. Az új mérték mellett az η_k várható értéke

$$\int_\Omega \eta_k \exp(-\|\eta\|)\, d\mathbf{P}$$

lesz. Az $x\exp(-|x|)$ függvény korlátos, vagyis integrálható, az áttérést biztosító $\alpha\exp(-\|\eta\|)$ Radon–Nikodym-derivált korlátos. A korlátosság miatt a már integrálható változók integrálhatóak maradnak, így az eljárás többször egymás után is megismételhető. Mivel a tételben szereplő állítások érvényben maradnak, ha ekvivalens valószínűségre térünk át[8], ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az S folyamat minden időszakban integrálható. Mivel az L^1-ben való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért a $C \triangleq A \cap L^1$ kúp az A sztochasztikus konvergenciában való zártsága miatt zárt az L^1 térben, és a nincsen arbitrázs feltétel szerint $C \cap L^1_+ = \{0\}$. A Kreps–Yan szeparációs tétel alapján van olyan $\mathbf{Q}$ ekvivalens mérték, amelyre a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \in L^\infty$, és amelyre

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(c) \leq 0, \quad c \in C.$$

[8] A sztochasztikusan konvergens sorozatok pontosan azok a sorozatok, amelyek bármely részsorozata rendelkezik, ugyan ahhoz a változóhoz konvergáló, majdnem mindenhol konvergens részsorozattal. Ekvivalens mértékek esetén a majdnem mindenhol konvergens sorozatok halmaza nyilván azonos.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Speciálisan, ha vesszük a $c \overset{\circ}{=} \pm [S(t) - S(t-1)]\,\theta(t)$ elemeket, ahol a $\theta(t)$ $\mathcal{F}_{t-1}$-mérhető és korlátos, akkor

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\langle S(t) - S(t-1), \theta(t)\rangle) = 0.$$

Ha $\theta(t) \overset{\circ}{=} \chi_F$ ahol $F \in \mathcal{F}_{t-1}$, akkor

$$\int_F S(t) - S(t-1)\, d\mathbf{Q} = 0.$$

Az S integrálható a $\mathbf{P}$ szerint, és mivel a Radon–Nikodym-derivált korlátos, ezért a $\mathbf{Q}$ szerint is integrálható, így az integrálok szétszedhetők, vagyis

$$\int_F S(t)\, d\mathbf{Q} = \int_F S(t-1)\, d\mathbf{Q}, \quad F \in \mathcal{F}_{t-1}.$$

A feltételes várható érték definíciója szerint

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S(t) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = S(t-1),$$

vagyis az S martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, így a $\mathbf{Q}$ az S ekvivalens martingálmértéke.

Tegyük fel, hogy az állítást már $T-1$ esetén igazoltuk. Világos, az eredeti modellre feltett nincsen arbitrázs feltételből következik, hogy a nincsen arbitrázs feltétel az időtartomány tetszőleges részintervallumára is igaz, így a $t = 0{,}1$ és a $t = 1, \ldots, T$ időperiódusokra is. Jelölje $\mathbf{Q}_1$ a $t = 0{,}1$ időszakra kapott martingálmértéket és legyen $\mathbf{Q}_2$ a $t = 1, \ldots, T$ időszakra kapott martingálmérték[9]. $T = 1$ esetén az állítást már igazoltuk, így az indukciós feltétel miatt a $\mathbf{Q}_1$ és $\mathbf{Q}_2$ mértékek léteznek. A nincsen arbitrázs feltétel teljesülése triviálisan nem függ az ekvivalens mértékcserétől, ezért az állítást a $(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbf{P})$ helyett alkalmazhatjuk a $(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbf{Q}_2)$ mértéktérre is, így a $d\mathbf{Q}_1/d\mathbf{Q}_2$ derivált korlátos. A $\mathbf{Q}$ mérték deriváltját definiáljuk a

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \overset{\circ}{=} \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2}\frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}}$$

szorzattal. Ez azt jelenti, hogy

$$\mathbf{Q}(A) \overset{\circ}{=} \int_A \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2}\frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_A \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2.$$

Mivel a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ triviálisan pozitív és korlátos, ezért elegendő azt megmutatni, hogy a $\mathbf{Q}$ valóban martingálmérték a teljes $t = 0{,}1, \ldots, T$ időtartományon. Az S-ről feltehető, hogy a $\mathbf{P}$ alatt integrálható volt és mivel a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ korlátos,

[9] Az időszak $T-1$ kereskedési periódust tartalmaz.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ezért az S integrálható a $\mathbf{Q}$ alatt is. Legyen $F \in \mathcal{F}_0$. Felhasználva, hogy a $\mathbf{Q}_1$ martingálmérték a $t = 0{,}1$ időtartományon[10]

$$\begin{aligned}\int_F S(1)\, d\mathbf{Q} &= \int_F S(1)\, \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} \stackrel{\circ}{=} \int_F \left(S(1)\, \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} \right) \frac{d\mathbf{Q}_2}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \\ &= \int_F S(1)\, \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 = \int_F S(1)\, d\mathbf{Q}_1 = \int_F S(0)\, d\mathbf{Q}_1 = \\ &= \int_F S(0)\, \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 = \int_F S(0)\, \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \\ &= \int_F S(0)\, d\mathbf{Q},\end{aligned}$$

vagyis

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S(1) \mid \mathcal{F}_0) = S(0).$$

Legyen most $t \geq 1$. A $d\mathbf{Q}_1/d\mathbf{Q}_2$ korlátos és a konstrukció miatt $\mathcal{F}_1$-mérhető, így $\mathcal{F}_t$-mérhető, ugyanis $t \geq 1$, így ha $F \in \mathcal{F}_t$, akkor, a korlátosság alapján használva a kiemelési szabályt

$$\begin{aligned}\int_F S(t+1)\, d\mathbf{Q} &= \int_F S(t+1)\, \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} d\mathbf{Q}_2 = \\ &= \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_2} \left(S(t+1)\, \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} \mid \mathcal{F}_t \right) d\mathbf{Q}_2 = \\ &= \int_F \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_2}(S(t+1) \mid \mathcal{F}_t)\, d\mathbf{Q}_2 = \\ &= \int_F \frac{d\mathbf{Q}_1}{d\mathbf{Q}_2} S(t)\, d\mathbf{Q}_2 = \int_F S(t)\, d\mathbf{Q},\end{aligned}$$

következésképpen az $(S(t))_{t=0}^T$ martingál a $\mathbf{Q}$ alatt.

2. Tegyük fel, hogy van olyan $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens mérték, amely mellett az S martingál. Ha $h \in A \cap L_+^0$, akkor van olyan θ előrejelezhető stratégia, amelyre

$$0 \leq h \leq \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle. \tag{2.2}$$

Elegendő megmutatnunk, hogy

$$0 \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(h) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right) = 0.$$

[10] Az $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ mérhető téren kell a számolást elvégezni.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Amiből a $h \geq 0$ felhasználásával a h $\mathbf{Q}$-majdnem minden kimenetelre nulla. Mivel a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalensek, ezért a h $\mathbf{P}$-majdnem mindenhol is nulla, így teljesül a nincsen arbitrázs feltétel.

A bizonyításban némi technikai bonyodalmat jelent, hogy a $\theta(t)$ stratégiák nem feltétlenül korlátosak, így a feltételes várható értékben a kiemelési szabály közvetlenül nem használható, sőt még azt sem tudjuk, hogy az egyes

$$\langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle$$

szorzatok integrálhatóak, így azt sem tudjuk, hogy az összeg integrálja vehető-e tagonként vagy sem. Ez a következő gondolatmenettel orvosolható: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A (2.2) sort szorozzuk be $\chi(\|\theta(1)\| \leq n)$-nel. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyenek h és θ a már beszorzott kifejezések. Így feltehető, hogy a $\theta(1)$ korlátos. Tetszőleges n-re a $\chi(\|\theta(1)\| \leq n)$ függvény $\mathcal{F}_0$-mérhető, így az új θ stratégia előrejelezhető marad. Az S $\mathbf{Q}$-martingál tulajdonsága szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\langle S(1) - S(0), \theta(1) \rangle) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\langle S(1) - S(0), \theta(1) \rangle \mid \mathcal{F}_0)\right) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left\langle \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S(1) - S(0) \mid \mathcal{F}_0), \theta(1) \right\rangle\right) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\langle 0, \theta(1) \rangle) = 0.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a kiemelési szabályt azért használhattuk, mert a $\theta(1)$ függvény az előrejelezhetőség miatt $\mathcal{F}_0$-mérhető és természetesen korlátos. Ebből következően az $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ szerinti várható értékben az összeg szétszedhető és

$$0 \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(h) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\langle S(1) - S(0), \theta(1) \rangle) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle\right),$$

ahol az első várható érték nulla. Tekintsük tehát az

$$0 \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(h) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle\right)$$

egyenlőtlenséget. Szorozzuk be a (2.2) sort most $\chi(\|\theta(2)\| \leq n)$-nel. A majorált konvergencia tétel miatt

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\langle S(1) - S(0), \theta(1) \chi(\|\theta(2)\| \leq n) \rangle) = 0,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

így van olyan n, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(h\chi\left(\|\theta\left(2\right)\|\leq n\right)\right)\leq\\
&\leq\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left\langle S\left(1\right)-S\left(0\right),\theta\left(1\right)\chi\left(\|\theta\left(2\right)\|\leq n\right)\right\rangle\right)+\\
&+\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T}\left\langle S\left(t\right)-S\left(t-1\right),\theta\left(t\right)\chi\left(\|\theta\left(2\right)\|\leq n\right)\right\rangle\right)<\\
&<\frac{\varepsilon}{T}+\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=2}^{T}\left\langle S\left(t\right)-S\left(t-1\right),\theta\left(t\right)\chi\left(\|\theta\left(2\right)\|\leq n\right)\right\rangle\right)=\\
&=\frac{\varepsilon}{T}+\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left\langle S\left(2\right)-S\left(1\right),\theta\left(2\right)\chi\left(\|\theta\left(2\right)\|\leq n\right)\right\rangle\right)+\\
&+\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=3}^{T}\left\langle S\left(t\right)-S\left(t-1\right),\theta\left(t\right)\chi\left(\|\theta\left(2\right)\|\leq n\right)\right\rangle\right)=\\
&=\frac{\varepsilon}{T}+\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=3}^{T}\left\langle S\left(t\right)-S\left(t-1\right),\theta\left(t\right)\chi\left(\|\theta\left(2\right)\|\leq n\right)\right\rangle\right).
\end{aligned}$$

Az eljárást folytatva megmutatható, hogy alkalmas n-re

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(h\prod_{t=1}^{T}\chi\left(\|\theta\left(t\right)\|\leq n\right)\right)\leq\varepsilon.$$

A monoton konvergencia tétel miatt $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(h\right)\leq\varepsilon$, amiből, mivel az $\varepsilon>0$ tetszőleges, $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(h\right)=0$. □

2.2. A piac teljessége, az eszközárazás második alaptétele

A származtatott termékek árazásával kapcsolatos igen fontos fogalom a teljesség fogalma. A teljesség fogalma azt jelenti, hogy a jövőbeli követelések kivétel nélkül fedezhetőek:

2.7. Definíció. Azt mondjuk, hogy az S eszközár folyamat által definiált piac a $t=0,1,2,\ldots,T$ időhorizonton teljes, ha tetszőleges H_T $\mathcal{F}_T$-mérhető valószínűségi változóhoz található olyan

$$\left(\theta_i\left(t\right)\right)_{i=1}^{m},\quad t=1,\ldots,T$$

előrejelezhető stratégia és λ valós szám, hogy

$$H_T=\lambda+\sum_{t=1}^{T}\left\langle S\left(t\right)-S\left(t-1\right),\theta\left(t\right)\right\rangle,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ahol az egyenlőség valószínűségi változók között érvényes, vagyis majdnem minden kimenetelre teljesül.

2.8. Tétel (Az eszközárazás második alaptétele)**.** *Tegyük fel, hogy az* $(S(t))$, $t = 0,1,\ldots,T$ *eszközár folyamat által definiált piacon nincsen arbitrázs. A modell pontosan akkor teljes, ha a martingálmérték az* $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ *téren egyértelmű.*

Bizonyítás. Az állítás bizonyítása két részből áll.

1. Tegyük fel, hogy a piac teljes és legyenek $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ két különböző martingálmérték. Mivel a két mérték különböző, ezért van olyan $F \in \mathcal{F}_T$, hogy $\mathbf{Q}(F) \neq \mathbf{R}(F)$. A feltételezett teljesség miatt van olyan $(\theta(t))_{t=1}^T$ m-dimenziós előrejelezhető stratégia, hogy

$$\chi_F = \lambda + \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle . \tag{2.3}$$

A bizonyítás alapgondolata, hogy mind a két oldalon alkalmazzuk a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{R}$ mértékek szerinti várható érték operátorokat. A gondolatmenet kulcsa, hogy tetszőleges $\mathbf{P}$ martingálmérték esetén

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right) = 0, \tag{2.4}$$

amiből

$$\mathbf{Q}(F) = \lambda = \mathbf{R}(F)$$

ami lehetetlen. A (2.4) sor igazolásában ismét gondot jelent, hogy mivel a θ stratégiák nem feltétlenül korlátosak, ezért sem a kiemelési szabályt, sem az integrál additivitását nem tudjuk közvetlenül használni. Vegyük észre azonban, hogy az összeg integrálható. Miként korábban, ha az összeget beszorozzuk a $\chi(\|\theta(1)\| \leq n)$ kifejezéssel, akkor a $\theta(1)\chi(\|\theta(1)\| \leq n)$ korlátossága és az $S(1) - S(0)$ integrálhatósága miatt az

$$\langle S(1) - S(0), \theta(1) \rangle \chi(\|\theta(1)\| \leq n) \tag{2.5}$$

integrálható lesz. Ebből következően a

$$\sum_{t=2}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t)\chi(\|\theta(1)\| \leq n) \rangle \stackrel{\circ}{=} \sum_{t=2}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \psi(t) \rangle$$

is integrálható és a ψ változók előrejelezhetőek maradnak. Az S martingál tulajdonsága és a θ előrejelezhetősége miatt az (2.5) várható értéke nulla lesz.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az eljárást az előző alpontban már bemutatott módon folytatva megmutatható, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan n, hogy

$$\left|\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\sum_{t=1}^{T}\left\langle S\left(t\right)-S\left(t-1\right),\theta\left(t\right)\chi\left(\left\|\theta\left(t\right)\right\|\leq n\right)\right\rangle\right)\right|\leq$$
$$\leq\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\sum_{t=1}^{T}\left|\left\langle S\left(t\right)-S\left(t-1\right),\theta\left(t\right)\chi\left(\left\|\theta\left(t\right)\right\|\leq n\right)\right\rangle\right|\right)\leq\varepsilon.$$

Mivel az összeg integrálható, ezért ha $n\nearrow\infty$, akkor a majorált konvergencia tétele alapján

$$\left|\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\sum_{t=2}^{T}\left\langle S\left(t\right)-S\left(t-1\right),\theta\left(t\right)\right\rangle\right)\right|\leq\varepsilon.$$

Mivel ε tetszőleges, ezért az (2.4) sor teljesül.

2. Tegyük fel, hogy a piac nem teljes. A feltétel szerint a piacon nincsen arbitrázs, így van olyan $\mathbf{Q}$ mérték, amely mellett az S folyamat minden koordinátája martingál. Definíció szerint legyen

$$L\stackrel{\circ}{=}\left\{\lambda+\sum_{t=1}^{T}\left\langle S\left(t\right)-S\left(t-1\right),\theta\left(t\right)\right\rangle\right\},$$

ahol θ tetszőleges előrejelezhető portfólió és λ tetszőleges valós szám. Mivel a piac nem teljes, ezért $L\neq L^{0}\left(\Omega,\mathcal{F}_{T},\mathbf{Q}\right)$. Legyen H_T egy olyan követelés, amely nem állítható elő. Mivel a H_T-val együtt is csak véges sok valószínűségi változó szerepel a modellben a $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték ismét kicserélhető úgy, hogy a modellben szereplő összes változó integrálható legyen. Emlékeztetünk, hogy az első alaptételben az arbitrázs hiánya miatt létező martingálmérték Radon–Nikodym-deriváltja korlátos. Így feltehető, hogy nem csak az $\left(S\left(t\right)\right)_{t=1}^{T}$, hanem a H_T is integrálható a $\mathbf{Q}$ martingálmérték alatt. Megmutatjuk, hogy az L zárt az $L^{1}\left(\Omega,\mathcal{F}_{T},\mathbf{Q}\right)$ térben. Alább egy külön lemmában belátjuk, hogy az

$$R\stackrel{\circ}{=}\left\{H:H=\sum_{t=1}^{T}\left\langle S\left(t\right)-S\left(t-1\right),\theta\left(t\right)\right\rangle\right\}$$

az L^0 egy zárt altere. A Markov-egyenlőtlenség miatt az L^1-ben való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, így az $R\cap L^{1}$ zárt altér az L^1-ben. Valószínűségi mértékekről lévén szó $1\in L^{1}$, így ha az egyszerűség kedvéért továbbra is L jelöli az L és az L^1 metszetét, akkor az L felírható mint egy zárt R altér és egy egy-dimenziós altér összege. Ha $1\in R$, akkor

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

készen vagyunk ugyanis ilyenkor $L = R$ és az $L = R$ zárt. Ha $1 \notin R$, akkor minden $l \in L$ felírható $l = \lambda 1 + r$ alakban. Ha $l_n \to l_\infty$ az L altérben, akkor egyedül az okozza a problémát, hogy nem tudjuk, hogy az (l_n)-hez tartozó (λ_n) sorozat korlátos, vagy sem. Legyen d az R és az 1 távolsága. Mivel az R zárt és $1 \notin R$, ezért $d > 0$. Az (l_n) sorozat konvergens, így korlátos is. Legyen c az (l_n) sorozat korlátja. Mivel az R altér, ezért ha $r_n \in R$, akkor

$$\left(-\frac{r_n}{\lambda_n}\right) \in R$$

így

$$c \geq |\lambda_n 1 + r_n| = |\lambda_n| \left|1 + \frac{r_n}{\lambda_n}\right| = |\lambda_n| \left|1 - \left(-\frac{r_n}{\lambda_n}\right)\right| \geq |\lambda_n|\, d,$$

amiből felhasználva, hogy $d > 0$

$$\frac{c}{d} \geq |\lambda_n|\,,$$

vagyis a (λ_n) sorozat korlátos. Ezért a (λ_n) számsorozatnak van konvergens részsorozata. Erre áttérve feltehető hogy a $(\lambda_n 1)$ sorozat konvergens. Mivel az összeg konvergens, ezért az (r_n) sorozat is konvergens. Mivel az R zárt ezért az (r_n) határértéke az R-ben van, és így a $(\lambda_n 1 + r_n)$ egy részsorozatának határértéke az L-ben van. Következésképpen a $(\lambda_n 1 + r_n)$ határértéke is L-ben van.

Mivel a $H_T \notin L$ is integrálható, ezért van olyan eleme az L^1 térnek, amely nincsen benne az L zárt altérben. A Hahn–Banach-tétel miatt van olyan $z \in$ $\in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{Q})$, amely elválasztja az L alteret és a H_T változót. Mivel az L altér, ezért az elválasztó síkot megadó $z \in L^\infty$ függvényre

$$\langle z, l\rangle \stackrel{\circ}{=} \int_\Omega z \cdot l \, d\mathbf{Q} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(z \cdot l) = 0, \quad l \in L. \tag{2.6}$$

Mivel a $\varphi(t) = 0$ és $\lambda = 1$ egy lehetséges előrejelezhető stratégia, ezért

$$\langle z,1\rangle \stackrel{\circ}{=} \int_\Omega z \cdot 1 \, d\mathbf{Q} = \int_\Omega z \, d\mathbf{Q} = 0.$$

Legyen

$$g \stackrel{\circ}{=} 1 + \frac{z}{2\,\|z\|_\infty} > 0,$$

és definiáljuk az

$$\mathbf{R}(A) \stackrel{\circ}{=} \int_A g d\mathbf{Q}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

mértéket. A $g = d\mathbf{R}/d\mathbf{Q}$ felülről korlátos és nagyobb vagy egyenlő mint egy pozitív szám, így a két mérték alatt az integrálható változók megegyeznek. Világos, hogy $g > 0$, és

$$\mathbf{R}(\Omega) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(1) + \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(z)}{2\|z\|_\infty} = 1,$$

tehát az $\mathbf{R}$ egy ekvivalens valószínűségi mérték. Mivel tetszőleges θ előrejelezhető folyamatra a $\lambda = 0$ mellett

$$\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \in L,$$

ezért ha a θ korlátos, akkor a (2.6) sor felhasználásával

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle\right) \triangleq \\
&\triangleq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \left(1 + \frac{z}{2\|z\|_\infty}\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle\right).
\end{aligned}$$

Mivel az S martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, és a θ előrejelezhető, ezért a jobb oldali kifejezés, tetszőleges korlátos θ esetén nulla, ezért a bal oldal is nulla. Ha a θ azonosan nulla kivéve a $t-1$ időpontban, ahol az értéke χ_F, ahol $F \in \mathcal{F}_{t-1}$, akkor

$$\mathbf{E}^{\mathbf{R}}((S(t) - S(t-1))\chi_F) = 0,$$

ami nem más mint

$$\int_F S(t)\, d\mathbf{R} = \int_F S(t-1)\, d\mathbf{R},$$

vagyis a feltételes várható érték definíciója alapján

$$\mathbf{E}^{\mathbf{R}}(S(t) \mid \mathcal{F}_{t-1}) = S(t-1).$$

Tehát az S folyamat az $\mathbf{R} \neq \mathbf{Q}$ mérték esetén is martingál, következésképpen a martingálmérték nem egyértelmű. □

2.9. Lemma. *A bizonyításban szereplő R halmaz zárt a sztochasztikus konvergencia topológiában*[11].

[11] Az állításhoz nincsen szükség a nincsen arbitrázs feltételre.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A bizonyítás a T időperiódus szerinti indukcióra épül. Ha $T = 1$, akkor a fenti 2.3. lemma szerint az R halmaz zárt. Ha $T > 1$, akkor $R = \Sigma_{t=1}^{T} R(t)$, ahol mindegyik $R(t)$ egy-egy zárt altér[12]. Legyen $a_n \in R$ és $a_n \to a_\infty$. Meg kell mutatni, hogy $a \in R$. Mivel minden sztochasztikusan konvergens sorozatnak van majdnem mindenhol konvergens részsorozata, feltehető, hogy az $a_n \to a$ konvergencia majdnem mindenhol értelemben is teljesül. Természetesen $a_n = \Sigma_{t=1}^{T} a_n(t)$, ahol $a_n(t) \in R(t)$. A bizonyítás problémája az, hogy nem tudjuk az egyes $(a_n(t))$ sorozatok, külön-külön való konvergenciáját, illetve nem tudjuk az $a_n(t)$-hez tartozó $(\theta_n(t))$ sorozatok konvergenciáját. Tegyük fel, hogy a $t = 2,3,\ldots,T$ indexekhez tartozó $R(t)$ halmazok $T-1$ tagból álló összegéről már tudjuk hogy zárt. Ezen indukciós feltevés miatt elegendő belátni, hogy az $(a_n(1))$ sorozatnak van $\left(a_{n_k(\omega)}(1)\right)$ konvergens részsorozata, ahol az $n_k(\omega)$ függvények $\mathcal{F}_0$-mérhetőek. Ilyenkor mivel a teljes T tagú összeg konvergens a $T-1$ tagú maradék is konvergens és a határértéke az indukciós feltétel miatt eleme a $T-1$ tagú halmazösszegnek, amiből következően az R zárt. Első lépésben az Ω alapteret két $\mathcal{F}_0$-mérhető része bontjuk $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Az egyiken az Ω_1 halmazon a $(\theta_n(1))$ korlátos, a másikon az Ω_2 halmazon a sorozat korlátlan. Az első részen $\mathcal{F}_0$-mérhető módon részsorozatra áttérve a $(\theta_n(1))$ konvergenciája ezen a részhalmazon biztosítható. A másikon a $(\theta_n(1))$ sorozat korlátlan, normájával végigosztva, majd konvergens részsorozatra áttérve az indukciós feltételt felhasználva belátható, hogy alkalmas θ^* előrejelezhető folyamatra

$$\langle S(1) - S(0), \theta^*(1)\rangle + \sum_{t=2}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta^*(t)\rangle = 0.$$

Az összeg azért nulla, mert egy konvergens sorozatot egy végtelenbe tartó sorozattal végigosztva nullához tartó sorozatot kapunk. Az Ω_2 halmazon minden kimenetelre nyilván $\theta^*(1) \neq 0$, ugyanis egy egy normájú sorozat határértéke. Ezért az $S(1) - S(0)$ valamelyik koordinátája kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Az előállítás során az együtthatók előrejelezhetőek lesznek. Az $a_n(t)$ előállításába visszahelyettesítve az $S(1) - S(0)$ koordinátái közül valamelyik nulla. Az eljárást folytatva, végés lépésben elérhető, hogy minden ω kimenetelre az $(\theta_n(1))$ korlátos legyen. □

2.3. Európai eszközök árazása

Az eszközárazás első és második alaptétele segítségével az európai típusú származtatott termékek árazása diszkrét és véges időhorizont esetén viszonylag egyszerűen elintézhető: Legyen H_T egy a T időszakban esedékes valamilyen

[12] Miként tudjuk, zárt alterek összege általában nem zárt.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

pénzügyi tranzakció. Mivel a H_T a T időszakban esedékes, és a T időszakban megfigyelhető eseményeket az $\mathcal{F}_T$ filtráció tartalmazza, ezért a H_T $\mathcal{F}_T$-mérhető. A kérdés az, hogy ha a H_T értékét a $t=0$ időpontban kell kifizetni, akkor mennyi a H_T ára, vagyis a $t=0$ időpontban kifizetendő milyen $\pi(H_T)$ összeg tekinthető a T időpontban esedékes H_T árának?

2.3.1. Nincs diszkontálás

Tegyük fel, hogy a piacon nincsen arbitrázs és tegyük fel, hogy a piac teljes. Ekkor az első és második alaptétel szerint létezik egyetlen martingálmérték. Jelölje $\mathbf{Q}$ ezt a martingálmértéket. A teljesség miatt

$$H_T = \lambda + \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle . \tag{2.7}$$

Közgazdasági megfontolásokból a H_T ára alatt azt a $\pi(H_T)$ összeget értjük, amely mellett a H_T bevezetése nem fogja tönkretenni a piac arbitrázsmentességét. Másképpen fogalmazva a H_T bevezetése azt jelenti, hogy a már meglevő m darab

$$S_i(0), S_i(1), \ldots, S_i(T), \quad i = 1,2,\ldots,m$$

idősor mellé bevezetünk egy $(m+1)$-edik eszközt, amely árfolyamát a

$$\pi(H_T), \ldots, H_T$$

idősor írja le[13]. Mikor marad az $m+1$ eszközből álló, kibővített piac arbitrázsmentes. Miként azonnal megmutatjuk, az arbitrázsmentesség csak akkor őrizhető meg, ha $\pi(H_T) = \lambda$. Valóban, ha például $\pi(H_T) > \lambda$, akkor a

$$(\theta(1), -1), (\theta(2), -1), \ldots, (\theta(T), -1)$$

$(m+1)$ dimenziós stratégia egy arbitrázs stratégia[14], ugyanis mivel a konstans függvények minden σ-algebra szerint mérhetőek, ezért egyrészt a kibővített stratégia triviálisan előrejelezhető, másrészt az új stratégia nettó eredménye a fenti (2.7) felhasználásával

$$\pi(H_T) + \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle - H_T = \pi(H_T) - \lambda > 0,$$

ami pedig arbitrázs.

[13] Hogy miként alakul a H_T tranzakció ára a köztes időpontokban számunkra érdektelen. A lényeges dolog az, hogy a T időpontban az árat a H_T adja meg.

[14] Mivel a termék drága a tényleges árához képest, ezért el kell adni!

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

További kérdés persze, hogy hogyan lehetne a λ számot a $\mathbf{Q}$ mérték segítségével kifejezni? Ehhez fel kell tenni, hogy a H_T integrálható a $\mathbf{Q}$ martingálmérték szerint. A szokásos származtatott termékek esetén ez triviálisan teljesül, ugyanis ha például $H_T \stackrel{\circ}{=} \max(c, S_1(T))$, akkor az $S_1(T)$ integrálható a $\mathbf{Q}$ martingálmérték szerint és így a H_T is integrálható a $\mathbf{Q}$ szerint. Mivel a $\mathbf{Q}$ martingálmérték és a H_T a $\mathbf{Q}$ szerint integrálható, ezért a $\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle$ várható értéke nulla[15], vagyis

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right) = 0.$$

Ebből következően a (2.7) sorban a $\mathbf{Q}$ mérték szerint várható értéket véve

$$\pi(H_T) = \lambda + 0 = \lambda + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t) \rangle \right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H_T). \quad (2.8)$$

Érdemes megjegyezni, hogy a (2.8) képlet szempontjából csak az arbitrázsmentességre volt szükség, a teljesség feltételére csak annyiban támaszkodtunk, hogy feltettük, hogy a fenti (2.7) előállítás lehetséges. Ha a piac nem teljes, akkor a (2.7) előállítás nem minden H_T esetében lehetséges. Ha valamely H_T-ra azonban az előállítás létezik, akkor az árára a (2.8) teljesül, függetlenül attól, hogy a $\mathbf{Q}$ melyik a lehetséges martingálmértékek közül. Az olvasó az egyértelműség kapcsán felvetheti, hogy a λ értéke, és így a $\pi(H_T)$ ár egyértelmű-e? Tegyük fel, hogy valamely H_T rendelkezik, két olyan előállítással, amelyben $\lambda_1 < \lambda_2$. Tekintsük a

$$\left(\theta^{(1)}(1) - \theta^{(2)}(1) \right), \ldots, \left(\theta^{(1)}(T) - \theta^{(2)}(T) \right)$$

előrejelezhető stratégiát. Ennek eredménye

$$\sum_{t=1}^{T} \left\langle S(t) - S(t-1), \theta^{(1)}(t) - \theta^{(2)}(t) \right\rangle = (H_T - \lambda_1) - (H_T - \lambda_2) = \\ = \lambda_2 - \lambda_1 > 0,$$

ami a nincsen arbitrázs feltétel miatt lehetetlen. Ebből következően, ha nincsen arbitrázs, akkor teljesül az úgynevezett egy ár törvény, vagyis minden H_T pénzügyi tranzakció esetén amelyre a (2.7) előállítás létezik, a λ konstans értéke, következésképpen a $\pi(H_T)$ ár is, azonos.

[15] A bizonyítása megegyezik a korábban már bemutatottal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

2.3.2. Diszkontálás, önfinanszírozó portfóliók

Az idáig bemutatott modell matematikai szempontból igen elegáns, de pénzügyi szempontból hibás. Ennek oka, hogy a modellben szereplő $S(t)-S(t-1)$ változó pénzügyi szempontból értelmetlen. Két különböző időpontra vonatkozó árat csak akkor lehet kivonni egymásból, ha az árakat diszkontáltuk. A modell megmentésének egyik lehetséges módja, hogy az S folyamat elemeit eleve diszkontáltnak tételezzük fel. Ennek azonban az a hátránya, hogy a diszkontálásra használt terméket nem szerepeltethetjük az S elemei között, ugyanis a diszkontáláshoz használt termék diszkontált ára konstans módon egynek adódik, így az árfolyamdifferenciája azonosan nulla, így a megfelelő koordináta hozzájárulása az $\langle S(t)-S(t-1),\theta(t)\rangle$ skaláris szorzathoz nulla, így a termékből tartott mennyiséget, vagyis a $\theta(t)$ megfelelő koordinátáját, semmi sem korlátozza[16].

Tegyük fel, hogy az egyes időszakok jövedelmét nem lehet összeadni. A diszkontálásra használt termék indexe legyen 0. Az egyszerűség kedvéért a terméket nevezzük kötvénynek. $S_0(t)$ legyen a kötvény ára a t időpontban. Az egyszerűség kevéért tegyük fel, hogy $S_0(0)=1$. Feltesszük, hogy minden t időpontban $S_0(t)>0$. Evidens módon a diszkontált ár

$$\overline{S}(t) \triangleq \frac{1}{S_0(t)} S(t).$$

A továbbiak során a felülvonás mindig a diszkontálásra utal.

2.10. Definíció. A $(\theta(t))_{t=1}^{T}$ előrejelezhető sorozatot önfinanszírozónak mondjuk, ha

$$\langle S(t),\theta(t+1)\rangle = \langle S(t),\theta(t)\rangle, \tag{2.9}$$

vagyis a portfólió átrendezése a t időszakban nem eredményez nettó pénzáramlást[17].

Mivel a (2.9) definícióban a két oldal leosztható $S_0(t)$-vel, ezért az

$$\left\langle \overline{S}(t),\theta(t+1)\right\rangle = \left\langle \overline{S}(t),\theta(t)\right\rangle,$$

[16] Ha a modellben az S alaptermékek között ott szerepel a diszkontálásra használt termék, akkor mivel az monoton nő csak úgy kaphatunk martingálmértéket, ha a diszkontált árfolyamokat tekintjük. Ilyenkor a diszkontálásra használt termék súlyát a replikáló portfolióban csak az önfinanszírozás feltételével tudjuk egyértelműen, közgazdaságilag értelmes módon rögzíteni. Ha a diszkontálásra használt termék nem szerepel közvetlenül a modellben, akkor nincsen szükség az önfinanszírozás feltételére, közvetlenül alkalmazhatjuk a „sztochasztikus integrál" alakot, de közgazdaságilag csak a diszkontált változók esetén értelmes a modell.

[17] Emlékeztetünk, hogy $\theta(t)$ a $t-1$ időpontban került rögzítésre, az új portfolió súlyokat az $S(t)$ ismeretében a $\theta(t+1)$ tartalmazza. A portfolió értéke a t időpontban az előző időszaki portfolió súlyok szorozva a jelenlegi árakkal, vagyis $\langle S(t),\theta(t)\rangle$.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

is teljesül, vagyis ha a θ S-önfinanszírozó, akkor a θ $\overline{S}$-önfinanszírozó, és nyilván megfordítva. Legyen $\overline{\theta}$ tetszőleges előrejelezhető portfólió a kötvénytől különböző eszközökre. A dimenzió problémák elkerülése céljából definíció szerint a $\overline{\theta}$ nulladik koordinátája definíció szerint legyen nulla. Ha a kötvény $\theta_0(t+1)$ súlyát minden t időpontban a

$$\sum_{k=0}^{m} S_k(t)\,\overline{\theta}_k(t) - \sum_{k=1}^{m} S_k(t)\,\overline{\theta}_k(t+1) = S_0(t)\,\theta_0(t+1) \tag{2.10}$$

szabállyal egyenlegezzük, akkor önfinanszírozó portfóliót kapunk, ugyanis a $\theta_0(t+1)$ triviálisan $\mathcal{F}_t$-mérhető. Vegyük észre, hogy a θ_0 egyértelmű módon került rögzítésre. A portfólió diszkontált értéke a t időpontban

$$\overline{V}(t) \triangleq \frac{1}{S_0(t)} \langle S(t), \theta(t)\rangle = \left\langle \overline{S}(t), \theta(t)\right\rangle = \left\langle \overline{S}(t), \overline{\theta}(t)\right\rangle.$$

Az újabb tagokat levonva majd újra hozzáadva a portfólió értéke a T időpontban az önfinanszírozás feltétele miatt

$$\begin{aligned}
V(T) &\triangleq \langle S(T), \theta(T)\rangle = \langle S(T), \theta(T)\rangle \pm \langle S(T-1), \theta(T-1)\rangle \pm \ldots = \\
&= \langle S(T), \theta(T)\rangle - \langle S(T-1), \theta(T-1)\rangle + \langle S(T-1), \theta(T-1)\rangle - \ldots = \\
&= \langle S(T), \theta(T)\rangle - \langle S(T-1), \theta(T)\rangle + \langle S(T-1), \theta(T-1)\rangle - \ldots = \\
&= \langle S(T) - S(T-1), \theta(T)\rangle + \langle S(T-1) - S(T-2), \theta(T-1)\rangle \ldots = \\
&= \sum_{t=1}^{T} \langle S(t) - S(t-1), \theta(t)\rangle + \langle S(0), \theta(1)\rangle = \\
&\triangleq G(T) + V(0),
\end{aligned}$$

ahol G az úgynevezett nyereményfolyamat. Mivel a levezetés csak az önfinanszírozáson múlt, az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned}
\overline{V}(T) &= \sum_{t=1}^{T} \left\langle \overline{S}(t) - \overline{S}(t-1), \theta(t)\right\rangle + \overline{V}(0) \triangleq \\
&= \sum_{t=1}^{T} \left\langle \overline{S}(t) - \overline{S}(t-1), \overline{\theta}(t)\right\rangle + \overline{V}(0) = \\
&= \overline{G}(T) + \overline{V}(0).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Az elmondottakat a következő lemmában foglalhatjuk össze:

2.11. Lemma. *A bemutatott két modell ekvivalens a következő értelemben: Tetszőleges, a kötvényeket nem tartalmazó portfóliósúlyokból álló előrejelezhető folyamat esetén a kötvények számát az* (2.10) *szabály szerint alakítva*

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

önfinanszírozó portfóliósúlyokat kaphatunk. Megfordítva minden önfinanszírozó portfólióból a kötvényt elhagyva előrejelezhető portfóliót kapunk. Ha a portfólió értékét a $t = 0$ időpontban rögzítjük, akkor a megfeleltetés egyértelmű.

2.12. Definíció. A modellben nincsen arbitrázs, ha nincs olyan θ $(m+1)$ dimenziós önfinanszírozó portfólió folyamat, amelyre $V(0) = 0$, de $V(T) \geq 0$ és egy pozitív valószínűségű halmazon $V(T) > 0$.

Világos, hogy az S folyamat pontosan akkor tartalmaz arbitrázst, ha az $\overline{S}$ tartalmaz arbitrázst, ugyanis az $S_0(T) > 0$ miatt a $V(T)$ pontosan akkor pozitív, illetve nem negatív, ha a diszkontált $\overline{V}(T)$ pozitív, illetve nem negatív. Az arbitrázs definíciója ekvivalens avval, hogy nincs olyan $\overline{\theta}$ előrejelezhető folyamat[18], amelyre

$$\sum_{t=1}^{T} \left\langle \overline{S}(t) - \overline{S}(t-1), \overline{\theta}(t) \right\rangle \geq 0$$

és egy pozitív valószínűségű halmazon az egyenlőtlenség szigorú. Ebből következően a két alaptételt könnyen kiterjeszthetjük a diszkontálás esetére.

2.13. Tétel. *A modellben pontosan akkor nincsen arbitrázs, ha van olyan* $\mathbf{Q}$ *mérték, amely ekvivalens a* $\mathbf{P}$*-vel és amelyre nézve az* $\overline{S}$ *diszkontált folyamat martingál. A modell pontosan akkor teljes, ha a martingálmérték egyértelmű.*

Hogyan kell az európai származtatott termékek árazási képletét kiterjeszteni az általános esetre. Természetesen ilyenkor is a fedezés feltételéből indulunk ki és a H_T követelés $t = 0$ időpontban vett ára közgazdasági megfontolások alapján éppen a fedező portfólió értéke a $t = 0$ időpontban, vagyis ha $H_T = V(T) \doteq \langle S(T), \theta(T) \rangle$, akkor $\pi(H_T) = V(0) \doteq \langle S(0), \theta(1) \rangle$. A kérdés csak az, hogyan tudjuk a $V(0)$ értéket elegánsan kifejezni? Mivel $S_0(0) = 1$, ezért $\overline{V}(0) = V(0)$, így az önfinanszírozás miatt

$$\overline{H}_T = \sum_{t=1}^{T} \left\langle \overline{S}(t) - \overline{S}(t-1), \overline{\theta}(t) \right\rangle + V(0).$$

Ha nincsen arbitrázs, akkor az $\overline{S}$ folyamat martingál a $\mathbf{Q}$ mérték alatt. A már többször bemutatott módon eljárva, ha a $\overline{H}_T$ integrálható a $\mathbf{Q}$ alatt[19], akkor az összeg $\mathbf{Q}$ szerinti várható értéke nulla, így

$$\pi(H_T) = V(0) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right),$$

[18] Emlékeztetünk, hogy a $\overline{\theta}$ nulladik koordinátája definíció szerint mindig nulla.

[19] Mivel a Radon–Nikodym-derivált korlátos, ehhez elegendő, hogy a $\overline{H}_T$ integrálható legyen a $\mathbf{P}$ alatt.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

vagyis a $t = 0$ időpontban a T időpontban lejáró H_T tranzakció ára éppen a tranzakció diszkontált értékének a $\mathbf{Q}$ mérték szerint vett várható értéke[20].

2.3.3. Elveszett illúziók

A bemutatott módszerrel a származtatott termékek árazása csak akkor lehetséges, ha a T időszaki kifizetés lefedezhető. Ez tetszőleges H_T esetében csak akkor valósítható meg, ha a piac teljes. Ez azonban komoly megszorítást jelent a modellre nézve.

2.14. Tétel. *Ha a véges és diszkrét időhorizonton értelmezett modell nem tartalmaz arbitrázslehetőséget és a modell teljes, akkor az alapul vett* $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ *valószínűségi tér véges számú atomból áll.*

Bizonyítás. Legyen H_T egy tetszőleges $\mathcal{F}_T$-mérhető pénzügyi tranzakció. A már bemutatott módon eljárva a $\mathbf{P}$ mértéket kicserélve feltehetjük, hogy a H_T integrálható a $\mathbf{P}$ alatt. A $\mathbf{Q}$-ra való áttéréskor a Radon–Nikodym-derivált korlátos, így a H_T integrálható marad a $\mathbf{Q}$ alatt is. Mivel a teljesség miatt a $\mathbf{Q}$ egyértelmű, ezért minden $\mathcal{F}_T$-mérhető H_T változó integrálható az egyértelműen definiált közös $\mathbf{Q}$ alatt. Ebből következően az $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{Q})$ csak véges számú olyan diszjunkt halmazt tartalmazhat, amely mértéke pozitív. Mivel a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalensek, ezért az $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ hasonló tulajdonságokkal bír. □

A tiszta atomokból álló filtrációkat érdemes fákkal reprezentálni. A reprezentációban az Ω alaptér az összes lehetséges trajektóriák halmaza. A fa egy csomópontja az $\mathcal{A}$ eseménytér egy részhalmaza, amely azokból a kimenetelekből áll, amelyekhez tartozó utak átmennek az adott csomóponton. A fa azonos időponthoz tartozó szintjei az adott időponthoz tartozó filtrációt definiálják. A filtráció minden szintje a korábbi szint részhalmazainak további particionálása. Az atomok számára vonatkozóan a következő észrevétel szerint minden csomópontból legfeljebb az eszközök számával azonos elágazás indulhat ki.

2.15. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek az előző tétel feltételei. Ha* $\mathcal{F}_0$ *a triviális* σ*-algebra, akkor az* $\mathcal{F}_T$*-ben levő atomok száma maximum* M^T*, ahol* M *az eszközök és* T *az időperiódusok száma.*

Bizonyítás. Legyen N az $L^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ tér dimenziója. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $\mathcal{F}_T$-ben levő atomok száma N. A teljesség feltétele azt jelenti, hogy minden követelés, vagyis az $L^0(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}) = \mathbb{R}^N$ minden eleme

$$H_T = V_T = \langle S(T), \theta(T) \rangle$$

[20] Ha a $\overline{H}_T$ nem integrálható, akkor a képlet értelmetlen és persze a gondolatmenet sem működik.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

alakba írható, ahol $\theta(T)$ $\mathcal{F}_{T-1}$-mérhető. Ha $T=1$, akkor a teljesség feltétele azt jelenti, hogy minden $H_T = H_1 \in \mathbb{R}^N$ vektor előállítható

$$H_1(\omega) = V_1(\omega) = \langle S_1(\omega), \theta_1(\omega) \rangle = \sum_{s=1}^{M} S_{1s}(\omega)\,\theta_{1s}(\omega)$$

függvényszorzatok összegeként. Mivel a feltétel szerint az $\mathcal{F}_0$ a triviális σ-algebra, ezért minden $\mathcal{F}_0$-mérhető változó konstans. Így a θ_1 nem függ az ω-től és egy M-dimenziós determinisztikus vektor. Így a $\langle S_1, \theta_1 \rangle$ éppen M darab vektorból képzett lineáris kombináció, vagyis ha $T=1$, akkor az

$$\{V_T(\theta_T) \mid \theta_T \ \mathcal{F}_{T-1}\text{-mérhető}\} = \left\{ \sum_{s=1}^{M} S_{Ts}(\omega)\,\theta_{Ts}(\omega) \mid \theta_T \ \mathcal{F}_{T-1}\text{-mérhető} \right\} \tag{2.12}$$

altér dimenziója nem lehet nagyobb, mint M, így éppen az állítást kapjuk $T=1$ esetén.

Tegyük fel, hogy $T-1$ esetére az állítást már igazoltuk. Ekkor

$$\dim\left(L^0(\Omega, \mathcal{F}_{T-1}, \mathbf{P})\right) \leq M^{T-1},$$

így az $\mathcal{F}_{T-1}$-ben levő atomok száma maximum M^{T-1}, ugyanis maximum annyi atom lehetséges, amekkora a tér dimenziója. Az előrejelezhetőség definíciója miatt a θ_T mérhető az $\mathcal{F}_{T-1}$-re nézve , így az összes lehetséges θ_T stratégiák által kifeszített altér dimenziója legfeljebb M^{T-1} lehet. Ismét csak M terméket használhatunk, így a fedezett követelések (2.12) halmaza az M darab függvényből képzett olyan szorzatösszegek halmaza, ahol a súlyok egy M^{T-1} dimenziós altér pontjai lehetnek. Tekintsük az így kapott függvények egy lineárisan független elemekből álló halmazát és tekintsük az egyes termékekhez tartozó súlyok halmazát. Így M darab halmazt kapunk. Egyetlen halmazban sem lehet több elem mint M^{T-1} ugyanis a súlyok dimenziója legfeljebb M^{T-1} és ha a súlyoknak van nullát előállító nem triviális lineáris kombinációja, akkor már a szorzatösszegeknek is van, elegendő ugyanis a többi súlyt nullának választani. Következésképpen a lineárisan független elemekből álló halmazban levő elemek szám nem lehet nagyobb, mint $M \cdot M^{T-1} = M^T$, így $N \leq M^T$. □

2.4. Az amerikai opciók árazása

Az amerikai származtatott termékek olyan termékek, amelyek tetszőleges időpontban lehívhatóak. Mivel az alapfeltevés az, hogy a jövő nem látható előre, a lehívás csak megállási idők mentén történhet. Legyen tehát adott egy $H = (H_n)$ folyamat. A folyamat tulajdonosának joga van egy τ megállási időt

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

kiválasztani, és az ω kimenetel esetén a

$$(H_\tau)(\omega) \stackrel{\circ}{=} H_{\tau(\omega)}(\omega)$$

értéket „lekaszálni”. Az európai származtatott termékek esetén csak a $\tau = T$ megengedett, ahol $T < \infty$ a származtatott termék lejárati ideje. Feltesszük, hogy az időhorizont véges, az utolsó időpontot jelölje T. A H lehívása a megfigyelhető eseményekhez kötött, vagyis felteszük, hogy a H adaptált az előre rögzített $(\mathcal{F}_t)$ filtrációra nézve. Feltesszük továbbá, hogy a definiált piac teljes, valamint, hogy a piacon nincsen arbitrázs. Feltesszük tehát, hogy az $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ mérhető struktúrán van, mégpedig egyetlen martingálmérték, amelyre nézve az árfolyamok martingált alkotnak. A feltevésekből következően az $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ mező véges sok atomból áll. Így az Ω téren értelmezett összes függvény korlátos. Ennek egy fontos kovetkezménye, hogy ha az X valamilyen mérték alatt martingál és a θ előrejelezhető, akkor az

$$Y(s) \stackrel{\circ}{=} \sum_{t=1}^{s} \langle X(t) - X(t-1), \theta(t) \rangle$$

alakú összegek is martingált alkotnak: Valóban, a korlátosság miatt az alábbi műveletek végrehajthatók

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y(s+1) \mid \mathcal{F}_s) &= \sum_{t=1}^{s+1} \mathbf{E}(\mathbf{E}(\langle X(t) - X(t-1), \theta(t) \rangle \mid \mathcal{F}_s)) = \\
&= \mathbf{E}(\langle \mathbf{E}(X(s+1) - X(s) \mid \mathcal{F}_s), \theta(s+1) \rangle) + Y(s) = \\
&= \mathbf{E}(\langle 0, \theta(s+1) \rangle) + Y(s) = Y(s).
\end{aligned}$$

2.4.1. Szuperreplikálás

Mennyi a H ára? Az alapfeltétel, hogy a H származtatott terméket eladó, vagyis a H-ért kötelezettséget vállaló oldal a H lehívásának időpontjában fedezett állapotban akar lenni. Ehhez az szükséges, hogy a származtatott termék x árából egy olyan önfinanszírozó portfóliót tudjon építeni, amely $V(x)$ értékfolyamatára tetszőleges τ megállási idő esetén $V_\tau(x) \geq H_\tau$ legyen. Természetesen ehhez szükséges és elegendő, ha minden $0 \leq t \leq T$ időpontra $V_t(x) \geq H_t$.

2.16. Definíció. Valamely x kezdőértékből kiinduló önfinanszírozó stratégia szuperreplikálja a H származtatott terméket, ha a $V(x)$ értékfolyamatra minden t időpontra $V_t(x) \geq H_t$.

Természetesen a vevő sem akar az üzleten szisztematikusan veszíteni, ezért csak akkor hajlandó az x áron az üzletbe belemenni, ha van olyan τ megállási

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

idő, amelyre $H_\tau = V_\tau(x)$. Ugyanis ha ez nem teljesülne, akkor a szuperreplikáló tulajdonságú stratégia létezése miatt az eladó, vagyis a H kifizetését felvállaló oldal, szisztematikusan keresne rajta, így a vevő is inkább eladná mint megvenné a H származtatott terméket: Ha $\pi(H) > x$, akkor a származtatott termék drága, így eladva és az x-ből felépítve a szuperreplikáló portfóliót biztos nyereséghez jutunk. Ha pedig $x > \pi(H)$, akkor a szuperreplikáló portfóliót eladva x és a származtatott terméket megvéve és a τ időpontban lehívva és a H_τ bevételből a fedező portfóliót felszámolva biztos $x - \pi(H) > 0$ nyereséghez juthatunk.

2.17. Definíció. Ha valamely $V(x)$ szuperreplikáló értékfolyamathoz van olyan τ megállási idő, amelyre $H_\tau = V_\tau(x)$, akkor a $V(x)$ értékfolyamatot likvidálható szuperreplikáló portfóliónak mondjuk.

Az elmondottakból világos, hogy ha valamely H amerikai típusú pénzügyi tranzakcióhoz létezik $V(x)$ likvidálható szuperreplikáló portfólió, akkor a H arbitrázs elmélet szerinti ára éppen a portfólió induló értéke x: Tegyük fel, hogy egy (x_1, τ_1) és egy (x_2, τ_2) is megadható valamely H követeléshez. Ha $x_1 \neq x_2$, akkor az olcsóbb likvidálható, szuperreplikáló portfóliót megvéve, a drágábbat eladva, illetve a H-ra vonatkozó vételi és eladási pozíciót egyszerre biztosítva a $t = 0$ időpontban pozitív profitra tennénk szert. (Ugyanis a H követelés egyszerre való megvétele és eladása nulla költséget jelent.) A megfelelő τ_i időpontokban az eladott portfóliót a megvett követeléssel likvidálva, illetve a megvett portfólióval az eladott követelés lehívását megvárva arbitrázslehetőséghez jutunk. Mivel a feltétel szerint nincsen arbitrázs, ezért $x_1 = x_2$.

Az amerikai opciók árazási problémájának megoldásához két kérdést kell tisztázni:

- Létezik-e a megadott tulajdonságú (x, τ),
- illetve hogyan számolható ki a (x, τ) pár a modellben szereplő paraméterekből?

2.4.2. A megállási opciókról szóló tétel

Először egy a későbbiekben szerepet játszó állítást ismertetünk.

2.18. Lemma. *Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$ diszkrét időtartományon értelmezett integrálható szubmartingál, és van olyan $T < \infty$, hogy a τ_1, τ_2 megállási időkre*

$$\mathbf{P}(\tau_1 \leq \tau_2) = \mathbf{P}(\tau_2 \leq T) = 1,$$

akkor

$$X_{\tau_1} \leq \mathbf{E}(X_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1})$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

és

$$\mathbf{E}(X_0) \leq \mathbf{E}(X_{\tau_1}) \leq \mathbf{E}(X_{\tau_2}) \leq \mathbf{E}(X_T).$$

Martingálok esetén mind a két sorban mindenhol egyenlőség van.

Bizonyítás. Legyen $\tau_1 \leq \tau_2 \leq T$ és

$$\theta_k \stackrel{\circ}{=} \chi(\tau_1 < k \leq \tau_2).$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\{\theta_k = 1\} &= \{\tau_1 < k, \tau_2 \geq k\} = \\ &= \{\tau_1 \leq k-1\} \cap \{\tau_2 \leq k-1\}^c \in \mathcal{F}_{k-1},\end{aligned}$$

vagyis a θ folyamat előrejelezhető. Vezessük be az $\eta \stackrel{\circ}{=} \sum_{k=1}^{T} \theta_k(X_k - X_{k-1})$ változót. A feltétel szerint az X_k minden k-ra integrálható, így az $X_k - X_{k-1}$ is integrálható, következésképpen az $X_k - X_{k-1}$ változónak létezik az $\mathcal{F}_{k-1}$ szerinti feltételes várható értéke, így a θ_k korlátosságát, illetve a T végességét felhasználva

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\eta) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\sum_{k=1}^{T} \theta_k(X_k - X_{k-1})) = \sum_{k=1}^{T} \mathbf{E}(\mathbf{E}(\theta_k(X_k - X_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1})) = \\ = \sum_{k=1}^{T} \mathbf{E}(\theta_k \mathbf{E}(X_k - X_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})) \geq 0.\end{aligned}$$

Ha valamilyen ω kimenetelre $\tau_1(\omega) = \tau_2(\omega)$, akkor minden k indexre $\theta_k(\omega) = 0$, így ilyenkor $\eta(\omega) \stackrel{\circ}{=} 0$. Ha $\tau_1(\omega) < \tau_2(\omega)$, akkor a $\theta_k(\omega) = 1$ valahányszor $k = \tau_1(\omega) + 1, \ldots, \tau_2(\omega)$, és $\theta_k(\omega) = 0$ minden más esetben, így a

$$\begin{aligned}\eta(\omega) \stackrel{\circ}{=} \sum_{k=1}^{T} \theta_k(X_k - X_{k-1}) = X(\tau_1(\omega) + 1) - X(\tau_1(\omega)) + \\ + X(\tau_1(\omega) + 2) - X(\tau_1(\omega) + 1) + \ldots \\ + X(\tau_2(\omega)) - X(\tau_2(\omega) - 1),\end{aligned}$$

teleszkópikus összeg éppen $X(\tau_2(\omega)) - X(\tau_1(\omega))$, vagyis

$$\eta = X(\tau_2) - X(\tau_1),$$

tehát az $\mathbf{E}(\eta) \geq 0$ miatt, felhasználva, hogy mivel az X_k minden k-ra integrálható, ezért az $\mathbf{E}(X(\tau_k))$ véges

$$\mathbf{E}(X(\tau_2)) \geq \mathbf{E}(X(\tau_1)).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ha $A \in \mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$, akkor a

$$\tau_i^*(\omega) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} \tau_i(\omega), & \text{ha } \omega \in A \\ T+1, & \text{ha } \omega \notin A \end{cases}$$

változók megállási idők, ugyanis ha $n \leq T$, akkor

$$\{\tau_i^* \leq n\} = A \cap \{\tau_i \leq n\} = A \cap \{\tau_i \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

A már belátottak alapján

$$\mathbf{E}(X(\tau_2^*)) = \int_A X(\tau_2)\, d\mathbf{P} + \int_{A^c} X(T+1)\, d\mathbf{P} \geq \mathbf{E}(X(\tau_1^*)) =$$
$$= \int_A X(\tau_1)\, d\mathbf{P} + \int_{A^c} X(T+1)\, d\mathbf{P}.$$

Következésképpen az X_{T+1} integrálhatósága miatt az $\int_{A^c} X(T+1)\, d\mathbf{P}$ a két oldalról törölhető, tehát

$$\int_A X(\tau_2)\, d\mathbf{P} \geq \int_A X(\tau_1)\, d\mathbf{P}.$$

Az $X(\tau_1)$ $\mathcal{F}_{\tau_1}$-mérhető, ezért

$$\mathbf{E}(X(\tau_2) \mid \mathcal{F}_{\tau_1}) \geq X(\tau_1).$$

□

2.4.3. Az optimális megállítás problémája

Tegyük fel, hogy $H \geq 0$. Ilyenkor a $V \geq H \geq 0$ a szuperreplikálás miatt nem negatív. Az önfinanszírozás feltétele miatt

$$V(s) \stackrel{\circ}{=} \sum_{t=1}^{s} \langle S(s) - S(s-1), \theta(s) \rangle + V(0),$$

illetve ugyanez igaz a diszkontált változókra is. Mivel a $\mathbf{Q}$ martingálmérték, ezért a diszkontált $\overline{S}$ martingál, így a $\overline{V}$ diszkontált értékfolyamat martingál. Következésképpen minden $0 \leq \tau \leq T$ megállási időre a megállási opciókról szóló tétel alapján

$$x = V_0(x) = \overline{V}_0(x) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}_\tau(x)\right) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_\tau\right).$$

Mivel ez minden τ esetén teljesül, ezért

$$\pi(H) = x = \overline{V}_0(x) \geq \sup_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_\tau\right).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

2.19. Definíció. Tetszőleges $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sztochasztikus alaptér és H folyamat esetén a

$$\sup_{\tau} \mathbf{E}\left(H\left(\tau\right)\right)$$

feladatot, ahol a τ a lehetséges megállási idők halmazán fut végig, az optimális megállítás problémájának nevezzük.

Az elmondottak miatt a $\mathbf{Q}$ alatti, a $\overline{H}$-ra vonatkozó optimális megállítás problémájának értéke az ár alsó korlátja. Ha valamilyen τ-ra $V_\tau\left(x\right) = H_\tau$, akkor a megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_\tau\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}_\tau\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}_0\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(V_0\right)$$

és a fenti becslés utolsó egyenlőtlenségében egyenlőség van. Következésképpen ha az amerikai opciónak van az arbitrázselmélet alapján meghatározható ára, akkor ez az ár éppen az optimális megállítás problémájának értéke.

Mivel a valószínűségi mező véges számú atomból áll a megállási idők száma is véges, így az optimális megállítás problémájának van véges optimális megoldása. Legyen τ^* a feladat egy optimális megoldása. Tegyük fel továbbá, hogy az

$$x \triangleq \max_{\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_\tau\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_{\tau^*}\right)$$

értékből kiindulva elkészíthető egy önfinanszírozó, szuperreplikáló portfólió. Ekkor mivel a V szuperreplikáló, ismételten a megállási opciókról szóló tétel miatt a V veszíti a várható értéket:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(V\left(\tau^*\right)\right) \leq V_0\left(x\right) = x = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_{\tau^*}\right) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(V\left(\tau^*\right)\right),\end{aligned}$$

ami csak akkor teljesülhet, ha egyenlőség van, vagyis $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_{\tau^*}\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(V(\tau^*))$. A szuperreplikálás miatt a $\mathbf{Q}$ mérték alatt

$$H\left(\tau^*\right) \overset{m.m.}{=} V\left(\tau^*\right).$$

Így a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalenciája miatt a $\mathbf{P}$ alatt is. Vagyis ha az optimális megállítás problémájának van τ^* optimális megoldása és az optimum értékéből kiindulva felépíthető egy szuperreplikáló portfólió, akkor a már bemutatott gondolatmenet alapján a H-nak meghatározható az ára, és ilyenkor $\pi\left(H\right) = x$.

A kérdés tehát a következő:

- Miként számolható ki az $x \triangleq \max_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_\tau\right)$ érték?
- Van-e olyan szuperreplikáló portfólió, amely az x kezdőértékből indul ki?

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

2.20. Példa. Call és put opciók.

Legyen H amerikai call opció. Ilyenkor $H_n = (S_n - K)^+$. A diszkontált kifizetés

$$\overline{H}_n = \left(\frac{S_n}{S_n^0} - \frac{K}{S_n^0}\right)^+.$$

Az $\overline{S}$ a $\mathbf{Q}$ alatt martingál. Ha feltesszük, hogy az $1/S_n^0$ diszkonttényező csökken, akkor a $-K/S_n^0$ kifejezés várható értéke nő, vagyis az

$$\frac{S_n}{S_n^0} - \frac{K}{S_n^0}$$

folyamat növeli a feltételes várható értéket, vagyis szubmartingál. Szubmartingálok konvex és monoton növekedő függvénye szintén szubmartingál. A szubmartingálokra vonatkozó megállási opciókról szóló tétel miatt tetszőleges τ megállási idő esetén

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_\tau}{S_\tau^0}\right) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{S_T^0}\right).$$

Így az elmondottak miatt a call opció ára, ha az x-ből kiindulva felépíthető önfinanszírozó, szuperreplikáló portfólió, $\pi(H) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_T/S_T^0\right)$, amely azonos az európai call opció árával.

A put opciók esetén $H_n \stackrel{\circ}{=} (K - S_n)^+$. A

$$\frac{K}{S_n^0} - \frac{S_n}{S_n^0}$$

kifejezés azonban szupermartingál. Szupermartingálok monoton növő konkáv és nem konvex függvénye lesz szupermartingál, így a bemutatott gondolatmenet a put opció esetén nem alkalmazható. □

2.4.4. Snell-féle burkoló

A keresett x értéket visszafelé való indukcióval tudjuk kiszámolni. Jelölje Δ_n az $n \leq \tau \leq T$ egyenlőtlenséget kielégítő megállási idők halmazát. Speciálisan Δ_0 az összes megállási idők halmaza.

2.21. Definíció. Az

$$X_n \stackrel{\circ}{=} \max_{\tau \in \Delta_n} \mathbf{E}\left(H(\tau) \mid \mathcal{F}_n\right)$$

sorozatot a H Snell-féle burkolójának szokás mondani.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ha feltesszük, hogy $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, akkor az X_0 éppen az optimális megállítás feladatának megoldása. Érdemes megjegyezni, hogy általában a Δ_n halmaz nem véges számú elemből áll, és ilyenkor a maximum helyébe lényeges szuprémumot kell írni. Az amerikai opciók árazásakor fel kell tételeznünk a teljességet és az arbitrázsmentességet, vagyis ilyenkor az alapul vett mező véges számú atomból áll, így a megállási idők száma véges, és a technikai problémák elkerülése céljából az a lényeges szuprémummal kapcsolatos nehézségektől most eltekintünk. A gondolatmenet kiterjesztését és az általános eset tárgyalását az olvasó a folytonos esetben bemutatott eszközökkel könnyen elvégezheti[21].

2.22. Tétel. *Ha $H \geq 0$, akkor a Snell-burkoló elemei kiszámolhatóak a következő hátrafelé haladó indukcióval:*

$$X_T = H_T,$$
$$X_n = \max\left(H_n, \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)\right).$$

Bizonyítás. Jelölje $\widehat{X}_n$ az állításban szereplő, hátrafelé haladó indukciós eljárás eredményét. Az $X_T = H_T = \widehat{X}_T$ egyenlőség nyilvánvaló, ugyanis $\Delta_T = \{T\}$ és a H adaptált, így a H_T nyilván $\mathcal{F}_T$-mérhető. Az n konstans megállási idő, $n \in \Delta_n$, a H adaptált, így nyilván

$$X_n = \max_{\tau \in \Delta_n} \mathbf{E}\left(H_\tau \mid \mathcal{F}_n\right) \overset{m.m.}{\geq} \mathbf{E}\left(H_n \mid \mathcal{F}_n\right) \overset{m.m.}{=} H_n.$$

Mivel a mező véges, ezért a Δ_n halmazok végesek, így a Snell-burkoló definíciójában maximum van így alkalmas $\tau_{n+1} \in \Delta_{n+1} \subseteq \Delta_n$ megállási időre:

$$\mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(H_{\tau_{n+1}} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(H_{\tau_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right) \leq$$
$$\leq \max_{\tau \in \Delta_n} \mathbf{E}\left(H_\tau \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n,$$

Ebből

$$X_n \overset{m.m.}{\geq} \max\left(H_n, \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)\right) \overset{\circ}{=} \widehat{X}_n.$$

Most térjünk rá a másik irány igazolására. Tetszőleges $\tau \in \Delta_n$ esetén $\tau \geq n$, így

$$H(\tau) = H_n \chi(\tau = n) + H_{\tau \vee (n+1)} \chi(\tau > n),$$

Fontos hangsúlyozni, hogy $\tau \vee (n+1) \in \Delta_{n+1}$, így az X_{n+1} definíciója szerint

$$\mathbf{E}\left(H_{\tau \vee (n+1)} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \leq \max_{\sigma \in \Delta_{n+1}} \mathbf{E}\left(H_\sigma \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \overset{\circ}{=} X_{n+1}.$$

A két oldalon $\mathcal{F}_n$ szerint feltételes várható értéket véve

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(H_{\tau \vee (n+1)} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(H_{\tau \vee (n+1)} \mid \mathcal{F}_n\right) \leq \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right).$$

[21] V.ö.: 344. oldal, 6.10. lemma, 348. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Így minden $\tau \in \Delta_n$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}\left(H_n\chi(\tau=n) + H_{\tau\vee(n+1)}\chi(\tau>n) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\ &= H_n\chi(\tau=n) + \mathbf{E}\left(H_{\tau\vee(n+1)} \mid \mathcal{F}_n\right)\chi(\tau>n) \leq \\ &\leq H_n\chi(\tau=n) + \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)\chi(\tau>n) \leq \\ &\leq \max(H_n, \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)) = \widehat{X}_n.\end{aligned}$$

Következésképpen

$$X_n \stackrel{\circ}{=} \max_{\tau\in\Delta_n} \mathbf{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_n) \leq \widehat{X}_n.$$

A két egyenlőtlenséget összevetve: $X = \widehat{X}$. □

2.23. Tétel. *Ha $H \geq 0$, akkor az X Snell-burkoló a legkisebb olyan $(\mathcal{F}_n)$-szupermartingál, amely dominálja a H folyamatot.*

Bizonyítás. Az indukciós algoritmus szerint $X_n \geq H_n \geq 0$, valamint $X_n \geq \geq \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$, következésképpen az X dominálja a H folyamatot és az X nem negatív szupermartingál. Legyen Y egy másik olyan szupermartingál, amely dominálja a H folyamatot. Ekkor $Y_T \geq H_T \stackrel{\circ}{=} X_T$. Az Y szupermartingál, így

$$Y_{T-1} \geq \mathbf{E}(Y_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) \geq \mathbf{E}(H_T \mid \mathcal{F}_{T-1}) = \mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_{T-1}),$$

így

$$Y_{T-1} \geq \max(H_{T-1}, \mathbf{E}(X_T \mid \mathcal{F}_{T-1})) = X_{T-1}.$$

Általában visszafelé haladó indukcióval, felhasználva, hogy az Y szupermartingál

$$Y_{n-1} \geq \mathbf{E}(Y_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \geq \mathbf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}).$$

Felhasználva, hogy az Y dominálja a H folyamatot

$$Y_{n-1} \geq \max(H_{n-1}, \mathbf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})) = X_{n-1}.$$ □

2.24. Tétel. *Ha $H \geq 0$, akkor a*

$$\tau^* = \min\{n \geq 0 \mid H_n = X_n\}$$

változó megállási idő, $\tau^* \leq T$ és a τ^* optimális megállási idő.

Bizonyítás. A τ^* megállási idő, ugyanis

$$\begin{aligned}\{\tau^* = 0\} &= \{H_0 = X_0\} \in \mathcal{F}_0, \\ \{\tau^* = n\} &= \{H_n = X_n\} \cap \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \{H_k < X_k\}\right) \in \mathcal{F}_n,\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ugyanis az X és a H adaptáltak. (A τ^* éppen a $H-X$ találati ideje a $B \triangleq \{0\}$ halmaz esetén.) A Snell-burkoló definíciója alapján $X_T = H_T$, így biztosan

$$0 \leq \tau^* \leq T.$$

Megmutatjuk, hogy az $X_n^{\tau^*} \triangleq X_{n \wedge \tau^*}$ megállított folyamat martingál. Legyen

$$\varphi_n \triangleq \chi\left(\tau^* \geq n\right).$$

A τ^* megállási idő, így

$$\{\varphi_n = 1\} = \{\tau^* \geq n\} = \{\tau^* \leq n-1\}^c \in \mathcal{F}_{n-1},$$

következésképpen a φ folyamat előrejelezhető. Nyilván

$$\begin{aligned} X_n^{\tau^*} - X_{n-1}^{\tau^*} &= X\left(\tau^* \wedge n\right) - X\left(\tau^* \wedge (n-1)\right) = \\ &= \chi\left(\tau^* \geq n\right)\left(X_n - X_{n-1}\right) = \\ &= \varphi_n\left(X_n - X_{n-1}\right). \end{aligned}$$

Mivel a τ^* az első olyan n, amelyre $H_n = X_n$, így a $\{\tau^* \geq n\}$ halmazon $X_{n-1} > H_{n-1}$. Mivel az indukciós formula szerint

$$X_{n-1} = \max\left(H_{n-1}, \mathbf{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right),$$

ezért a $\{\tau^* \geq n\}$ halmazon az első tag nem lehet „éles”, így

$$X_{n-1} = \mathbf{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right).$$

Következésképpen

$$\chi\left\{\tau^* \geq n\right\}\left(\mathbf{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - X_{n-1}\right) = 0.$$

Így felhasználva, hogy a φ_n változó $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(X_n^{\tau^*} - X_{n-1}^{\tau^*} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) &= \mathbf{E}\left(\varphi_n\left(X_n - X_{n-1}\right) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\ &= \varphi_n \mathbf{E}\left(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\ &= \chi\left\{\tau^* \geq n\right\}\left(\mathbf{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) - X_{n-1}\right) = 0, \end{aligned}$$

következésképpen az X^{τ^*} martingál. Az X_0 konstans, ugyanis a modell definíciója szerint $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, így az X^{τ^*} martingál tulajdonsága szerint

$$X_0 = X_0^{\tau^*} = \mathbf{E}\left(X_T^{\tau^*}\right) = \mathbf{E}\left(X\left(\tau^* \wedge T\right)\right) = \mathbf{E}\left(X_{\tau^*}\right) = \mathbf{E}\left(H_{\tau^*}\right),$$

ahol az utolsó egyenlőség a τ^* definíciója miatt teljesülő $X_{\tau^*} = H_{\tau^*}$ következménye. Mivel X_0 éppen az optimális megállítás problémájának megoldása a τ^* valóban egy optimális megállási idő. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Általában az optimális megállási idő nem egyértelmű. Érvényes a következő karakterizáció:

2.25. Tétel. *Ha $H \geq 0$, akkor valamely τ megállási idő pontosan akkor optimális a H kifizetés esetén, ha*

1. $H(\tau) \overset{m.m.}{=} X(\tau)$
2. *az X^τ megállított folyamat martingál, ahol*

X a H Snell-burkolója.

Bizonyítás. Az egyik irány az előző állítás bizonyításának vége alapján világos: Ha az 1. és 2. feltételek teljesülnek, akkor a τ optimális. Csak azt kell belátni, hogy ha a τ optimális, akkor érvények az 1. és a 2. feltételek. Mivel az X dominálja a H kifizetést, vagyis mivel $H \leq X$, ezért tetszőleges ρ megállási idő esetén

$$H(\rho) \leq X(\rho).$$

Ha a τ optimális megállási idő, akkor a megállási opciókról szóló tétel alapján, felhasználva, hogy az X integrálható szupermartingál

$$X(0) = \mathbf{E}(H(\tau)) \leq \mathbf{E}(X(\tau)) \leq \mathbf{E}(X(0)) = X(0),$$

ami csak úgy teljesülhet, ha mindenhol egyenlőség van, következésképpen teljesül az első feltétel, vagyis $H(\tau) = X(\tau)$.

Be akarjuk látni a második feltételt. Az X integrálható szupermartingál, így a megállási opciókról szóló tétel szerint a $\tau \wedge n \leq \tau$ miatt

$$X(0) \geq \mathbf{E}(X(\tau \wedge n)) \geq \mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(H(\tau)) = X(0),$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy a már belátott első feltétel, illetve a τ optimalitása miatt

$$\mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(H(\tau)) = X(0).$$

Tehát a becslésből következő egyenlőség és a torony szabály felhasználásával

$$\mathbf{E}(X(\tau \wedge n)) = \mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X(\tau) \mid \mathcal{F}_n)). \tag{2.13}$$

Az alábbi lemma alapján egy megállított szupermartingál szintén szupermartingál, így az X^τ szupermartingál. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} X(\tau \wedge n) = X^\tau(n) &\geq \mathbf{E}(X^\tau(T) \mid \mathcal{F}_n) = \\ &= \mathbf{E}(X(\tau \wedge T) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(X(\tau) \mid \mathcal{F}_n). \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A várható értékre vonatkozó (2.13) sor miatt az előző sorban valójában csak egyenlőség lehet, így

$$X_n^\tau = \mathbf{E}\left(X\left(\tau\right) \mid \mathcal{F}_n\right),$$

következésképpen az X^τ az $X\left(\tau\right)$ fix változó $(\mathcal{F}_n)$ szerinti feltételes várható értékeiből áll, így valóban martingál. □

2.26. Következmény. *A korábban definiált τ^* megállási idő a legkisebb optimális megállási idő.*

Bizonyítás. A τ^* a legkisebb olyan megállási időpont, amelyre az első optimalitási kritérium teljesül. □

2.27. Lemma. *Ha X egy integrálható szubmartingál és τ egy tetszőleges megállítási idő, akkor az X^τ megállított folyamat szintén integrálható szubmartingál.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy az X^τ integrálható. Szubmartingálok konvex, növekedő függvénye szubmartingál. Így ha az X szubmartingál, akkor az X^+ is szubmartingál. Mivel a szubmartingálok pozitív része definíció szerint integrálható ezért az X^+ egy tetszőleges szubmartingál esetén egy integrálható szubmartingál. A megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\mathbf{E}\left(\left(X^\tau\right)^+\left(t\right)\right) = \mathbf{E}\left(X^+\left(\tau \wedge t\right)\right) \leq \mathbf{E}\left(X^+\left(t\right)\right) < \infty,$$

vagyis az $X^\tau\left(t\right)$ pozitív része integrálható. Az $X\left(0\right)$ integrálható, így a megállási opciókról szóló tétel miatt a várható érték monotonitása alapján

$$\mathbf{E}\left(X^\tau\left(t\right)\right) = \mathbf{E}\left(X\left(\tau \wedge t\right)\right) \geq \mathbf{E}\left(X\left(0\right)\right) > -\infty$$

így az $X^\tau\left(t\right)$ negatív része is integrálható, vagyis az $X^\tau\left(t\right)$ integrálható. Most mutassuk meg, hogy az X^τ szubmartingál. Vegyük az $s < t$ időpontokat. Ha $F \in \mathcal{F}_s$ és

$$\sigma\left(\omega\right) \triangleq \begin{cases} s, & \text{ha } \omega \notin F \\ t, & \text{ha } \omega \in F \end{cases},$$

akkor a megállási opciókról szóló tétel és az $s \leq \sigma$ miatt

$$\mathbf{E}\left(X\left(\tau \wedge \sigma\right)\right) = \int_{F^c} X\left(\tau \wedge s\right) d\mathbf{P} + \int_F X\left(\tau \wedge t\right) d\mathbf{P} \geq \mathbf{E}\left(X\left(\tau \wedge s\right)\right).$$

Vagy ami ugyanaz

$$\int_F X\left(\tau \wedge t\right) d\mathbf{P} \geq \int_F X\left(\tau \wedge s\right) d\mathbf{P}.$$

Vagyis

$$\mathbf{E}\left(X^\tau\left(t\right) \mid \mathcal{F}_s\right) \geq X^\tau\left(s\right),$$

ami éppen a kívánt egyenlőtlenség. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

2.4.5. Optimális megállításra vonatkozó példák

Ebben az alpontban rövid kitérőt teszünk és néhány egyszerű és ismert példát tárgyalunk. A példákban az alapul vett mező végességét nem tesszük fel, így a Snell-burkoló konstrukciójakor az említett lényeges szuprémumot kell használni.

2.28. Példa. Optimális részvényeladás azonos és független áreloszlások esetén.

Tegyük fel, hogy egy T hossszú, diszkrét időpontsorozat során minden időszakban kapunk egy véletlen nem negatív ajánlatot valamilyen eszközre. Ha az n időpontban eladjuk az eszközt, akkor az időszak végéig betehetjük a ξ_n vételárat a bankba és $\xi_n (1+r)^{T-n}$ kamatot kapunk. Mikor kell eladni az eszközt?

Vegyük észre, hogy egy $H_n \stackrel{\circ}{=} \xi_n (1+r)^{T-n}$ kifizetéssorozatról van szó. A Snell-burkolót előállító iteráció

$$\begin{aligned} X_T &= H_T = \xi_T, \\ X_n &= \max\left(H_n, \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)\right) = \max\left(H_n, \mathbf{E}\left(X_{n+1}\right)\right) = \\ &= \max\left(\xi_n (1+r)^{T-n}, \mathbf{E}\left(X_{n+1}\right)\right), \end{aligned}$$

ugyanis az X_{n+1} független az $\mathcal{F}_n$ feltételi σ-algebráktól. Ebből következően ha bevezetjük az

$$\alpha_n \stackrel{\circ}{=} \frac{\mathbf{E}\left(X_{n+1}\right)}{(1+r)^{T-n}}, \quad \alpha_T = 0$$

számsorozatot, akkor az optimális lehívási stratégia a

$$\tau^* = \min\left\{n \geq 0 \mid H_n = X_n\right\} = \min\left\{n \geq 0 \mid \xi_n \geq \alpha_n\right\},$$

vagyis addig kell várni, amíg az aktuális ajánlat először el nem éri az α_n értéket. A megoldás pontos megértése céljából megjegyezzük, hogy az (α_n) sorozat csökken. Ennek igazolásához vezessük be a

$$V_n(\xi) \stackrel{\circ}{=} \frac{X_n}{(1+r)^{T-n}},$$

sorozatot. Az X_n definíciójából és a független és azonos eloszlás feltételéből

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\mathbf{E}\left(V_{n+1}(\xi)\right)}{1+r}, \\ V_n(\xi) &= \max\left(\xi, \frac{\mathbf{E}\left(V_{n+1}(\xi)\right)}{1+r}\right) = \max\left(\xi, \alpha_n\right). \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Nyilván

$$V_T(\xi) = \xi \leq \max\left(\xi, \frac{\mathbf{E}(V_{T-1}(\xi))}{1+r}\right) = V_{T-1}(\xi),$$

illetve indukcióval

$$V_{n+1}(\xi) = \max\left(\xi, \frac{\mathbf{E}(V_{n+2}(\xi))}{1+r}\right) \leq \max\left(\xi, \frac{\mathbf{E}(V_{n+1}(\xi))}{1+r}\right) = V_n(\xi),$$

amiből a $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$ már evidens. Ugyanakkor ha $F(x)$ a (ξ_n) változók közös eloszlásfüggvénye, akkor

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{\mathbf{E}(V_{k+1})}{1+r} = \frac{\mathbf{E}(\max(\xi_{k+1}, \alpha_{k+1}))}{1+r} = \\ &= \frac{1}{1+r}\left(\int_0^{\alpha_{k+1}} \alpha_{k+1} dF + \int_{\alpha_{k+1}}^{\infty} x dF(x)\right), \\ \alpha_T &= 0\end{aligned}$$

egy az (α_k) sorozatot megadó hátrafelé haladó indukció. Ha a (ξ_n) a $[0.1]$ szakaszon egyenletes eloszlású, akkor

$$\begin{aligned}&\alpha_T = 0, \\ &\alpha_n = \frac{1}{1+r}\left(\alpha_{n+1}^2 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha_{n+1}}^1\right) = \frac{1}{2(1+r)}\left(\alpha_{n+1}^2 + 1\right).\end{aligned}$$ □

2.29. Példa. Azonos és független ajánlatok esetén való vásárlás.

Tegyük fel, hogy valamilyen terméket akarunk megvásárolni és ehhez a T hosszú időszak mindegyikében egy azonos eloszlás szerinti, és egymástól független véletlen árajánlatot kapunk. Mikor kell a terméket megvenni? Mivel az árat minimalizálni akarjuk, ezért a bemutatottal azonos módon megmutatható, hogy az

$$\begin{aligned}&X_T = H_T \stackrel{\circ}{=} \xi_T, \\ &X_n = \min(\xi_n, \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n))\end{aligned}$$

Snell-burkoló és a $H_n \stackrel{\circ}{=} \xi_n$ kifizetések első „érintkezési” pontját kell meghatározni. Ismételten a függetlenség feltétele miatt

$$X_n = \min(\xi_n, \mathbf{E}(X_{n+1})),$$

amiből bevezetve az $\alpha_n \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(X_{n+1})$ konstansokat az optimális stratégiát a

$$\tau^* = \min\{n \geq 0 \mid \xi_n \leq \alpha_n\} \wedge T$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

megállási idő adja. E szerint a T időpontban a terméket mindenképpen meg kell venni. A $T-1$ időpontban akkor kell a terméket megvenni, ha a ξ_{T-1} utolsó előtti árajánlat kisebb, mint a közös várható érték, stb. Az így kapott α_n sorozat nyilván nem nő és az értékét a

$$\begin{aligned}\alpha_T &= \mathbf{E}(\xi_T),\\ \alpha_n &= \alpha_{n+1}(1-F(\alpha_{n+1})) + \int_0^{\alpha_{n+1}} x dF(x)\end{aligned}$$

hátrafelé haladó iterációval határozhatjuk meg. Ha a (ξ_n) a [0,1] szakaszon egyenletes eloszlású, akkor

$$\begin{aligned}\alpha_T &= \frac{1}{2},\\ \alpha_n &= \alpha_{n+1}(1-\alpha_{n+1}) + \frac{\alpha_{n+1}^2}{2} = \alpha_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1}^2}{2}.\end{aligned}$$ □

2.30. Példa. Részvény eladási feladat az árak megtartása esetén.

Tekintsük a már tárgyalt részvényeladási példát avval az eltéréssel, hogy a korábbi árakat szintén el lehet utóbb fogadni. Persze ha később fogadjuk el az árat, akkor kevesebb kamatot kapunk rá az időszak végén. Ilyenkor a

$$H_n \doteq (1+r)^{T-n} \max_{k\le n} \xi_k$$

kifizetéshez tartozó feladatot kell megoldani.

$$\begin{aligned}X_T &= H_T = \max_{n\le T} \xi_n,\\ X_n &= \max(H_n, \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)).\end{aligned}$$

Az egyenlőségeket $(1+r)^{T-n}$-nel végigosztva és új

$$V_n \doteq \frac{X_n}{(1+r)^{T-n}}$$

változókat bevezetve az

$$\begin{aligned}V_T &= \max_{n\le T} \xi_n,\\ V_n &= \max\left(\max_{k\le n} \xi_k, \frac{\mathbf{E}(V_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)}{1+r}\right)\end{aligned}$$

iterációhoz jutunk. A (ξ_k) változók függetlensége miatt az

$$\mathbf{E}(f(\xi,\eta) \mid \xi = x) = \mathbf{E}(f(x,\eta))$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

szabályt használva

$$V_{T-1} = \max\left(\max_{k\le T-1}\xi_k, \frac{\mathbf{E}\left(\max_{n\le T}\xi_n \mid \mathcal{F}_{T-1}\right)}{(1+r)}\right) =$$
$$= \max\left(\max_{k\le T-1}\xi_k, \frac{\mathbf{E}\left(\max\left(\max_{n\le T-1}\xi_n, \xi_T\right) \mid \mathcal{F}_{T-1}\right)}{1+r}\right) =$$
$$= \max\left(\max_{k\le T-1}\xi_k, h\left(\max_{k\le T-1}\xi_k\right)\right)$$

ahol

$$h(x) \triangleq \frac{\mathbf{E}\left(\max\left(x, \xi_T\right)\right)}{1+r}.$$

Vezessük be az

$$S \triangleq \{x \mid x \ge h(x)\} = \left\{x \mid x \ge \frac{\mathbf{E}\left(\max\left(x, \xi_T\right)\right)}{1+r}\right\}$$

tartományt. Nyilván

$$\mathbf{E}\left(\max\left(x, \xi_T\right)\right) = xF(x) + \int_x^\infty w dF(w).$$

Ugyanakkor

$$S = \left\{(1+r)x \ge xF(x) + \int_x^\infty w dF(w)\right\} =$$
$$= \left\{rx \ge x\left(F(x) - 1\right) + \int_x^\infty w dF(w)\right\} =$$
$$= \left\{rx \ge \int_x^\infty (w-x)\, dF(w)\right\}.$$

Mivel a bal oldal nő, a jobb csökken, ezért $S = \{x \ge a\}$, ahol

$$(1+r)a = aF(a) + \int_a^\infty x dF(x).$$

Ebből következően a $T-1$ időponban akkor kell vásárolni, ha $\max_{n\le T-1}\xi_n \ge$ $\ge a$, ellenkező esetben tovább kell lépni az utolsó periódusra. Megmutatjuk, hogy általában

$$\tau^* = \min\left\{n \mid \max_{k\le n}\xi_k \in S\right\} \wedge T = \min\left\{n \mid \max_{k\le n}\xi_k \ge a\right\} \wedge T,$$

vagyis az első olyan időpontban meg kell állni, ahol az aktuális ajánlati ár eléri, vagy nagyobb, mint az a szint. Ennek oka, hogy ebben a feladatban

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

érvényes az úgynevezett egy lépéssel való előrelátás szabálya, vagyis minden időpontban a megállás eldöntéséhez elég úgy tenni, mintha egyetlen lépés lenne csak hátra. Legyen

$$S_n^{(T)} \triangleq \left\{H_n^{(T)} = X_n^{(T)}\right\} = \left\{H_n = X_n^{(T)}\right\}$$

egy T hosszú időhorizonthoz tartozó n időpontban érvényes megállítási halmaz. Mivel az időhorizont növelésével a $H_n^{(T)}$ nem változik, az $X_n^{(T)}$ azonban legfeljebb nőhet, ezért általában $S_n^{(T+1)} \subseteq S_n^{(T)}$. Jelen esetben ha az időhorizont hossza $T = n+1$, akkor $S_n = \{\max_{k\le n} \xi_k \ge a\}$. Ha az időhorizontot eggyel $T = n+2$-re megnöveljük, akkor a $\max_{k\le n+1} \xi_k \ge \max_{k\le n} \xi_k \ge a$ nyilván teljesülni fog, ezért az S_n halmazon, kihasználva, hogy a (ξ_n) változók eloszlása azonos és függetlenek,

$$\begin{aligned}
V_n &= \max\left(\max_{k\le n}\xi_k, \frac{\mathbf{E}\left(V_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right)}{1+r}\right) = \\
&= \max\left(\max_{k\le n}\xi_k, \frac{\mathbf{E}\left(\max\left(\max_{k\le n+1}\xi_k, \frac{\mathbf{E}(V_{n+1}|\mathcal{F}_{n+1})}{1+r}\right) \mid \mathcal{F}_n\right)}{1+r}\right) = \\
&= \max\left(\max_{k\le n}\xi_k, \frac{\mathbf{E}\left(\max_{k\le n+1}\xi_k \mid \mathcal{F}_n\right)}{1+r}\right) = \\
&= \max\left(\max_{k\le n}\xi_k, \frac{\mathbf{E}\left(\max\left(\max_{k\le n}\xi_k, \xi_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right)}{1+r}\right) = \\
&= \max\left(\max_{k\le n}\xi_k, h\left(\max_{k\le n}\xi_k\right)\right) = \max_{k\le n}\xi_k,
\end{aligned}$$

vagyis miként állítottuk, teljesül a fordított $S_n^{(T)} \subseteq S_n^{(T+1)}$ tartalmazás is, azaz a $\{H_n = X_n\}$ halmaz független a hátralevő időperiódusok számától. □

2.31. Példa. Racionális betörő.

Ezen példa szerint egy betörő minden éjszaka ξ_k „bevételre“ tehet szert, de minden betöréskor p valószínűséggel lebukik. Lebukás esetén a teljes megszerzett vagyonát elveszti. Ilyenkor

$$H_n \triangleq \left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\prod_{k=1}^{n}\eta_k,$$

ahol az η_k p valószínűséggel nulla vagy egy értékeket felvevő, $\mathcal{F}_k$-mérhető valószínűségi változó. A Snell-burkoló egyenlete

$$\begin{aligned}
X_T &= H_T, \\
X_{T-1} &= \max\left(H_{T-1}, \mathbf{E}\left(X_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right)\right) = \\
&= \max\left(H_{T-1}, (1-p)\left(H_{T-1} + \mathbf{E}\left(\xi_T\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ebből látható, hogy az utolsó lépésben a megállítási halmaz

$$S = \left\{ x \mid x \geq \frac{1-p}{p} \mathbf{E}\left(\xi_T\right) \right\}.$$

Megmutatjuk, hogy a feladat szintén egy lépéssel való előretekintéssel megoldható. Növeljük meg az időhorizontot eggyel. Ekkor

$$\begin{aligned}
X_T &= \max\left(H_T, (1-p)\left(H_T + \mathbf{E}\left(\xi_{T+1}\right)\right)\right), \\
X_{T-1} &= \max\left(H_{T-1}, \mathbf{E}\left((1-p)\left(H_T + \mathbf{E}\left(\xi_{T+1}\right)\right) \mid \mathcal{F}_{T-1}\right)\right) = \\
&= \max\left(H_{T-1}, (1-p)\left(\mathbf{E}\left(H_T \mid \mathcal{F}_{T-1}\right) + \mathbf{E}\left(\xi_{T+1}\right)\right)\right) = \\
&= \max\left(H_{T-1}, (1-p)\left((1-p)\left(H_{T-1} + \mathbf{E}\left(\xi_{T+1}\right)\right) + \mathbf{E}\left(\xi_{T+1}\right)\right)\right) = \\
&= \max\left(H_{T-1}, (1-p)^2 H_{T-1} + (1-p)\left((1-p)+1\right)\mathbf{E}\left(\xi_{T+1}\right)\right).
\end{aligned}$$

A megállítási halmaz ilyenkor

$$\begin{aligned}
&\left\{ x \mid x \geq (1-p)^2 x + \left((1-p)^2 + (1-p)\right)\mathbf{E}\left(\xi_{T+1}\right) \right\} = \\
&= \left\{ x \mid \frac{x}{(1-p)^2} \geq x + \left(1 + \frac{1}{1-p}\right)\mathbf{E}\left(\xi_{T+1}\right) \right\} = \\
&= \left\{ x \mid x\left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right) \geq \frac{2-p}{1-p}\mathbf{E}\left(\xi_{T+1}\right) \right\} = \\
&= \left\{ x \mid x\frac{p(2-p)}{(1-p)^2} \geq \frac{2-p}{1-p}\mathbf{E}\left(\xi_{T+1}\right) \right\} = \\
&= \left\{ x \mid x \geq \frac{1-p}{p}\mathbf{E}\left(\xi_{T+1}\right) \right\} \mathrel{\mathring{=}} \{ x \mid x \geq a \},
\end{aligned}$$

vagyis a megállítási halmaz nem függ az időszak hosszától és a betörési sorozatot akkor kell befejezni, amikor először lesz a rablott összérték eleme az S halmaznak, vagyis legalább a fenti a szám. □

2.4.6. A Doob–Meyer-felbontás és a szuperhedge létezése

Térjünk vissza az amerikai opciók árazási problémájára.

2.32. Tétel. *Ha X integrálható szubmartingál, akkor van, mégpedig egyetlen olyan M martingál és A előrejelezhető, növekedő folyamat, hogy*

$$X = M + A, \quad A_0 = 0.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Legyen $M_0 \stackrel{\circ}{=} X_0$, $A_0 \stackrel{\circ}{=} 0$, és

$$M_n \stackrel{\circ}{=} X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(X_{j+1} - \mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right)\right), \quad A_n \stackrel{\circ}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right) - X_j\right).$$

Mivel az X_n változók integrálhatóak, ezért a feltételes várható értékek értelmesek és világos, hogy az M_n változók integrálhatóak. Könnyen látható, hogy $X = M + A$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(X_0 + \sum_{j=0}^{n} \left(X_{j+1} - \mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right)\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(X_0 \mid \mathcal{F}_n\right) + \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}\left(X_{j+1} - \mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
&= X_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \left(X_{j+1} - \mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right)\right) + 0,
\end{aligned}$$

így M martingál. Az X szubmartingál, így $\mathbf{E}\left(X_{j+1} \mid \mathcal{F}_j\right) - X_j \geq 0$ következésképpen az A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető és növekedő. Megmutatjuk, hogy a felbontás egyértelmű. Ha $X_n = M'_n + A'_n$ egy másik felbontás, akkor

$$\begin{aligned}
A'_{n+1} - A'_n &= \left(X_{n+1} - M'_{n+1}\right) - \left(X_n - M'_n\right) = \\
&= \left(X_{n+1} - X_n\right) - \left(M'_{n+1} - M'_n\right) = \\
&= \left(A_{n+1} - A_n\right) + \left(M_{n+1} - M_n\right) - \left(M'_{n+1} - M'_n\right).
\end{aligned}$$

Ha az $\mathcal{F}_n$-szerint feltételes várható értéket veszünk, majd felhasználjuk, hogy az A és az A' előrejelezhető, valamint, hogy az M és az M' martingál

$$A'_{n+1} - A'_n = A_{n+1} - A_n + 0 - 0.$$

Mivel $A_0 = A'_0 = 0$, ezért minden n-re $A_n = A'_n$. Ezt felhasználva az $M_n = M'_n$ egyenlőség már evidens. □

2.33. Tétel. *Ha a piac teljes és nincsen arbitrázs, akkor minden $H \geq 0$ kifizetés esetén az amerikai opciónak van ára és az ár éppen a kockázatsemleges mérték mellett értelmezett optimális megállítás feladatának optimális értékével azonos.*

Bizonyítás. A feltételek miatt nincsen arbitrázs, így létezik $\mathbf{Q}$ martingálmérték. Legyen H a kifizetésekből álló folyamat. Jelölje X a H-hoz tartozó Snell-burkolót. Az X szupermartingál, és az alaptér véges atomossága miatt a

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$-X$ integrálható szubmartingál, tehát rendelkezik Doob–Meyer-felbontással: $X = M - A$, ahol M martingál, $A \geq 0$, $A_0 = 0$. Mivel a modell teljes, ezért létezik olyan x^*, hogy a hozzá tartozó portfólió értékfolyamatára $V_T(x^*) = M_T$. A V lokális martingál a $\mathbf{Q}$ martingálmérték mellett. Mivel az M_T integrálható a $V(x^*)$ nem csak lokális martingál, hanem valódi martingál, tehát

$$V_n(x^*) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(V_T(x^*) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(M_T \mid \mathcal{F}_n) = M_n.$$

Mivel $A_0 = 0$, és mivel létezik τ^* optimális megállási idő, ezért a megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(V_{\tau^*}(x^*)) = V_0(x^*) = M_0 = M_0 - A_0 = X_0 = \\ = \max_{\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H_\tau) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H_{\tau^*})$$

és

$$V_n(x^*) = M_n = (X_n + A_n) \geq (H_n + A_n) \geq H_n,$$

vagyis a $V(x^*)$ szuperreplikáló és az első egyenlőség miatt

$$V_{\tau^*}(x^*) \overset{m.m.}{=} H_{\tau^*}.$$

Természetesen a szuperreplikálás és a megállítás időpontjában való majdnem mindenhol való egyezés a $\mathbf{Q}$ mérték mellett majdnem mindenhol teljesül. De mivel a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalensek ezért a relációk az eredeti „statisztikai" mérték esetén is teljesülnek. Miként a bevezetőben elmondtuk, ilyenkor a H ára éppen x^*. □

Hangsúlyozni kell, hogy a H kifizetésen, illetve az S alaptermékeken általában a diszkontált folyamatokat értjük. Vagyis az optimális megállítási problémát a diszkontált értékfolyamatra kell megoldani. A modell közgazdaságilag csak így értelmes. Ugyanakkor matematikai szempontból a feladat akkor is megoldható, ha portfólióként közvetlenül a „sztochasztikus integrálokat" tekintjük és az első és második alaptételt közvetlenül az alaptermékekre alkalmazzuk. Ilyenkor természetesen a H kifizetést nem kell diszkontálni. Matematikai szempontból csak az a lényeg, hogy az M felírható legyen replikáló portfólióként.

Vegyük észre, hogy az előző állításban nem használtuk ki, hogy a Doob–Meyer-felbontásban szereplő A előrejelezhető. Erre az alábbiakban lesz szükségünk. A Doob–Meyer-felbontás segítségével további optimális megállási időket is meghatározhatunk.

2.34. Definíció. Legyen $H \geq 0$ tetszőleges és legyen X a H Snell-burkolója. Legyen $X = M - A$ az X Doob–Meyer-felbontása. Legyen

$$\tau^{**}(\omega) \triangleq \begin{cases} T, & \text{ha } A_T(\omega) = 0 \\ \min\{n \mid A_{n+1}(\omega) > 0\}, & \text{ha } A_T(\omega) > 0 \end{cases}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

2.35. Tétel. *A τ^{**} a H egy optimális megállási ideje. A τ^{**} a maximális optimális megállási idő.*

Bizonyítás. Mivel az A előrejelezhető, ezért az A_{n+1} változó $\mathcal{F}_n$-mérhető, így

$$\{\tau^{**} = n\} = \cap_{k \leq n} \{A_k = 0\} \cap \{A_{n+1} > 0\} \in \mathcal{F}_n$$

tehát a τ^{**} megállási idő. A τ^{**} optimalitását az optimalitási kritérium segítségével fogjuk igazolni. Nyilván $A^{\tau^{**}} = 0$, tehát

$$X^{\tau^{**}} = M^{\tau^{**}} - A^{\tau^{**}} = M^{\tau^{**}}.$$

Az M martingál, minden megállított martingál martingál, tehát az $X^{\tau^{**}}$ is martingál, így a második feltétel teljesül. Megmutatjuk, hogy $X(\tau^{**}) = H(\tau^{**})$.

$$\begin{aligned} X(\tau^{**}) &= \sum_{k=0}^{T-1} \chi(\tau^{**} = k) X_k + \chi(\tau^{**} = T) X_T = \\ &= \sum_{k=0}^{T-1} \chi(\tau^{**} = k) \max(H_k, \mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k)) + \chi(\tau^{**} = T) H_T. \end{aligned}$$

Mivel az A előrejelezhető és az M martingál, ezért

$$\mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = \mathbf{E}(M_{k+1} - A_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = M_k - A_{k+1}.$$

A $\{\tau^{**} = k\}$ halmazon $A_k = 0$ miközben $A_{k+1} > 0$, így ezen a halmazon

$$\mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k) = M_k - A_{k+1} < M_k - A_k = X_k,$$

így a $\{\tau^{**} = k\}$ halmazon

$$X_k = \max(H_k, \mathbf{E}(X_{k+1} \mid \mathcal{F}_k)) = H_k,$$

következésképpen $X_{\tau^{**}} = H_{\tau^{**}}$, amely éppen az első feltétel.

Végül megmutatjuk, hogy a τ^{**} a maximális optimális megállási idő. Legyen $\tau \geq \tau^{**}$ egy megállási idő és tegyük fel, hogy egy pozitív mértékű halmazon $\tau > \tau^{**}$. Ezen a halmazon az $A(\tau)$ pozitív. Mivel $A \geq 0$, ezért $\mathbf{E}(A(\tau)) > 0$, így a megállási opciókról szóló tétel szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(H(\tau)) &\leq \mathbf{E}(X(\tau)) = \mathbf{E}(M(\tau)) - \mathbf{E}(A(\tau)) < \\ &< \mathbf{E}(M(\tau)) = \mathbf{E}(M(0)) = \mathbf{E}(X(0)) = X(0), \end{aligned}$$

tehát a τ nem lehet optimális. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3. fejezet

Néhány tétel a sztochasztikus folyamatok elméletéből

A sztochasztikus integrálás elmélete – elsősorban a közgazdasági alkalmazások miatt – virágkorát éli. Ugyanakkor az elmélet a mértékelmélet és a funkcionálanalízis olyan pontos és alapos ismeretére épül, amely az alkalmazásokban érdekelt kutatók számára gyakran csak komoly erőfeszítések árán érhető el. Viszonylag jól képzett matematikusok számára is a sztochasztikus integrálás elmélete számos mértékelméleti meglepetést tartalmaz. A matematikai pénzügyek népszerűségének egyik oka, hogy legfontosabb eredményei a sztochasztikus integrálás, illetve általánosabban a sztochasztikus analízis eszköztárára épülnek, így a matematikai elmélet fénye kétségtelenül átvetül a pénzügyi elméletre, és nagyban hozzájárul a pénzügyi világ által önmaga köré épített káprázathoz. A fejezetben megpróbálok az előismeretek minimumát felhasználva rövid áttekintést adni a legfontosabb konstrukciókról. Természetesen bizonyos alapfogalmakra szükségünk lesz. Így például feltételezem, hogy az olvasó olyan fogalmakkal, mint filtráció, megállási idő, trajektória tisztában van. Ugyanakkor néhány nehezebb, talán kevésbé elemi, de azért közismert eredményt is fel fogunk használni. Ezek közé tartozik az $L^2(\Omega)$-ban korlátos halmazok egyenletes integrálhatósága, illetve a Doob-egyenlőtlenségek. A szükséges előismereteket egy jelentős részét a fejezet első pontjában röviden összefoglalom. Ugyanakkor mivel egy igen kifinomult és szerteágazó matematikai elméletről van szó, így az olvasónak a téma pontos, az apró részletekbe is belemenő megértéséhez esetlegesen szüksége lehet a Valószínűségszámítás könyvemben megtalálható egyes további tételekre.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bár a tárgyalás reményeim szerint a lehetőségekhez képest egyszerű, azért távolról sem magától értetődő, és hallgatólagosan a mértékelméletre épülő valószínűségszámítás jelentős ismeretét feltételezi. A tárgyalás kulcsa, hogy első lépésként csak folytonos, pontosabban balról reguláris, integrandus esetén vizsgáljuk az integrálást. Ilyenkor az integrál igen egyszerűen definiálható: az integrál a közelítő összegek határértéke. Az egyetlen észrevétel, amit tenni kell, hogy az integrál értéke, szemben a klasszikus esettel, függ a közelítő pont választásának módjától. Ez az úgynevezett kvadratikus variáció létezésében és pozitivitásában jelentkezik. A bemutatott eredmények használhatóságát többek között a sztochasztikus differenciálegyenletek elméletének rövid ismertetésén teszteljük. A fejezet végén röviden bemutatom az integrál kiterjesztését mérhető integrandusokra.

A sztochasztikus integrálás elméletének kulcsfogalma a kvadratikus variáció. Az alábbi gondolatmenet némiképpen egyszerűsíthető lenne, ha csak Wiener-folyamatok szerinti integrálokat próbálnánk bevezetni, ugyanis a Wiener-folyamatok kvadratikus variációja igen egyszerű. Valamely intervallumon egy Wiener-folyamat kvadratikus variációja éppen az intervallum hossza. Ennek következtében a kvadratikus variáció által definiált mérték egyrészt determinisztikus, másrészt éppen a Lebesgue-mérték. Ha azonban az integrátor csak Wiener-folyamat lehet, akkor nem világos, hogy mit jelentenek azok az integrálok, amikor az integrátor már maga is egy Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrál. A Wiener-folyamat azon kétségtelen előnye, hogy a kvadratikus variációja determinisztikus, a formulákat és a gondolatmenetet leegyszerűsíti, de ha hajlandók vagyunk az absztrakciós létrán egy kicsit feljebb mászni, akkor többet nyerünk, mint amennyi energiát elveszítünk.

A fejezet a könyv első olvasásakor kihagyható. Második és harmadik olvasásra elegendő a definíciókat és a tételeket nagyjából megérteni. A negyedik olvasásra a definíciók és a példák tartalmát érdemes átgondolni. Ötödik olvasásra esetleg érdemes a tételek pontos tartalmát megérteni, és csak nagyon sokadik olvasásra és nagyon elhivatott olvasónak érdemes a fejezetben szereplő összes tétel bizonyítását átgondolni.

3.1. Néhány alapfeltevés

Ebben a pontban azokat a nem teljesen triviális, de a sztochasztikus folyamatok területén közismert állításokat és feltételeket sorolom fel, amelyekre a későbbiekben támaszkodni fogunk.

1. Kezdjük a sztochasztikus alaptérrel. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ egy valószínűségi mező. Hangsúlyozni kell, hogy mivel csak folytonos szemimartingálok szerint akarunk integrálni, nem lesz szükségünk a mező teljességére, vagyis nem tételezzük fel, hogy a nullmértékű halmazok részhalmazai is események, vagyis

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

elemei az $\mathcal{A}$ σ-algebrának. A mezőn értelmezve van egy $\mathcal{F}$ filtráció, vagyis adott az időtartomány t változójával indexelt σ-algebrákból álló $\mathcal{F}_t$ család, amelyre ha $s < t$, akkor $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$. Egy $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamatot adaptáltnak mondunk, ha minden t időpontra az $\omega \mapsto X(t,\omega)$ mérhető az $\mathcal{F}_t$ szerint. A továbbiakban az adaptáltságot minden további említés nélkül minden folyamattól automatikusan megköveteljük. Feltételezzük, hogy az összes $\mathcal{F}_t$ tartalmazza az alaptér nullmértékű halmazait. Erre azért van szükség, mert két folyamatot akkor tekintünk azonosnak, ha a trajektóriáik egy nulla mértékű halmaztól eltekintve azonosak. Vagyis, ha X és Y folyamatok, akkor az $X = Y$ reláció azt jelenti, hogy majdnem minden kimenetelre az X és az Y trajektóriái azonosak. Másképpen, a sztochasztikus folyamatok függvény értékű valószínűségi változók ekvivalencia osztályai.

Felvethető, hogy függvényértékű valószínűségi változók értelmezéséhez valamiképpen definiálni kell a trajektóriák terén a mérhetőség fogalmát, ugyanis a mérhető leképezések mérhető terek között hatnak. Ehhez először értelemszerűen rögzíteni kell a függvényosztályt, amiből a trajektóriákat vesszük. Például ez lehet a folytonos függvények $C([0,\infty))$ halmaza, vagy a később bevezetett jobbról, vagy balról reguláris függvények osztálya. A rögzített függvénytéren a mérhetőséget általában az úgynevezett koordinátaleképezések által generált mérhetőségi struktúrával definiáljuk, vagyis a függvénytéren azt a legszűkebb σ-algebrát tekintjük, amelyre nézve minden t időpontban az $\omega \mapsto X(t,\omega)$ úgynevezett koordinátaleképezés éppen $\mathcal{F}_t$ mérhető. Ilyenkor a trajektóriák terén a mérhetőség definícióját visszavezetjük a már megadott filtrációra. Előfordul azonban a fordított irány is. Például a folytonos függvények terén a topológiát a kompakt halmazokon való egyenletes konvergenciával szokás definiálni. Ez a topológia definiál egy Borel-mérhetőségi struktúrát a trajektóriák terén. Ezt követően a filtrációt úgy definiáljuk, hogy $\mathcal{F}_t$ az a legszűkebb σ-algebra, amelyre nézve az összes $s \leq t$ időpont esetén az $\omega \mapsto X(s,\omega)$ koordinátaleképezés mérhető. Ilyenkor tehát a függvénytéren definiált mérhetőségi struktúrából származtatjuk a filtrációt. Természetesen a tárgyalás során kiemelt figyelemmel kell ügyelni arra, hogy a két megközelítés egyidejű alkalmazása kompatibilis legyen.

A nullmértékű halmazokra tett feltétel miatt minden egyes folyamathoz tartozó osztály minden eleme adaptált, vagyis ha $X = Y$ vagyis ha a trajektóriáik csak nullmértékű halmazban különböznek, és az X adaptált, akkor az Y is adaptált, ugyanis minden t-re az $X(t)$ majdnem mindenhol megegyezik az $Y(t)$-vel, és mivel az $\mathcal{F}_t$ tartalmazza a nullmértékű halmazokat, ezért az $X(t)$ mérhetőségéből következik az $Y(t)$ mérhetősége. Érdemes megjegyezni, hogy ha minden t-re $X(t)$ majdnem mindenhol megegyezik az $Y(t)$-vel, akkor azt szokás mondani, hogy az Y folyamat az X folyamat módosítása. Mivel a filtrációban szereplő σ-algebrák tartalmazzák a nullmértékű halmazokat, ezért ha az X adaptált és az Y az X módosítása, akkor az Y is adaptált. Mivel

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

a folyamatok egyenlőségéből következik a módosítás erejéig való egyenlőség, ezért az első megjegyzés a második speciális esete.

A filtrációról feltesszük, hogy jobbról folytonos. Ez alatt azt értjük, hogy tetszőleges t-re $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s \stackrel{\circ}{=} \mathcal{F}_{t+}$. Azt mondjuk, hogy a sztochasztikus alaptér teljesíti a szokásos feltételeket, ha

1. a $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos,
2. minden időpontban az $\mathcal{F}_t$ tartalmazza a nullmértékű halmazokat,
3. az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér teljes, vagyis ha $A \in \mathcal{A}$ és $\mathbf{P}(A) = 0$, akkor minden $N \subseteq A$ esetén $N \in \mathcal{A}$. Ismételten hangsúlyozni kell, hogy ez utóbbi feltételre folytonos integrátorok esetén, vagyis az itt bemutatott tételek tárgyalása során, nincsen szükség.

2. Az X folyamatot folytonosnak mondjuk, ha a $t \mapsto X(t, \omega)$ trajektóriák folytonosak. Az ekvivalenciaosztály bevezetése miatt, a minden kimenetre való folytonosság helyett gyakran megelégszünk a majdnem minden ω kimenetelre való folytonossággal. Egy folyamat jobbról reguláris, ha a trajektóriálnak minden időpontban létezik véges bal oldali határértéke és a trajektóriák jobbról folytonosak. Hasonlóan értelmezhető a balról reguláris folyamatok családja. Egy X folyamatot regulárisnak mondunk, ha vagy jobbról vagy balról reguláris. Érdemes hangsúlyozni, hogy a regularitás definíciójában szereplő határérték mindig véges. Annak ellenére, hogy gyakran használunk absztrakt nyelvezetet a sztochasztikus folyamatok trajektóriái legtöbbször reguláris függvények. Például az alább felépített Itô–Stieltjes integrálás elméletében az integrandusok balról regulárisok, az integrátorok pedig jobbról reguláris folyamatok. A trajektóriák regularitásának fontos következménye, hogy beszélhetünk az X folyamat ugrásaiból álló ΔX folyamatról, amely definíció szerint $\Delta X = X_+ - X_-$, ahol az X_+ a jobb oldali határértékekből álló folyamat és értelemszerűen X_- jelöli a bal oldali határértékekből álló folyamatot. A Δ szimbólumot gyakran egy folyamat növekményeinek jelölésére is alkalmazni fogjuk, ami elvileg némiképpen félreérthető. A szövegkörnyezetből kiragadva például a $\Delta X(t_k)$ jelölés esetén nem világos, hogy az X ugrásaiból álló ΔX folyamat t_k időpontban vett helyettesítési értékéről van szó, vagy egy (t_k) időpont sorozat által definiált $X(t_k) - X(t_{k-1})$ növekményről van-e szó. Remélhetőleg azonban a szövegkörnyezetből ez mindig egyszerűen kideríthető[1].

Könnyen belátható, hogy reguláris függvényekre értelemszerű módosítással átvihetők az elemi analízisben a kompakt szakaszokon értelmezett folytonos függvényekre belátott állítások. Például a reguláris függvények minden kompakt intervallumon korlátosak, illetve ha az ugrások nagysága kisebb, mint

[1] Mivel általában folytonos folyamatokkal foglalkozunk, az ugrásokra ritkán kell hivatkozni.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

egy fix c konstans, akkor tetszőleges kompakt szakasz esetén bármilyen $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta > 0$, hogy ha a t_1 és t_2 távolsága kisebb, mint δ, akkor a reguláris függvény t_1 és a t_2 időpontokban vett értékeinek távolsága legfeljebb $c+\varepsilon$. Természetesen a korlát, illetve a δ függvényenként más és más lehet. A korlátosságra vonatkozó megjegyzés indoklása a következő: Tegyük fel, hogy az X folyamat reguláris és egy alkalmas (t_n) sorozatra $|X(t_n)| \geq n$, és a (t_n) sorozat elemei egy kompakt időtartományban vannak. Részsorozatokra áttérve a kompaktság miatt feltehető, hogy a (t_n) konvergens, illetve hogy monoton nő vagy esetleg csökken. Ez azonban ellentmond annak, hogy az X reguláris, és ezért minden időpontban a trajektóriáknak van jobbról és balról vett határértéke. Hasonlóan, ha van olyan (t_k) és (s_k) sorozat, amelyre $|t_k - s_k| \leq 1/k$ és $|f(t_k) - f(s_k)| \geq c + \varepsilon$, akkor részsorozatokra áttérve feltehető, hogy az (s_k) és a (t_k) sorozat konvergens. Ha a két sorozat a közös határérték egyik oldalára esik, akkor ez ellentmond annak hogy létezik a jobb és bal oldalról vett határérték, ha pedig a közös határérték két különböző oldalára esik a két sorozat, akkor az ellenmond annak, hogy a lehetséges ugrások maximális nagysága c.

3. Sztochasztikus folyamatra a legfontosabb példát a Wiener-folyamatok szolgáltatják.

3.1. Definíció. Egy $\{w(t,\omega)\}_{t\geq 0}$ folyamatot Wiener-folyamatnak mondunk, ha teljesíti az alábbi négy feltételt:

1. $w(0) \equiv 0$.
2. A w növekményei függetlenek, vagyis tetszőleges $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ idősorozat esetén a növekményekből álló n darab $w(t_k) - w(t_{k-1})$ valószínűségi változó független.
3. Tetszőleges $0 \leq s < t$ értékekre a $w(t) - w(s)$ eloszlása $N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$, vagyis a $w(t) - w(s)$ változó sűrűségfüggvénye
$$g_{t-s}(x) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\frac{-x^2}{2(t-s)}\right).$$
Ebből következően a w stacionárius növekményű, amin azt értjük, hogy a $w(t)-w(s)$ növekmény eloszlása csak az időintervallum $t-s$ hosszától és nem az időintervallum elhelyezkedésétől függ.
4. A w folytonos abban az értelemben, hogy minden ω kimenetelre a $t \mapsto w(t,\omega)$ trajektória folytonos.

Érdemes hangsúlyozni, hogy ha w a fenti definíció szerint egy Wiener-folyamat és $\mathcal{F}_t^0$ a folyamat által generált filtráció, vagyis $\mathcal{F}_t^0$ a $\{w(s) \mid s \leq t\}$ változók által generált σ-algebra, akkor az $\mathcal{F}^0$ filtráció nem lesz jobbról folytonos. A legegyszerűbb példa a következő: Legyen N azon kimenetelek halmaza,

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

amelyre az w Wiener-folyamat trajektóriái egy pozitív hosszúságú $[0, t(\omega)]$ szakaszon nullák maradnak. Az N valószínűsége nulla. Mivel definíció szerint $w(0) = 0$, ezért a $t = 0$ pontban a generált filtráció a triviális $(\Omega, \emptyset)$ σ-algebra. Ugyanakkor könnyen látható, hogy $N \in \cap_{t>0}\mathcal{F}_t^0$, ugyanis bármilyen kicsi, de pozitív hosszúságú időintervallumot is megyünk előre az N-be eső kimenetelekhez tartozó trajektóriákat meg tudjuk határozni. Megmutatható azonban, hogy ha az $\mathcal{F}^0$-ban szereplő σ-algebrákat kibővítjük a nullmértékű halmazokkal, akkor az így kapott $\mathcal{F}$ filtráció jobbról folytonos lesz. A filtráció jobbról való folytonossága nélkül a sztochasztikus analízis legtöbb tétele nem teljesül, így a nullmértékű halmazokkal a filtrációt mindenképpen ki kell egészíteni. Ennek megfelelően Wiener-folyamat által generált filtráción nem az $\mathcal{F}^0$, hanem a nullmértékű halmazokkal kiegészített $\mathcal{F}$ filtrációt szokás érteni.

A Wiener-folyamat $t = 0$ pontban való értékével kapcsolatos további apró bonyodalom, hogy miként jeleztük két folyamatot akkor tekintünk egyenlőnek, ha a trajektóriái majdnem minden kimenetelre azonosak. Ennek megfelelően egy folyamatot akkor is Wiener-folyamatnak kell mondanunk, ha a $w(0)$ csak majdnem mindenhol nulla. Ez is arra utal, hogy a szokásos feltételekben szereplő nullmértékű halmazokkal való kiegészítés nem úszható meg. Az persze egy külön szerencse, hogy Wiener-folyamatok esetén, a már idézett tétel alapján, ezzel a kiegészítéssel két legyet ütünk egy csapással.

A definíció körüli további bonyodalom forrása, hogy beszélni szokás egy adott $\mathcal{F}$ filtrációhoz tartozó Wiener-folyamatról is. Ennek több praktikus oka van. A legegyszerűbb eset az, amikor több folyamat egyszerre adja meg a filtrációt és ehhez a filtrációhoz képest akarunk egy Wiener-folyamatot definiálni. Egy másik eset, amikor adott egy w Wiener-folyamat és a $\widetilde{w}(t) \triangleq w(t+s) - w(s)$ úgynevezett újraindított folyamatról szeretnénk igazolni, hogy Wiener-folyamat, de a filtráción az $\widetilde{\mathcal{F}}_t \triangleq \mathcal{F}_{t+s}$ filtrációt szeretnénk érteni, amelyre például az $\widetilde{\mathcal{F}}_0$ már nem a nulla és egy valószínűségű halmazok σ-algebrája. Ennek megfelelően a Wiener-folyamat definícióját érdemes általánosítani és a független növekmény feltételét módosítani:

3.2. Definíció. Az X folyamatot az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve független növekményűnek mondjuk, ha minden $t > s$ esetén az $X(t) - X(s)$ növekmény független az $\mathcal{F}_s$ σ-algebrától. Értelemszerűen ez definíció szerint azt jelenti, hogy az $X(t) - X(s)$ növekmény által generált $\sigma(X(t) - X(s))$ σ-algebra minden eleme független az $\mathcal{F}_s$ σ-algebra minden elemétől. Egy w folyamatot egy $\mathcal{F}$ filtráció szerint Wiener-folyamatnak mondunk, ha

1. $w(0) = 0$ majdnem mindenhol,
2. w az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve független növekményű,
3. a w stacionárius növekményű és tetszőleges $0 < s < t$ esetén a $w(t) - w(s)$ eloszlása $N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

4. a w trajektóriái majdnem minden kimenetelre folytonosak.

4. Egy τ véletlen időpontot megállási időnek mondunk, ha minden t esetén a $\tau \wedge t \stackrel{\circ}{=} \min(\tau, t)$ valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ téren. Ennek interpretációja az, hogy a megállási idő t időpontig bekövetkezett része valószínűségi változó a t időpontban. Könnyen belátható, hogy ez ekvivalens avval, hogy minden t esetén $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Könnyen belátható, hogy mivel $\{\tau \leq t\} = \cap_n \{\tau < t + 1/n\}$ és mivel az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos, ez ekvivalens avval, hogy minden t esetén $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$. Megjegyezzük, hogy a filtrációk jobbról való folytonosságára leginkább azért van szükség, hogy ezt az ekvivalenciát biztosítani tudjuk. A megállási idők halmazának kiemelkedően fontos részhalmaza a találati idők halmaza. Egy B halmaz találati idején a

$$\tau_B(\omega) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid X(t, \omega) \in B\} \tag{3.1}$$

véletlen időpontot értjük. Vegyük észre, hogy $\tau_B(\omega) = \infty$ pontosan akkor, ha az ω kimenetelre az X folyamat $t \mapsto X(t, \omega)$ trajektóriája nem metsz bele a B halmazba[2]. Érdemes hangsúlyozni, hogy a definícióban szereplő infimum miatt a $\tau_B(\omega)$ időpontban az X folyamat megfelelő trajektóriája nincsen feltétlenül a B halmazban. A sztochasztikus alaptérre, az X folyamatra, illetve a B halmazra tett különböző feltételek teljesülése esetén garantálható, hogy a találati idők egyúttal megállási idők is legyenek.

3.3. Állítás. *Ha az X folyamat folytonos és a B halmaz zárt, vagy ha az X jobbról vagy balról folytonos a B nyílt és a filtráció jobbról folytonos, akkor a τ_B találati idők megállási idők.*

Bizonyítás. A nyílt és a zárt halmazok találati ideje közötti eltérés abból ered, hogy a nyílt halmazok esetén $\{\tau_B = t\}$ tartalmazhat olyan ω kimeneteleket, amelyekre a B elérés csak a t „után” következik be, vagyis amikor a folyamat kívülről éri el a B halmazt. Ezért kell nyílt halmazok esetén a $\{\tau_B < t\}$ eseménnyel foglalkozni. Amikor egy zárt halmaz határát elérjük, akkor már tudjuk, hogy a halmazban vagyunk, de egy nyílt halmaz esetén a határról még visszafordulhatunk és csak a határátlépés után tudjuk meg, hogy végül beléptünk a halmazba vagy sem.

I. Megmutatjuk, hogy ha a B halmaz zárt, az X folytonos trajektóriájú folyamat, akkor a fenti (3.1) sorban definiált τ_B találati idő egyben megállási idő. Hangsúlyozzuk hogy ezt az X és a B egyszerű tulajdonságai miatt minden további megkötés, vagyis például a filtráció jobbról való folytonosságának feltétele nélkül igazoljuk. A trajektóriák folytonossága miatt minden

[2] Mivel egy megállási idő egy pozitív valószínűségű halmazon felveheti a végtelen értéket, ezért formailag a megállási idők nem valószínűségi változók.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ω kimenetelre a $K(t,\omega) \stackrel{\circ}{=} X([0,t],\omega)$ halmaz kompakt. A B zártsága miatt $K(t,\omega) \cap B = \emptyset$ pontosan akkor, ha a két halmaz távolsága pozitív, és ilyenkor $\tau_B(\omega) > t$. Másképpen

$$\{\tau_B \le t\} = \{\omega \mid K(t,\omega) \cap B \neq \emptyset\}.$$

A trajektóriák folytonossága miatt az $X([0,t] \cap \mathbb{Q},\omega)$ sűrű a $K(t,\omega)$ halmazban. A távolságfüggvény folytonossága alapján

$$\{\tau_B \le t\} = \{\omega \mid K(t,\omega) \cap B \neq \emptyset\} = \{\omega \mid d(K(t,\omega),B) = 0\} = \\ = \{\omega \mid \inf\{d(X(s,\omega),B) \mid s \le t, s \in \mathbb{Q}\} = 0\}.$$

Rögzített $s \le t$-re az $\omega \mapsto X(s,\omega)$ $\mathcal{F}_t$-mérhető, ami az $x \mapsto d(x,B)$ folytonossága miatt teljesül az $\omega \mapsto d(X(s,\omega),B)$-re is. Megszámlálható mérhető függvény infimuma mérhető, mérhető függvény nívóhalmazai mérhetőek, tehát $\{\tau_B \le t\} \in \mathcal{F}_t$.

II. Megmutatjuk, hogy ha a B nyílt, és az X trajektóriái jobbról folytonosak, akkor a (3.1) találati idő megállási idő az $\mathcal{F}_{t+} \stackrel{\circ}{=} \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$ σ-algebrára nézve, tehát ha az $\mathcal{F}_t$ jobbról folytonos, akkor a τ_B megállási idő. Ezt úgy igazolhatjuk, ha megmutatjuk, hogy minden t-re $\{\tau_B < t\} \in \mathcal{F}_t$. A trajektóriák jobbról folytonossága és a B nyíltsága miatt, $X(s,\omega) \in B$ pontosan akkor, ha egy alkalmas $\varepsilon > 0$ számra $X(u,\omega) \in B$, ha $u \in [s, s+\varepsilon)$. Ebből

$$\{\tau_B < t\} = \cup_{s\in[0,t)}\{X(s) \in B\} = \cup_{s\in\mathbb{Q}\cap[0,t)}\{X(s) \in B\} \in \mathcal{F}_t.$$

III. Hasonlóan belátható, hogy ha X balról folytonos, a filtráció jobbról folytonos és B nyílt, akkor a τ_B elérési idő megállási idő. □

3.4. Példa. Nyílt halmaz találati ideje amely nem megállási idő.

I. Ha B nyílt, és a filtráció nem jobbról folytonos, akkor még folytonos trajektóriák esetén sem tudjuk garantálni, hogy τ_B megállási idő legyen. Ha például

$$X(t,\omega) \stackrel{\circ}{=} t \cdot \xi(\omega),$$

ahol ξ egy normális eloszlású változó, és $\mathcal{F}$ a generált filtráció, akkor $\mathcal{F}_0 = \\ = \{\Omega,\emptyset\}$, és ha $t > 0$, akkor $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Evidens módon látható, hogy a $B \stackrel{\circ}{=} \{x > 0\}$ halmazhoz tartozó τ_B vagy a nulla, vagy a ∞ értéket veszi fel, attól függően, hogy $\xi(\omega) > 0$ vagy $\xi(\omega) \le 0$. Következésképpen $\{\tau_B \le 0\} \notin \mathcal{F}_0$. Az is könnyen látható, hogy a példa szempontjából irreleváns, hogy a nullmértékű halmazokat hozzácsapjuk a filtrációhoz vagy sem.

II. Hasonlóképpen látható, hogy ha X Wiener-folyamat és $B \stackrel{\circ}{=} \{x \neq 0\}$, akkor a τ_B csak akkor megállási idő, ha a Wiener-folyamat által generált

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

filtrációt kibővítjük a nullmértékű halmazokkal, vagyis ha a filtrációt jobbról folytonossá tesszük, ugyanis a nulla valószínűséggel előforduló konstans szakaszok miatt a w által generált filtrációra nézve $\{\tau_B \leq 0\} \notin \mathcal{F}_0^0 = \{\Omega, \emptyset\}$. Nyílt halmazok találati idejére fontos példa a valamely pontból való kilépés időpontja. Ha egy folyamat éppen egy x állapotban van, akkor a $B \triangleq \{x\}^c$ nyílt halmaz találati ideje az az időpont, amikor a folyamat kilép az x pontból. Ezt a véletlen időtartamot szokás az x pontban való tartózkodás idejének is mondani. Miként az $x = 0$ állapot tartózkodási idejére vonatkozó példából látszik, egy adott t időpontig megfigyelve a trajektóriákat nem lehet eldönteni, hogy a folyamat kilép az adott t időpontban vagy sem. Csak annyit lehet látni, hogy a t előtt kilépett vagy sem. Értelemszerűen a problémát a konstans szakaszok okozzák. Wiener-folyamatok esetén a konstans szakaszokat tartalmazó trajektóriákkal rendelkező kimenetelek valószínűsége nulla, így a nullmértékű halmazok hozzáadása automatikusan megoldja a konstans szakaszokkal kapcsolatos problémákat, így a filtráció jobbról folytonos lesz. Az első példából azonban látszik, hogy tetszőleges folytonos trajektóriájú folyamat esetén ez nem feltétlenül teljesül, így a nullmértékű halmazokkal kiegészített filtráció nem lesz automatikusan jobbról folytonos, így a kilépési idők nem lesznek automatikusan megállási idők. □

Az állításból következően ha az X folytonos, akkor tetszőleges a valós szám esetén esetén a

$$\tau_a \triangleq \inf \{t \mid |X(t)| \geq a\} \tag{3.2}$$

vagy például a

$$\tau_a \triangleq \inf \{t \mid X(t) = a\},$$
$$\tau_a \triangleq \inf \{t \mid X(t) \leq a\}$$

véletlen időpontok megállási idők, illetve jobbról folytonos filtráció és folyamat esetén a

$$\tau_a \triangleq \inf \{t \mid |X(t)| > a\} \tag{3.3}$$

vagy a

$$\tau_a \triangleq \inf \{t \mid X(t) > a\}$$

véletlen időpontok is megállási idők. A τ_a megállási időkre mint szintátlépési időkre szokás hivatkozni. A figyelmes olvasó észrevehette, hogy a τ_a jelölés nem egyértelmű. Mivel a trajektóriáknak lehetnek konstans szakaszai a $>$, illetve a $\geq$ relációval definiált megállási idők nem azonosak. Ennek azonban a jelen tárgyalás szempontjából nincsen jelentősége, így a bonyolultabb jelölések bevezetésétől eltekintek.

5. A megállási idők eloszlását a legtöbb esetben nem ismerjük. A ritka kivételek egyike a Wiener-folyamatok

$$\tau_a \triangleq \inf \{t \mid w(t) = a\}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

találati ideje, amely sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right). \tag{3.4}$$

6. A megállási időket legtöbbször a megállított folyamatok definíciója során használjuk. Ha X egy tetszőleges folyamat és τ egy véletlen időpont, akkor

$$X^\tau(t,\omega) \triangleq X(t \wedge \tau(\omega), \omega).$$

Gyakran szükségünk lesz a következő észrevételre: Ha τ egy megállási idő és X egy reguláris, adaptált folyamat, akkor az X^τ megállított folyamat adaptált marad. Ugyancsak gyakran fogjuk használni a következőt: Ha τ_a a fenti (3.2) vagy (3.3) sorban definiált szintátlépési idő és az X balról folytonos, akkor $|X^{\tau_a}| \leq a$. Érdemes talán hangsúlyozni, hogy jobbról folytonos folyamatok esetén azonban csak az $|X^{\tau_a}| \leq a + |\Delta X(\tau_a)|$ egyenlőtlenség igazolható.

7. Egy X jobbról reguláris, adaptált és integrálható folyamatot martingálnak mondunk, ha tetszőleges $t < s$ esetén

$$\mathbf{E}(X(s) \mid \mathcal{F}_t) = X(t). \tag{3.5}$$

Integrálható folyamat alatt értelemszerűen azt értjük, hogy minden t időpontban az $X(t)$ valószínűségi változó integrálható, vagyis van várható értéke. Ha $\mathbf{E}(X(s) \mid \mathcal{F}_t) \leq X(t)$, akkor szupermartingálról, ha $\mathbf{E}(X(s) \mid \mathcal{F}_t) \geq X(t)$, akkor szubmartingálról szokás beszélni. A definíciókból evidens, hogy a martingálok tartják a várható értéküket, a szubmartingálok várható értéke nő, a szupermartingálok várható értéke pedig csökken. Martingálra a legegyszerűbb példát a Wiener-folyamatok szolgáltatják. Ugyanakkor ha X martingál, akkor az $Y = X^2$ szubmartingál. A figyelmes olvasóban felmerülhet, hogy miért van az $Y = X^2$-nek várható értéke. Természetesen semmi sem garantálja ezt. Ugyanakkor az $Y(s) = X^2(s)$ nem negatív, így a feltételes várható értéke létezik, bár az esetlegesen felveheti a végtelen értéket is. Éppen ezért a szubmartingálok definíciója az irodalom nem mindig egyértelmű, és a szubmartingálok definíciójába nem feltétlenül szokás beleérteni a folyamat integrálhatóságát csak azt, hogy létezzen a feltételes várható érték. Ezért a továbbiakban, ha ez fontos, akkor szubmartingálok esetén mindig explicite jelezni fogjuk a folyamat integrálhatóságát.

A martingálokkal kapcsolatos legfontosabb állítás a megállási opciókról szóló tétel. Ennek több alakja is van. Talán a legszemléletesebb a következő:

3.5. Állítás. *Ha teljesülnek a szokásos feltételek, akkor egy jobbról reguláris X folyamat pontosan akkor martingál, ha tetszőleges τ korlátos megállási idő esetén az $X(\tau)$ integrálható és $\mathbf{E}(X(0)) = \mathbf{E}(X(\tau))$, vagyis a folyamat várható értéke korlátos megállási időkkel „nem manipulálható”.*

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A megállási opciókról szóló tétel egy másik alakjának megértéséhez definiálni kell a megállított σ-algebra fogalmát.

3.6. Definíció. Ha τ tetszőleges megállási idő, akkor az $\mathcal{F}_\tau$ megállított σ-algebrán az olyan A halmazok családját értjük, amelyekre tetszőleges t esetén $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Interpretációját tekintve az $\mathcal{F}_\tau$ a τ előtt, beleértve a τ időpontot is, bekövetkező események σ-algebráját értjük. Az interpretáció különösen szemléletes, ha a sztochasztikus alaptér éppen a trajektóriák tere és a filtráció éppen az $X(t,\omega) = \omega(t)$ koordinátaleképezések által generált filtráció, vagyis $\mathcal{F}_t = \sigma(\{X(s) \mid s \leq t\})$. Megmutatható, hogy ilyenkor $\mathcal{F}_\tau = \sigma(\{X(\tau \wedge t) \mid t \in \mathbb{R}_+\})$.

3.7. Állítás. *Ha teljesülnek a szokásos feltételek és ha σ és τ két korlátos megállási idő, valamint ha $\sigma \geq \tau$, akkor a martingált definiáló* (3.5) *egyenlőség átvihető megállási időkre is:*

$$\mathbf{E}(X(\sigma) \mid \mathcal{F}_\tau) = X(\tau).$$

Az egyenlőségben implicite azt is felhasználtuk, hogy az $X(\tau)$ változó $\mathcal{F}_\tau$-mérhető. Érdemes megjegyezni, hogy diszkrét idejű megállási időkre a tételt korábban már igazoltuk[3]. Az általános eset bizonyítása arra épül, hogy tetszőleges τ megállási időhöz konstruálható olyan (τ_n) véges értékkészletű megállási időkből álló sorozat, amelyre $\tau_n \searrow \tau$. Miként a megállási idők tárgyalásakor jeleztük, a nyílt halmazok találati ideje, nem feltétlenül megállási idő. Ahhoz, hogy ez teljesüljön a filtrációnak jobbról folytonosnak kell lenni. Ha ez nem biztosítható, akkor az $\mathcal{F}_\tau$ helyett az $\mathcal{F}_{\tau+}$ módon jelölt σ-algebrát szokás használni, amely alatt azon halmazok σ-algebráját szokás érteni, amelyekre $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$, minden t esetén vagy ami ekvivalens vele $A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$, minden t esetén. A megállási opciókról szóló tétel ilyenkor

$$\mathbf{E}(X(\sigma) \mid \mathcal{F}_{\tau+}) = X(\tau)$$

alakba írható.

A martingálok osztálya számos matematikai műveletre nézve zárt. Például könnyen látható, hogy azonos filtráció szerint vett martingálok összege újra martingál. Vagy a megállási opciókról szóló tétellel belátható, hogy ha X martingál és τ egy megállási idő, akkor az X^τ megállított folyamat újra martingál. Fontos azonban hangsúlyozni, hogy martingálok szorzata általában nem martingál, így martingálok négyzete sem martingál.

8. Most röviden vázoljuk a martingálok körében bevezetett topológiákat. Martingálok konvergenciája során biztosítani akarjuk, hogy a trajektóriák

[3] V.ö.: 2.18. lemma, 44. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

regularitása megmaradjon. Ezért a folyamatok konvergenciája során a trajektóriáktól egyenletes konvergenciát fogunk megkövetelni. Éppen ezért igen hasznosak lesznek a martingálok maximumára érvényes úgynevezett Doob-féle egyenlőtlenségek:

3.8. Állítás. *Legyen X a $[0,T]$ szakaszon értelmezett nem negatív szubmartingál. Az első Doob-egyenlőtlenség szerint ha $\lambda \geq 0$, akkor*

$$\lambda \mathbf{P}\left(\sup_{0\leq t\leq T} X(t) \geq \lambda\right) \leq \|X(T)\|_1,$$

a második szerint ha $p > 1$, akkor

$$\left\|\sup_{0\leq t\leq T} X(t)\right\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|X(T)\|_p.$$

Speciálisan az egyenlőtlenségek alkalmazhatók, ha M egy martingál és $X = |M|$.

9. Egy (f_α) függvényhalmazt egy μ mérték szerint egyenletesen integrálhatónak mondunk, ha

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\alpha} \int_{\{|f_\alpha|>N\}} |f_\alpha|\, d\mu = 0.$$

Ha létezik g integrálható függvény, amelyre minden α esetén $|f_\alpha| \leq g$, akkor az (f_α) egyenletesen integrálható. Ugyanakkor az egyenletesen integrálható halmazok jóval bővebb családot alkotnak. A legfontosabb példa a következő: Ha $p > 1$ és az (f_α) halmaz korlátos az $L^p(\mu)$ térben, akkor a halmaz a μ szerint egyenletesen integrálható. Ha a μ mérték véges, az (f_n) függvények egyenletesen integrálhatóak és $f_n \overset{m.m.}{\to} f$, akkor az f is integrálható, és

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu, \quad \int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0.$$

Az egyenletes integrálhatóság fontos következménye, hogy amennyiben egy az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen értelmezett X martingál által definiált $X(t)$ valószínűségi változók halmaza egyenletesen integrálható, akkor az X folytonosan kiterjeszthető a $+\infty$ időpontra, vagyis létezik olyan $X(\infty)$, amelyre $X(t) = \mathbf{E}(X(\infty) \mid \mathcal{F}_t)$ és $X(t) \to X(\infty)$, ahol a konvergencia majdnem mindenhol és $L^1(\Omega)$ értelemben is teljesül. Természetesen a $[0,\infty]$ szakasz rendezéstartó és bijektív módon ráképezhető a [0,1] szakaszra, így az egyenletesen integrálható martingálokat tekinthetjük véges időszakaszokon definiált martingáloknak. Ennek fontos következménye, hogy egyenletesen integrálható martingálok esetén, vagyis amikor az $X(t)$ változókból álló halmaz egyenletesen integrálható, a megállási opciókról szóló tétel kiterjeszthető tetszőleges megállási időkre.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.2. Sztochasztikus integrálás folytonos integrandusok esetén

A sztochasztikus integrálás általános elmélete igen bonyolult. Ugyanakkor szerencsére az integrálelméletre épülő legtöbb közgazdasági alkalmazás igazolásához elegendő az elmélet egy igen csekély szeletét ismerni. A legtöbb esetben feltehetjük, hogy mind az integrátor, mind az integrandus folytonos. Ilyenkor az általános sztochasztikus integrál helyett elegendő az úgynevezett Itô–Stieltjes-integrált bevezetni. Ebben a pontban az Itô–Stieltjes-integrál definícióját és elemi tulajdonságait tárgyaljuk.

Bevezetésként érdemes felidézni a Riemann–Stieltjes-integrállal kapcsolatos legegyszerűbb ismereteket. Riemann–Stieltjes-integrál esetén az integrátor egy V korlátos változású függvény, az integrandus pedig egy folytonos függvény. A Riemann–Stieltjes-integrált mindig egy $[a,b]$ zárt intervallumon definiáljuk. A korlátos változás fogalma azt jelenti, hogy létezik olyan K konstans, hogy az $[a,b]$ minden

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

partíciója esetén $\sum_{k=1}^{m} |V(t_k) - V(t_{k-1})| \leq K$. Vagy ami ugyanaz,

$$\sup_{(t_k)} \sum_{k=1}^{m} |V(t_k) - V(t_{k-1})| < \infty,$$

ahol (t_k) az $[a,b]$ összes lehetséges partícióinak halmazán fut végig. Riemann–Stieltjes-integrálon a

$$I_n \triangleq \sum_k f\left(\tau_k^{(n)}\right)\left(V\left(t_k^{(n)}\right) - V\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)$$

típusú közelítő összegek közös határértékét értjük, ahol a $\tau_k^{(n)}$ tesztpont a hozzá tartozó $\left[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right]$ szakasz tetszőleges pontja lehet, és ahol a partíciósorozat szintén tetszőleges lehet mindaddig, amíg $\lim_{n\to\infty} \max_k \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right) = 0$.

A korlátos változású függvény fogalmának bevezetését a következő gondolatmenet indokolja: Az integrál létezésének igazolásához meg kell mutatni, hogy tetszőleges partíciósorozat esetén az (I_n) sorozat konvergens, amit úgy látunk be, hogy megmutatjuk, hogy az (I_n) Cauchy-sorozat. Mivel az $[a,b]$ szakaszon értelmezett folytonos f függvény egyenletesen is folytonos, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan δ, hogy ha $|x-y| < \delta$, akkor

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Közös finomításra áttérve és a

$$\left| \sum_n a_n b_n \right| \leq \max_n |a_n| \sum_n |b_n|$$

triviális becslést alkalmazva ha a partíciók már elég finomak, akkor

$$|I_n - I_m| \leq \varepsilon \sup_{(t_k)} \sum_{k=1}^{m} |V(t_k) - V(t_{k-1})|,$$

amely a korlátos változás feltétele miatt tetszőlegesen kicsivé tehető, vagyis az (I_n) sorozat konvergens, így az $\int_a^b f dV$ módon jelölt integrál létezik.

A probléma csak az, hogy a sztochasztikus folyamatok trajektóriái általában nem korlátos változásúak!

3.2.1. A sztochasztikus integrál definíciója

Első lépésként a sztochasztikus integrál definícióját adjuk meg:

3.9. Definíció. Legyenek X és Y sztochasztikus folyamatok és minden

$$a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{m_n}^{(n)} = b$$

felosztáshoz rendeljük hozzá az

$$I_n \doteq \sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(Y\left(t_k^{(n)}\right) - Y\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right) \tag{3.6}$$

Itô–Stieltjes-féle közelítő összeget. Ha létezik olyan ζ valószínűségi változó, hogy minden olyan felosztásra, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \max_k \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right) = 0,$$

a (3.6) közelítő összegek sorozatára sztochasztikus konvergenciában

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \zeta,$$

akkor ezt a közös ζ határértéket az X folyamat $[a,b]$ szakaszon vett Y szerinti *Itô–Stieltjes-integráljának* mondjuk, és $\int_a^b X dY$ módon jelöljük.

A definíció legfontosabb eleme, hogy szemben a Riemann–Stieltjes-típusú integrálok definíciójával az integrálközelítő összegekben a tesztpont csak az intervallum elején választható. A későbbiek pontos megértése szempontjából néhány dolgot hangsúlyozni kell:

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

1. Egyrészt az a tény, hogy a közönséges Riemann–Stieltjes-integrálok esetén az integrál értéke független kell, hogy legyen a tesztpont választásának módjától döntő szerepet játszik a Newton–Leibniz-formula igazolásakor. Mivel azonban az Itô–Stieltjes-integrál értéke függ a tesztpont megválasztásának módjától, ezért az Itô-típusú integrálok esetén Newton–Leibniz-típusú formula nem bizonyítható, és a formula helyét az Itô-formula veszi át.

2. Másrészt az integrál, nem trajektóriánként számolandó, és az értéke csak egy nullmértékű halmaz erejéig meghatározott, így nem teljesen világos, hogy hogyan lehet értelmezni a $t \mapsto \int_0^t X dY$ típusú integrálfüggvények trajektóriáit. Miként látni fogjuk a tárgyalás legfőbb problémája nem az előző, hanem ez a második probléma. Az integrálfüggvény közelítésekor gyakran szükségünk lesz az $[a,b]$ intervallum részintervallumain való közelítésre. Az I_n szimbólumot ilyenkor nem változóként, hanem folyamatként fogjuk használni és értelemszerűen

$$I_n(t) \doteq \sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)} \wedge t\right)\left(Y\left(t_k^{(n)} \wedge t\right) - Y\left(t_{k-1}^{(n)} \wedge t\right)\right).$$

3. Folyamatok körében a konvergenciát trajektóriánként érdemes értelmezni. Mivel a trajektóriák topológiai tulajdonságait a határátmenet során meg kívánjuk őrizni, ezért a trajektóriák konvergenciájáról az időparaméter szerint megköveteljük a kompakt halmazokon való egyenletességet. Ugyanakkor a véletlen paraméter szerint a konvergencia már nem egyenletes, hanem azt tételezzük fel, hogy az idő szerinti egyenletességhez tartozó norma sztochasztikusan nullához tart. Vagyis ha (Z_n) sztochasztikus folyamatok egy sorozata, akkor az alábbiakban a $Z_n \to Z$ konvergencián a tetszőleges $[a,b]$ szakaszon fennálló

$$\sup_{a \le t \le b} |Z_n(t) - Z(t)| \xrightarrow{P} 0$$

sztochasztikus konvergenciát értjük. Ezt a konvergenciát szokás a kompakt halmazokon való sztochasztikusan egyenletes konvergenciának nevezni.

4. Ha az Y trajektóriái korlátos változásúak és az X balról reguláris, akkor a majorált konvergencia tétellel megmutatható, hogy a konvergencia nem csak sztochasztikus értelemben létezik, hanem minden kimenetelre külön-külön is fennáll, és az Itô–Stieltjes-integrál megegyezik a súlyfüggvény által generált mérték szerinti Lebesgue–Stieltjes-integrállal. Ugyanakkor előfordulhat, hogy ebben az esetben a közönséges Riemann–Stieltjes-integrál nem létezik. Ha azonban az integrandus nem balról reguláris, akkor az Itô–Stieltjes-integrál és a Lebesgue–

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Stieltjes-integrál értéke eltérhet. Tanulságos átgondolni az $\int_0^1 X dY$ integrál értékét, ha Y a $t = 1/2$ pontban való egységnyi ugrás eloszlásfüggvénye, vagyis

$$Y(t) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 1/2 \\ 1, & \text{ha } t \geq 1/2 \end{cases}.$$

Az Y által definiált mérték a $t = 1/2$ pontra koncentrálódott valószínűségi mérték, így Lebesgue–Stieltjes-integrálként $\int_0^1 X dY = X(1/2)$. Ha

$$X(t) \triangleq Y(t) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 1/2 \\ 1, & \text{ha } t \geq 1/2 \end{cases},$$

akkor könnyen látható, hogy a Riemann–Stieltjes-integrál nem létezik, ugyanis a közelítő összegben a tesztpont választási módjától függ a határérték. Ugyancsak könnyen látható, hogy ilyenkor az Itô–Stieltjes-integrál létezik és az értéke nulla, ugyanis minden közelítő összeg értéke nulla.

5. Végezetül, bár az integrál nem számolható trajektóriánként, sőt fix időszakaszok esetén definiálásakor nincs is szükségünk a trajektóriákra, ez nem jelenti azt, hogy az integrál nem függ a trajektóriáktól. Mivel a sztochasztikus konvergens sorozatok rendelkeznek majdnem mindenhol konvergens részsorozatokkal, ezért ha valamely $A \subseteq \Omega$ halmazon az X_1 és Y_1 trajektóriái megegyeznek az X_2 és Y_2 trajektóriáival, akkor minden a és b esetén majdnem mindenhol az $A \subseteq \Omega$ halmazon az $\int_a^b X_1 dY_1$ és $\int_a^b X_2 dY_2$ integrálok megegyeznek.

3.2.2. Az integrál létezése

Minden integrál esetén az első probléma annak tisztázása, hogy mikor létezik az integrál? Ehhez szükségünk lesz egy sor lemmára:

3.10. Lemma (Martingáltranszformáció)**.** *Legyen M az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve diszkrét idejű martingál, X az $\mathcal{F}$-re nézve adaptált folyamat. Ha az*

$$X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1}) \tag{3.7}$$

kifejezések integrálhatóak, akkor az

$$I_0 \triangleq 0, \quad I_n \triangleq \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} \cdot (M_k - M_{k-1})$$

sorozat nulla várható értékkel rendelkező martingál. Speciálisan, ha X egyenletesen korlátos és M tetszőleges martingál, akkor az I is martingál.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Kihasználva, hogy a feltétel szerint az $X_{k-1}\cdot(M_k - M_{k-1})$ integrálható, a kiemelési szabály[4] és a teljes várható érték tétele szerint, ha $k-1 \geq m$ tetszőleges n-re

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}|\leq n\right)\left(M_k - M_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = \\
&\quad = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}|\leq n\right)\left(M_k - M_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = \\
&\quad = \mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}|\leq n\right)\mathbf{E}\left(\left(M_k - M_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = \\
&\quad = \mathbf{E}\left(X_{k-1}\chi\left(|X_{k-1}|\leq n\right)\cdot 0 \mid \mathcal{F}_m\right) = 0.
\end{aligned}$$

Mivel a feltétel szerint a lemmában szereplő (3.7) szorzatra használhatjuk a majorált konvergencia tételét, így

$$\mathbf{E}\left(X_{k-1}\left(M_k - M_{k-1}\right) \mid \mathcal{F}_m\right) = 0,$$

amiből a lemma igazolása már evidens. □

3.11. Lemma (Energiaazonosság)**.** *Legyen M egy martingál és tegyük fel, hogy minden t időpontra az $M(t)$ valószínűségi változó négyzetesen integrálható. Ha $s<t$, akkor*

$$\mathbf{E}\left(\left(M(t) - M(s)\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(M^2(t)\right) - \mathbf{E}\left(M^2(s)\right),$$

vagy ami ugyanaz valamely $[a,b]$ szakasz tetszőleges (t_k) partíciója esetén

$$\begin{aligned}
\|M(b) - M(a)\|_2^2 &= \sum_k \|M(t_k) - M(t_{k-1})\|_2^2 = \\
&= \sum_k \left(\|M(t_k)\|_2^2 - \|M(t_{k-1})\|_2^2\right) = \\
&= \|M(b)\|_2^2 - \|M(a)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. A második egyenlőség igazolásához vegyük észre, hogy az első és az utolsó kifejezés egyenlősége az első egyenlőség alapján nyilvánvaló. Hasonló igaz a második és a harmadik kifejezésre. A második és a harnadik sor azonossága a teleszkópikus összegzés miatt triviális. Az első egyenlőség indoklásához vegyük észre, hogy a két oldal eltérése $d \stackrel{\circ}{=} 2\cdot\mathbf{E}\left(M(s)\cdot\left(M(s) - M(t)\right)\right)$. Meg kell mutatni, hogy ez a kifejezés nulla. Ennek igazolása lényegében azonos az előző lemma igazolásával. Ha $s<t$, akkor a martingál tulajdonság és a ki-

[4] A kiemelési szabálynak több verziója is lehetséges. A legegyszerűbb eset, amikor a feltételes várható értékből kivitt, a feltételi σ-algebrára nézve mérhető tag korlátos, a bent maradó kifejezés pedig integrálható.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

emelési szabály miatt

$$\begin{aligned} d_n &\stackrel{\circ}{=} 2 \cdot \mathbf{E}\left(M(s)\,\chi\left(|M(s)| \le n\right) \cdot \left(M(s) - M(t)\right)\right) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(M(s)\,\chi\left(|M(s)| \le n\right) \cdot \left(M(s) - M(t)\right) \mid \mathcal{F}_s\right)\right) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{E}\left(M(s)\,\chi\left(|M(s)| \le n\right) \cdot \mathbf{E}\left(M(s) - M(t) \mid \mathcal{F}_s\right)\right) = \\ &= 2 \cdot \mathbf{E}\left(M(s)\,\chi\left(|M(s)| \le n\right) \cdot 0\right) = 0. \end{aligned}$$

Mivel $M(s), M(t) \in L^2(\Omega)$, ezért az $|M(s) \cdot (M(s) - M(t))|$ integrálható. Így a majorált konvergencia tétele alkalmazható és

$$d = \lim_{n\to\infty} d_n = 0. \qquad \square$$

3.12. Lemma (Sztochasztikus integrál L^2-becslése)**.** *Ha $|X| \le K$ és M egy olyan martingál, hogy minden t időpontra az $M(t)$ négyzetesen integrálható, akkor*

$$\|I_n\|_2^2 = \mathbf{D}^2(I_n) \le K^2 \left(\|M(b)\|_2^2 - \|M(a)\|_2^2\right). \tag{3.8}$$

Bizonyítás. Az első lemma alapján az integrálközelítő összegek

$$I^{(n)} \stackrel{\circ}{=} \left(\sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right)$$

sorozata martingál, így a sorozat tagjainak várható értéke nulla. Az energiaazonosság alapján

$$\|I_n\|_2^2 = \sum_k \left\|X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right\|_2^2.$$

Az energiaazonosság újabb alkalmazásával

$$\begin{aligned} \|I_n\|_2^2 = \sum_k \left\|X\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right\|_2^2 &\le \\ \le K^2 \sum_k \left\|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right\|_2^2 &= \\ = K^2 \sum_k \left(\left\|M\left(t_k^{(n)}\right)\right\|_2^2 - \left\|M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right\|_2^2\right) &= \\ = K^2 \left(\|M(b)\|_2^2 - \|M(a)\|_2^2\right). \quad \square \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.13. Definíció. Az $M \in \mathcal{H}^2$ tartalmazás azt jelenti, hogy az M olyan martingál, amelyre az $\|M(t)\|_2$ a t időparaméter szerint korlátos[5]. A $\mathcal{H}^2$ tér elemeit szokás négyzetesen integrálható martingáloknak is mondani[6].

3.14. Példa. Ha w Wiener-folyamat, akkor minden véges szakaszon w eleme a $\mathcal{H}^2$ térnek, de a teljes időtengelyen $w \notin \mathcal{H}^2$.

3.15. Tétel (Itô–Stieltjes-integrálok létezése)**.** *Ha az X az $[a,b]$ véges szakaszon értelmezett, balról reguláris, adaptált folyamat és $M \in \mathcal{H}^2$, akkor az X az $[a,b]$-én az M szerint Itô–Stieltjes-integrálható. Az Itô-féle közelítő összegek sztochasztikusan egyenletesen tartanak az integrálhoz, vagyis ha (I_n) jelöli a közelítő összegekből álló folyamatok sorozatát, akkor sztochasztikus konvergenciában*

$$\sup_{a\le s\le b}\left|I_n(s)-\int_a^s X\,dM\right|\to 0.$$

Ha $|X|\le K$, akkor

$$\left\|\int_a^b X\,dM\right\|_2^2 \le K^2\left(\|M(b)\|_2^2-\|M(a)\|_2^2\right)\mathrel{\overset{\circ}{=}} K^2L. \tag{3.9}$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy az X folytonos. Ilyenkor a bizonyítás közvetlen és kézenfekvő módosítása annak a közismert elemi tételnek, miszerint a folytonos függvények Riemann-, illetve általában Riemann–Stieltjes-integrálhatóak. Miként említettük ezen állítások bizonyítása a folytonos függvények kompakt szakaszokon való egyenletes folytonosságára épül. A sztochasztikus környezetbe való átültetéskor az egyetlen felmerülő probléma az, hogy a folytonossági modulus bár minden trajektória esetén nullához tart, nyilván a trajektóriák szerint nem tart egyenletesen nullához.

A sztochasztikus konvergenciában minden Cauchy-sorozat konvergens, ezért az integrál konvergenciájának belátásához elegendő megmutatni, hogy az integrálközelítő összegek (I_n) sorozata sztochasztikusan Cauchy-sorozat. Az X trajektóriái folytonosak, vagyis az $[a,b]$ véges szakaszon egyenletesen is folytonosak, ezért ha $\delta\to 0$, akkor tetszőleges ω kimenetelre az

$$U(\omega,\delta)\mathrel{\overset{\circ}{=}}\sup_{|t-s|\le\delta}|X(t,\omega)-X(s,\omega)|$$

folytonossági modulus nullához tart. Könnyen látható, hogy az X folytonossága miatt az U kiszámolásakor elegendő a racionális t és s időpontokat venni,

[5] Emlékeztetünk, hogy ha $p>1$, akkor az $L^p(\Omega)$ térben korlátos halmazok egyenletesen integrálhatóak. Ebből következően a $\mathcal{H}^2$-martingálok az egyenletesen integrálható martingálok egy speciális részhalmazát alkotják.

[6] Vagyis a négyzetesen integrálható martingál fogalma nem azonos avval, hogy minden időpontban a martingál négyzetesen integrálható. Speciálisan a Wiener-folyamatok a teljes számegyenesen nem négyzetesen integrálhatók.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

így az U mérhető. A pontonkénti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért tetszőleges $\sigma, \varepsilon > 0$ számokhoz található olyan $A \subseteq \Omega$ halmaz és $\delta > 0$ szám, hogy $\mathbf{P}(A^c) < \sigma$, és ha $\omega \in A$, akkor $U(\omega, \delta) < \varepsilon$. Ha $U(u, \omega, \delta)$ jelöli az $[a, u]$ szakaszon vett folytonossági modulust, akkor evidens módon az $(u, \omega) \mapsto U(u, \omega, \delta)$ folytonos trajektóriájú adaptált folyamat. Ha

$$\tau(\omega) \triangleq \inf\{u \mid U(u, \omega, \delta) > \varepsilon\} \wedge b,$$

akkor a τ megállási idő. Ha $\omega \in A$, akkor $\tau(\omega) = b$, így az A halmazon $I_n^\tau - I_m^\tau = I_n - I_m$. Tekintsük az I_n és I_m közelítő összegekhez tartozó felosztások közös (u_i) finomítását és tekintsük a

$$I_n - I_m = \sum_i \left(X^\tau(s_i) - X^\tau(v_i)\right)\left(M(u_{i+1}) - M(u_i)\right) \tag{3.10}$$

összeget, ahol minden i-re $s_i, v_i \leq u_i$. (Az s_i, v_i persze tartalmazhat ismétlést is.) Az I_n és az I_m közelítő összegekhez tartozó partíciókat elég finomra véve az s_i és a v_i tetszőlegesen közel kerülhet egymáshoz. Mivel a τ megállási idő, az X adaptált, ezért az X^τ megállított folyamat is adaptált, így a fenti (3.10) összeg $L^2(\Omega)$ normájára igaz a korábban bemutatott (3.8) becslés, ugyanis $|X^\tau(s_i) - X^\tau(v_i)| \leq \varepsilon$. Mivel az $[a, b]$ intervallum felosztása végtelenül finomodik, ezért tetszőleges $\alpha > 0$ számra, elegendően nagy n, m indexekre a Markov-egyenlőtlenség és a Cauchy-egyenlőtlenség miatt

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(|I_n - I_m| > \alpha) &\leq \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(A \cap \{|I_n - I_m| > \alpha\}) = \\
&= \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(A \cap \{|I_n^\tau - I_m^\tau| > \alpha\}) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(|I_n^\tau - I_m^\tau| > \alpha) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(A^c) + \frac{\mathbf{E}(|I_n^\tau - I_m^\tau|)}{\alpha} = \mathbf{P}(A^c) + \frac{\mathbf{E}(1 \cdot |I_n^\tau - I_m^\tau|)}{\alpha} \leq \\
&\leq \sigma + \frac{\|1\|_2 \, \|I_n^\tau - I_m^\tau\|_2}{\alpha} \leq \sigma + \frac{\varepsilon\sqrt{L}}{\alpha}.
\end{aligned}$$

A jobb oldali kifejezés az ε és a σ megválasztásával tetszőlegesen kicsivé tehető, így az (I_n) sztochasztikusan Cauchy-sorozat. Az egyenletes konvergenciára vonatkozó észrevétel az első Doob-egyenlőtlenség majd a Cauchy-egyenlőtlenség alkalmazásának következménye:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\sup_{a \leq s \leq b} |I_n(s) - I_m(s)| > \alpha\right) &\leq \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}\left(\sup_{a \leq s \leq b} |I_n^\tau(s) - I_m^\tau(s)| > \alpha\right) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(A^c) + \frac{\mathbf{E}(|I_n^\tau(b) - I_m^\tau(b)|)}{\alpha} \leq \\
&\leq \sigma + \frac{\|I_n^\tau(b) - I_m^\tau(b)\|_2}{\alpha} \leq \sigma + \frac{\varepsilon\sqrt{L}}{\alpha},
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ahol a Doob-egyenlőtlenség használatakor kihasználtuk, hogy az (I_n^τ) martingál. A közelítő sorozatokra a második (3.9) becslés teljesül. Mivel $I_n \to \int_a^b X dM$, a Fatou-lemma miatt

$$\left\| \int_a^b X dM \right\|^2 = \left\| \lim_{n\to\infty} I_n \right\|_2^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|I_n\|_2^2 \leq K^2 \left(\|M(b)\|_2^2 - \|M(a)\|_2^2 \right).$$

Végezetül tegyük fel, hogy az X balról reguláris[7]. Ilyenkor az ugrásokat tartalmazó folyamatokkal kapcsolatos standard eljárással válasszuk szét a „nagy" és a „kis" ugrásokat. Vagyis tekintsünk egy $\theta > 0$ küszöböt és vegyük az $Y_\theta \stackrel{\circ}{=} \Delta X \chi(|\Delta X| > \theta)$ „nagy" ugrásokból álló folyamatot. Mivel az X reguláris, azonnal látható, hogy az Y_θ minden trajektóriája véges sok időponttól eltekintve nulla, következésképpen a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k Y_\theta \left(t_k^{(n)}\right) \left(M\left(t_{k+1}^{(n)}\right) - M\left(t_k^{(n)}\right) \right) = \sum Y_\theta \Delta M$$

határérték létezik, ahol ΔM értelemszerűen az M ugrásaiból álló folyamat és az összeg minden kimenetelre véges sok tagból áll, ugyanis az Y_θ véges sok időponttól eltekintve nulla. Ha a kis ugrásokat tartalmazó folyamatot tekintjük, akkor $\delta \searrow 0$ esetén a folytonossági modulus nem fog nullához tartani, de a határértéke kisebb lesz mint θ. Így mindenhol az ε helyébe az $\varepsilon + \theta$ összeget téve a folytonos esetre elmondott becslések szó szerint megismételhetőek. Ebből az általános eset bizonyítása már evidens, ugyanis a sztochasztikusan egyenletes konvergencia teljes metrikus teret definiál. □

Következő lépésként érdemes a tételt némiképpen általánosítani.

3.16. Definíció. Valamely L folyamatot lokális martingálnak mondunk, ha megadható olyan megállási időkből álló (τ_n) úgynevezett lokalizációs sorozat, amelyre $\tau_n \nearrow \infty$ és az L^{τ_n} megállított folyamatok mindegyike martingál. Hasonlóan egy L folyamat lokálisan négyzetesen integrálható martingál, ha megadható olyan $\tau_n \nearrow \infty$ lokalizációs sorozat, amelyre az L^{τ_n} megállított folyamat négyzetesen integrálható martingál, vagyis amelyre $L^{\tau_n} \in \mathcal{H}^2$ minden n-re. A lokálisan négyzetesen integrálható martingálok terét $\mathcal{H}^2_{\text{loc}}$ módon szokás jelölni.

3.17. Példa. Ha w egy Wiener-folyamat, akkor a teljes időtengelyen $w \notin \mathcal{H}^2$, de $w \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}$.

[7] Valójában az integrálközelítő összegek minden reguláris integrandus esetén konvergálnak, de a jobbról reguláris eset érdektelen, ugyanis ilyenkor a sztochasztikus integrál értéke nem lesz feltétlenül azonos a klasszikus integrálelméletben definiált értékkel.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.18. Példa. Lokális martingál, ami nem martingál.

Nem egyszerű példát adni olyan folytonos lokális martingálra, amely nem martingál. A legismertebb példa az $L \stackrel{\circ}{=} 1/\sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}$, ahol w_1, w_2 és w_3 független Wiener-folyamatok. A példa részletes tárgyalása azonban messze vezetne, így elhagyjuk. □

3.19. Példa. Ha L olyan lokális martingál, amelyre alkalmas ξ változóval minden t esetén $|L(t)| \le \xi$, ahol $\mathbf{E}(\xi) < \infty$, akkor az L valódi martingál[8].

Ha az $L(t)$ rendelkezik időtől független integrálható ξ majoránssal, akkor az L lokális martingál $\tau_n \nearrow \infty$ lokalizációs sorozatának minden elemére $|L(\tau_n)| \le \xi$, így alább alkalmazható a majorált konvergencia tétele. Mivel az L^{τ_n} martingál, ezért ha $s < t$, akkor

$$\mathbf{E}(L(t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} L(t\wedge\tau_n) \mid \mathcal{F}_s\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(L(t\wedge\tau_n) \mid \mathcal{F}_s) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(L^{\tau_n}(t) \mid \mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} L^{\tau_n}(s) = \lim_{n\to\infty} L(s\wedge\tau_n) = L(s),$$

vagyis az L martingál. □

3.20. Következmény. *Ha az X az $[a,b]$ véges szakaszon adaptált, balról reguláris folyamat és az L lokálisan négyzetesen integrálható martingál, akkor az X az $[a,b]$-én az L szerint Itô–Stieltjes-integrálható. Ilyenkor a sztochasztikus konvergenciában*

$$\sup_{a\le s\le b} \left| I_n(s) - \int_a^s X dL \right| \to 0.$$

Bizonyítás. Elegendő az előző állítás bizonyítását úgy módosítani, hogy az M helyett L^{τ_n}-et írunk, és felhasználjuk, hogy a lokalizáció definíciójában szereplő $\tau_n \nearrow \infty$ alapján tetszőleges $\sigma > 0$ számhoz, ha n elég nagy, akkor egy legalább $1-\sigma$ valószínűségű B halmazon $\tau_n \ge b$. Másképpen, ha n elég nagy, akkor egy tetszőlegesen kicsi valószínűségű halmaztól eltekintve az $[a,b]$ szakaszon az L és az L^{τ_n} egybeesik. Ha

$$\tau(\omega) \stackrel{\circ}{=} \inf\{u \mid U(u,\omega,\delta) \ge \varepsilon\} \wedge \tau_n \wedge b,$$

akkor a már bemutatottal szinte szó szerint megegyező módon

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(|I_n - I_m| > \alpha) \le \\
&\le \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(B^c) + \mathbf{P}(A\cap B\cap\{|I_n - I_m| > \alpha\}) \le \\
&\le 2\sigma + \mathbf{P}(|I_n^\tau - I_m^\tau| > \alpha) \le 2\sigma + \frac{\varepsilon^2 L}{\alpha^2}.
\end{aligned}$$

□

[8] A feltétel hallgatólagosan azt jelenti, hogy az $L(\tau)$ megállított változók halmaza egyenletesen integrálható. A sztochasztikus analízis általános elméletében ilyenkor azt szokás mondani, hogy az L eleme a $\mathcal{D}$ osztálynak. A példa szerint tehát minden $\mathcal{D}$ osztályba eső lokális martingál valódi martingál.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.21. Következmény. *Ha L folytonos lokális martingál, X balról-reguláris, adaptált folyamat, akkor az $\int_a^b X dL$ sztochasztikus integrál létezik. A közelítő összegek sorozatára a sztochasztikus konvergenciában*

$$\sup_{a\le s\le b}\left|I_n(s)-\int_a^s X dM\right|\to 0.$$

Bizonyítás. Legyen

$$\tau_n \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid |L(t)|>n\}.$$

Az L folytonossága miatt $|L^{\tau_n}|\le n$, vagyis az L lokálisan korlátos, így nyilván lokálisan négyzetesen integrálható, következésképpen alkalmazható az előző állítás. □

A sztochasztikus integrált minden intervallumra csak egy nullmértékű halmaz erejéig definiáltuk. Nem teljességgel nyilvánvaló, hogy ezekből a különálló változókból miként lesz egy folytonos idejű folyamat, amely esetében a trajektóriáknak is értelmezve kell lenni. A megoldás lényege, hogy mivel az integrálok konvergenciája egyenletes, ezért az integrálfüggvény is egyértelműen definiálható.

3.22. Tétel (Az integrálfolyamat létezése)**.** *Ha az X balról reguláris, adaptált folyamat és az L folytonos lokális martingál, akkor létezik olyan folytonos folyamat, amelyet $X\bullet L$-lel fogunk jelölni, és amelyre tetszőleges t esetén*

$$(X\bullet L)(t) \stackrel{m.m.}{=} \int_0^t X dL.$$

Bizonyítás. Minden sztochasztikusan konvergens sorozatnak van majdnem mindenhol konvergens részsorozata. Ezért feltehető, hogy alkalmas (n_k) részsorozatra

$$\mathbf{P}\left(\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{a\le s\le b}\left|I_{n_k}(s)-\int_a^s X dL\right|\right)=0\right)=1,$$

amiből az $s\mapsto I_{n_k}(s)$ folyamatokból álló sorozat majdnem minden trajektóriájának létezik egyenletes konvergenciában vett határértéke. Az így kapott folyamat minden s időpontban az $\int_a^s X dL$ integrál egy verziója. Végtelen időszakasz esetén az integrálközelítő összegek sorozatát és az integrálokat először végtelenbe tartó végpontú intervallumokban konstruáljuk meg. A nullmértékű halmazokat összegyűjtve, egy nullmértékű halmaztól eltekintve, az integrálok minden ω kimenetelre és minden időpontban jól definiáltak, amivel az $X\bullet L$ folyamat létezését igazoltuk.

Ha az X és az L folytonosak, akkor az $I_n(t)$ folyamat is folytonos, következésképpen az $X\bullet L$ trajektóriái folytonos függvények egyenletes konvergenciában vett határértékei, tehát maguk is folytonos függvények. Vegyük észre

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

azonban, hogy ha az L folytonos, akkor az

$$I_n(t) \stackrel{\circ}{=} \sum_k X(t_{k-1} \wedge t)(L(t_k \wedge t) - L(t_{k-1} \wedge t))$$

folyamat az X értékétől függetlenül mindenképpen folytonos, így az egyenletes konvergenciában vett határértéke is folytonos[9]. □

3.23. Definíció. Az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen értelmezett V folyamatot *véges változásúnak* mondjuk, ha a V trajektóriái az $\mathbb{R}_+$ tetszőleges $[a,b]$ szakaszán korlátos változásúak. Ha V véges változású, akkor $\mathrm{Var}(V)$ jelöli azt a folyamatot, amely értéke a (t,ω) pontban az ω kimenetelhez tartozó trajektória teljes megváltozása a $[0,t]$ időszakaszon. Ha egy S folyamat felbontható $S = S(0) + L + V$ módon, ahol az L lokális martingál és a V véges változású, adaptált folyamat, $V(0) = L(0) = 0$, akkor az S folyamatot *szemimartingálnak* mondjuk. Az S folyamatot folytonos szemimartingálnak mondjuk, ha a felbontásban szereplő V és L folyamatok választhatóak folytonosnak.

Ha a V trajektóriái véges változásúak és az X balról reguláris, akkor tetszőleges véges időszakaszon az Itô-féle közelítő összegek sorozata éppen az X integrandus V súlyfüggvény szerinti Lebesgue–Stieltjes-integráljához konvergál. A véges változás definíciójából evidens, hogy minden trajektóriára a konvergencia a kompakt időszakaszokon egyenletes. Ebből a következő tétel már evidens.

3.24. Tétel (Folytonos szemimartingál szerinti integrálhatóság)**.** *Ha az X adaptált sztochasztikus folyamat az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen majdnem minden ω-ra balról reguláris és az S folytonos szemimartingál, akkor az X az $\mathbb{R}_+$ félegyenes minden $[a,b]$ kompakt részén az S szerint Itô–Stieltjes-integrálható. Ilyenkor az*

$$(X \bullet S)(t) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t X\,dS$$

folyamatnak létezik folytonos verziója. Ha (I_n) egy közelítő sorozat, akkor minden $[a,b]$ véges szakaszon sztochasztikus konvergenciában

$$\sup_{a \le s \le b} \left| I_n(s) - \int_a^s X\,dS \right| \to 0.$$

A sztochasztikus konvergencia és az összeadás felcserélhető, így az integrál definíciója miatt az integrál additivitása nyilvánvaló.

[9] $\Delta(X \bullet L) = X\Delta L$ formula alapján az $X \bullet L$ folytonos, ugyanis az L feltételezett folytonossága miatt $\Delta L = 0$. $\Delta(X \bullet L) = X\Delta L$ formulát azonban a tárgyalás során csak érintőlegesen tárgyaljuk, így a folytonosságot közvetlenül igazoljuk.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.25. Tétel (Linearitás)**.** *A sztochasztikus integrál mind az integrandus, mind az integrátor szerint lineáris*[10]*.*

Ezidáig csak azt mutattuk be, hogy a sztochasztikus integrálok léteznek. Most megmutatjuk, hogy a folytonos lokális martingálok szerinti sztochasztikus integrálok lokális martingálok. Ebből persze már egyszerűen következik, hogy a szemimartingálok szerint vett sztochasztikus integrálok szemimartingálok.

3.26. Állítás (Megállítási szabály)**.** *Ha X balról reguláris, adaptált folyamat, S folytonos*[11] *szemimartingál és τ tetszőleges megállási idő, akkor*

$$(X \bullet S)^\tau = X \bullet S^\tau = (X\chi([0,\tau])) \bullet S.$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a $X\chi([0,\tau])$ kifejezés balról reguláris. Érdemes megjegyezni, hogy a balról reguláris integrandusok tárgyalására éppen azért volt szükség, hogy a megállítási szabályban szereplő integrálokat értelmezni tudjuk. Ugyancsak érdemes megjegyezni, hogy mivel a τ megállási idő, ezért tetszőleges t esetén

$$\{\chi([0,\tau])(t) = 0\} = \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t,$$

vagyis a $\chi([0,\tau])$ folyamat adaptált.

Tekintsük az $\mathbb{R}_+$ időtengely $\left(t_k^{(n)}\right)$ partíciójához tartozó (I_n) közelítő sorozatot. Nyilvánvalóan

$$\begin{aligned} I_n^\tau(t) \mathrel{\overset{\circ}{=}} \left(\sum_k X\left(t_{k-1}^{(n)} \wedge t\right)\left(L\left(t_k^{(n)} \wedge t\right) - L\left(t_{k-1}^{(n)} \wedge t\right)\right)\right)^\tau = \\ = \sum_k X(t_{k-1}^{(n)} \wedge t)(L^\tau(t_k^{(n)} \wedge t) - L^\tau(t_{k-1}^{(n)} \wedge t)) = \\ = \sum_k X(t_{k-1}^{(n)} \wedge t)\chi([0,\tau])(L(t_k^{(n)} \wedge t) - L(t_{k-1}^{(n)} \wedge t)) = \\ = \sum_k X(t_{k-1}^{(n)} \wedge t)\chi([0,\tau])(L^\tau(t_k^{(n)} \wedge t) - L^\tau(t_{k-1}^{(n)} \wedge t)). \end{aligned}$$

Az utolsó három egyenlőséget használva, és kihasználva, hogy az integrálok a már elmondottak miatt léteznek az

$$X \bullet L^\tau = (X\chi([0,\tau])) \bullet L = (X\chi([0,\tau])) \bullet L^\tau$$

[10] Éppen ez indokolja és teszi igen hasznossá az $X \bullet Y$ jelölést.

[11] Valójában a folytonosságot nem használjuk ki csak azt, hogy az integrál létezik és a trajektóriáktól függ.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

egyenlőség evidens. Vegyük észre, hogy ha valamilyen (Z_n) sorozat egy Z folyamathoz tart a véges szakaszokon a sztochasztikus konvergenciában egyenletesen, akkor a $Z_n^\tau \to Z^\tau$ konvergencia is teljesül, ugyanis

$$\sup_{a\le s\le b} |Z_n^\tau(s) - Z^\tau(s)| \le \sup_{a\le s\le b} |Z_n(s) - Z(s)|.$$

Ebből következően

$$(X\bullet L)^\tau(t) = \left(\lim_{n\to\infty} I_n(t)\right)^\tau = \lim_{n\to\infty} I_n^\tau(t) = X\bullet L^\tau,$$

amiből az állítás már evidens. □

3.27. Tétel (Lokális martingál)**.** *Ha az X balról reguláris, adaptált folyamat és az L folytonos lokális martingál, akkor az $X\bullet L$ lokális martingál. Ha az X egyenletesen korlátos és $L\in\mathcal{H}^2$, akkor az $X\bullet L$ nem csak lokális martingál lesz, hanem valódi martingál is.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az X egyenletesen korlátos és $L\in\mathcal{H}^2$. Jelölje (I_n) a közelítő összegek sorozatát. A martingáltranszformációs lemma közvetlen megismétlésével azonnal belátható, hogy az I_n martingál, vagyis ha $s<t$, akkor

$$\mathbf{E}(I_n(t)\mid\mathcal{F}_s) = I_n(s).$$

Ha most $n\to\infty$, akkor a kérdés csak az, hogy az alábbi számolás során a határérték és a feltételes várható érték felcserélhető vagy sem:

$$\mathbf{E}((X\bullet L)(t)\mid\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} I_n(t)\mid\mathcal{F}_s\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(I_n(t)\mid\mathcal{F}_s) = \lim_{n\to\infty} I_n(s) = (X\bullet L)(s).$$

A sztochasztikus integrálok L^2-becslésére vonatkozó (3.8) sorban szereplő egyenlőtlenség miatt az $(I_n(t))$ sorozat $L^2(\Omega)$-ban korlátos és a sztochasztikus konvergencia miatt, részsorozatra áttérve, feltehető, hogy majdnem mindenhol is konvergens. Az $L^2(\Omega)$-ban való korlátosság miatt az $(I_n(t))$ sorozat egyenletesen integrálható. Egyenletesen integrálható sorozat esetén a feltételes várható érték és a majdnem mindenhol vett határérték felcserélhető, amiből az egyenlőség, így a martingál tulajdonság már evidens. Végezetül tekintsük az általános esetet. Legyen

$$\tau_n \stackrel{\circ}{=} \inf\{t\mid |X|(t) > n\} \wedge \inf\{t\mid |L|(t) > n\}$$

az első olyan időpont, ahol az $|X|$ vagy az $|L|$ átlépi az n szintet. A megállítási szabály miatt

$$(X\bullet L)^{\tau_n} = X\chi([0,\tau_n])\bullet L^{\tau_n}.$$

Mivel $|X\chi([0,\tau_n])|\le n$ és $|L^{\tau_n}|\le n$, ezért az $X\chi([0,\tau_n])\bullet L^{\tau_n}$ martingál, következésképpen az $X\bullet L$ lokális martingál. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.28. Tétel. *Ha X egy balról reguláris, adaptált folyamat és $S = S(0)+V+L$ egy folytonos szemomartingál, akkor*

$$X \bullet S = X \bullet V + X \bullet L$$

következésképpen az $X \bullet S$ egy folytonos szemimartingál.

3.2.3. A Fisk-féle egyértelműségi tétel

3.29. Tétel (Fisk egyértelműségi tétele)**.** *Ha L folytonos lokális martingál és az L trajektóriái véges változásúak, akkor az L konstans.*

Bizonyítás. Tekintsük az $M \triangleq L - L(0)$ lokális martingált. Elég belátni, hogy $M = 0$. Legyen $V \triangleq \operatorname{Var}(M)$ és legyen (ρ_n) az M lokalizációs sorozata. Mivel a folytonos függvények teljes megváltozása is folytonos a

$$\upsilon_n \triangleq \inf\{t \mid |M(t)| \geq n\}$$

és a

$$\kappa_n \triangleq \inf\{t \mid V(t) \geq n\}$$

megállási idők. Így a $\tau_n \triangleq \upsilon_n \wedge \kappa_n \wedge \rho_n$ szintén megállási idő. Nyilván $\tau_n \nearrow \infty$, így ha minden n indexre $M^{\tau_n} = 0$ akkor az M minden n-re nulla a $[0, \tau_n]$ szakaszon, így az M is nulla a $\cup_n [0, \tau_n] = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ halmazon, így $M = 0$. A trajektóriák folytonossága miatt $|M^{\tau_n}| \leq n$ és $|V^{\tau_n}| \leq n$, így a megállított folyamatok trajektóriái korlátosak. Feltehető tehát, hogy az M és a $V \triangleq \operatorname{Var}(M)$ korlátosak. Az egyszerűbb jelölés miatt a megállításra vonatkozó jelt elhagyjuk. Mivel az M martingál, az energiaazonosság miatt a $[0,t]$ szakasz tetszőleges $\left(t_k^{(n)}\right)$ partíciójára

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(M^2(t)\right) &= \mathbf{E}\left(\sum_k \left(M^2\left(t_k^{(n)}\right) - M^2\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\sum_k \left(M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right)^2\right) \leq \\
&\leq \mathbf{E}\left(\sum_k \left|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right| \cdot \max_k \left|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\right) \leq \\
&\leq \mathbf{E}\left(V(t) \cdot \max_k \left|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\right) \leq \\
&\leq K \cdot \mathbf{E}\left(\max_k \left|M\left(t_k^{(n)}\right) - M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\right).
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az M trajektóriái folytonosak, így egyenletesen is folytonosak a $[0,t]$ szakaszon, így

$$\lim_{n\to\infty}\max_k\left|M\left(t_k^{(n)}\right)-M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|=0.$$

Másrészt

$$\max_k\left|M\left(t_k^{(n)}\right)-M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\le V(t)\le K,$$

így a majorált konvergencia tétele miatt

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left(\max_k\left|M\left(t_k^{(n)}\right)-M\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\right|\right)=0,$$

következésképpen $\mathbf{E}\left(M^2(t)\right)=0$. Így minden t-re $M(t)\overset{m.m}{=}0$. Az M trajektóriái folytonosak, így a nullmértékű halmazokat a racionális időpontokban egyesítve azonnal belátható, hogy majdnem minden ω esetén $M(t,\omega)=0$ minden t-re. □

3.30. Következmény (Folytonos szemimartingálok egyértelmű felbontása)**.** *A folytonos szemimartingálok folytonos lokális martingálra és folytonos véges változású folyamatra való felbontása egyértelmű.*

Bizonyítás. Ha $S=S(0)+V_1+L_1=S(0)+V_2+L_2$, akkor $V_1-V_2=L_2-L_1$ egy véges változású folytonos lokális martingál, amely az egyértelműségi tétel miatt konstans, így $V_1-V_2=0=L_2-L_1$. □

3.2.4. Az integrál és a határérték felcserélhetősége

3.31. Tétel (Határérték és integrálás felcserélhetősége)**.** *Legyen (X_n) balról reguláris, adaptált folyamatok egy sorozata, amely a kompakt időtartományokon a sztochasztikus konvergenciában egyenletesen egy X folyamathoz tart, vagyis amelyre minden t időpont esetén*

$$\sup_{0\le s\le t}|X_n(s)-X(s)|\to 0, \tag{3.11}$$

ahol a konvergencia sztochasztikus konvergenciát jelöl. Ha S egy folytonos szemimartingál, akkor a sztochasztikus konvergenciában

$$(X_n\bullet S)(t)\to(X\bullet S)(t).$$

Bizonyítás. Első lépésként érdemes megjegyezni, hogy az egyenletes konvergencia miatt az X határérték megőrzi az X_n folyamatok balról való regularitását. Ha az S véges változású, akkor az állítás a klasszikus analízisből

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ismert. Emlékeztetünk, hogy az állítás indoklása ilyenkor a trajektóriánként érvényes

$$|(X_n \bullet S)(t) - (X \bullet S)(t)| \leq \int_0^t |X_n - X| \, d\mathrm{Var}(S)$$

egyenlőtlenségből következik, ahol $\mathrm{Var}(S)$ az S trajektóriáinak teljes megváltozásaiból álló folyamatot jelöli. Az S folytonossága miatt a $\mathrm{Var}(S)$ is folytonos, így minden trajektória korlátos a $[0,t]$ szakaszon. Természetesen a $\mathrm{Var}(S)$ nem egyenletesen korlátos, de tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan N, hogy egy ε-nál kisebb valószínűségű halmaztól eltekintve a $[0,t]$ szakaszon az $s \mapsto \mathrm{Var}(S)(s,\omega)$ trajektória már kisebb, mint N. Ebből következően egy ε valószínűségű halmaztól eltekintve

$$|(X_n \bullet S)(t) - (X \bullet S)(t)| \leq N \sup_{0 \leq s \leq t} |X_n - X| ,$$

amiből az állítás már evidens.

Most tegyük fel, hogy az S egy folytonos lokális martingál. Jelölje (τ_n) az S lokalizációs sorozatát. Mivel az S folytonos, feltehető, hogy $S^{\tau_n} \in \mathcal{H}^2$ és ha n elég nagy, akkor $\mathbf{P}(\tau_n < t) < \delta/2$. Legyen

$$\sigma_n \stackrel{\circ}{=} \inf \{ s \mid |X_n - X|(s) \geq \varepsilon \} .$$

A tétel feltételeiben szereplő (3.11) konvergencia miatt, ha n elég nagy, akkor $\mathbf{P}(\sigma_n < t) < \delta/2$. Ha most $\rho_n \stackrel{\circ}{=} \tau_n \wedge \sigma_n$ és $A \stackrel{\circ}{=} \{\rho_n \geq t\}$, akkor $\mathbf{P}(A^c) < \delta$ és így a sztochasztikus integrálokra definiált (3.9) négyzetes egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(|((X_n - X) \bullet S)(t)| > \alpha) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(A \cap |((X_n - X) \bullet S)(t)| > \alpha) = \\
&= \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(A \cap |((X_n - X) \bullet S)^{\rho_n}(t)| > \alpha) = \\
&= \mathbf{P}(A^c) + \mathbf{P}(A \cap |((X_n - X)\chi([0,\rho_n]) \bullet S^{\rho_n})(t)| > \alpha) \leq \\
&\leq \mathbf{P}(A^c) + \frac{\|(((X_n - X)\chi([0,\rho_n])) \bullet S^{\rho_n})(t)\|_2^2}{\alpha^2} \leq \delta + \frac{\varepsilon^2 L}{\alpha^2},
\end{aligned}$$

amiből az állítás már evidens. □

3.2.5. A kvadratikus variáció

Az alábbi állítás legfontosabb része, hogy az $[X,Y]$, úgynevezett keresztvariáció folyamat létezik.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.32. Tétel (Parciális integrálás)**.** *Ha X és Y folytonos szemimartingálok, akkor tetszőleges t időpont esetén*

$$X(t)Y(t) - X(0)Y(0) = \int_0^t X dY + \int_0^t Y dX + [X,Y](t),$$

ahol $[X,Y]$, definíció szerint, a két szemimartingál kvadratikus keresztvariációja. A keresztvariáció a t időpontban az

$$I_n(t) \stackrel{\circ}{=} \sum_i \left(X\left(t_{i+1}^{(n)} \wedge t\right) - X\left(t_i^{(n)} \wedge t\right)\right)\left(Y\left(t_{i+1}^{(n)} \wedge t\right) - Y\left(t_i^{(n)} \wedge t\right)\right)$$

szorzatösszeg sztochasztikus konvergenciában vett határértéke. Továbbá a sztochasztikus konvergenciában

$$\sup_{a \le s \le b} |I_n(s) - [X,Y](s)| \to 0.$$

Bizonyítás. A parciális integrálás formuláját a közelítő összegekre felírva az egyenlőség, a közelítő összegekre, elemi számolással kapható. A bizonyítás lényegi eleme, hogy mivel az integrálok konvergálnak, a bal oldalon szereplő kifejezés konstans, ezért a keresztvariációt közelítő (I_n) sorozat konvergens kell hogy legyen. □

Az $[X,X]$ folyamatot szokás $[X]$ módon jelölni. A definícióból világos, hogy az $[X]$ monoton nő, ugyanis ha $s < t$, akkor az s időpontot a $[0,t]$ felbontásához hozzávéve a $[0,s]$ szakaszon vett közelítő összegek nem lehetnek nagyobbak a $[0,t]$ szakaszon vett összegeknél. Az integrálás integrandus és integrátor szerinti linearitása segítségével könnyen belátható, hogy

$$[X, Y_1 + Y_2] = [X,Y_1] + [X,Y_2].$$

Ebből azonnal látható, hogy

$$[X+Y] = [X+Y, X+Y] = [X] + 2[X,Y] + [Y].$$

Speciálisan

$$[X,Y] = \frac{1}{4}\left([X+Y] - [X-Y]\right), \tag{3.12}$$

következésképpen az $[X,Y]$ véges változású.

3.33. Példa. Folytonos és korlátos változású folyamatok kvadratikus keresztvariációja nulla.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A sztochasztikus analízis lényegében a keresztvariáció miatt különbözik a közönséges analízistől. A Fisk-tétel bizonyításakor is használt

$$\sum_k \left(X\left(t_k\right) - X\left(t_{k-1}\right)\right)^2 \leq \max_k \left|X\left(t_k\right) - X\left(t_{k-1}\right)\right| \sum_k \left|X\left(t_k\right) - X\left(t_{k-1}\right)\right|$$

triviális egyenlőség miatt ha egy X folyamat folytonos és véges változású, akkor az $[X, X] = 0$, ugyanis minden véges szakaszon a folytonos függvények egyenletes folytonossága miatt a szorzat első tagja nullához tart, miközben a feltételezett véges változás miatt a szorzat második tényezője korlátos.

Ez az észrevétel felhasználható a Fisk-tétel bizonyítására: Legyen L egy az $L\left(0\right) = 0$ feltételt kielégítő lokális martingál. Mivel az L folytonos és korlátos változású, ezért a példa alapján $[L, L] = 0$. A parciális integrálás formulája miatt az $L^2 - [L, L] = L^2$ egy lokális martingál. Következésképpen egy alkalmas (τ_n) lokalizációs sorozatra az L^2 négyzetfolyamat τ_n pontban való megállítása martingál, így minden t-re a Fatou-lemma miatt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(L^2\left(t\right)\right) &= \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} L^2\left(\tau_n \wedge t\right)\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(L^2\left(\tau_n \wedge t\right)\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\left(L^2\right)^{\tau_n}\left(t\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\left(L^2\right)^{\tau_n}\left(0\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big(L^2(0)\big) = 0,\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy a martingálok tartják a várható értéket. Vagyis $L^2\left(t\right) \overset{m.m.}{=} 0$, következésképpen $L\left(t\right) \overset{m.m.}{=} 0$. □

3.34. Példa. Ha w egy Wiener-folyamat, akkor $[w]\left(t\right) \overset{\circ}{=} [w, w]\left(t\right) = t$. Ha w_1 és w_2 független Wiener-folyamatok, akkor $[w_1, w_2] = 0$. Korrelált Wiener-folyamatok keresztvariációja. $[w_1, w_2]\left(t\right) = \rho t$.

Független Wiener-folyamatok esetén a $[w_1, w_2]$ keresztvariációt több módon is kiszámolhatjuk. Az egyik módszer szerint először megmutatjuk, hogy ha X_1 és X_2 függetlenek és független növekményűek, akkor az $X_1 + X_2$ is független növekményű. Emlékeztetünk, hogy az X_1 és X_2 folyamatok definíció szerint pontosan akkor függetlenek, ha tetszőleges (t_i) sorozatra az $\left(X_1\left(t_i\right)\right)$ és az $\left(X_2\left(t_i\right)\right)$ vektorok függetlenek. Legyen $t > s$ és $\xi_i \overset{\circ}{=} X_i\left(s\right)$ és $\eta_i \overset{\circ}{=} X_i\left(t + h\right) - X_i\left(t\right)$. Az együttes eloszlásokat felírva, először a függetlenséget, majd a független növekményeket, majd ismét a függetlenséget használva

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\left(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \eta_1 \in C_1, \eta_2 \in C_2\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\xi_1 \in B_1, \eta_1 \in C_1\right)\mathbf{P}\left(\xi_2 \in B_2, \eta_2 \in C_2\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\xi_1 \in B_1\right)\mathbf{P}\left(\eta_1 \in C_1\right)\mathbf{P}\left(\xi_2 \in B_2,\right)\mathbf{P}\left(\eta_2 \in C_2\right) = \\ &= \mathbf{P}\left(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2\right)\mathbf{P}\left(\eta_1 \in C_1, \eta_2 \in C_2\right).\end{aligned}$$

A monoton osztály tétel segítségével

$$\mathbf{P}\left(\left(\xi_1, \xi_2\right) \in B, \left(\eta_1, \eta_2\right) \in C\right) = \mathbf{P}\left(\left(\xi_1, \xi_2\right) \in B\right)\mathbf{P}\left(\left(\eta_1, \eta_2\right) \in C\right),$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

amiből a $\xi_1+\xi_2$ független az $\eta_1+\eta_2$-től. A gondolatmenetet kettő helyett véges sok változóra alkalmazva kapjuk az eredményt. Ebből könnyen belátható, hogy ha w_1 és w_2 független Wiener-folyamatok, akkor a $(w_1+w_2)/\sqrt{2}$ szintén Wiener-folyamat. Ebből, felhasználva a Wiener-folyamatok kvadratikus variációjának képletét

$$\begin{aligned} 2t &= [w_1+w_2](t) = [w_1](t) + 2[w_1,w_2](t) + [w_2](t) = \\ &= 2t + 2[w_1,w_2](t), \end{aligned}$$

amiből evidens módon $[w_1,w_2](t)=0$.

A w_1 és w_2 Wiener-folyamatokat korrelált Wiener-folyamatnak mondjuk, ha a (w_1,w_2) növekményei függetlenek és egy alkalmas ρ korrelációs együttható esetén minden t időpontra és tetszőleges $\Delta w_1(t_k)$ és $\Delta w_2(t_k)$ növekményekre a $\Delta w_1(t_k)$ és a $\Delta w_2(t_k)$ együttes eloszlás normális és a korreláció együtthatójuk ρ. Ilyenkor a $[0,t]$ tetszőleges partíciója esetén

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left(\sum_k \Delta w_1(t_k)\,\Delta w_2(t_k)\right) = \sum_k \mathbf{E}\left(\Delta w_1(t_k)\,\Delta w_2(t_k)\right) = \\ &= \sum_k \rho\cdot\mathbf{D}\left(\Delta w_1(t_k)\right)\cdot\mathbf{D}\left(\Delta w_2(t_k)\right) = \sum_k \rho\left(\sqrt{\Delta t_k}\right)^2 = \rho t. \end{aligned}$$

A növekmények függetlenségét használva

$$\mathbf{D}^2\left(\sum_k \Delta w_1(t_k)\,\Delta w_2(t_k)\right) = \sum_k \mathbf{D}^2\left(\Delta w_1(t_k)\,\Delta w_2(t_k)\right).$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2\left(\Delta w_1(t_k)\,\Delta w_2(t_k)\right) &= \mathbf{E}\left(\left(\Delta w_1(t_k)\,\Delta w_2(t_k)\right)^2\right) - \left(\rho\Delta t_k\right)^2 \le \\ &\le \sqrt{\mathbf{E}\left(\left(\Delta w_1(t_k)\right)^4\right)}\sqrt{\mathbf{E}\left(\left(\Delta w_2(t_k)\right)^4\right)} = \\ &= \sqrt{3\left(\Delta t_k\right)^2}\sqrt{3\left(\Delta t_k\right)^2} = 3\left(\Delta t_k\right)^2. \end{aligned}$$

Így a partíció végtelenül való finomításával

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2\left(\sum_k \Delta w_1(t_k)\,\Delta w_2(t_k)\right) &\le 3\sum_k \left(\Delta t_k\right)^2 \le \\ &\le 3\max_k |t_k - t_{k-1}| \sum (t_k - t_{k-1}) \to 0, \end{aligned}$$

amiből a $[w_1,w_2](t)=\rho t$ formula már evidens. Vegyük észre, hogy ha $w_1 = w_2$, akkor $\rho=1$ és ilyenkor kapjuk a $[w](t)=t$ formulát, és ha a w_1 és a w_2 függetlenek, akkor kapjuk a $[w_1,w_2]=0$ formulát. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Mivel a kvadratikus variáció a sztochasztikus analízis legfontosabb fogalma érdemes a létezését egy kicsit jobban körüljárni: Tetszőleges X folyamat és $[a,b]$ szakasz tetszőleges (t_k) partíciója esetén

$$\begin{aligned}(X(b)-X(a))^2 &= \left(\sum_k (X(t_k)-X(t_{k-1}))\right)^2 = \left(\sum_k \Delta X(t_k)\right)^2 = \\ &= 2\cdot\sum_{j<k}\Delta X(t_j)\,\Delta X(t_k)+\sum_k (\Delta X(t_k))^2 = \\ &= 2\sum_k\left(\sum_{j=1}^{k-1}\Delta X(t_j)\right)\Delta X(t_k)+\sum_k(\Delta X(t_k))^2 = \\ &= 2\sum_k (X(t_{k-1})-X(a))\,\Delta X(t_k)+\sum_k(\Delta X(t_k))^2 = \\ &= 2\sum_k X(t_{k-1})\,\Delta X(t_k)+\sum_k(\Delta X(t_k))^2 - \\ &\qquad -2(X(b)-X(a))\,X(a).\end{aligned}$$

Ha az X egy folytonos szemimartingál, akkor a $\sum_k X(t_{k-1})\,\Delta X(t_k)$ határértéke létezik, amiből a $\sum_k (\Delta X(t_k))^2$ konvergenciája és az

$$X^2(b)-X^2(a) = 2\int_a^b X\,dX + [X]_{a,b}$$

szabály már evidens.

3.35. Következmény (A keresztvariáció karakterizálása)**.** *Ha L_1 és L_2 tetszőleges folytonos lokális martingálok, akkor $[L_1,L_2]$ az egyetlen olyan véges változású folytonos V folyamat, amelyre az L_1L_2-V folytonos lokális martingál.*

Bizonyítás. A parciális integrálási formula miatt, felhasználva, hogy a két integrál lokális martingál, világos, hogy az $L_1L_2-[L_1,L_2]$ folytonos lokális martingál. Ha ez egy másik V véges változású folyamat esetén is teljesülne, akkor az

$$(L_1L_2-[L_1,L_2])-(L_1L_2-V) = V-[L_1,L_2]$$

egy olyan korlátos változású, folytonos lokális martingál lenne, amely a $t=0$ pontban nulla. Fisk tétele miatt ilyenkor $[L_1,L_2]=V$. □

3.36. Következmény (Keresztvariációra vonatkozó megállítási szabály)**.** *Ha X és Y folytonos szemimartingálok és τ tetszőleges megállási idő, akkor*

$$[X^\tau,Y^\tau] = [X^\tau,Y] = [X,Y^\tau] = [X,Y]^\tau.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A kvadratikus variáció definíciója alapján

$$\begin{aligned}[X^\tau, Y^\tau] &\triangleq X^\tau Y^\tau - X(0)\,Y(0) - X^\tau \bullet Y^\tau - Y^\tau \bullet X^\tau = \\ &= X^\tau Y^\tau - X(0)\,Y(0) - (X^\tau \bullet Y)^\tau - (Y^\tau \bullet X)^\tau = \\ &= X^\tau Y^\tau - X(0)\,Y(0) - (X^\tau \chi([0,\tau]) \bullet Y)^\tau - (Y^\tau \chi([0,\tau]) \bullet X)^\tau = \\ &= X^\tau Y^\tau - X(0)\,Y(0) - (X \chi([0,\tau]) \bullet Y)^\tau - (Y \chi([0,\tau]) \bullet X)^\tau = \\ &= X^\tau Y^\tau - X(0)\,Y(0) - (X \bullet Y)^\tau - (Y \bullet X)^\tau = \\ &= (XY - X(0)\,Y(0) - (X \bullet Y) - (Y \bullet X))^\tau = [X,Y]^\tau .\end{aligned}$$

Az integrál linearitása alapján a keresztvariáció bilineáris, így a további egyenlőségek bizonyításához elég megmutatni, hogy $[X^\tau, Y - Y^\tau] = 0$. Az X^τ a τ után konstans, az $Y - Y^\tau$ pedig a τ előtt nulla, így a keresztvariáció definíciójából világos, hogy a közelítő összeg minden ω kimenetelre csak egyetlen tagból áll, amikor is $t_k^{(n)} < \tau(\omega) < t_{k+1}^{(\omega)}$. De a folyamatok folytonossága miatt ezen egyetlen közelítő négyzet határértéke nulla, vagyis valóban $[X^\tau, Y - Y^\tau] = 0$. □

3.37. Következmény. *Ha L folytonos lokális martingál, akkor az L trajektóriái egy nullmértékű halmaztól eltekintve pontosan akkor konstansok, ha $[L] = 0$.*

Bizonyítás. Az egyik irány evidens. Elegendő belátni, hogy ha $[L] = 0$, akkor az L majdnem minden trajektóriája konstans. Az L helyébe az $L - L(0)$ folyamatot írva a kvadratikus variáció nem módosul, így feltehető, hogy $L(0) = 0$. Legyen (τ_n) az $L^2 - [L]$ lokális martingál egy lokalizációs sorozata. Elegendő belátni, hogy minden n-re $L^{\tau_n} = 0$. Mivel $[L^{\tau_n}] = [L]^{\tau_n} = 0$, ezért feltehetjük, hogy az $\left(L^2\right)^{\tau_n} = \left(L^{\tau_n}\right)^2$ martingál. A lokalizációra utaló jelölést az egyszerűség kedvéért elhagyva

$$\mathbf{E}\left(L^2(t)\right) = \mathbf{E}\left(L^2(t) - [L](t)\right) = 0,$$

ugyanis az $L^2 - [L]$ a lokalizáció miatt martingál, és a martingálok tartják a várható értéket. Ebből az $L^2(t)$ majdnem mindenhol nulla. A racionális időpontokhoz tartozó nullmértékű halmazokat egyesítve az L trajektóriáinak folytonosságát kihasználva azonnal látható, hogy az L majdnem minden trajektóriája nulla. □

3.38. Tétel (Polaritási formula)**.** *Ha L folytonos lokális martingál és X balról reguláris, adaptált folyamat, akkor*

$$[X \bullet L] = X^2 \bullet [L].$$

Hasonlóan, ha L_1 és L_2 két folytonos lokális martingál és X_1, X_2 balról reguláris, adaptált folyamatok, akkor

$$[X_1 \bullet L_1, X_2 \bullet L_2] = X_1 X_2 \bullet [L_1, L_2].$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A második egyenlőség az integrál linearitása miatt következik az elsőből:

$$[(X_1 + X_2) \bullet L] = (X_1 + X_2)^2 \bullet [L] = \left(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2\right) \bullet [L].$$

Ugyanakkor

$$[(X_1+X_2) \bullet L] = [X_1 \bullet L + X_2 \bullet L] = [X_1 \bullet L]+2\,[X_1 \bullet L, X_2 \bullet L]+[X_1 \bullet L],$$

amiből az első egyenlőség felhasználásával

$$[X_1 \bullet L, X_2 \bullet L] = X_1X_2 \bullet [L].$$

Az L helyébe $L_1 + L_2$-t írva hasonló számolással kapjuk a második egyenlőséget. A megállítási szabályok miatt elegendő feltenni, hogy az X és az L korlátos. Ebből következően feltehető, hogy az L martingál. Az első egyenlőség bizonyításához írjuk fel a

$$\left(\sum_k X(t_{k-1})\,\Delta L(t_k)\right)^2 = 2\sum_{k<j} X(t_{k-1})\,X(t_{j-1})\,\Delta L(t_k)\,\Delta L(t_j) + \\ + \sum_k X^2(t_{k-1})\,(\Delta L(t_k))^2$$

azonosságot. A kétszeres szumma éppen

$$I_n \doteq \sum_k \left(\sum_{j<k} X(t_{j-1})\,\Delta L(t_j)\right) X(t_{k-1})\,\Delta L(t_k) \doteq \\ \doteq \sum_k Y^{(n)}(t_{k-1})\,\Delta Y^{(n)}(t_k).$$

Vegyük észre, hogy martingáltranszformációs lemma miatt az $Y^{(n)}$ martingál. Ebből következően a lemma ismételt alkalmazásával belátható, hogy az I_n is martingál. Ha a felbontást minden határon túl finomítjuk, akkor, felhasználva, hogy a sztochasztikusan konvergens sorozatok négyzete is sztochasztikusan konvergens

$$\left(\sum_k X(t_{k-1})\,\Delta L(t_k)\right)^2 \to \left(\int_0^t X\,dL\right)^2.$$

Mivel $\sum_k (\Delta L(t_k))^2 \to [L](t)$ és a $\sum_k X^2(t_{k-1})\,(\Delta L(t_k))^2$ összeg tekinthető a t_k pontokra koncentrálódott $(\Delta L(t_k))^2$ nagyságú ugrásokat tartalmazó

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

korlátos változású folyamat szerinti integrálnak, ezért felhasználva, hogy az X trajektóriái balról regulárisak a bizonyítás utáni lemma alapján a trajektóriánkénti konvergenciában

$$\sum_k X^2\left(t_{k-1}\right)\left(\Delta L\left(t_k\right)\right)^2 \to \int_0^t X^2 d\left[L\right].$$

Legyen $Z \stackrel{\circ}{=} X \bullet L$. Ha a felbontást finomítjuk, akkor felhasználva, hogy $Y^{(n)} \to Z$ a kompakt szakaszokon a sztochasztikus konvergenciában egyenletesen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \left(Y^{(n)} - Z\right) dZ = \int_0^t \lim_{n\to\infty} \left(Y^{(n)} - Z\right) dZ = \int_0^t 0 dZ = 0.$$

Az $Y^{(n)}$ tart a Z-hez, így egy elegendően kicsi valószínűségű halmaztól eltekintve az $Y^{(n)}$ már elég közel van a Z-hez, így feltehető, hogy az $Y^{(n)}$ egy elegendően kicsi valószínűségű halmaztól eltekintve egyenletesen korlátos. Ebből következően a már többször látott módon a sztochasztikus integrálokra vonatkozó (3.9) egyenlőtlenséggel belátható, hogy sztochasztikus konvergenciában $Y^{(n)} \bullet \left(Y^{(n)} - Z\right) \to 0$. Ezt felhasználva

$$Y^{(n)} \bullet Y^{(n)} - Z \bullet Z = Y^{(n)} \bullet \left(Y^{(n)} - Z\right) + \left(Y^{(n)} - Z\right) \bullet Z \to 0.$$

Így

$$Z^2 = 2 \cdot Z \bullet Z + X^2 \bullet \left[L\right].$$

Mivel a Z lokális martingál, ezért a $Z \bullet Z$ is lokális martingál, következésképpen

$$\left[Z\right] = \left[X \bullet L\right] = X^2 \bullet \left[L\right]. \qquad \square$$

3.39. Lemma (Gyenge konvergencia jellemzése)**.** *Tegyük fel, hogy $F_n \to F$, ahol az (F_n) sorozat tagjai és az F monoton növekedő, jobbról folytonos függvények és a konvergencia minden pontban érvényes. Ha az f balról reguláris függvény, akkor*

$$\int_a^b f dF_n \to \int_a^b f dF.$$

Bizonyítás. A lemma a mértékek gyenge konvergenciájára vonatkozó gyakran használt állítás egy verziója. Gyenge konvergencia definíciója alapján elegendő megkövetelni, hogy az F minden folytonossági pontjában érvényes legyen az $F_n\left(x\right) \to F\left(x\right)$ konvergencia. Emlékeztetünk, hogy ilyenkor azt szokás mondani, hogy az (F_n) gyengén tart az F-hez. Ez indokolja a lemma elnevezését. Vegyük észre, hogy mivel az f balról reguláris, ezért tetszőleges n-re az $1/n$-nél nagyobb ugrásainak száma véges, így az f legfeljebb megszámlálható

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

pontban szakadhat. Ha az F folytonos, akkor az egy pontból álló halmazok mértéke nulla, így az F által generált mérték szerint az f majdnem mindenhol folytonos. Miként ismert, a mértékek gyenge konvergenciája esetén az integrálok konvergenciája ilyenkor is biztosítható. Mivel azonban ennek indoklása némiképpen szövevényes, eltekintünk a használatától és a gyenge konvergencia jellemzését a fenti egy enyhén módosított alakban mondtuk ki.

A balról regularitás miatt az f felbontható két részre. Jelölje f_1 a „nagy" ugrásokat. Ezek száma véges. Tekintsünk egyetlen nagy ugrást.

$$h(x) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le t_0 \\ g, & \text{ha } t > t_0 \end{cases}.$$

Ilyenkor, kihasználva, hogy az F jobbról folytonos, így egy $(u, v]$ szakasz mértéke $F(v) - F(u)$

$$\int_a^b h dF_n = \int_{(a,b]} h dF_n = \int_{(t_0,b]} h dF_n = g\left(F_n(b) - F_n(t_0)\right) \to \int_a^b h dF,$$

ugyanis az $F_n(x) \to F(x)$ konvergencia minden pontban teljesül. Legyen f_2 a folytonos és a „kis" ugrásokat megadó rész. Ekkor az f_2 folytonossági modulusa a nagy ugrások alkalmas megválasztásával tetszőlegesen kicsi lehet. Legyen h az f_2 függvényt „jól" közelítő szakaszonként konstans, balról folytonos függvény.

$$\left|\int_a^b f_2 dF - \int_a^b f_2 dF_n\right| \le$$
$$\le \int_a^b |f_2 - h|\, dF + \left|\int_a^b h dF - \int_a^b h dF_n\right| + \int_a^b |h - f_2|\, dF_n \le$$
$$\le \varepsilon\left(F(b) - F(a)\right) + \left|\int_a^b h dF - \int_a^b h dF_n\right| + \varepsilon\left(F_n(b) - F_n(a)\right).$$

Az első és a harmadik kifejezés az ε megválasztásával tetszőlegesen kicsivé tehető. A második integrál pedig

$$\left|\sum_k h_k\left(F(t_k) - F(t_{k-1})\right) - \sum_k h_k\left(F_n(t_k) - F_n(t_{k-1})\right)\right|$$

alakú, amely az $F_n \to F$ konvergencia miatt szintén tetszőlegesen kicsivé tehető. □

3.40. Következmény (A sztochasztikus integrál karakterizációja)**.** *Ha L egy folytonos lokális martingál és X egy adaptált, balról reguláris folyamat,*

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

akkor az $X \bullet L$ az egyetlen olyan a $t = 0$ pontban nulla értéket felvevő folytonos lokális martingál, amelyre igaz az, hogy tetszőleges N folytonos lokális martingál esetén $[X \bullet L, N] = X \bullet [L, N]$.

Bizonyítás. Ha valamely U folytonos lokális martingálra, amelyre $U(0) = 0$ minden N folytonos lokális martingál esetén $[U, N] = X \bullet [L, N]$, akkor az $N \triangleq U - X \bullet L$ esetben

$$[N] = [U - X \bullet L, N] = [U, N] - [X \bullet L, N] = 0,$$

vagyis $N = 0$, amiből $U = X \bullet L$ A fordított irány a polaritási formula miatt evidens. □

3.41. Tétel (Asszociativitási szabály)**.** *Legyen S folytonos szemimartingál, X és Y balról reguláris adaptált folyamatok. Érvényes a következő asszociativitási formula:*

$$Y \bullet (X \bullet S) = (YX) \bullet S.$$

Másképpen fogalmazva integrálfüggvény szerinti integrálás esetén az integrálok elvégzésének sorrendje „átrendezhető”.

Bizonyítás. Mivel ha $\nu(A) \triangleq \int_A f d\mu$, akkor $\int_X g d\nu = \int_X f g d\mu$, ezért ha az S korlátos változású, akkor az azonosság a klasszikus integrálelméletből ismert. Ha S lokális martingál, akkor a trajektóriánkénti integrál ezen tulajdonságát használva tetszőleges N lokális martingál esetén

$$\begin{aligned}[Y \bullet (X \bullet S), N] = Y \bullet [X \bullet S, N] = Y \bullet (X \bullet [S, N]) = \\ = YX \bullet [S, N] = [YX \bullet S, N].\end{aligned}$$

Ebből a kvadratikus variáció linearitása miatt

$$[Y \bullet (X \bullet S) - YX \bullet S, N] = 0.$$

Lokális martingálok különbsége szintén lokális martingál, így $N \triangleq Y \bullet (X \bullet S) - YX \bullet S$ választással

$$[Y \bullet (X \bullet S) - YX \bullet S] = 0,$$

amiből $Y \bullet (X \bullet S) = YX \bullet S$. □

3.2.6. Helyettesítéses integrálás

Mielőtt továbbmegyünk érdemes röviden megtárgyalni a sztochasztikus folyamatok időtranszformáltját, amely a helyettesítéses integrálás hasznos módszerének sztochasztikus általánosítása. Csak a legegyszerűbb esetet tárgyaljuk. Legyen A egy az $A(0) = 0$ pontból kiinduló, adaptált, folytonos szigorúan monoton növekedő folyamat, és vezessük be a

$$\tau(t) \triangleq \inf\{s \mid A(s) \geq t\} = \inf\{s \mid A(s) = t\} = A^{-1}(t) < \infty$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

megállási időkből álló folyamatot[12]. Ugyancsak az egyszerűség véget tegyük fel, hogy $A(\infty) = \infty$. Az $\mathcal{F}$ alapfiltráció mellett vezessük be a $\mathcal{G}_s \stackrel{\circ}{=} \mathcal{F}_{\tau(s)}$ σ-algebrákat. Mivel az A monoton nő, a $\tau(t)$ folyamat is monoton nő, és mivel a megállított σ-algebra a megállási idő monoton növekedő függvénye a $\mathcal{G}_s$ σ-algebrákból készített $\mathcal{G}$ család filtráció.

1. Megmutatjuk, hogy ha az $\mathcal{F}$ teljesíti a szokásos feltételeket, akkor a $\mathcal{G}$ filtráció is kielégíti a szokásos feltételeket. Valóban, mivel $\tau(0) = 0$, ezért $\mathcal{F}_0 = \mathcal{G}_0$, így a $\mathcal{G}$ minden eleme tartalmazza a nullmértékű halmazokat. Ha $G \in \mathcal{G}_{t+}$, akkor $G \in \mathcal{F}_{\tau(s)}$ minden $s > t$ esetén, vagyis minden $a \geq 0$ esetén

$$G \cap \{\tau(s) \leq a\} \in \mathcal{F}_a, \quad s > t.$$

Mivel minden megállási idő egyúttal gyenge megállási idő is, ezért

$$G \cap \{\tau(s) < a\} \in \mathcal{F}_a, \quad s > t.$$

Ha $s_n \searrow t$, akkor $\tau(s_n) \searrow \tau(t)$, ezért egyrészt

$$G \cap \{\tau(s_k) < a\} \subseteq G \cap \{\tau(s_{k+1}) < a\} \subseteq G \cap \{\tau(t) < a\},$$

másrészt

$$G \cap \{\tau(t) < a\} \subseteq \cup_k G \cap \{\tau(s_k) < a\},$$

ezért a tartalmazás helyett egyenlőség van, így

$$G \cap \{\tau(t) \leq a\} = G \cap \left(\cap_n \left(\left\{\tau(t) < a + \frac{1}{n}\right\}\right)\right) \in \mathcal{F}_{a+} = \mathcal{F}_a,$$

következésképpen $G \in \mathcal{F}_{\tau(t)} = \mathcal{G}_t$, tehát a $\mathcal{G}$ valóban jobbról folytonos.

2. Ha az X reguláris[13] folyamat és adaptált az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve, akkor az $Y(t) \stackrel{\circ}{=} X(\tau(t))$ átskálázott folyamat adaptált lesz a $\mathcal{G}$-re nézve. Valóban tetszőleges τ megállási idő esetén az X^τ megállított folyamat adaptált marad az $\mathcal{F}$-re nézve.

$$\begin{aligned}\{Y(t) \leq a\} \cap \{\tau(t) \leq u\} &\stackrel{\circ}{=} \{X(\tau(t)) \leq a\} \cap \{\tau(t) \leq u\} = \\ &= \{X(\tau(t) \wedge u) \leq a\} \cap \{\tau(t) \leq u\} = \\ &= \left\{X^{\tau(t)}(u) \leq a\right\} \cap \{\tau(t) \leq u\} \in \mathcal{F}_u,\end{aligned}$$

[12] Az alábbi helyettesítéses integrálás formulájában az A közvetlenül nem jelenik meg, csak a $\tau(t)$ folyamat. Az A és a $\tau(t)$ folyamat tulajdonságai közvetlenül megfeleltethetők egymásnak. Az alkalmazásokban a $\tau(t)$ általában egy A segítségével származtatható.

[13] A regularitásnál jóval általánosabb körülmények között is érvényben marad, például teljesül az alább bevezetett előrejelezhető folyamatokra is, a pontos részleteket most nem tisztázzuk.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

vagyis az $Y(t)$ $\mathcal{F}_{\tau(t)} = \mathcal{G}_t$ mérhető.

3. Legyen most L egy folytonos lokális martingál az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve. Megmutatjuk, hogy az $M(t) \stackrel{\circ}{=} L(\tau(t))$ lokális martingál a $\mathcal{G}$-re nézve. Valóban legyen $\sigma < \infty$ egy olyan $\mathcal{F}$-megállási idő, amelyre az L^σ korlátos $\mathcal{F}$-martingál. Legyen

$$\rho \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid \tau(t) \geq \sigma\} = \inf\{t \mid \tau(t) = \sigma\}.$$

A ρ megállási idő a $\mathcal{G}$ filtrációra nézve. Ennek igazolásához elég azt meggondolni, hogy egy $\rho \geq 0$ függvény pontosan akkor megállási idő, ha a $[\rho, \infty)$ véletlen szakasz $\chi([\rho, \infty))$ jobbról folytonos karakterisztikus függvénye adaptált. Nyilván

$$\chi([\rho, \infty))(t, \omega) = \chi([\sigma, \infty))(\tau(t), \omega),$$

következésképpen az előző pont miatt a ρ valóban $\mathcal{G}$-megállási idő.

$$\begin{aligned}
M^\rho(t) = M(\rho \wedge t) &\stackrel{\circ}{=} L(\tau(\rho \wedge t)) = \\
&= \begin{cases} L(\tau(\rho)), & \text{ha } \rho \leq t \\ L(\tau(t)), & \text{ha } t < \rho \end{cases} = \begin{cases} L(\sigma), & \text{ha } \rho \leq t \\ L(\tau(t)), & \text{ha } t < \rho \end{cases} = \\
&= \begin{cases} L(\sigma), & \text{ha } \tau(\rho) \leq \tau(t) \\ L(\tau(t)), & \text{ha } \tau(t) < \tau(\rho) \end{cases} = \\
&= \begin{cases} L(\sigma), & \text{ha } \sigma \leq \tau(t) \\ L(\tau(t)), & \text{ha } \tau(t) < \sigma \end{cases} = \\
&= L^\sigma(\tau(t)).
\end{aligned}$$

Mivel az L^σ korlátos, ezért nyilván az M^ρ korlátos. Ha $t \geq s$, akkor a korlátos, vagyis egyenletesen integrálható martingálokra vonatkozó megállási opciókról szóló tétel alapján

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(M^\rho(t) \mid \mathcal{G}_s) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(L^\sigma(\tau(t)) \mid \mathcal{F}_{\tau(s)}\right) = L^\sigma(\tau(s)) = L(\tau(\rho \wedge s)) = \\
= M^\rho(s).
\end{aligned}$$

Ha $\sigma_n \nearrow \infty$, akkor a megfelelő $\rho_n \nearrow \infty$ éppen az M egy lokalizációs sorozata.

4. Legyen L lokális martingál az $\mathcal{F}$ alatt. Ekkor az $L^2 - [L]$ lokális martingál az $\mathcal{F}$ alatt, amiből $L^2(\tau(t)) - [L](\tau(t))$ lokális martingál a $\mathcal{G}$ alatt. Mivel az $[L](\tau(t))$ trajektóriái monoton nőnek és folytonosak, ezért a $t \mapsto L(\tau(t))$ kvadratikus variációja $[L](\tau(t))$. Hasonlóan ha L_1 és L_2 $\mathcal{F}$ lokális martingálok, akkor a $Z_1(t) \stackrel{\circ}{=} L_1(\tau(t))$ és a $Z_2(t) \stackrel{\circ}{=} L_2(\tau(t))$ keresztvariációja

$$[Z_1, Z_2](t) = [L_1, L_2](\tau(s)). \tag{3.13}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

5. Legyen X egy balról reguláris folyamat és legyen V véges változású. Ekkor érvényes a következő helyettesítéses integrálási formula:

$$\int_0^{\tau(t)} X(s)\, dV(s) = \int_0^t X(\tau(s))\, dV(\tau(s)).$$

Mivel a V szerinti integrál trajektóriánként számolható, ezért minden kimenetelre elég felírni a $[0, \tau(t,\omega)]$ egy végtelenül finomodó partíciósorozatára az bal oldalon álló integrál egy Itô-féle közelítő összegét. Azonnal látható, hogy ez egyúttal tekinthető a jobb oldalon álló integrál egy Itô-féle közelítő összegének is. Az integrandus mind a két oldalon balról reguláris, így mind a két oldalon a közelítő összegek sorozata konvergál, és az egyenlőség az integrálokra is átvihető.

6. Legyen X ismét egy balról reguláris folyamat[14] és legyen L egy folytonos lokális martingál. Ekkor érvényes a következő helyettesítéses integrálási formula:

$$\int_0^{\tau(t)} X(s)\, dL(s) = \int_0^t X(\tau(s))\, dL(\tau(s)).$$

Először is megjegyezzük, hogy mivel a $\tau(s)$ trajektóriái folytonosak, ezért az $s \mapsto X(\tau(s))$ is balról reguláris. Mivel az $L(\tau(s))$ a τ folytonossága miatt folytonos lokális martingál ezért a két oldalon az Itô–Stieltjes-integrálok léteznek. Tekintsük az

$$\begin{aligned} Y(t) \stackrel{\circ}{=} \int_0^{\tau(t)} X(s)\, dL(s) - \int_0^t X(\tau(s))\, dL(\tau(s)) = \\ = (X \bullet L)(\tau(t)) - \int_0^t X(\tau(s))\, dL(\tau(s)) \end{aligned}$$

$\mathcal{G}$-lokális martingált. A kvadratikus variációra belátott (3.13) formula alapján

$$\begin{aligned} [Y](t) = [X \bullet L](\tau(t)) + \int_0^t X^2(\tau(s))\, d[L(\tau(s))] - \\ - 2\int_0^t X(\tau(s))\, d[L(\tau(s)), (X \bullet L)(\tau(s))] = \\ = 2\int_0^t X^2(\tau(s))\, d[L(\tau(s))] - \\ - 2\int_0^t X(\tau(s))\, d[L(\tau(s)), (X \bullet L)(\tau(s))], \end{aligned}$$

[14] Könnyen látható, hogy az X választható előrejelezhetőnek.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ugyanis a közönséges trajektóriánként vett helyettesítéses integrál formulája alapján $u = \tau(s)$ helyettesítéssel

$$[X \bullet L](\tau(t)) = \int_0^{\tau(t)} X^2(u)\, d[L](u) = \int_0^t X^2(\tau(s))\, d[L](\tau(s)).$$

Ugyanakkor ismételten a trajektóriánként vett helyettesítéses integrálás formulája és a keresztvariációra kimondott formula szerint

$$\begin{aligned}
&\int_0^t X(\tau(s))\, d[L(\tau(s)), (X \bullet L)(\tau(s))] = \\
&= \int_0^t X(\tau(s))\, d[L, X \bullet L](\tau(s)) = \\
&= \int_0^t X(\tau(s))\, d((X \bullet [L])(\tau(s))) = \\
&= \int_0^t X(\tau(s))\, d(X(\tau(s)) \bullet [L(\tau(s))]) = \\
&= \int_0^t X^2(\tau(s))\, d[L(\tau(s))].
\end{aligned}$$

Így az Y kvadratikus variációja nulla, következésképpen az Y is nulla, amiből a sztochasztikus integrálokra vonatkozó helyettesítéses integrálás formulája már teljesül.

3.42. Tétel (Helyettesítéses integrálás)**.** *Ha $\tau(t)$ az alpont elején megadott folytonos, szigorúan monoton növekedő folyamat, akkor tetszőleges Y $\mathcal{F}$-szemimartingál esetén a $t \mapsto Y(\tau(t))$ folyamat $\mathcal{G}$-szemimartingál és minden X balról reguláris, $\mathcal{F}$-adaptált folyamat esetén érvényes az*

$$\int_{\tau(a)}^{\tau(b)} X\, dY = \int_a^b X(\tau(s))\, dY(\tau(s))$$

helyettesítési formula. Ha az Y $\mathcal{F}$-lokális martingál, akkor a $Z(t) \stackrel{\circ}{=} Y(\tau(t))$ $\mathcal{G}$-lokális martingál és $[Z](t) = [Y](\tau(t))$.

3.2.7. Mikor lesz egy sztochasztikus integrál valódi martingál

Ebben az alpontban a Burkholder–Davis–Gundy-egyenlőtlenségek speciális esetét igazoljuk. Csak a legegyszerűbb esetet tárgyaljuk, amikor $p = 2$ és egyedül avval az esettel foglalkozunk, amikor az egyenlőtlenségben szereplő lokális martingál sztochasztikus integrálként áll elő. Ez utóbbi feltétel a bizonyítások közvetlen módosításával azonnal elejthető.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.43. Állítás. *Ha X adaptált, balról reguláris folyamat, L folytonos lokális martingál, akkor*

$$\mathbf{E}\left((X \bullet L)^2(t)\right) \leq \mathbf{E}\left(\int_0^t X^2 d[L]\right). \tag{3.14}$$

Bizonyítás. A polaritási formula miatt az

$$(X \bullet L)^2 - [X \bullet L] = (X \bullet L)^2 - X^2 \bullet [L]$$

lokális martingál. Legyen (τ_n) egy lokalizációs sorozat. Feltehető, hogy a lokalizált $X^2 \bullet [L]$ folyamatok korlátosak. Ekkor a martingál tulajdonság miatt

$$\mathbf{E}\left(\left((X \bullet L)^2 - X^2 \bullet [L]\right)(\tau_n \wedge t)\right) = 0.$$

A korlátosság miatt a várható érték szétszedhető.

$$\mathbf{E}\left((X \bullet L)^2(\tau_n \wedge t)\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} X^2 d[L]\right).$$

Ha $n \nearrow \infty$, akkor az egyik oldalon a monoton konvergencia tételt a másikon a Fatou-lemmát használva éppen a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk. □

A Doob-féle maximál egyenlőtlenséggel az állítás élesíthető:

3.44. Állítás. *Ha X adaptált, balról reguláris folyamat, L folytonos lokális martingál, akkor*

$$\mathbf{E}\left(\max_{0\leq s\leq t}(X \bullet L)^2(s)\right) \leq 4 \cdot \mathbf{E}\left(\int_0^t X^2 d[L]\right).$$

Bizonyítás. Az előző gondolatmenetet szó szerint megismételve

$$\mathbf{E}\left((X \bullet L)^2(\tau_n \wedge t)\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} X^2 d[L]\right).$$

Az $X^2 \bullet [L]$ feltételezett korlátossága miatt az

$$(X \bullet L)(\tau_n \wedge t) = (X \bullet L^{\tau_n})(t)$$

egy $\mathcal{H}^2$ martingál, ezért a Doob-egyenlőtlenség miatt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\max_{0\leq s\leq t}(X \bullet L)^2(\tau_n \wedge s)\right) &= \mathbf{E}\left(\max_{0\leq s\leq t}(X \bullet L^{\tau_n})^2(s)\right) \leq \\ &\leq 4 \cdot \mathbf{E}\left((X \bullet L^{\tau_n})^2(t)\right) = \\ &= 4 \cdot \mathbf{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} X^2 d[L]\right).\end{aligned}$$

Ha $n \nearrow \infty$, akkor az egyik oldalon a monoton konvergencia tételt a másikon a Fatou-lemmát használva éppen a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.45. Állítás. *Ha X adaptált, balról reguláris folyamat, L folytonos lokális martingál, akkor*

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t X^2 d\,[L]\right) \le \mathbf{E}\left(\max_{0\le s\le t}(X\bullet L)^2(s)\right).$$

Bizonyítás. Miként az előző állítás igazolásakor most is feltehetjük, hogy alkalmas lokalizációs sorozatra

$$\mathbf{E}\left((X\bullet L)^2(\tau_n\wedge t)\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} X^2 d\,[L]\right),$$

amiből

$$\mathbf{E}\left(\max_{0\le s\le t}(X\bullet L)^2(s)\right) \ge \mathbf{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} X^2 d\,[L]\right).$$

Mivel a jobb oldalon alkalmazhatjuk a monoton konvergencia tételt ezért, ha $n\nearrow\infty$, akkor éppen az egyenlőtlenséget kapjuk. □

3.46. Tétel (Burkholder–Davis–Gundy)**.** *Ha X adaptált, balról reguláris L folytonos lokális martingál, akkor*

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t X^2 d\,[L]\right) \le \mathbf{E}\left(\max_{0\le s\le t}(X\bullet L)^2(s)\right) \le 4\cdot\mathbf{E}\left(\int_0^t X^2 d\,[L]\right). \quad (3.15)$$

A sztochasztikus integrál általában csak lokális martingál. Éppen ezért a következő kritérium jelentőségét nem lehet túlértékelni.

3.47. Következmény (Martingálkritérium)**.** *Ha L folytonos lokális martingál és az X adaptált, balról reguláris folyamatra*

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t X^2 d\,[L]\right) < \infty,$$

akkor a $[0,t]$ szakaszon az $X\bullet L$ négyzetesen integrálható martingál. A kritérium érvényben marad akkor is ha $t=\infty$.

Bizonyítás. A feltétel teljesülésekor a

$$\max_{0\le s\le t}(X\bullet L)^2(s) = \left(\max_{0\le s\le t}|(X\bullet L)(s)|\right)^2$$

integrálható. A Cauchy-egyenlőtlenség miatt ilyenkor a $\max_{0\le s\le t}|(X\bullet L)(s)|$ is integrálható, így az $Y\stackrel{\circ}{=}X\bullet L$ egy olyan lokális martingál, amelynek van időtől független integrálható majoránsa. Ha (τ_n) egy lokalizáló sorozat, akkor minden $t<s$ esetén $\mathbf{E}(Y(s\wedge\tau_n)\mid\mathcal{F}_t) = Y(t\wedge\tau_n)$. De az integrálható

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

majoráns létezése miatt a határátmenet a feltételes várható érték alatt is végrehajtható, vagyis ha $n \nearrow \infty$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(Y\left(s\right) \mid \mathcal{F}_t\right) &= \mathbf{E}\left(Y\left(\lim_{n\to\infty} s \wedge \tau_n\right) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(Y\left(s \wedge \tau_n\right) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} Y\left(t \wedge \tau_n\right) = Y\left(t\right),\end{aligned}$$

vagyis az Y martingál. Az Y triviálisan korlátos az $L^2\left(\Omega\right)$ térben, így $Y \stackrel{\circ}{=} X \bullet$ $\bullet\, L \in \mathcal{H}^2$. □

3.48. Példa. Tetszőleges n-re az $\int_0^t w^n dw$ integrál martingál.

Mivel $[w]$ determinisztikus használható a Fubini-tétel, így az integrálás sorrendje felcserélhető. Kihasználva, hogy a $w^{2n}\left(s\right)$ eloszlása $N\left(0,\sqrt{s}\right)^{2n} =$ $= s^n N\left(0{,}1\right)^{2n}$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\int_0^t w^{2n} d\left[w\right]\right) &= \int_0^t \mathbf{E}\left(w^{2n}\left(s\right) ds\right) = \int_0^t \mathbf{E}\left(s^n N\left(0{,}1\right)^{2n}\right) ds = \\ &= \mathbf{E}\left(N\left(0{,}1\right)^{2n}\right) \int_0^t s^n ds = \mathbf{E}\left(N\left(0{,}1\right)^{2n}\right) \frac{t^{n+1}}{n+1} < \infty,\end{aligned}$$

ezért a martingálkritérium szerint a $w^n \bullet w$ folyamat martingál. □

A Burkholder–Davis–Gundy-egyenlőtlenség általánosítható. Az általánosítás szerint tetszőleges $p > 0$ esetén vannak olyan c_p és C_p pozitív konstansok, amelyekre tetszőleges M, nullából induló lokális martingál esetén

$$c_p \mathbf{E}\left(\left(\left[M\right]\left(t\right)\right)^{p/2}\right) \leq \mathbf{E}\left(\left(\sup_{0\leq s\leq t} \left|M\left(s\right)\right|\right)^p\right) \leq C_p \mathbf{E}\left(\left(\left[M\right]\left(t\right)\right)^{p/2}\right). \quad (3.16)$$

Ha $p = 1$, és az M egy L folytonos lokális martingál szerint vett $X \bullet L$ sztochasztikus integrál, akkor az

$$\mathbf{E}\left(\left[M\right]^{1/2}\right) = \mathbf{E}\left(\sqrt{X^2 \bullet \left[L\right]}\right) < \infty$$

szükséges és elegendő feltétele annak, hogy a $\sup_{0\leq s\leq t} \left|M\left(s\right)\right|$integrálható legyen, vagyis hogy az $X \bullet L$ rendelkezzen integrálható majoránssal. Miként láttuk, ha egy lokális martingálnak van időtől független integrálható majoránsa, akkor a folyamat valódi martingál. A $\sqrt{x}$ függvény konkáv, így $\mathbf{E}\left(\sqrt{X^2 \bullet \left[L\right]}\right) \leq \sqrt{\mathbf{E}\left(X^2 \bullet \left[L\right]\right)}$, vagyis nem túl meglepő módon a fenti martingálkritérium gyengébb feltétel mint az integrálható majoráns létezésének feltétele. Ha azonban a négyzetgyök a várható értéken belül van, akkor az integrál és a várható érték felcserélése nehezen oldható meg, így az integrálható majoráns létezésének kritériuma konkrét számításokban ritkán használható. Ennek ellenére érvényes a következő:

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.49. Következmény. *Ha L folytonos lokális martingál és az X adaptált, balról reguláris folyamatra*

$$\mathbf{E}\left(\sqrt{\int_0^t X^2 d\,[L]}\right) < \infty,$$

akkor a $[0,t]$ szakaszon az $X \bullet L$ egyenletesen integrálható martingál.

3.2.8. Sztochasztikus integrálás és arbitrázs

A sztochasztikus integrálás és a matematikai pénzügyek kapcsolatának megértése céljából érdemes néhány, bizonyos szempontból korai példát tárgyalni.

3.50. Példa. Az $I(t) \triangleq \int_0^t \frac{1}{T-s} dw(s)$ „összenyomott" Wiener-folyamat martingál a $[0,T)$ időtartományon.

Legyen w egy Wiener-folyamat és legyen

$$I(t) \triangleq \int_0^t \frac{1}{T-s} dw(s).$$

A $[0,T)$ szakaszon az integrandus folytonos és az I sztochasztikus integrál értelmes és egy lokális martingált definiál. A $[0,T)$ tartományon

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t \left(\frac{1}{T-s}\right)^2 ds\right) = \int_0^t \left(\frac{1}{T-s}\right)^2 ds = \frac{1}{T-t} - \frac{1}{T} < \infty,$$

vagyis az I valódi martingál. □

3.51. Példa. Folytonos időhorizonton a sztochasztikus integrál, amely alulról nem korlátos nem használható az árazási elméletben ugyanis „arbitrázst" tartalmaz.

Természetesen a $[0,T]$ szakaszon az

$$I(t) \triangleq \int_0^t \frac{1}{T-s} dw(s)$$

integrál nem létezik. Az

$$[I](t) = \int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} ds = \frac{1}{T-t} - \frac{1}{T}$$

triviálisan egy szigorúan monoton növő, folytonos és determinisztikus függvény. Az inverzét jelölje

$$f(x) \triangleq \frac{xT^2}{1+Tx}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az f szintén egy szigorúan monoton növő folytonos függvény és az f a $[0,\infty)$ félegyenest képezi a $[0,T)$ szakaszra. Az $I(f(s))$ kifejezés folytonos martingál a $[0,\infty)$ félegyenesen, amely kvadratikus variációja $[I(f(s))] = [I](f(s)) = s$. Az alább tárgyalt Lévy-féle karakterizációs tétel miatt az $s \mapsto I((f(s)))$ egy Wiener-folyamat. Érdemes megjegyezni, hogy ebben az egyszerű esetben a karakterizációs tételre nincsen igazán szükség, ugyanis az integrandus determinisztikus, így közvetlen számolással könnyen látható, hogy az integrál eloszlása normális és az integrálfolyamat független növekményű. Tetszőleges t-re az $I(t)$ eloszlása $N\left(0, \sqrt{[I](t)}\right)$. Ebből már az állítás egyszerűen igazolható. Mivel a $\widehat{w}(s) \stackrel{\circ}{=} I(f(s))$ egy Wiener-folyamat, ezért

$$I(t) = \widehat{w}\left(f^{-1}(t)\right) = \widehat{w}\left(\frac{1}{T-t} - \frac{1}{T}\right).$$

A Wiener-folyamatokra a limesz szuperior és a limesz inferior végtelenbe tart, így

$$\begin{aligned}\limsup_{s\to\infty} \widehat{w}(s) &= \limsup_{s\to\infty} I((f(s))) = \limsup_{t\to T} I(t) = \infty,\\ \liminf_{s\to\infty} \widehat{w}(s) &= \liminf_{s\to\infty} I((f(s))) = \liminf_{t\to T} I(t) = -\infty.\end{aligned}$$

Ebből következően a

$$\tau_a \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \le T \mid I(t) = a\}$$

kifejezés majdnem minden kimenetelre véges és majdnem mindenhol $\tau_a < T$.

Tekintsük az

$$X(t) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{T-t}\chi(t \le \tau_a)$$

balról reguláris stratégiát. Tegyük fel, hogy az árak alakulását a $[0,T]$ szakaszon egy w Wiener-folyamat írja le. Az X stratégiából származó nyereség a sztochasztikus integrálokra vonatkozó asszociativitási, illetve megállási szabály miatt

$$\begin{aligned}(X \bullet w)(s) \stackrel{\circ}{=} \int_0^s \frac{1}{T-t}\chi(t \le \tau_a)\, dw(t) &= \left(\frac{1}{T-t}\chi(t \le \tau_a) \bullet w\right)(s) =\\ &= \left(\chi(t \le \tau_a) \bullet \left(\frac{1}{T-t} \bullet w\right)\right)(s) =\\ &= (\chi(t \le \tau_a) \bullet I)(s) = I^{\tau_a}(s) = I(\tau_a \wedge s).\end{aligned}$$

Ebből következően

$$\lim_{s\to T} (X \bullet w)(s) = (X \bullet w)(T) = a,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

vagyis ha az árakat egy w Wiener-folyamat írja le, akkor egy tetszőleges $[0,T]$ szakaszon tetszőleges nyereség realizálható. Vagyis folytonos időhorizonton, még a lehető legegyszerűbb esetben is mindenképpen van „arbitrázs". Az idézőjelet az indokolja, hogy az arbitrázst csak megengedett stratégiák halmazának rögzítése esetén értelmezhetjük és a gondolatmenet lényege, hogy az X stratégia nem „megengedett". □

3.52. Definíció. Az előző példában a $\widehat{w}(t) \triangleq I((f(t)))$ egy Wiener-folyamat. Ez indokolja, hogy az

$$I(t) \triangleq \int_0^t \frac{1}{T-s} dw(s) = \widehat{w}\left(f^{-1}(t)\right) = \widehat{w}\left(\frac{1}{T-t} - \frac{1}{T}\right)$$

folyamatot a $[0,T)$ szakaszra „összenyomott" Wiener-folyamatnak hívjuk.

A folytonos időhorizont kézenfekvő módon végtelen számú időpontból áll, és ezért tetszőleges véges szakaszon lehet „duplázni". Az előző példa éppen azt mutatja be, hogy miként. Valójában tetszőleges a esetén, ha τ_a az első időpont, amikor egy w Wiener-folyamat eléri az a időpontot, akkor $\tau_a < \infty$ és $w(\tau_a) = a$, vagyis végtelen időhorizonton egy egyszerű megállítási stratégiával triviálisan lehet „arbitrálni". A példa csak azt mutatja meg, hogy ha megengedjük a sztochasztikus integrált mint „kereskedési stratégiát", akkor már korlátos időhorizonton is el lehet érni az a értéket. Valójában a megállási opciókról szóló tételben a megállási idők korlátossága azt biztosítja, hogy ne lehessen a végtelen számosságú időhorizontot kihasználva „duplázni". A megengedett stratégiák alulról való korlátosságának megkövetelése hasonló célt szolgál: Korlátot kívánunk szabni a „kockázat" növekedésének.

3.53. Definíció. Megengedett stratégián olyan θ stratégiákat értünk, amelyekre egy alkalmas a konstanssal a $\theta \bullet S$ alulról egyenletesen korlátos.

3.54. Lemma. *Egy alulról*[15] *korlátos lokális martingál mindig szupermartingál, így nem tartalmazhat „arbitrázst".*

Bizonyítás. Az állítás minden trivialitása ellenére igen fontos, így szerepét nem lehet eléggé kiemelni. Legyen L egy lokális martingál és legyen (τ_n) a lokalizációs sorozata. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $L \geq 0$. A Fatou-lemma miatt ha $t > s$,

$$\mathbf{E}(L(t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} L(t \wedge \tau_n) \mid \mathcal{F}_s\right) \leq$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}(L(t \wedge \tau_n) \mid \mathcal{F}_s) = \liminf_{n\to\infty} L(s \wedge \tau_n) = L(s),$$

[15] Emlékeztetünk, hogy a korlátos lokális martingálok valódi martingálok, ugyanis ilyenkor a Fatou-lemma helyett a majorált konvergencia tétele használható.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

vagyis az L valóban szupermartingál. Ha egy rögzített számmal alulról korlátos nyereségfolyamatokra szorítkozunk, akkor nem lehetséges az arbitrázs, ugyanis az alulról való korlátosság miatt valamely lokális martingál szerinti sztochasztikus integrál szupermartingál, vagyis veszíti a várható értékét. Ha tehát $(X \bullet w)(T) = H_T \geq 0$, akkor

$$0 = \mathbf{E}((X \bullet w)(0)) \geq \mathbf{E}((X \bullet w)(T)) = \mathbf{E}(H_T) \geq 0.$$

következésképpen $\mathbf{E}(H_T) = 0$, vagyis $H_T \overset{m.m.}{=} 0$. □

3.55. Példa. Követelések replikálásában a konstans még véges időhorizonton sem egyértelmű.

Tekintsük az előző példában szereplő I „összenyomott" Wiener-folyamatot és τ_{-a} jelölje az I folyamat $-a$ értékhez tartozó találati idejét. Ha

$$X_a(t) \triangleq \frac{1}{T-t}\chi(t \leq \tau_{-a}),$$

és $a \geq 0$, akkor $V_a \triangleq a + X_a \bullet w = a + I^{\tau_{-a}} \geq 0$, így az X_a megengedett, hiszen alulról korlátos, ugyanakkor minden a-ra $V_a(T) = a + I(\tau_{-a}) = 0$. Ennek megfelelően a $H_T \triangleq 0$ értéket replikáló a konstans nem egyértelmű, ugyanis az értéke tetszőleges $a \geq 0$ szám lehet. Vegyük észre, hogy szemben a véges időhorizont esetével ez nem mond ellent a nincsen arbitrázs feltételnek, ugyanis az $X \triangleq X_{a_1} - X_{a_2}$ portfólió nem lesz feltétlenül megengedett, ugyanis a hozzá tartozó értékfolyamat nem lesz alulról korlátos, hiszen a $-X_{a_2} \bullet w$ alulról nem korlátos, ugyanis az $X_{a_2} \bullet w$ csak alulról, de nem felülről korlátos. A probléma a megengedett portfólió fogalmának bevezetésében gyökerezik. A lényeges gondolat az, hogy mivel a végtelen számosságú időhorizont miatt az arbitrázs lehetőségét kizárandó a lehetséges stratégiák nem egy lineáris alteret, hanem egy kúpot alkotnak, ezért a replikáló konstans egyértelműsége, szemben a diszkrét és véges időhorizonttal, már nem következik a modell közgazdasági feltételeiből. Mivel a sztochasztikus integrál nem feltétlenül valódi martingál, ezért a matematikai modell nem garantálja a replikáló portfólióban az induló konstans egyértelműségét.

Ha valamely H_T integrálható változóra

$$H_T = a + (X \bullet L)(T),$$

ahol az L egy folytonos lokális martingál és az X megengedett, akkor

$$\mathbf{E}(H_T) = a + \mathbf{E}((X \bullet L)(T)) \leq a + \mathbf{E}((X \bullet L)(0)) = a$$

ugyanis az $X \bullet L$ alulról korlátos lokális martingál, így szupermartingál, tehát veszíti a várható értéket. Vagyis a reprezentáló konstans nem lehet kisebb, mint a várható érték, de semmi sem garantálja, hogy a reprezentáló konstans éppen a várható érték. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.3. Itô-formula

A sztochasztikus analízis legfontosabb állítása a következő:

3.56. Tétel. *Ha az $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ vektor elemei folytonos szemimartingálok, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ egy olyan nyílt halmaz, amely tartalmazza az X értékkészletét és $F \in C^2(U)$, vagyis az F az U halmazon kétszer folytonosan deriválható függvény, akkor*

$$F(X(t)) - F(X(0)) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_k}(X)\, dX_k + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X)\, d[X_i, X_j]. \tag{3.17}$$

Bizonyítás. A bizonyítást több lépésre bontjuk.

1. A bizonyítás első lépéseként az állítást polinomokra igazoljuk. A formula az $F \equiv c$ konstansra triviálisan teljesül, tehát ahhoz, hogy minden polinomra teljesüljön elegendő megmutatni, hogy ha az F polinomra teljesül, akkor a $G \stackrel{\circ}{=} x_l F$-re is teljesül. Tegyük fel, hogy

$$F(X) = F(X(0)) + \sum_k \frac{\partial F}{\partial x_k}(X) \bullet X_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X) \bullet [X_i, X_j].$$

A parciális integrálási formula alapján

$$\begin{aligned} G(X) &\stackrel{\circ}{=} X_l F(X) = \\ &= G(X(0)) + X_l \bullet F(X) + F(X) \bullet X_l + [X_l, F(X)] = \\ &= G(X(0)) + X_l \bullet F(X(0)) + X_l \bullet \left(\sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(X) \bullet X_k \right) \right) + \\ &\quad + X_l \bullet \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X) \bullet [X_i, X_j] \right) + F(X) \bullet X_l + [X_l, F(X)]. \end{aligned}$$

Az asszociativitási szabály felhasználásával, illetve a $X_l \bullet F(X(0)) = 0$ tagot elhagyva

$$G(X) = G(X(0)) + \sum_k X_l \frac{\partial F}{\partial x_k}(X) \bullet X_k + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} X_l \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X) \bullet [X_i, X_j] + F(X) \bullet X_l + [X_l, F(X)].$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A szorzat deriválási szabálya szerint

$$\frac{\partial G}{\partial x_k} = \begin{cases} x_l \partial F/\partial x_k, & \text{ha } k \neq l \\ x_l \partial F/\partial x_l + F, & \text{ha } k = l \end{cases},$$

amit behelyettesítve

$$G(X) = G(X(0)) + \sum_k \frac{\partial G}{\partial x_k}(X) \bullet X_k + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j} X_l \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X) \bullet [X_i, X_j] + [X_l, F(X)].$$

A G függvényhez tartozó másodrendű parciális deriváltak

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} x_l \partial^2 F/\partial x_i \partial x_j, & \text{ha } i,j \neq l \\ x_l \partial^2 F/\partial x_i \partial x_j + \partial F/\partial x_j, & \text{ha } i = l, j \neq l \\ x_l \partial^2 F/\partial x_i \partial x_j + \partial F/\partial x_i, & \text{ha } i \neq l, j = l \\ x_l \partial^2 F/\partial^2 x_l + 2\partial F/\partial x_l, & \text{ha } i = j = l \end{cases},$$

vagyis az F'' és a G'' csak az l-dik sorban és az l-dik oszlopban különbözik, tehát elegendő belátni, hogy

$$[X_l, F(X)] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(X) \bullet [X_l, X_j].$$

Az $F(X)$ az indukciós feltétel szerint szemimartingál. A sztochasztikus integrál rész kvadratikus keresztvariációja

$$\left[X_l, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k}(X) \bullet X_k \right] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(X) \bullet [X_l, X_j],$$

a korlátos változású rész kvadratikus keresztvariációja a X_l folytonossága miatt viszont nulla[16]. Ezzel az állítást polinomokra igazoltuk.

2. Legyen (B_k) az U-ban levő racionális középpontú, racionális sugarú zárt gömbök egy felsorolása. Ha $K_n \stackrel{\circ}{=} \cup_{k \leq n} B_k$, akkor a K_n kompakt halmazok egy olyan növekvő sorozata, amelyre $\cup_n K_n = U$. Ha $K \subseteq U$ tetszőleges kompakt halmaz, akkor a K lefedhető véges sok racionális sugarú, racionális középpontú gömbbel, így elég nagy n-re $K \subseteq K_n$. Megmutatható, hogy tetszőleges K kompakt halmaz esetén létezik polinomok olyan (Q_n) sorozata, amelyre a $C^2(K)$ topológiájában $Q_n|_K \to F|_K$. A C^2 topológia definíciója szerint, az összes derivált is egyenletesen konvergens. Legyen P_n olyan

[16] V.ö.: 3.33. Példa, 92. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

polinom, hogy a K_n halmazon az F és a P_n távolsága a $C^2(K_n)$ topológiában nem nagyobb, mint $1/n$. Világos, hogy $P_n \to F$, ahol a konvergencia az összes kompakt halmazon egyenletes. Tekintsük az időtengely tetszőleges T kompakt részhalmazát. Az X trajektóriái folytonosak, így a $K(\omega) \stackrel{\circ}{=} X(\omega, T)$ képhalmaz minden ω esetén kompakt. A K_n konstrukciója szerint elég nagy n-re $K(\omega) \subseteq K_n$. Mivel $K_n \nearrow U$, és minden ω esetén $K(\omega) \subseteq U$, ezért ha $A_n \stackrel{\circ}{=} \{K \subseteq K_n\}$, akkor $A_n \nearrow \Omega$. A folytonosság miatt elég ellenőrizni, hogy a T egy sűrű, megszámlálható részhalmazán az $X(\omega)$ trajektória a K_n-be képezzen. Ebből következően az A_n mérhető, így $\mathbf{P}(A_n) \nearrow 1$. Következésképpen tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén ha n elég nagy, akkor egy ε valószínűségű halmaztól eltekintve $K(\omega) \stackrel{\circ}{=} X(\omega, T) \subseteq K_n$, így a $(P_n(X))$ sorozat az időtengely kompakt részhalmazain egyenletesen tart az $F(X)$ folyamathoz, és ugyanez igaz az első és a második deriváltakra is. Az előző pont szerint a formula teljesül polinomokra, így a sztochasztikus és a közönséges integrálokra vonatkozó konvergencia tételek szerint a tétel teljesül az $F \in C^2(U)$ függvényre is. □

Bizonyítás. Mivel egy igen fontos tételről van szó, ezért az $n = 1$ esetre egy másik bizonyítást is bemutatunk. A bizonyítás fő előnye, hogy rávilágít az Itô-formula és a Newton–Leibniz-szabály rokonságára. Legyen F kétszer folytonosan deriválható, és a Newton–Leibniz-szabály bizonyításához hasonlóan tekintsük az

$$F(X(b)) - F(X(a)) = \sum_k \left(F(X(t_k)) - F(X(t_{k-1}))\right)$$

teleszkopikus felbontást. A Newton–Leibniz-szabály bizonyításakor használt középérték tétel helyett a Taylor-formula minden ω-ra való alkalmazásával vegyük az

$$F(X(t_k)) - F(X(t_{k-1})) = F'(X(t_{k-1}))(X(t_k) - X(t_{k-1})) + \\ + \frac{1}{2}F''(\xi_k)(X(t_k) - X(t_{k-1}))^2$$

azonosságot, ahol a ξ_k a kimenettől függő alkalmas eleme az $X(t_{k-1})$ és az $X(t_k)$ által meghatározott véletlen intervallumnak. A Bolzano-tétel miatt $\xi_k = X(\eta_k)$, ahol az η_k a $[t_{k-1}, t_k]$ szakasz trajektóriától függő pontja. A jelölések ellenére sem a ξ_k sem az η_k nem feltétlenül valószínűségi változók, ugyanis a mérhetőségükről nem tudunk semmit. Ha a felosztást minden határon túl finomítjuk, akkor az F' folytonossága és az Itô–Stieltjes-integrál létezése miatt

$$\sum_k F'(X(t_{k-1}))(X(t_k) - X(t_{k-1})) \to \int_a^b F'(X(s))\,dX(s).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Így a

$$\sum_k F''\left(X\left(\eta_k\right)\right)\left(X\left(t_k\right)-X\left(t_{k-1}\right)\right)^2$$

összegnek is van határértéke, az egyedüli kérdés csak az, hogy ennek a határértéknek van-e valamilyen értelmes és használható reprezentálása. Mivel a konvergencia sztochasztikus értelemben értendő, ezért a határérték kiszámolása szempontjából tetszőleges részsorozatot is vehetünk. Vegyük azt a részsorozatot, amelyre majdnem minden kimenetelre

$$U_m\left(t\right) \triangleq \sum_k \left(\Delta X\left(t_k^{(m)} \wedge t\right)\right)^2 \to [X]\left(t\right)$$

konvergencia az $[a,b]$ szakasz minden t pontjában majdnem minden trajektóriára teljesül. Az $F''\left(X\right)$ folytonossága miatt a mértékek gyenge konvergenciájára vonatkozó lemma alapján[17]

$$\int_a^b F''\left(X\left(s\right)\right) dU_m \to \int_a^b F''\left(X\left(s\right)\right) d\left[X\right]\left(s\right),$$

amiből a formula már nyilvánvalóan teljesül. □

3.57. Példa. A Wiener-folyamat harmadik hatványa.

Ha w egy Wiener-folyamat, akkor az $X\left(t\right) \triangleq w^3\left(t\right)$ folyamat várható értéke konstans módon nulla. Ennek ellenére az X nem lehet martingál, sőt nem is lehet lokális martingál, ugyanis az Itô-formula miatt

$$X\left(t\right) = X\left(t\right) - X\left(0\right) = 3\int_0^t w^2\left(s\right) dw\left(s\right) + 3\int_0^t w\left(s\right) ds,$$

a sztochasztikus integrál rész lokális martingál, a korlátos változású második tag azonban nem nulla, és a Fisk-féle egyértelműségi tétel miatt csak akkor lehetne az X is lokális martingál, ha ez a tag nulla lenne. □

3.58. Példa. Számoljuk ki az $f\left(t\right) \triangleq \mathbf{E}\left(\sin^2 w\left(t\right)\right)$ függvényt.

Az Itô-formula alapján

$$\sin^2 w\left(t\right) = \sin^2 w\left(t\right) - \sin^2 w\left(0\right) = \int_0^t \sin 2w\left(s\right) dw\left(s\right) + \int_0^t \cos 2w\left(s\right) ds =$$
$$= \int_0^t \sin 2w\left(s\right) dw\left(s\right) + \int_0^t 1 - 2\sin^2\left(w\right) ds.$$

[17] V.ö.: 3.39. Lemma, 3.39. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Várható értéket véve, kihasználva, hogy a sztochasztikus integrál rész az integrandus korlátossága miatt valódi martingál, így a várható értéke nulla

$$f(t) = t - 2\int_0^t f(s)\,ds, \quad f'(t) + 2f(t) = 1.$$

A lineáris differenciálegyenletet megoldva, felhasználva, hogy $f(0) = 0$, $f(t) = 1/2 - 1/2\exp(-2t)$. □

Felmerülhet a kérdés, hogy miért folytonos lokális martingál integrátorokra építettük fel az integrálelméletet. Miért nem csak az alkalmazásokban kiemelkedő szerepet játszó Wiener-folyamatokra. A választ a következő gyakran használt kritérium igazolása tartalmazza:

3.59. Tétel (Lévy-féle karakterizációs tétel)**.** *Egy L folytonos lokális martingál pontosan akkor Wiener-folyamat, ha $L(0) = 0$, és minden t időpontra $[L](t) = t$.*

Bizonyítás. Az egyik irány, nevezetesen, hogy ha a w Wiener-folyamat, akkor a kvadratikus variációja a t időpontban t egyszerűen igazolható[18]: Legyen w egy Wiener-folyamat és legyen $\left(t_k^{(n)}\right)$ a $[0,t]$ szakasz egy partíciója. Ha

$$\Delta w\left(t_k^{(n)}\right) \stackrel{\circ}{=} w\left(t_k^{(n)}\right) - w\left(t_{k-1}^{(n)}\right),$$

akkor a Wiener-folyamat definíciója alapján

$$\mathbf{E}\left(\sum_k \left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2\right) = \sum_k \mathbf{D}^2\left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right) = \sum_k (t_k - t_{k-1}) = t - 0.$$

A w független növekményű és a növekmények várható értéke nulla, ezért, ha a $\left(t_k^{(n)}\right)$ felosztás finomsága nullához tart, akkor

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_k \left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2 - t\right\|_2^2 = \mathbf{D}^2\left(\sum_k \left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2\right) = \\
&= \sum_k \mathbf{D}^2\left(\left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^2\right) \le \sum_k \mathbf{E}\left(\left(\Delta w\left(t_k^{(n)}\right)\right)^4\right) = \\
&= \mathbf{E}\left((N(0,1))^4\right)\sum_k \left(\sqrt{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}}\right)^4 = \sum_k 3\cdot\left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right)^2 \le \\
&\le 3\cdot(t-0)\cdot\max_k\left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right) \to 0.
\end{aligned}$$

[18] V.ö.: 3.34. példa, 93. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Mivel az $L^2(\Omega)$-ban való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia ezért a w kvadratikus variációja a $[0,t]$ szakaszon éppen t.

A fordított irány igazolása az Itô-formulára épül: Legyen L egy folytonos lokális martingál. Az Itô-formula szerint, felhasználva, hogy $L(0)=0$

$$\exp(iuL(t))-1=iu\int_0^t \exp(iuL(s))dL(s)-\frac{1}{2}u^2\int_0^t \exp(iuL(s))d[L](s).$$

Komplex függvényekre az Itô-formulát nem igazoltuk, de ha vesszük különkülön az $\exp(iux)$ valós és komplex részét, akkor a fenti formula teljesülése azonnal evidens. Az $\exp(iuL)$ korlátos, így felhasználva, hogy az L kvadratikus variációja t, a martingálkritérium miatt a sztochasztikus integrál valódi martingál. A két oldalon várható értéket véve és a Fubini-tétel alapján az integrálokat megcserélve

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\exp(iuL(t)))-1&=-\frac{1}{2}u^2\mathbf{E}\left(\int_0^t \exp(iuL(s))ds\right)=\\&=-\frac{1}{2}u^2\int_0^t \mathbf{E}(\exp(iuL(s)))\,ds.\end{aligned}$$

Ha bevezetjük a $\varphi(u,t)\stackrel{\circ}{=}\mathbf{E}(\exp(iuL(t)))$ jelölést, akkor ez

$$\varphi(u,t)-1=-\frac{1}{2}u^2\int_0^t \varphi(u,s)\,ds.$$

t szerint deriválva

$$\frac{d\varphi(u,t)}{dt}=-\frac{1}{2}u^2\varphi(u,t).$$

A differenciálegyenletet megoldva tetszőleges u-ra

$$\varphi(u,t)=\exp\left(-\frac{1}{2}u^2t\right).$$

A normális eloszlás Fourier-transzformáltjának képletét felhasználva az $L(t)$ eloszlása éppen $N\left(0,\sqrt{t}\right)$. A gondolatmenetet az újraindított folyamatra alkalmazva ebből könnyen belátható, hogy a növekmények eloszlása $N\left(0,\sqrt{t-s}\right)$, vagyis a folyamat stacionárius növekményű. Ebből azonban még nem következik, hogy a folyamat Wiener-folyamat, ugyanis nem tudjuk, hogy a növekmények függetlenek vagy sem. A szórásokra vonatkozó képletből belátható, hogy a növekmények korrelálatlanok, ugyanis teljesül a

$$\mathbf{D}^2(L(t+s))=t+s=\mathbf{D}^2(L(t))+\mathbf{D}^2(L(s)).$$

Sajnos azonban normális eloszlású változók korrelálatlansága csak akkor implikálja a függetlenséget, ha az együttes eloszlás is normális, ezért még nem

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

értünk célba. Írjuk fel az L exponenciális martingálját:

$$\frac{\exp\left(iuL\left(t\right)\right)}{\varphi\left(u,t\right)}=\frac{\exp\left(iuL\left(t\right)\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}u^2t\right)}=\exp\left(iuL\left(t\right)+\frac{1}{2}u^2t\right).$$

Mivel $\left[L\right]\left(t\right)=t$ az Itô-formulával azonnal látható, hogy a kifejezés lokális martingál. Általában tetszőleges L folytonos lokális martingál esetén az

$$Z\doteq\exp\left(L-\frac{1}{2}\left[L\right]\right)$$

kifejezés lokális martingál: Az exponenciális függvény deriválási szabályát kihasználva

$$\begin{aligned}Z\left(t\right)-Z\left(0\right)&=\int_0^t Zd\left(L-\frac{1}{2}\left[L\right]\right)+\frac{1}{2}\int_0^t Zd\left[L-\frac{1}{2}\left[L\right]\right]=\\&=\int_0^t Zd\left(L-\frac{1}{2}\left[L\right]\right)+\frac{1}{2}\int_0^t Zd\left[L\right]=\\&=\int_0^t ZdL,\end{aligned}$$

amely kifejezés egy lokális martingál szerint sztochasztikus integrál, vagyis lokális martingál. Vegyük észre, hogy felhasználtuk, hogy a véges változású folytonos folyamatokat tartalmazó kifejezések keresztvariációja nulla[19], ezért

$$\left[L-\frac{1}{2}\left[L\right]\right]=\left[L\right]-2\left[L,\frac{1}{2}\left[L\right]\right]+\left[\frac{1}{2}\left[L\right]\right]=\left[L\right].$$

Nyilván tetszőleges z-re az

$$\exp\left(zL-\frac{1}{2}\left[zL\right]\right)=\exp\left(zL-\frac{1}{2}z^2\left[L\right]\right)$$

is lokális martingál. A jelen példában a $z=iu$ helyettesítéssel kapjuk az

$$\exp\left(iuL\left(t\right)+\frac{1}{2}u^2t\right)$$

kifejezést. Mivel ez minden véges szakaszon korlátos, ezért nem csak lokális, hanem valódi martingál is, ezért ha $s<t$, akkor

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(iuL\left(t\right)+\frac{1}{2}u^2t\right)\mid\mathcal{F}_s\right)=\exp\left(iuL\left(s\right)+\frac{1}{2}u^2s\right).$$

[19] V.ö.: 3.33. Példa, 92. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ezt átrendezve

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(iu\left(L\left(t\right)-L\left(s\right)\right)\right)\mid\mathcal{F}_s\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\left(t-s\right)\right).$$

A feltételes várható érték definícióját felírva minden $F\in\mathcal{F}_s$ halmazra

$$\int_F\exp\left(iu\left(L\left(t\right)-L\left(s\right)\right)\right)d\mathbf{P}=\int_F\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\left(t-s\right)\right)d\mathbf{P}=$$
$$=\mathbf{P}\left(F\right)\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\left(t-s\right)\right).$$

Az egyenlőséget az $F=\Omega$ esetben alkalmazva

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(iu\left(L\left(t\right)-L\left(s\right)\right)\right)\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\left(t-s\right)\right),$$

így

$$\int_F\exp\left(iu\left(L\left(t\right)-L\left(s\right)\right)\right)d\mathbf{P}=\mathbf{P}\left(F\right)\cdot\mathbf{E}\left(\exp\left(iu\left(L\left(t\right)-L\left(s\right)\right)\right)\right).$$

A monoton osztály tétel segítségével az $\exp\left(iux\right)$ helyébe tetszőleges Borel-mérhető halmaz karakterisztikus függvénye írható, így

$$\mathbf{P}\left(\left\{L\left(t\right)-L\left(s\right)\in B\right\}\cap F\right)=\mathbf{P}\left(F\right)\cdot\mathbf{P}\left(\left\{L\left(t\right)-L\left(s\right)\in B\right\}\right)$$

vagyis az $\mathcal{F}_s$ σ-algebra és az $L\left(t\right)-L\left(s\right)$ növekmények függetlenek, vagyis az L független növekményű. □

A Lévy-féle karakterizációs tétel számtalan alkalmazása közül példaként tekintsük a következőt:

3.60. Tétel (Tükrözési elv)**.** *Ha w Wiener-folyamat, akkor tetszőleges τ megállási időre a*

$$\widehat{w}\left(t,\omega\right)\triangleq\begin{cases}w\left(t,\omega\right), & ha\ \ t\leq\tau\left(\omega\right)\\ 2w\left(\tau\left(\omega\right),\omega\right)-w\left(t,\omega\right), & ha\ \ t>\tau\left(\omega\right)\end{cases}$$

a τ megállási időpontban „tükrözött" folyamat szintén Wiener-folyamat.

Bizonyítás. Evidens módon $\widehat{w}\left(0\right)=0$ és a $\widehat{w}$ folytonos. Ugyancsak nyilvánvaló módon $\widehat{w}=2w^\tau-w$. Ebből következően a $\widehat{w}$ lokális martingál, ugyanis lokális martingálok összege.

$$\left[\widehat{w}\right]=\left[2w^\tau-w\right]=\left[2w^\tau\right]-2\cdot\left[2w^\tau,w\right]+\left[w\right]=$$
$$=4\left[w\right]^\tau-4\left[w,w\right]^\tau+\left[w\right]=\left[w\right].$$

Így a Lévy-féle karakterizációs tétel szerint a $\widehat{w}$ Wiener-folyamat. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.61. Példa. Az $X(t) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t \operatorname{sign}(w(s))\, dw(s)$ integrál Wiener-folyamat[20].

A sztochasztikus analízis irodalomban a $\operatorname{sign}(x)$ jelölésen a

$$\operatorname{sign}(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} -1, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

balról folytonos függvényt szokás érteni. A polaritási formula szerint

$$[X](t) = \int_0^t (\operatorname{sign}(w(s)))^2\, ds = t,$$

így a Lévy-féle karakterizációs tétel alapján az X Wiener-folyamat. □

Gyakran szokás hivatkozni a következőre:

3.62. Állítás. *Ha $n \geq 2$, akkor egy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pontból elindított n-dimenziós Wiener-folyamat majdnem minden kimenetelre nem veszi fel a nulla értéket.*

Bizonyítás. Nyilván elegendő az állítást $n = 2$ esetén igazolni.

1. Először egy általános észrevételt érdemes tenni. Tegyük fel, hogy az $U \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon értelmezett $f \in C^2(U)$ függvény kielégíti a

$$\Delta f \stackrel{\circ}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0 \tag{3.18}$$

Laplace-egyenletet. Legyen τ megállási idő. Ha az $\mathbf{x}$ pontból elindított $\mathbf{w}$ n-dimenziós Wiener-folyamatra $\mathbf{w}^\tau$ az U halmazon belül marad, akkor az Itô-formula alapján

$$f(\mathbf{w}^\tau) - f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{w}^\tau) \bullet w_k^\tau + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{w}^\tau) \bullet \left[w_i^\tau, w_j^\tau\right].$$

Mivel ha $i \neq j$, akkor a w_i és a w_j a többdimenziós Wiener-folyamat definíciója miatt független, ezért ilyenkor $[w_i, w_j] = 0$. Ezért a $\Delta f = 0$ feltételt felhasználva

$$f(\mathbf{w}^\tau) - f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{w}^\tau) \bullet w_k^\tau. \tag{3.19}$$

Tegyük fel, hogy $\tau < \infty$ és a $\mathbf{w}$ a $[0, \tau]$ véletlen szakaszon egyenletesen korlátos. Ilyenkor a fenti (3.19) sorban szereplő integrandusok korlátosak, tehát

[20] A példa némiképpen korai, ugyanis a $\operatorname{sign}(w)$ folyamat nem balról reguláris, így az integrál Itô–Stieltjes értelemben nem létezik.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

a sztochasztikus integrálok martingálok lesznek. A megállási opciókról szóló tétel alapján tetszőleges $T < \infty$ időpontra

$$\mathbf{E}\left(f\left(\mathbf{w}\left(T \wedge \tau\right)\right)\right) = \mathbf{E}\left(f\left(\mathbf{x}\right)\right) = f\left(\mathbf{x}\right).$$

A korlátosság miatt ha $T \to \infty$, akkor

$$\mathbf{E}\left(f\left(\mathbf{w}\left(\tau\right)\right)\right) = f\left(\mathbf{x}\right). \tag{3.20}$$

2. Az állítás a fenti (3.20) sorban szereplő Dinkin-formulának nevezett összefüggésből elemi számolással már könnyen igazolható: Egyszerű deriválással azonnal belátható, hogy ha $n = 2$, akkor az

$$f\left(x_1, x_2\right) \stackrel{\circ}{=} \log\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = \log\|\mathbf{x}\|$$

függvény az $U \stackrel{\circ}{=} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nyílt halmazon kielégíti a Laplace-egyenletet.

3. Tegyük fel, hogy az $\|\mathbf{x}\|$ a $0 < r < R < \infty$ sugarak közé esik. Wiener–folyamatok trajektóriái a $t \geq 0$ félegyenesen majdnem minden kimenetelre nem korlátosak és minden kimenetelre folytonosak, ezért a külső körből a $\mathbf{w}$ egy valószínűséggel kilép. A kérdés csak az, hogy a belső vagy a külső határon fogja-e a folyamat a

$$B\left(r, R\right) \stackrel{\circ}{=} \{\mathbf{u} \mid r \leq \|\mathbf{u}\| \leq R\}$$

gyűrűt előbb elhagyni. Jelölje $A\left(r, R\right)$ azokat a kimeneteleket, amikor belül lép ki a folyamat. A Dinkin-formula szerint, felhasználva, hogy a kilépés pillanatában a folyamat vagy a belső vagy a külső körön van

$$\log\|\mathbf{x}\| = \mathbf{P}\left(A\left(r, R\right)\right)\log r + \left(1 - \mathbf{P}\left(A\left(r, R\right)\right)\right)\log R,$$

amiből

$$\mathbf{P}\left(A\left(r, R\right)\right) = \frac{\log\|\mathbf{x}\| - \log R}{\log r - \log R}.$$

Ha adott R mellett $r \searrow 0$, akkor

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\log\|\mathbf{x}\| - \log R}{\log r - \log R} = 0.$$

Tegyük fel, hogy a $\mathbf{w}$ pozitív valószínűséggel lesz nulla. Jelöljük ezt a halmaz A-val. A $\mathbf{0}$ pontot elérő trajektóriák mindegyike az $\mathbf{x}$ és a $\mathbf{0}$ pontok között eltelt időben külön-külön korlátos. Jelölje A_n az A azon részhalmazát, ahol ez a korlát n. Nyilván $A_n \nearrow A$. Ebből következően létezik olyan R szám, hogy az A pozitív valószínűségű A_R részhalmazán a trajektóriák az $\mathbf{x}$ és a nulla között határozottan kisebbek mint R. Így ezen elegendő nagy R esetén pozitív valószínűséggel a nullába érkező trajektóriák belül lépnek ki az összes $B\left(r, R\right)$ gyűrűből, ami lehetetlen ugyanis ha $r_1 < r_2$, akkor $A\left(r_1, R\right) \subseteq A\left(r_2, R\right)$, ezért $\mathbf{P}\left(\cap_n A\left(1/n, R\right)\right) = 0$. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az Itô-formula számtalan alkalmazása közül további példaként tekintsünk egyet, a Tyihonov-féle egyértelműségi tétel igazolását:

3.63. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $u(t,x)$ függvény valamely $[0,T)$ szakaszon, a $T=\infty$ megengedett, folytonos megoldása a*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

egyenletnek. Ha $u(0,x)\equiv 0$ és az u eleget tesz az

$$|u(t,x)|\le K\exp\left(c\cdot x^2\right)$$

növekedési feltételnek, ahol $c>0$ és $K>0$ előre adott konstansok, akkor $u\equiv 0$.

Bizonyítás. Értelemszerűen az u folytonossága azt jelenti, hogy az u folytonos a $[0,T)\times\mathbb{R}$ halmazon. A deriváltak létezését és az egyenlet teljesülését természetesen csak a $(0,T)\times\mathbb{R}$ halmazon követeljük meg. Az Itô-formula bizonyítása során könnyen ellenőrizhető, hogy ha a formulában szereplő valamelyik folyamat trajektóriái korlátos változásúak akkor ezen folyamattal való keresztvariációkat tartalmazó tagok nullák, és ilyenkor nem szükséges az adott változó szerinti második deriváltak létezése. Mivel az u megoldása az egyenletnek ezért a megoldás definíciója szerint az első változó szerint egyszer a második változó szerint kétszer folytonosan deriválható, így az Itô-formula alább következő alkalmazása megengedett. Rögzítsük a $t>0$ és az x értékét. Vezessük be a $v(s,y)\stackrel{\circ}{=}u(t-s,y)$ függvényt. Legyen w egy az x pontból elindított Wiener-folyamat. Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned}
-u(t,x)=-v(0,w(0))=0-v(0,w(0))=v(t,w(t))-v(0,w(0))=\\
=\int_0^t\frac{\partial v}{\partial s}(s,w(s))ds+\int_0^t\frac{\partial v}{\partial x}(s,w(s))dw(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}(s,w(s))\,d[w](s)=\\
=\int_0^t\frac{\partial v}{\partial s}(s,w(s))\,ds+\int_0^t\frac{\partial v}{\partial x}(s,w(s))\,dw(s)+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}(s,w(s))\,ds=\\
=\int_0^t\frac{\partial v}{\partial x}(s,w(s))\,dw(s),
\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy $[w](s)=s$, valamint az u kielégíti a parciális differenciálegyenletet, illetve hogy az u folytonos, ugyanis az Itô-formula a v függvényre csak a $0<s<t$ tartományon használható, de a feltételezett folytonosság és a sztochasztikus integrálok folytonossága miatt az utolsó egyenlőség a t és a nulla időpontokban is érvényben marad. A bizonyításban az egyetlen gondot az jelenti, hogy nem tudjuk, hogy a sztochasztikus integrál martingál lesz vagy sem. Amennyiben tudnánk, hogy martingál, akkor a két

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

oldalon várható értéket véve és kihasználva, hogy a martingálok tartják a várható értéket $u(t,x)=0$, amit éppen igazolni szeretnénk.

Ezt azonban nem tudjuk[21], ezért némiképpen ügyeskedni kell. Válasszunk egy $n>|x|$ értéket és legyen σ_n az első olyan időpont, ahol a $|w|$ átlépi az n szintet. A σ_n időpontban a

$$v(t,w(t))-v(0,w(0))=\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}dw$$

egyenlőségben szereplő folyamatokat megállítva, és várható értéket véve

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(v\left(\sigma_n\wedge t,w\left(\sigma_n\wedge t\right)\right)\right)-\mathbf{E}\left(v\left(0,w\left(0\right)\right)\right)=\\
&=\mathbf{E}\left(v\left(\sigma_n\wedge t,w\left(\sigma_n\wedge t\right)\right)\right)-u\left(t,x\right)=\\
&=\mathbf{E}\left(\int_0^{\sigma_n\wedge t}\frac{\partial v}{\partial x}\left(s,w\left(s\right)\right)dw\right)=\mathbf{E}\left(\int_0^{t}\frac{\partial v}{\partial x}\left(s,w\left(s\right)\right)\chi\left(\left[0,\sigma_n\right]\right)dw\right)=0,
\end{aligned}$$

ugyanis a sztochasztikus integrálban az integrandus korlátos, így a sztochasztikus integrál a martingálkritérium miatt martingál. Ha $\sigma_n\geq t$, akkor

$$u\left(t-\sigma_n\wedge t,w\left(\sigma_n\wedge t\right)\right)=u\left(0,w\left(\sigma_n\wedge t\right)\right)=0.$$

A növekedési feltételt a $\{\sigma_n<t\}$ halmazon felhasználva

$$\begin{aligned}
|u(t,x)|&=\left|\mathbf{E}\left(v\left(\sigma_n\wedge t,w\left(\sigma_n\wedge t\right)\right)\right)\right|=\\
&=\left|\mathbf{E}\left(u\left(t-\sigma_n\wedge t,w\left(\sigma_n\wedge t\right)\right)\right)\right|\leq\\
&\leq\mathbf{E}\left(\left|u\left(t-\sigma_n\wedge t,w\left(\sigma_n\wedge t\right)\right)\right|\right)\leq\\
&\leq K\exp\left(c\cdot n^2\right)\mathbf{P}\left(\sigma_n<t\right).
\end{aligned}$$

Jelölje τ_a valamely a nulla pontból elindított Wiener-folyamat szintátlépési idejét. Miként a bevezetőben a (3.4) sorban megjegyeztük a τ_a rendelkezik

$$f(u)=\frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}}\exp\left(-\frac{a^2}{2u}\right)$$

sűrűségfüggvénnyel. Attól függően, hogy hol lép ki a w az $\{|u|\leq n\}$ intervallumból a $\{\sigma_n<t\}$ esemény felbontható két részre. A két esemény tekinthető egy nulla pontból elindított valamely Wiener-folyamat $a=\pm n-x$ szintátlépési idejének. A

$$\mathbf{P}\left(\sigma_n<t\right)\leq\mathbf{P}\left(\tau_{n-x}<t\right)+\mathbf{P}\left(\tau_{-n-x}<t\right)$$

[21] A martingál kritérium használatához a $\partial v/\partial x$ derivált növekedésére kell feltételt tenni, mi pedig a függvény növekedésére tettünk feltételt.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

becslést beírva

$$|u(t,x)| \le K\exp\left(cn^2\right)\left(\mathbf{P}\left(\tau_{n-x}<t\right)+\mathbf{P}\left(\tau_{-n-x}<t\right)\right)=$$
$$=K\exp\left(n^2c\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t\frac{|n-x|}{u^{3/2}}\exp\left(-\frac{(n-x)^2}{2u}\right)+$$
$$+\frac{|-n-x|}{u^{3/2}}\exp\left(-\frac{(-n-x)^2}{2u}\right)du.$$

$s=\sqrt{(\pm n-x)^2/u}$ helyettesítést végezve az integrálok

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{|\pm n-x|/\sqrt{t}}^{\infty}\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds$$

alakba írhatók. Vegyük észre, hogy minden $\alpha>0$ esetén

$$\int_\alpha^\infty\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds=\frac{1}{\alpha}\int_\alpha^\infty\alpha\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds\le$$
$$\le\frac{1}{\alpha}\int_\alpha^\infty s\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)ds=\frac{\exp\left(-\alpha^2/2\right)}{\alpha},$$

amiből

$$|u(t,x)|\le C\left(\frac{\exp\left(c\cdot n^2-(n-x)^2/2t\right)}{|n-x|/\sqrt{t}}+\frac{\exp\left(c\cdot n^2-(-n-x)^2/2t\right)}{|-n-x|/\sqrt{t}}\right).$$

Ha $n\to\infty$ és $t\le 1/(2c)$, akkor a becslés határértéke nulla, így az $u(t,x)$ is a $[0{,}1/2c]$ időtartományon minden x-re nulla. Ezt követően a bizonyítást megismételhetjük a $t=1/(2c)$ időpontból kiindulva és megmutathatjuk, hogy az $u(t,x)$ nulla a $[0{,}2/2c]$ időtartományon. Az eljárást folytatva belátható, hogy tetszőleges k-ra az u nulla a $[0,k/(2c)]$ időtartományon, vagyis az u minden $0<t<T$ esetén nulla. □

3.4. Girszanov-tétel

A sztochasztikus analízis leggyakrabban idézett tétele a Girszanov-tétel. A tétel legfontosabb állítása, hogy ha az alaptéren ekvivalens módon kicseréljük a mértéket, akkor a szemimartingálok osztálya nem változik és nem változik a szemimartingálok szerinti sztochasztikus integrálok értéke sem. Ugyanakkor a martingálok, vagy a lokális martingálok családja megváltozik, miközben a kvadratikus variációjuk szintén nem változik. Ennek megfelelően a mértékcsere a szemimartingálok felbontását módosítja, miközben az integrált nem módosítja. Ez az észrevétel a szemimartingál fogalmának hasznosságát hangsúlyozza.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.4.1. Lokálisan ekvivalens mértékcsere

Ha a $\mathbf{Q}$ mérték abszolút folytonos a $\mathbf{P}$-re nézve, akkor tekinthetjük a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ deriváltat. Emlékeztetünk, hogy a derivált definíciója alapján

$$\mathbf{Q}(A) = \int_A \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P}.$$

A derivált definíciója alapján ha s lépcsős függvény, akkor

$$\int_\Omega s d\mathbf{Q} = \int_\Omega \sum_i c_i \chi_{A_i} d\mathbf{Q} = \sum_i c_i \mathbf{Q}(A_i) =$$
$$= \sum_i c_i \int_{A_i} \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_\Omega s \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P}.$$

Mivel a derivált nem negatív, a monoton konvergencia tétel segítségével az egyenlőség igazolható akkor is, ha s tetszőleges nem negatív mérhető függvény. Ebből következően az integrál definíciója alapján az egyenlőség átvihető tetszőleges mérhető függvényre, ahol a két oldalon szereplő két integrál egyidejűleg létezik, illetve nem létezik. Az elmondottakból világos, hogy amennyiben a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ derivált korlátos, akkor az $L^p(\Omega)$ terek a két mérték alatt megegyeznek. Ha azonban a derivált nem korlátos, akkor a két mérték alatt az integrálható függvények halmaza különböző lehet. Az alábbiakban a derivált korlátossága nem garantálható.

3.64. Definíció. Két mértéket ekvivalensnek mondunk, ha a nullmértékű halmazok a két mérték alatt megegyeznek. Nyilvánvaló, hogy két mérték pontosan akkor ekvivalens, ha létezik és pozitív a derivált.

Ekvivalens mértékek esetén a majdnem mindenhol való konvergens sorozatok halmaza triviálisan megegyezik. Emlékeztetünk, hogy a sztochasztikus konvergencia metrizálható és valamely (ξ_n) sorozat pontosan akkor tart sztochasztikusan egy ξ változóhoz, ha a (ξ_n) összes részsorozatának van olyan további részsorozata, amely majdnem mindenhol a ξ-hez tart. Ebből következik, hogy a sztochasztikus konvergencia, szintén invariáns az ekvivalens mértékcserére nézve. Ez és a sztochasztikus konvergencia metrizálhatósága miatt a sztochasztikus konvergenciát megadó metrikus tér által generált topológia szintén invariáns az ekvivalens mértékcserére. Formálisan: ha a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ mértékek ekvivalensek akkor az $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ és az $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{Q})$ metrikus terek mint topológikus terek megegyeznek. Mivel a sztochasztikus analízis tényei nagyrészt az L^0 tér topológiájára és nem a topológiát megadó metrikára épülnek, nem túl meglepő módon a sztochasztikus analízis jórészt „invariáns" az ekvivalens mértékcserére. Az úgynevezett Girszanov-tétellel ezt az „általános elvet" fogalmazzuk meg konkrét állítások formájában. Ez persze egy

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

„meta” állítás, ugyanis nem világos, hogy miért az L^0 és nem például az L^1 terek topológiájától függ a sztochasztikus analízis. Az világos, hogy, miként az analízisben általában, nem a konkrét metrika, hanem a generált topológia fontos.

Ha az $\mathcal{F}$ filtráció teljesíti a szokásos feltételeket, akkor evidens módon a

$$\Lambda(t) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}|\mathcal{F}_t\right)$$

folyamat egyenletesen integrálható martingál, és az

$$\int_F \Lambda(t)\, d\mathbf{P} = \int_F \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \mathbf{Q}(F), \quad F \in \mathcal{F}_t$$

miatt a $\Lambda(t)$ éppen a $\mathbf{Q}$ Radon–Nikodym-deriváltja az $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ téren. Célszerű némiképpen általánosabban szemlélni a problémát. Tegyük fel, hogy minden t-re a $\mathbf{Q}$ mérték $\mathcal{F}_t$-re való leszűkítése, amit $\mathbf{Q}(t)$-vel jelölünk, abszolút folytonos a $\mathbf{P}$ $\mathcal{F}_t$-re való $\mathbf{P}(t)$ leszűkítésére nézve, akkor beszélhetünk a $\Lambda(t) \stackrel{\circ}{=} d\mathbf{Q}(t)/d\mathbf{P}(t)$ deriváltakról. Ha $F \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, akkor

$$\int_F \Lambda(t)\, d\mathbf{P} \stackrel{\circ}{=} \int_F \frac{d\mathbf{Q}(t)}{d\mathbf{P}(t)} d\mathbf{P} = \mathbf{Q}(F) = \int_F \frac{d\mathbf{Q}(s)}{d\mathbf{P}(s)} d\mathbf{P} \stackrel{\circ}{=} \int_F \Lambda(s)\, d\mathbf{P},$$

ezért a Λ logikai martingál. Mivel feltesszük, hogy az $\mathcal{F}$ teljesíti a szokásos feltételeket, illetve mivel a Radon–Nikodym-deriváltak ekvivalencia osztályok, feltehető, hogy a Λ martingál. Van azonban itt egy apró technikai probléma. A szokásos feltételek miatt az összes olyan N halmaz, amelyre $\mathbf{P}(N) = 0$ része a filtráció összes $\mathcal{F}_t$ σ-algebrájának. Ebből következően ilyenkor $\mathbf{Q}(N) = 0$ is vagyis a $\mathbf{Q}$ abszolút folytonos a $\mathbf{P}$-re nézve. Vagyis a szokásos feltételek teljesülése esetén a lokálisan abszolút folytonos, vagy a lokálisan ekvivalens mértékcsere fogalma értelmetlen, ugyanis egybeesik az abszolút folytonos és az ekvivalens mértékcserével. Ennek oka azonban az, hogy a szokásos feltételek definiálásakor némiképpen túl nagyvonalúan bántunk a nullmértékű halmazokkal. Több megoldás is kínálkozik: Vagy átgondoljuk a nullmértékű halmazok szerepét és a szokásos feltételek definícióját, vagy nem vezetjük be a lokálisan ekvivalens mértékcsere fogalmát, vagy csak a $\mathbf{P}(t)$ és $\mathbf{Q}(t)$ mértékcsaládok ekvivalenciájáról beszélünk. Mindegyiknek megvan a maga előnye, bár az utóbbi kettő esetén nem igazán nézünk szembe a problémával és ezzel inkább csak zavart okozunk, mint megmagyarázzuk a nehézségeket. Ahhoz, hogy megmagyarázzuk a problémát vissza kell térnünk a sztochasztikus analízis alapjaihoz. Induljunk ki az alapproblémából. Mikor tekintsünk két folyamatot azonosnak? Természetesen akkor, ha a trajektóriái majdnem mindenhol azonosak. Ugyanakkor ezt mindig úgy biztosítjuk, hogy garantáljuk, hogy a trajektóriák az időtengely egy sűrű részhalmazán megegyeznek,

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

vagy megmutatjuk azt, hogy az időtengely bármely véges szakaszán majdnem mindenhol megegyeznek. Ehhez azonban nem szükséges az $\mathcal{A}$ tér vagy az $\mathcal{F}_\infty^0 \stackrel{\circ}{=} \sigma\left(\mathcal{F}_t^0, t \geq 0\right)$ összes nullmértékű részhalmazát hozzácsapni a filtrációhoz. Elegendő azt feltenni, hogy ha valamely N nullmértékű halmaz valamilyen $\mathcal{F}_t$, ahol t véges, esetén eleme az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrának, akkor minden más t-re is eleme a filtrációban levő σ-algebráknak. Ha például tekintjük az $\mathcal{F}^0$ generált filtrációt és valamely $N \in \mathcal{F}_t^0$ nullmértékű, akkor elegendő megkövetelni, hogy az N legyen eleme a kiterjesztett filtrációhoz tartozó $\mathcal{F}_0$ σ-algebrának. Miként majd alább az ellenpélda tárgyalásakor látni fogjuk, valójában két fajta nullmértékű halmaz van. A nullmértékű halmazok egy része olyan, hogy csak az $\mathcal{F}_\infty \stackrel{\circ}{=} \sigma\left(\mathcal{F}_t, t \geq 0\right)$ családban van benne. Ilyen például az a nullmértékű halmaz, amelyen kívűl a nagyszámok törvényében a trajektória valóban konvergens. A nullmértékű halmazok másik családja, amit nevezhetünk lokálisan nullmértékű halmazoknak pedig olyanok, hogy véges időtartományon megfigyelve a halmaz bekövetkezése eldönthető. A szokásos feltételeket némiképpen átfogalmazhatjuk és megkövetelhetjük a következőt:

3.65. Definíció (A szokásos feltételek módosított definíciója)**.** Azt mondjuk, hogy az $\left(\Omega, \mathcal{A}, \left(\mathcal{F}_s\right), \mathbf{P}\right)$ sztochasztikus alaptér lokálisan teljesíti a szokásos feltételeket, ha minden $t < \infty$ esetén az $\left(\Omega, \mathcal{A}, \left(\mathcal{F}_s\right)_{s \leq t}, \mathbf{P}\right)$ alaptér a $[0, t]$ időtartományon teljesíti a szokásos feltételeket a korábbi definíció szerint.

Fontos hangsúlyozni, hogy ha a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalensek, akkor a Λ martingál egyenletesen integrálható, ugyanis $\Lambda(t) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(d\mathbf{Q}/\mathbf{dP} \,|\mathcal{F}_t\right)$ alakú. Ha azonban a szokásos feltételeket lokálisan értjük, akkor elképzelhető, hogy van olyan $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$, hogy csak minden t-re az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrákra való leszűkítésük lesz abszolút folytonos, vagy ekvivalens. A Λ martingál ilyenkor is létezik, de a Λ martingál nem feltétlenül lesz egyenletesen integrálható, ezért nem feltétlenül van olyan $\Lambda(\infty)$, amelyre $\Lambda(t) = \mathbf{E}\left(\Lambda(\infty) \mid \mathcal{F}_t\right)$. Vegyük észre, hogy a lokálisan vett szokásos feltételek esetén, a nullmértékű halmazokra tett feltétel alapján elképzelhető, hogy a $\mathbf{Q}$ és a $\mathbf{P}$ ekvivalens bármely $\mathcal{F}_t$ esetén, de $\mathbf{Q}$ és a $\mathbf{P}$ nem ekvivalens az $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\cup_t \mathcal{F}_t\right)$ σ-algebrán.

3.66. Definíció. Ha minden t-re a $\mathbf{P}$ $\mathcal{F}_t$-re való leszűkítése ekvivalens a $\mathbf{Q}$ $\mathcal{F}_t$-re való leszűkítésével, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ lokálisan ekvivalensek.

3.67. Definíció. A $\Lambda(t) \stackrel{\circ}{=} d\mathbf{Q}(t)/d\mathbf{P}(t)$ folyamatot a $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{P}$ Radon–Nikodym-folyamatának mondjuk.

Az elmondottakat a következő állításban foglalhatjuk össze:

3.68. Tétel. *A* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *mértékek pontosan akkor lokálisan ekvivalensek, ha a* Λ *Radon–Nikodym-folyamatuk pozitív martingál. A* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *mértékek pontosan akkor ekvivalensek az* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ *mérhető téren, ha a* Λ *pozitív, egyenletesen integrálható martingál.*

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A már elmondottak után csak azt kell belátni, hogy ha a $\Lambda > 0$ egyenletesen integrálható martingál, akkor a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalens az $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ téren. Ha a Λ egyenletesen integrálható, pozitív martingál, akkor alkalmas $\xi > 0$, $\mathcal{F}_\infty$-mérhető változóra $\Lambda(t) = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$. Tekintsük az $\mathbf{R}(A) \doteq \int_A \xi d\mathbf{P}$ mértéket.

$$\mathbf{R}(\Omega) \doteq \int_\Omega \xi d\mathbf{P} = \int_\Omega \Lambda(t)\, d\mathbf{P} = 1,$$

vagyis az $\mathbf{R}$ valószínűségi mérték. Ha $A \in \mathcal{F}_t$, akkor a feltételes várható érték definíciója szerint

$$\mathbf{R}(A) \doteq \int_A \xi d\mathbf{P} = \int_A \Lambda(t)\, d\mathbf{P} = \mathbf{Q}(A),$$

vagyis az $\mathbf{R}$ és a $\mathbf{Q}$ valószínűségi mértékek az $\cup_t \mathcal{F}_t$ π-rendszeren megegyeznek. Jelölje $\mathcal{L}$ azon korlátos, és $\mathcal{F}_\infty$-mérhető függvények halmazát, amelyekre a két mérték szerint vett integrálok megegyeznek. Az $\mathcal{L}$ nyilván λ-rendszert alkot. Például az imént láttuk, hogy $1 \in \mathcal{L}$, a λ-rendszer többi tulajdonsága az integrálás elemi tulajdonságaiból következik. Ha a halmazokat azonosítjuk a karakterisztikus függvényeikkel, akkor az elmondottak miatt $\cup_t \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{L}$, így a monoton osztály tétel miatt $\sigma(\cup_t \mathcal{F}_t) \doteq \mathcal{F}_\infty \subseteq \mathcal{L}$, következésképpen a két mérték megegyezik és így az $\mathcal{F}_\infty$ σ-algebrán éppen $\xi = d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} > 0$. □

Érdemes hangsúlyozni, hogy valójában az ekvivalens mértékcseréket azonosítottuk a pozitív egyenletesen integrálható martingálokkal. Ugyanakkor a lokálisan ekvivalens mértékcseréket csak a pozitív martingálok egy részhalmazával azonosítottuk, vagyis azt nem láttuk be, hogy ha van egy Λ pozitív martingálunk, akkor van olyan $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ amelyek lokálisan ekvivalensek és a Λ éppen a megfelelő Radon–Nikodym-deriváltfolyamat. A probléma teljes megértése szempontjából érdemes ezt is tisztázni. Legyen Λ egy pozitív martingál. Ilyenkor a Λ egy

$$\mathbf{Q}(F) \doteq \int_F \Lambda(t)\, d\mathbf{P}, \quad F \in \mathcal{F}_t$$

additív halmazfüggvényt definiál a $\cup_t \mathcal{F}_t$ algebrán. A Λ martingál tulajdonsága azért lényeges, mert ez biztosítja azt, hogy valamely $F \in \cup_t \mathcal{F}_t$ mértéke ne függjön attól, hogy melyik $\mathcal{F}_t$ σ-algebrából vettük éppen ki. A kérdés csak az, hogy az így kapott $\mathbf{Q}$ additív halmazfüggvény kiterjeszthető-e a $\sigma(\cup_t \mathcal{F}_t)$ σ-algebrára. Ehhez a kiterjesztési tétel miatt szükséges és elegendő, hogy a $\mathbf{Q}$ σ-additív legyen az $\cup_t \mathcal{F}_t$ algebrán. Ezt azonban általában nem tudjuk garantálni. Az absztrakt mértékelméletből tudjuk, hogy általában csak bizonyos topológiai és regularitási extra feltételekkel lehet garantálni, hogy egy additív halmazfüggvény σ-additív is legyen. Éppen ez teszi szükségessé a konkrét konstrukciókban a topológiai és a mérhetőségi struktúra valami fajta összekapcsolását. Ismert, hogy amennyiben az $(\Omega, \mathcal{A})$ egy teljes, szeparábilis

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

metrikus tér a Borel-halmazokkal, akkor egy algebrán értelmezett, additív, véges és belülről kompakt reguláris halmazfüggvény egyúttal σ-additív is. A sztochasztikus analízis legtöbb konkrét konstrukciója esetén garantálható, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valamilyen teljes szeparábilis metrikus tér Borel-halmazain értelmezett mértéktér. Ilyenkor a $\mathbf{Q}$ kiterjeszthető mértékké. Az absztraktság általunk tárgyalt szintjén azonban a kiterjesztés „reménytelen". Nyomatékosan hangsúlyozni kell, hogy az elmondottak részletei semmilyen jelentőséggel nem bírnak. A lényeges gondolat csak az, hogy a jelenlegi absztrakt tárgyalási szinten csak az egyenletesen integrálható Λ martingálok azonosíthatóak valamilyen mértékcserével. Ez is arra mutat, hogy a lokálisan ekvivalens mértékcsere több titkot rejt, mint arra első ránézésre számítottunk.

Világos, hogy a $\Lambda > 0$ miatt a Λ^{-1} mindig létezik. Mivel

$$\mathbf{P}(A) = \int_A 1 d\mathbf{P} = \int_A \Lambda^{-1}(t)\,\Lambda(t)\,d\mathbf{P} = \int_A \Lambda^{-1}(t)\,d\mathbf{Q},$$

ezért $\Lambda^{-1}(t)$ a $\mathbf{P}$ deriváltja az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrán a $\mathbf{Q}$-ra nézve, ezért a Λ^{-1} martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. A Λ regularizálásához hallgatólagosan felhasználtuk a szokásos feltételeket a $\mathbf{P}$ alatt. A $\mathbf{Q}$ alatt a Λ^{-1}-et már nem kell regularizálni, ugyanis a $\Lambda > 0$ miatt az $x \mapsto x^{-1}$ reciprok függvény folytonos. Az Itô-formulából evidens, hogy a Λ^{-1} valódi szemimartingál a $\mathbf{P}$ alatt, bár a $\mathbf{Q}$ alatt martingál. Vagyis a lokális martingálok, vagy a martingálok halmaza nem invariáns a mértékcserére nézve. A mértékcserével kapcsolatos legfontosabb kérdések, hogy mi történik a szemimartingálokkal az ekvivalens mértékcsere hatására, illetve mi történik a sztochasztikus integrálokkal az ekvivalens mértékcsere hatására? A kulcsállítás a következő:

3.69. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ mértékek lokálisan ekvivalensek. Legyen L adaptált, jobbról reguláris folyamat.*

1. *Az L pontosan akkor lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, ha az $L\Lambda$ szorzat lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt.*
2. *Az L pontosan akkor martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, ha az $L\Lambda$ szorzat martingál a $\mathbf{P}$ alatt.*

Bizonyítás. Először az egyszerűbb állítást igazoljuk: Az L pontosan akkor martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, ha az $L\Lambda$ martingál a $\mathbf{P}$ alatt: A martingál tulajdonság teljesüléséhez a $\mathbf{Q}$, illetve a $\mathbf{P}$ alatt szükséges és elegendő, hogy minden $s < t$ és $F \in \mathcal{F}_s$ esetén

$$\int_F L(t)\,d\mathbf{Q} = \int_F L(s)\,d\mathbf{Q},$$

illetve

$$\int_F L(t)\,\Lambda(t)\,d\mathbf{P} = \int_F L(s)\,\Lambda(s)\,d\mathbf{P}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

De ha $F \in \mathcal{F}_s$, akkor

$$\int_F L(t)\, d\mathbf{Q} = \int_F L(t)\, \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_F L(t)\, \Lambda(t)\, d\mathbf{P} = \\ = \int_F L(s)\, \Lambda(s)\, d\mathbf{P} = \int_F L(s)\, \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_F L(s)\, d\mathbf{Q},$$

amiből az említett állítás már triviális.

Legyen (σ_n) egy lokalizációs sorozat. Nyilván elegendő belátni, hogy az L^{σ_n} pontosan akkor martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, ha az $(L\Lambda)^{\sigma_n}$ martingál a $\mathbf{P}$ alatt. Az egyszerűbb jelölés céljából legyen $\sigma \triangleq \sigma_n$. Egy (σ_n) lokalizációs sorozat mindig helyettesíthető a $(\sigma_n \wedge n)$ sorozattal, így egy lokalizációs sorozat tagjairól mindig feltehetjük, hogy korlátosak, így feltehetjük, hogy a σ korlátos, vagyis van olyan r, amelyre $\sigma \leq r$. A Λ martingál a $\mathbf{P}$ alatt, így a megállási opciókról szóló tétel szerint tetszőleges $\rho \leq r$ korlátos megállási időre

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\Lambda(r) \mid \mathcal{F}_\rho) = \Lambda(\rho),$$

Bár az állítás általában is igaz, feltehetjük L folytonos, ugyanis csak ilyenkor fogjuk az állítást használni. Ilyenkor az L^σ lokalizált folyamatra feltehetjük, hogy korlátos, így alább a kiemelési szabály triviálisan használható. Ellenkező esetben a kiemelési szabályt meg kellene gondolni.

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(L(\rho)) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(L(\rho)\Lambda(r)) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(L(\rho)\Lambda(r) \mid \mathcal{F}_\rho)\right) = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(L(\rho)\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\Lambda(r) \mid \mathcal{F}_\rho)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(L(\rho)\Lambda(\rho)).$$

Legyen $s < t$ és $F \in \mathcal{F}_s$, valamint legyen

$$\tau \triangleq t\chi_F + s\chi_{F^c}.$$

Könnyen látható, hogy τ egy megállási idő. Ezt felhasználva

$$\int_F L^\sigma(t) d\mathbf{Q} - \int_F L^\sigma(s) d\mathbf{Q} = \int_\Omega L^\sigma(t \wedge \tau)\, d\mathbf{Q} - \int_\Omega L^\sigma(s \wedge \tau)\, d\mathbf{Q} = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(L(\sigma \wedge t \wedge \tau)) - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(L(\sigma \wedge s \wedge \tau)) = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}((L\Lambda)(\sigma \wedge t \wedge \tau)) - \mathbf{E}^{\mathbf{P}}((L\Lambda)(\sigma \wedge s \wedge \tau)) = \\ = \int_F (L\Lambda)^\sigma(t)\, d\mathbf{P} - \int_F (L\Lambda)^\sigma(s)\, d\mathbf{P}.$$

Az egyenlőség két oldalán pontosan akkor van nulla, illetve az egyenlőségben szereplő integrálok pontosan akkor értelmesek, ha a másik oldalon nulla van, illetve ha az integrálok a másik oldalon értelmesek, amiből az állítás evidens. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.70. Példa. A Λ^{-1} martingál a $\mathbf{Q}$ alatt pontosan azért, mert a $\Lambda^{-1}\Lambda \equiv 1$ martingál a $\mathbf{P}$ alatt.

Megjegyezzük, hogy a kvadratikus variáció nem változik a lokálisan ekvivalens mértékcsere során, ugyanis a lokálisan ekvivalens mértékcsere nem módosítja a sztochasztikusan konvergenciát. Érdemes megjegyezni hogy a kvadratikus variáció konstruálásához elég megkövetelni, hogy a szokásos feltételek lokális értelemben teljesüljenek. Ennek megfelelően az alábbi állításokban a kvadratikus variáció bármelyik mérték esetén vehető. A korlátos változású integrátor szerinti integrálás, mivel trajektóriánként történik, szintén nem változik az ekvivalens mértékcsere során, így a $\Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$ integrál invariáns a lokálisan ekvivalens mértékcserére, így bármelyik mérték alatt képezhető. $\Lambda > 0$, így a Λ^{-1} értelmes és nyilván jobbról reguláris marad, ugyanis a Λ pozitivitása miatt a reciprok függvény nem módosítja a Λ trajektóriáinak folytonossági tulajdonságait. Könnyen látható, hogy minden reguláris függvény minden véges szakaszon korlátos, így a $\Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$ integrál mindig létezik. Vegyük azonban észre, hogy mivel csak folytonos integrátorok esetén definiáltuk a sztochasztikus integrálást elvileg a $[\Lambda, L]$ keresztvariáció létezését nem igazoltuk. Ennek következtében hallgatólagosan azt is fel kell tenni, hogy a Λ is folytonos.

3.71. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\mathbf{P}$ *és a* $\mathbf{Q}$ *mértékek lokálisan ekvivalensek. Egy* L *pontosan akkor lokális martingál a* $\mathbf{P}$ *alatt, ha az*

$$\widehat{L} \doteq L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$$

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ *alatt.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvért csak azt az esetet igazoljuk, amikor a Λ és az L folytonos. Ez nem jelent érdemi megszorítást, ugyanis a gondolatmenetet a Wiener-folyamat esetén fogjuk alkalmazni. Valójában a folytonosságra csak azért van szükség, mert egyrészt nem akarjuk használni a $\Delta [L, N] = \Delta L \Delta N$ összefüggést, ugyanis ezt korábban nem igazoltuk, másrészt nem foglalkoztunk a nem folytonos lokális martingálok szerinti integrálással. A tétel azonban általános esetben is érvényes.

Tegyük fel, hogy L lokális martingál. Mivel $\Lambda > 0$, így a Λ^{-1} folyamat értelmes. Ugyancsak az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $L(0) = 0$. A parciális integrálás formulája miatt

$$L\Lambda - [L, \Lambda] = L \bullet \Lambda + \Lambda \bullet L.$$

A Λ és az L lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt, vagyis a jobb oldali sztochasztikus integrálok lokális martingálok a $\mathbf{P}$ mérték mellett. Így a $L\Lambda - [L, \Lambda]$ lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt. A két oldalt Λ-val végigosztva az előző állítás szerint az

$$L - \Lambda^{-1} [L, \Lambda] \tag{3.21}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, hiszen a Λ-szorosa lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt. A parciális integrálás formulája szerint a $\mathbf{Q}$ mérték mellett

$$\frac{1}{\Lambda}[L,\Lambda] = \frac{1}{\Lambda} \bullet [L,\Lambda] + [L,\Lambda] \bullet \frac{1}{\Lambda} + \left[\frac{1}{\Lambda}, [L,\Lambda]\right].$$

Az $1/\Lambda$ feltételezett folytonossága miatt, felhasználva, hogy az $[L,\Lambda]$ véges változású a formulában szereplő keresztvariáció nulla. Ebből

$$\frac{1}{\Lambda}[L,\Lambda] - \frac{1}{\Lambda} \bullet [\Lambda, L] = [L,\Lambda] \bullet \frac{1}{\Lambda}. \tag{3.22}$$

Vegyük észre, hogy a Λ^{-1} martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Ebből következően a $[L,\Lambda] \bullet \bullet \Lambda^{-1}$ sztochasztikus integrál lokális martingál a $\mathbf{Q}$ mérték mellett. Így a fenti (3.22) is lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, így felhasználva, hogy lokális martingálok összege lokális martingál a (3.21) és (3.22) sorokat összeadva

$$L - \frac{1}{\Lambda}[L,\Lambda] + \frac{1}{\Lambda}[L,\Lambda] - \frac{1}{\Lambda} \bullet [\Lambda, L] = L - \frac{1}{\Lambda} \bullet [\Lambda, L] \stackrel{\circ}{=} \widehat{L}$$

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt.

Megfordítva, tegyük most fel, hogy az

$$L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$$

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Ekkor mivel $\left(\Lambda^{-1}\right)^{-1} = \Lambda$ a már elmondottak miatt az újratranszformált transzformált

$$L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L] - \Lambda \bullet \left[\Lambda^{-1}, L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]\right]$$

lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt. Meg kell mutatnunk, hogy ez a kifejezés éppen L. A második kvadratikus variációban a $\Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$ tag véges változású a Λ^{-1} folytonos, így

$$\left[\Lambda^{-1}, L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]\right] = \left[\Lambda^{-1}, L\right].$$

Vagyis az újratranszformált kifejezés éppen.

$$L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L] - \Lambda \bullet \left[\Lambda^{-1}, L\right].$$

A parciális integrálás formulája szerint

$$0 = 1 - 1 = \Lambda^{-1}\Lambda - \Lambda^{-1}(0)\,\Lambda(0) = \Lambda^{-1} \bullet \Lambda + \Lambda \bullet \Lambda^{-1} + \left[\Lambda, \Lambda^{-1}\right].$$

A két oldal L-lel vett kvadratikus keresztvariációját felírva és felhasználva, hogy a kvadratikus variációs tag a folytonosság miatt elhagyható

$$0 = \left[\Lambda^{-1} \bullet \Lambda, L\right] + \left[\Lambda \bullet \Lambda^{-1}, L\right].$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A polaritási formula miatt

$$\Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L] + \Lambda \bullet \left[\Lambda^{-1}, L\right] = 0.$$

Ezt az újratranszformált kifejezésbe beírva

$$L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L] - \Lambda \bullet \left[\Lambda^{-1}, L\right] = L.$$

Így az L lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt. □

3.72. Definíció. Az $L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$ transzformációt az L Girszanov-transzformációjának mondjuk és $\widehat{L}$ módon jelöljük.

3.73. Tétel. *A szemimartingálok osztálya invariáns a lokálisan ekvivalens mértékcserére.*

Bizonyítás. Legyen $S = S(0) + L + V$ egy szemimartingál a $\mathbf{P}$ alatt, ahol L lokális martingál és V véges változású. Mivel a V véges változású a $\mathbf{Q}$ alatt is, ezért elegendő belátni, hogy ha az L lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt, akkor az L szemimartingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Az

$$\widehat{L} \triangleq L - \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$$

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt és ezért az

$$L = \widehat{L} + \Lambda^{-1} \bullet [\Lambda, L]$$

szemimartingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Vagyis a mértékcsere hatására a szemimartingálok osztálya nem változik. □

3.4.2. Mértékcserék konstruálása

Most a kérdést némiképpen megfordítjuk. Hogyan lehet ekvivalens, vagy lokálisan ekvivalens mértékcseréket készíteni? A $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ derivált a mértékek feltételezett ekvivalenciája miatt pozitív. Ebből következően a Λ martingál is pozitív. Ha valamely folyamatról biztosan tudni akarjuk, hogy pozitív, akkor a folyamatot érdemes $\exp(H)$-alakban előállítani. A kérdés csak az, hogy mi lesz a H? A Girszanov-formula szokásos megfogalmazásában szereplő transzformáció az alábbi észrevételen alapszik:

3.74. Tétel. *Ha Λ szigorúan pozitív, folytonos lokális martingál, akkor a Λ-nak létezik, mégpedig egyetlen* $\mathrm{Log}(\Lambda)$ *módon jelölt „sztochasztikus logaritmusa". Pontosabban az*

$$L \triangleq \mathrm{Log}(\Lambda) \triangleq \log \Lambda(0) + \Lambda^{-1} \bullet \Lambda$$

az egyetlen olyan folytonos lokális martingál, amelyre

$$\Lambda = \mathcal{E}(L) \triangleq \exp\left(L - \frac{1}{2}[L]\right).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Az egyértelműség igazolása egyszerű: Ha $\Lambda = \mathcal{E}(L_1) = \mathcal{E}(L_2)$, akkor mivel $\Lambda > 0$, ezért

$$1 = \frac{\Lambda}{\Lambda} = \exp\left(L_1 - L_2 - \frac{1}{2}[L_1] + \frac{1}{2}[L_2]\right),$$

vagyis $L_1 - L_2 = \frac{1}{2}([L_1] - [L_2])$, tehát az $L_1 - L_2$ folytonos lokális martingál véges változású, következésképpen Fisk tétele alapján konstans. Mivel evidens módon $L_1(0) - L_2(0) = 0$, ezért $L_1 = L_2$.

Most lássuk be, hogy a megadott összefüggés teljesül. Mivel $\Lambda > 0$, a $\log \Lambda$ kifejezés értelmes, és az Itô-formula alapján

$$\begin{aligned}\log \Lambda &= \log \Lambda(0) + \Lambda^{-1} \bullet \Lambda - \frac{1}{2}\frac{1}{\Lambda^2} \bullet [\Lambda] \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} L - \frac{1}{2}\frac{1}{\Lambda^2} \bullet [\Lambda] = L - \frac{1}{2}\left[\Lambda^{-1} \bullet \Lambda\right] = \\ &= L - \frac{1}{2}[L].\end{aligned}$$

Ebből

$$\Lambda = \exp(\log \Lambda) = \exp\left(L - \frac{1}{2}[L]\right) \stackrel{\circ}{=} \mathcal{E}(L). \qquad \square$$

3.75. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *mértékek lokálisan ekvivalensek és a Radon–Nikodym-deriváltakból álló* Λ *martingál folytonos. Tegyük fel, hogy* $\Lambda = \mathcal{E}(L)$*, vagyis* $L = \mathrm{Log}(\Lambda)$*. Egy* M *folytonos folyamat pontosan akkor lokális martingál a* $\mathbf{P}$ *mérték mellett, ha az*

$$\widehat{M} \stackrel{\circ}{=} M - [M, L] \stackrel{\circ}{=} M - [M, \mathrm{Log}(\Lambda)]$$

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ *mérték alatt.*

Bizonyítás. Az egyenlőség teljesüléséhez elegendő megjegyezni, hogy

$$\begin{aligned}[M, L] &\stackrel{\circ}{=} \left[M, \log \Lambda(0) + \Lambda^{-1} \bullet \Lambda\right] = \left[M, \Lambda^{-1} \bullet \Lambda\right] = \\ &= \Lambda^{-1} \bullet [M, \Lambda].\end{aligned} \qquad \square$$

Mivel garantálni akarjuk, hogy a derivált pozitív, a Λ martingált „exponenciális" alakban definiáljuk. A mértékcserét a derivált sztochasztikus logaritmusán keresztül adjuk meg. Az alábbi állítás gyenge pontja, hogy a Λ ugyan pozitív, de általában csak lokális martingál. Másképpen az összes $\mathcal{E}(L)$ alakú kifejezések nem mindegyike lesz egyenletesen integrálható martingál, de az ekvivalens mértékcserék mindegyike ilyen alakú. Vagyis az ekvivalens mértékcserék halmazát azonosíthatjuk a lokális martingálok egy részhalmazával, azokkal az L lokális martingálokkal, amelyekre nézve az $\mathcal{E}(L)$ egyenletesen integrálható martingál.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.76. Tétel. *Ha M és L folytonos lokális martingálok és a*

$$\Lambda \stackrel{\circ}{=} \mathcal{E}(L) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(L - \frac{1}{2}[L]\right)$$

folyamat a $[0,T]$ véges vagy végtelen szakaszon martingál, akkor az

$$\widehat{M} \stackrel{\circ}{=} M - [L,M] = M - \frac{1}{\Lambda} \bullet [\Lambda, M]$$

a

$$\mathbf{Q}(A) \stackrel{\circ}{=} \int_A \Lambda(T)\, d\mathbf{P}, \quad \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \stackrel{\circ}{=} \Lambda(T)$$

mérték alatt folytonos, lokális martingál a $[0,T]$ szakaszon.

Bizonyítás. Ha a Λ martingál a $[0,T]$ zárt szakaszon, akkor $\mathbf{Q}(\Omega) \stackrel{\circ}{=} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\Lambda(T)) = \mathbf{E}(\Lambda(0)) = 1$, vagyis a $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték. Mivel a Λ – mint minden nem negatív lokális martingál – szupermartingál, ahhoz, hogy a $[0,T]$ szakaszon martingál legyen, szükséges és elegendő, ha $\mathbf{E}(\Lambda(T)) = 1$. Ennek megfelelően a $[0,T]$ szakaszon való martingál feltétel pontosan azt jelenti, hogy a $\mathbf{Q}$ szintén valószínűségi mérték. Ha a Λ csak a $[0,T)$ szakaszon pozitív martingál és van olyan $\mathbf{Q}$, amely leszűkítéseinek deriváltja éppen a Λ, akkor a Λ egy lokálisan ekvivalens mértékcserét definiál a $[0,T)$ időtartományra.

Ha $T = \infty$, akkor a Λ kiterjeszthető a $T = \infty$ időpontra martingálként, vagyis a Λ egyenletesen integrálható a $[0,\infty)$ félegyenesen. Vagyis a tételben a $[0,T]$ zártsága fontos, ugyanis a tétel úgy értendő, hogy a Λ a T pontra is kiterjeszthető martingálként. Véges szakaszon ehhez elegendő, ha a Λ martingál a zárt szakaszon, ugyanis akkor automatikusan egyenletesen integrálható. Természetesen véges szakaszon a probléma csak abból származhat, hogy a Λ esetleg valódi lokális martingál.

Az $[L,M]$-re vonatkozó formula a korábbiak szerint kapható. Evidens módon az $\widehat{M}$ folytonos, és mivel a feltétel szerint a Λ martingál, ezért

$$\Lambda(t) = \mathbf{E}(\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{F}_t\right),$$

vagyis tetszőleges $F \in \mathcal{F}_t$ halmazra

$$\int_F \Lambda(t)\, d\mathbf{P} = \int_F \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \mathbf{Q}(F),$$

vagyis $\Lambda(t)$ éppen a $d\mathbf{Q}(t)/d\mathbf{P}(t)$ Radon–Nikodym-derivált az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrán. Ebből az állítás az elmondottak miatt már evidens. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Legyen w egy Wiener-folyamat a $\mathbf{P}$ mérték és valamely $\mathcal{F}$ filtráció mellett. Ha a fenti módon áttérünk egy $\mathbf{Q}$ ekvivalens mértékre, akkor a

$$\widehat{w} = w - [L, w] = w - \frac{1}{\Lambda} \bullet [\Lambda, w]$$

lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. A w folytonossága miatt az $[L, M]$ folytonos és nyilván véges változású. Ebből, felhasználva, hogy a kvadratikus variáció lokálisan ekvivalens mértékek esetén azonos

$$[\widehat{w}](t) \stackrel{\circ}{=} [w - [L, w]](t) = [w](t) = t.$$

A Lévy-féle karakterizációs tétel alapján a $\widehat{w}$ Wiener-folyamat a $\mathbf{Q}$ mérték mellett az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve. Ezzel beláttuk a következő állítást:

3.77. Tétel. *Legyen $\mathcal{F}$ tetszőleges filtráció és w legyen Wiener-folyamat az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve. Ha valamely L lokális martingálra az $\Lambda \stackrel{\circ}{=} \mathcal{E}(L)$ egy egyenletesen integrálható martingál, akkor a $\widehat{w} = w - [L, w]$ folyamat Wiener-folyamat a $\mathbf{Q}(A) \stackrel{\circ}{=} \int_A \Lambda(\infty)\, d\mathbf{P}$ valószínűségi mérték mellett. Hasonló állítás igaz véges időhorizontra is.*

Vagyis általában lokális martingál Girszanov-transzformáltja lokális martingál, de Wiener-folyamat Girszanov-transzformáltja Wiener-folyamat. Az alábbi tételben az X balról való regularitása teljesen irreleváns. A lényeg az, hogy ha az L felírható sztochasztikus integrálként, akkor a kvadratikus variációja explicite kiszámolható:

$$[L, w](t) = [X \bullet w, w](t) = (X \bullet [w])(t) = \int_0^t X(s)\, ds.$$

3.78. Tétel. *Legyen $\mathcal{F}$ tetszőleges filtráció és w legyen Wiener-folyamat az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve és legyen X adaptált és balról reguláris. Tegyük fel továbbá, hogy a*

$$\Lambda(t) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(\int_0^t X(s)\, dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t X^2(s)\, ds\right) \stackrel{\circ}{=}$$
$$\stackrel{\circ}{=} \exp\left(X \bullet w - \frac{1}{2} X^2 \bullet [w]\right)(t) \stackrel{\circ}{=} \mathcal{E}(X \bullet w)(t)$$

folyamat martingál a $[0, T]$ zárt szakaszon. Definiáljuk a $\mathbf{Q}$ mértéket a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \stackrel{\circ}{=} \Lambda(T)$ szabállyal. Ekkor a

$$\widehat{w}(t) \stackrel{\circ}{=} w(t) - \int_0^t X(s)\, ds$$

az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve Wiener-folyamat a $\mathbf{Q}$ mérték mellett.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A tétel interpretációja kapcsán érdemes hangsúlyozni, hogy amennyiben az $\mathcal{F}$ a w által generált filtráció, akkor a kívánt $L = X \bullet w$ előállítás mindig létezik, vagyis a lehetséges mértékcserék azonosíthatóak az $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(w)$ egy alkalmas részhalmazával. A gond természetesen ismét az, hogy nem minden $X \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(w)$ esetén lesz a Λ martingál a $[0,T)$-én, vagy a $[0,T]$ zárt szakaszon. A Λ ugyanis általában csak lokális martingál.

3.79. Definíció. Legyen $\mu \in \mathbb{R}$, w Wiener-folyamat. A $w^{(\mu)}(t) \triangleq w(t) + \mu t$ folyamatot μ drifttel rendelkező Wiener-folyamatnak mondjuk.

3.80. Példa. Egy μ drifttel rendelkező Wiener-folyamat

$$\tau_a^{(\mu)} \triangleq \inf\left\{t \mid w^{(\mu)}(t) = a\right\}$$

találati idejének Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}(s) = \exp(\mu a)\exp\left(-|a|\sqrt{2s+\mu^2}\right), \quad s > 0.$$

Először a $\mu = 0$ esetben számoljuk ki a Laplace-transzformáltat. Legyen τ_a a w Wiener-folyamat találati ideje. $\tau_a \wedge t$ egy korlátos megállási idő, $\exp\left(u \cdot w(t) - u^2 t/2\right)$ egy martingál, így a megállási opciókról szóló tétel alapján

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(u \cdot w(\tau_a \wedge t) - \frac{u^2}{2}\tau_a \wedge t\right)\right) = 1.$$

Ha $a \geq 0$ akkor $w(\tau_a \wedge t) \leq a$ így ha $t \nearrow \infty$ akkor a majorált konvergencia tétele alapján

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(u \cdot a - \frac{u^2}{2}\tau_a\right)\right) = 1.$$

Átrendezve $s = u^2/2$ helyetesítéssel

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(-s\tau_a\right)\right) = \exp\left(-\sqrt{2s}a\right).$$

Ha $a < 0$ akkor a τ_a eloszlása megegyezik τ_{-a} eloszlásával, így

$$\mathcal{L}(s) = \exp\left(-\sqrt{2u}\,|a|\right).$$

Az általános esetre rátérve vezessük be a

$$\mathbf{Q}(A) \triangleq \int_A \exp\left(\mu w(t) - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) d\mathbf{P} \triangleq \int_A \Lambda(t)\, d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{F}_t \tag{3.23}$$

mértéket. A Girszanov-tétel miatt a $\widehat{w}(s) \triangleq w(s) - \mu s$ Wiener-folyamat a $[0,t]$ szakaszon a $\mathbf{Q}$ alatt. Jelölje τ_a a $w(t) = \widehat{w}(t) + \mu t$ a pontba való

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

érkezésének időpontját. $\tau_a(\omega) < \infty$ és $\widehat{w}(\tau_a(\omega)) + \mu\tau_a(\omega) = a$ pontosan akkor, ha $\tau_a(\omega) < \infty$ és $w(\tau_a(\omega)) = a$. Vegyük észre, hogy ha $\sigma \leq t$ valamely megállási idő, akkor az $\mathcal{F}_\sigma$ σ-algebrán $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = \Lambda(\sigma)$ ugyanis a megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\mathbf{E}(\Lambda(t) \mid \mathcal{F}_\sigma) = \Lambda(\sigma),$$

vagyis minden $F \in \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_t$ esetén a feltételes várható érték definíciója miatt

$$\mathbf{Q}(F) = \int_F \Lambda(t)\, d\mathbf{P} = \int_F \Lambda(\sigma)\, d\mathbf{P}$$

és a $\Lambda(\sigma)$ mérhető az $\mathcal{F}_\sigma$-ra nézve. A Laplace-transzformált csak az eloszlástól függ, ezért számolhatjuk a τ_a Laplace-transzformáltját a $\mathbf{Q}$ alatt. Ha $s > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t^{(\mu,a)}(s) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\left(-s\left(\tau_a^{(\mu)} \wedge t\right)\right)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-s\left(\tau_a \wedge t\right)\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\left(-s\left(\tau_a \wedge t\right)\right)\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\left(-s\left(\tau_a \wedge t\right)\right)\Lambda\left(\tau_a \wedge t\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\left(-s\left(\tau_a \wedge t\right)\right)\exp\left(\mu w\left(\tau_a \wedge t\right) - \frac{1}{2}\mu^2\left(\tau_a \wedge t\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

$s > 0$, így az $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}$ mögötti kifejezést majorálja az $\exp(\mu w(\tau_a \wedge t))$. Ha $a \geq 0$, akkor $w(\tau_a \wedge t) \leq a$, tehát

$$\exp\left(\mu w\left(\tau_a \wedge t\right)\right) \leq \exp \mu a,$$

ezért a $t \to \infty$ határérték mind a két oldalon bevihető az integrálok mögé[22]. A Wiener-folyamat τ_a találati idejének Laplace-transzformáltját felhasználva[23]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\mu,a)}(s) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\exp\left(-s\tau_a^{(\mu)}\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\exp\left(-s\tau_a\right)\exp\left(\mu w\left(\tau_a\right) - \frac{1}{2}\mu^2\tau_a\right)\right) = \\
&= \exp(\mu a)\,\mathbf{E}\left(\exp\left(-\left(s + \frac{1}{2}\mu^2\right)\tau_a\right)\right) = \\
&= \exp(\mu a)\exp\left(-|a|\sqrt{2s + \mu^2}\right).
\end{aligned}$$

[22] Vegyük észre, hogy mivel $\tau_a < \infty$ $\mathbf{P}$ m.m., ezért az integrálok alatti határértékek $\mathbf{P}$ m.m. léteznek.

[23] Illetve kihasználva, hogy $\tau_a < \infty$, vagyis $w(\tau_a) = a$ majdnem minden kimenetre. Mivel a $\tau_a^{(\mu)}$ felveheti a $+\infty$ értéket is a Laplace-transzformált definícióját értelemszerűen módosítani kell. Ha $\tau_a^{(\mu)}(\omega) = \infty$ és $s > 0$, akkor $\exp(-s\tau_a(\omega)) \stackrel{\circ}{=} 0$. Vegyük észre, hogy a mértékelméletben szokásos $0 \cdot \infty = 0$ konvenció miatt az $s = 0$ eset nem megengedett.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A Wiener-folyamat szimmetriája miatt a $\tau_a^{(\mu)}$ és a $\tau_{-a}^{(-\mu)}$ eloszlás azonos, ezért ha $a < 0$, akkor

$$\mathcal{L}^{(\mu,a)}(s) = \mathcal{L}^{(-\mu,-a)}(s) = \\ = \exp(\mu a) \exp\left(-|a| \sqrt{2s+\mu^2}\right).$$

Ha $s \to 0$, akkor

$$\lim_{s\to 0} \exp\left(-s\tau_a^{(\mu)}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \tau_a^{(\mu)} = \infty \\ 1, & \text{ha } \tau_a^{(\mu)} < \infty \end{cases}.$$

A majorált konvergencia tétel szerint

$$\mathbf{P}\left(\tau_a^{(\mu)} < \infty\right) = \exp(\mu a - |\mu a|), \tag{3.24}$$

amely szerint egy μ drifttel rendelkező Wiener-folyamat pontosan akkor éri el majdnem minden kimenetelre az a értéket, ha az a és a μ előjele azonos. □

3.4.3. Egy érdekes ellenpélda

Ebben az alpontban a lokálisan ekvivalens mértékcserére és így a sztochasztikus analízis alapjaira, illetve a nullmértékű halmazok drámai szerepére rávilágító egyik legnevezetesebb példát tárgyaljuk.

3.81. Példa. Lokálisan ekvivalens mértékcsere és a Wiener-folyamatok.

Legyen w egy Wiener-folyamat és tekintsük a $\widehat{w}(t) \stackrel{\circ}{=} w(t) - \mu \cdot t$ folyamatot, ahol $\mu \neq 0$. Ilyenkor a

$$\Lambda(t) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(\mu w(t) - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)$$

egy pozitív martingál. De a Λ nem egyenletesen integrálható, vagyis a $T = \infty$ időpontra nem terjeszthető ki martingálként, ugyanis $\Lambda(\infty) = 0$! Alább megmutatjuk, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}) \stackrel{\circ}{=} (C(\mathbb{R}_+), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+)))$ téren a Λ-hoz tartozik egy $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték, amely lokálisan ekvivalens a $\mathbf{P}$-vel és amely alatt a $\widehat{w}$ Wiener-folyamat. A $\mathbf{Q}$ mérték természetesen az egyes $\mathbf{Q}(t)$ mértékek közös kiterjesztéseként írható fel. Természetesen igazolni kell, hogy ilyen közös kiterjesztés létezik. Ugyanakkor ha ilyen $\mathbf{Q}$ van, akkor a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ egymásra szingulárisak: A nagy számok törvénye miatt majdnem mindenhol a $\mathbf{P}$ alatt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\widehat{w}(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{w(t) - \mu t}{t} = -\mu,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

illetve majdnem mindenhol a $\mathbf{Q}$ alatt

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\widehat{w}(t)}{t}=0.$$

Ebből következően van olyan $A\in\mathcal{F}_\infty=\sigma(\cup_t\mathcal{F}_t)$ halmaz, amelyre $\mathbf{P}(A)=0$ és $\mathbf{Q}(A)=1$. □

A $\mathbf{Q}$ mérték létezésének igazolásához a $(C(\mathbb{R}_+),\mathcal{B}_t)$ tereken értelmezett $\mathbf{Q}(t)$ mértékek közös kiterjesztésének létezését kell igazolni. Mivel a Λ martingál, ezért ha $s<t$, akkor minden $A\in\mathcal{B}_s$ esetén

$$\mathbf{Q}(t)(A)=\int_A\Lambda(t)\,d\mathbf{P}=\int_A\Lambda(s)\,d\mathbf{P}=\mathbf{Q}(s)(A),$$

vagyis a $\mathbf{Q}(t)$ leszűkítése a $\mathcal{B}_s$-re éppen a $\mathbf{Q}(s)$, így a $\mathbf{Q}$ egyértelműen definiálható az $\mathcal{A}\stackrel{\circ}{=}\cup_t\mathcal{B}_s$ algebrán. A Caratheodory-tétel alapján a $\mathbf{Q}$ létezéséhez elég belátni, hogy a $\mathbf{Q}$ σ-additív az $\mathcal{A}$ algebrán. Az algebrán való σ-additivitás igazolásához szükséges közismert eredmények a következőek:

3.82. Definíció. Az X halmaz részhalmazaiból álló $\mathcal{K}$ családot σ-kompaktnak[24] mondunk, ha valahányszor egy $K_n\in\mathcal{K}$ sorozatra $\cap_{n=1}^\infty K_n=\emptyset$, mindannyiszor található olyan N index, hogy a $\cap_{n=1}^N K_n=\emptyset$ is teljesül.

3.83. Példa. Egy topologikus tér kompakt halmazai σ-kompakt családot alkotnak.

3.84. Példa. Teljes szeparábilis metrikus tér σ-kompakt bázisa.

Legyen X teljes, szeparábilis metrikus tér, és legyen S az X mindenhol sűrű, megszámlálható részhalmaza. Minden n-re az $s_n\in S$ pont körül vegyük a $B(s_n,1/k)$, $k\geq n$ zárt gömböket. Az így kapott megszámlálható gömbből álló halmaz legyen $\mathcal{K}$. Mivel egy adott n indexre csak az $1/k\leq 1/n$ sugarú gömböket vettük figyelembe, ezért világos, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$ esetén a $B(s_n,1/k)$ gömbök közül csak véges sok sugara nagyobb, mint ε. Legyen (K_n) a $\mathcal{K}$ egy sorozata. Ha minden m-re a $\cap_{n=1}^m K_n\neq\emptyset$, akkor minden $x_m\in\in\cap_{n=1}^m K_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért konvergens, így a határértéke eleme a $\cap_{n=1}^\infty K_n$ halmaznak, amely így nem lehet üres. Mivel a $\mathcal{K}$ az X nyílt halmazainak megszámlálható bázisa, ezért $\sigma(\mathcal{K})=\mathcal{B}(X)$. □

3.85. Definíció. Az $\mathcal{A}$ halmazrendszeren értelmezett μ függvényt a $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{A}$ rendszerre nézve belülről regulárisnak mondjuk, ha minden $A\in\mathcal{A}$ esetén

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K)\mid K\in\mathcal{K},K\subseteq A\}. \tag{3.25}$$

[24] Nem keverendő össze a σ-kompakt halmazzal, amely egy topologikus tér olyan X halmaza, amelyre $X=\cup_{n=1}^\infty K_n$, ahol a K_n kompakt. Szokásos elnevezés még a szemikompakt halmaz család.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.86. Állítás (Kompakt regularitás és kiterjeszthetőség)**.** *Legyen az $\mathcal{A}$ halmazcsalád algebra, $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ végesen additív, véges értékeket felvevő halmazfüggvény, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ σ-kompakt család. Ha a μ belülről $\mathcal{K}$-reguláris az $\mathcal{A}$-n, akkor a μ halmazfüggvény σ-additív az $\mathcal{A}$ algebrán.*

Bizonyítás. Mivel a μ véges, ezért a σ-additivitáshoz elég megmutatni, hogy ha $A_n \searrow \emptyset$, akkor $\mu(A_n) \searrow 0$. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \geq 2\varepsilon$. A (3.25) és a $\mu(A_n)$ végessége miatt, minden n-re van olyan $K_n \subseteq A_n$, hogy

$$\mu(A_n) - \mu(K_n) = \mu(A_n \setminus K_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Ebből a μ elemi tulajdonságai alapján tetszőleges n-re

$$\mu(A_n \setminus \cap_{i=1}^n K_i) \leq \mu(\cup_{i=1}^n (A_i \setminus K_i)) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i \setminus K_i) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} = \varepsilon.$$

Mivel $A_n \searrow \emptyset$, ezért $\cap_{i=1}^n K_i \searrow \emptyset$, amiből a σ-kompaktság miatt alkalmas N-re $\cap_{i=1}^N K_i = \emptyset$, tehát

$$\varepsilon \geq \mu\left(A_N \setminus \cap_{i=1}^N K_i\right) = \mu(A_N) \geq 2\varepsilon,$$

ami lehetetlen. □

3.87. Definíció. Emlékeztetünk, hogy egy topologikus téren értelmezett μ mértékre nézve egy A mérhető halmaz reguláris, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan G nyílt és F zárt halmaz, hogy egyrészt $F \subseteq A \subseteq G$, másrészt $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. (Hallgatólagosan feltesszük, hogy a G és az F mérhető.) Ha a regularitás definíciójában szereplő F zárt halmaz választható kompaktnak, akkor az A halmazt kompakt regulárisnak mondjuk. Ha a minden mérhető halmaz (kompakt) reguláris, akkor a μ mértéket (kompakt) regulárisnak mondjuk.

3.88. Állítás. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér.*

1. *Ha X topologikus tér, akkor a reguláris halmazok σ-algebrát alkotnak.*
2. *Ha a Baire-halmazok mérhetőek, akkor regulárisak. Speciálisan, ha X metrikus tér, és az $\mathcal{A}$ tartalmazza a nyílt halmazokat, akkor minden Borel-halmaz reguláris.*
3. *Ha X teljes, szeparábilis metrikus tér, akkor a μ kompakt reguláris.*

Bizonyítás. A bizonyítást több egymásra épülő lépésre bontjuk.

1. Első lépésben belátjuk, hogy ha az alaptér mértéke véges, akkor a reguláris halmazok tetszőleges topologikus tér esetén σ-algebrát alkotnak. Mivel

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

az X és az $\emptyset$ halmazok nyíltak is, meg zártak is egyszerre, ezért regulárisak. Ha R reguláris halmaz, akkor minden $\varepsilon > 0$ számra léteznek olyan G nyílt és F zárt halmazok, hogy

$$F \subseteq R \subseteq G \quad \text{és} \quad \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

Mivel az F^c nyílt és a G^c zárt halmazokra $G^c \subseteq R^c \subseteq F^c$ és

$$\mu(F^c \setminus G^c) = \mu(F^c \cap (G^c)^c) = \mu(F^c \cap G) = \mu(G \setminus F) < \varepsilon,$$

ezért az R^c is reguláris. Meg kell még mutatni, hogy ha az $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ halmaz sorozat minden eleme reguláris, akkor az $\cup_{n=1}^{\infty} R_n$ halmaz is reguláris. Minden n indexre legyenek $F_n \subseteq R_n \subseteq G_n$ olyan zárt, illetve nyílt halmazok, hogy $\mu(G_n \setminus F_n) \leq \varepsilon/2^{n+1}$. A $B_n \doteq \cup_{k=1}^{n} F_k$ halmazok monoton nőnek, és az egyesítésük $\cup_{k=1}^{\infty} F_k$, ezért $(\cup_{k=1}^{\infty} F_k) \setminus B_n \searrow \emptyset$. Mivel a μ véges, ezért $\mu((\cup_{k=1}^{\infty} F_k) \setminus B_n) \searrow 0$, tehát elég nagy n-re $\mu((\cup_{k=1}^{\infty} F_k) \setminus B_n) \leq \varepsilon/2$. Világos, hogy $B_n \doteq \cup_{k=1}^{n} F_k \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} R_k \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} G_k$, ahol a B_n halmaz zárt a $\cup_{k=1}^{\infty} G_k$ halmaz pedig nyílt. Mivel $\cup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \cup_{k=1}^{\infty} F_k \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus F_k)$ ezért

$$\begin{aligned}\mu(\cup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus B_n) &= \mu(\cup_{k=1}^{\infty} G_k \setminus \cup_{k=1}^{\infty} F_k) + \mu(\cup_{k=1}^{\infty} F_k \setminus B_n) \leq \\ &\leq \mu(\cup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus F_k)) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

ami alapján az $\cup_{n=1}^{\infty} R_n$ is reguláris, vagyis az első állítást beláttuk.

2. A Baire-halmazokra vonatkozó megjegyzés igazolása a következő: Legyen f folytonos függvény. Ha F az $\mathbb{R}$ egy zárt részhalmaza, akkor az $f^{-1}(F)$ halmaz zárt, tehát evidens módon belülről reguláris. Ugyanakkor mivel $f^{-1}(F) = f^{-1}(\cap_n G_n) = \cap_n f^{-1}(G_n)$, ahol a $G_n \searrow F$ halmazok nyíltak, a mérték végessége miatt az $f^{-1}(F)$ kivülről is reguláris. Mivel a reguláris halmazok σ-algebrát alkotnak, ezért az $f^{-1}(F)$ alakú halmazok által generált σ-algebra minden eleme reguláris, és mivel az $f^{-1}(F)$ alakú halmazok generálják a Baire-halmazokat, ezért minden Baire-halmaz is reguláris. Ha az X metrikus tér, akkor a Baire és a Borel-halmazok egybeesnek, tehát ilyenkor minden Borel-halmaz is reguláris.

3. Hátravan még annak igazolása, hogy ha az X teljes szeparábilis metrikus tér, akkor az F zárt halmaz választható kompaktnak. Ennek belátásához elegendő megmutatni, hogy minden F zárt halmazhoz és minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $K \subseteq F$ kompakt halmaz, hogy

$$\mu(F \setminus K) < \varepsilon. \tag{3.26}$$

Az állítást először az X alaphalmazra látjuk be. Mivel az X szeparábilis metrikus tér, ezért minden k természetes számhoz létezik megszámlálható sok $1/k$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

sugarú, zárt $B_n^{(k)}$ gömb, hogy $X = \cup_n B_n^{(k)}$. Mivel a mérték véges, ezért elegendően sok, de azért véges m_k számú zárt gömb esetén $\mu\left(X \setminus \cup_{s=1}^{m_k} B_s^{(k)}\right) = \mu\left(\left(\cup_{s=1}^{m_k} B_s^{(k)}\right)^c\right) < \varepsilon/2^k$. Legyen $K \triangleq \cap_{k=1}^{\infty}\left(\cup_{s=1}^{m_k} B_s^{(k)}\right)$. Világos, hogy a K zárt és minden k esetén létezik benne véges $1/k$ sugarú ε-háló[25]. Mivel az X teljes metrikus tér, ezért a K kompakt[26]. De

$$\mu(X \setminus K) = \mu\left(X \setminus \left(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{s=1}^{m_k} B_s^{(k)}\right)\right) = \mu\left(\cup_{k=1}^{\infty}\left(\cup_{s=1}^{m_k} B_s^{(k)}\right)^c\right) \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\left(\cup_{s=1}^{m_k} B_s^{(k)}\right)^c\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \varepsilon,$$

ami éppen a (3.26). Mivel az X minden F zárt részhalmaza, maga is teljes szeparábilis metrikus tér, ezért a bizonyítás utolsó részét megismételhetjük az $(F, \mathcal{A}_F, \mu_F)$ leszűkített mértéktérre. Ez alapján minden F zárt halmazhoz létezik olyan $K \subseteq F$, amelyre fennáll (3.26). □

A $\mathbf{Q}$ *mérték létezésének bizonyítása.* Tetszőleges $A \in \mathcal{A} \triangleq \cup_s \mathcal{B}_s$ -ről feltehető, hogy alkalmas s időpontra $A \in \mathcal{B}_s$. A $(C(\mathbb{R}_+), \mathcal{B}_s)$ azonosítható a $(C([0,s]), \mathcal{B}(C([0,s])))$ mérhető térrel. Mivel ez egy teljes szeparábilis metrikus tér, ezért ezen a téren értelmezett véges mértékek belülről kompakt regulárisak. A $\mathbf{Q}$ létezésének igazolásához elegendő azt megmutatni, hogy a $C(\mathbb{R}_+)$ kompakt tartójú cilinderhalmazai, vagyis a $C(\mathbb{R}_+)$ olyan részhalmazainak családja, amelyekhez van olyan $[0,n]$ és a $C([0,n])$ olyan K kompakt részhalmaza, amelyre a halmaz

$$\left\{ f \in C(\mathbb{R}_+) \mid f|_{[0,n]} \in K \right\}$$

alakú σ-kompakt családot alkotnak. Mivel ez a család metszet zárt, elég megmutatni, hogy ha valamely $K_{n-1} \supseteq K_n \supseteq \ldots$ sorozat tagjai nem üresek, akkor a metszetük sem üres. Legyen most $f_n \in K_n$. A tartalmazás miatt az (f_n) sorozat leszűkítése a K_1-hez tartozó időtartományra kompakt, így egy alkalmas részsorozata konvergens. Ha most áttérünk a K_2 halmazra, akkor ennek a részsorozatnak van olyan további részsorozata, amely szintén konvergál, de már a K_2-höz tartozó időtartományon is. Az eljárást folytatva, majd átlósan újabb részsorozatot választva egy olyan (f_{n_k}) részsorozathoz jutunk, amely az összes K_n-hez tartozó időszakaszon konvergál. Három eset lehetséges: ha az időtartományoknak nincsen felső határa, akkor a sorozat határértéke az

[25] Az A halmaz a B halmaz ε-hálója, ha minden $b \in B$ ponthoz létezik olyan $a \in A$, hogy az a pont és a b távolsága nem nagyobb mint ε.

[26] Felhasználtuk a kompaktságra vonatkozó Hausdorff-kritériumot, amely szerint egy teljes metrikus térben egy zárt K halmaz pontosan akkor kompakt, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz a halmaznak van véges elemszámú ε-hálója.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

összes K_n-be beleesik, vagyis a metszet nem üres. Ha ilyen felső korlát van, akkor az intervallumok hosszának van egy N szupremuma. Ezen belül két eset lehetséges. Ha a szuprémum felvevődik, akkor valójában van egy olyan kompakt halmaz, hogy az összes f_n a halmazhoz tartozó szakaszon konvergál. A függvényeket az N pontban kimerevítve az egész számegyenesen konvergens sorozatot kapunk, amely határértéke része a metszetnek. Ha a szuprémum nem vevődik fel, akkor az összes intervallum határozottan kisebb, mint az N, és ezért az egyes f_n függvények választhatók oly módon, hogy például az N pontban nulla értéket vegyenek fel. □

3.5. Sztochasztikus differenciálegyenletek

Sztochasztikus differenciálegyenleten a

$$dX(t) = b(t, X(t))\,dt + \sigma(t, X(t))\,dw(t) \tag{3.27}$$

típusú formális kifejezéseket értjük, ahol az X, a b, a σ és a w akár többdimenziósak is lehetnek. Az általános esetben a w egy m-dimenziós Wiener-folyamat, az X pedig egy n-dimenziós sztochasztikus folyamat. Ennek megfelelően a $\sigma(t,x)$ egy $n \times m$ dimenziós mátrix, ahol az x argumentum értelemszerűen egy n-dimenziós vektor, a $b(t,x)$ szintén értelemszerűen minden (t,x) esetén egy n-dimenziós vektor, stb. Az egyenlet megoldásán egy olyan X vektor folyamatot értünk, amelyre tetszőleges t időpontra

$$X(t) - X(0) = \int_0^t b(s, X(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\,dw(s), \tag{3.28}$$

ahol például ismét értelemszerűen a második, sztochasztikus, integrálon a

$$\sum_{j=1}^{m} \int_0^t \sigma_{ij}(s, X(s))\,dw_j(s)$$

típusú integrálokból álló n-dimenziós vektort értjük. Ha a σ és a b folytonos és az X megoldásokat a folytonos trajektóriával rendelkező folyamatok körében keressük, akkor az egyenletek felírásához elég az Itô–Stieltjes-típusú integrálokat ismerni. Világos, hogy a megoldás egyértelműségéről csak akkor beszélhetünk, ha az $X(0)$ értékét előre rögzítjük. Ezt a későbbiek során mindig fel is tesszük, vagyis adott kezdeti feltétel esetén beszélünk csak az egyenletről.

Az egyenlet felírásakor nem mondtuk meg, hogy pontosan mit értünk rajta, nevezetesen melyik w Wiener-folyamat írandó az egyenletbe. Ha egy rögzített w folyamat esetén beszélünk a megoldásról, akkor az adott w folyamat

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

esetén való erős megoldásról beszélünk. Ha azonban csak azt tudjuk mondani, hogy található egy olyan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mező, a mezőn értelmezett filtráció és hozzá tartozó Wiener-folyamat, amely esetén az így választott mezőn értelmezett X sztochasztikus folyamat megoldása az egyenletnek, akkor az X-et az egyenlet gyenge megoldásának mondjuk. Gyenge megoldás létezésére az egyik legismertebb példát a Bessel-folyamatok szolgáltatják.

3.89. Példa. Bessel-folyamatok mint gyenge megoldások[27].

Legyen $\mathbf{w}$ egy n-dimenziós Wiener-folyamat, ami definíció szerint azt jelenti, hogy a $\mathbf{w}$ vektorfolyamat egyes koordinátái független Wiener-folyamatok. Megmutatjuk, hogy ha $n \geq 2$ és $r > 0$, akkor az $r \triangleq \|\mathbf{x}\|$ pontból indított

$$R \triangleq \|\mathbf{w}\| \triangleq \|\mathbf{w}\|_2 \triangleq \sqrt{\sum_k w_k^2}$$

folyamatra

$$R(t) = r + \int_0^t \frac{n-1}{2R(s)} ds + B(t), \quad 0 \leq t < \infty, \tag{3.29}$$

ahol

$$B \triangleq \sum_k B^{(k)}, \quad B^{(k)}(s) \triangleq \int_0^s \frac{w_k}{R} dw_k, \tag{3.30}$$

és a B egy Wiener-folyamat. Másképpen fogalmazva az R úgynevezett Bessel-folyamat gyenge megoldása a

$$dR = \frac{n-1}{2R} dt + dw$$

sztochasztikus differenciálegyenletnek. Vegyük észre, hogy az R folyamatot megadó (3.29) képlet értelmes, ugyanis a nevezőben levő kifejezés az $n \geq 2$ megkötés miatt majdnem minden kimenetelre egyetlen s időpontban sem nulla, így a trajektóriánkénti integrál, majdnem minden kimenetelre értelmes. A B folyamatott definiáló (3.30) sorban szereplő sztochasztikus integrál integrandusa, majdnem minden kimenetelre folytonos, ezért a $B^{(k)}$ folyamatot definiáló sztochasztikus integrál szintén értelmes. Az állítás igazolása a következő:

1. Sztochasztikus integrálok keresztvariációjának képlete alapján, felhasználva, hogy ha a Wiener-folyamatok függetlenek akkor a keresztvariációjuk nulla

$$\left[B^{(k)}, B^{(j)}\right](t) = \int_0^t \frac{w_k w_j}{R^2} d[w_k, w_j] = \delta_{kj} \int_0^t \frac{w_k(s) w_j(s)}{R^2(s)} ds,$$

[27] Később megmutatjuk, hogy a Bessel-folyamatokhoz tartozó egyenleteknek van erős megoldása.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ezért

$$[B](t) = \left[\sum_k B^{(k)}\right] = \sum_k \left[B^{(k)}\right](t) = \int_0^t \sum_k \frac{w_k^2(s)}{R^2(s)} ds = \int_0^t 1 ds = t,$$

amiből – felhasználva, hogy lokális martingálok összege lokális martingál – a Lévy-féle karakterizációs tétel alapján a B Wiener-folyamat.

2. Az R előállítását megadó (3.29) sor igazolása az Itô-formulán alapszik. Az R^2 folyamatra

$$R^2 - R^2(0) = \sum_k 2w_k \bullet w_k + \frac{1}{2}\sum_k 2 \bullet [w_k],$$

tehát

$$R^2(t) - R^2(0) \stackrel{\circ}{=} \sum_k \left(w_k^2(t) - w_k^2(0)\right) = \\ = 2\sum_k \int_0^t w_k dw_k + t \cdot n.$$

A polaritási formula miatt

$$\left[\int_0^t w_k dw_k, \int_0^t w_i dw_i\right] = \int_0^t w_k w_i d[w_k, w_i] = \\ = \delta_{ki} \int_0^t w_k^2 ds,$$

amiből

$$\left[R^2\right] = 4\sum_k \int_0^t w_k^2 ds = 4\int_0^t R^2 ds.$$

A többdimenziós Wiener-folyamat majdnem minden kimenetelre nem lesz nulla[28], ezért $R^2 > 0$, és a $\sqrt{x}$ függvényre alkalmazható az Itô-formula:

[28] Érdemes hangsúlyozni, hogy igen lényeges lépésről van szó, ugyanis itt használjuk ki, hogy $n \geq 2$. Ha $n = 1$, akkor az Itô-formula nem használható, ugyanis ilyenkor csak az $R^2 \geq 0$ biztosítható, és a $\sqrt{x}$ függvény az $x \geq 0$ tartományon nem eleme a C^2 térnek. Ha formálisan mégis használjuk a formulát, akkor az $R = \text{sign}(w) \bullet \bullet w$ egyenlőséghez jutunk. A Lévy-féle karakterizációs tétel alapján a jobb oldali kifejezés Wiener-folyamat, a baloldali pedig nem negatív, így a két oldal nem lehet azonos.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$$R(t)-r=\int_0^t\frac{1}{2\sqrt{R^2}}dR^2-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^t\frac{1}{\left(R^2\right)^{3/2}}d\left[R^2\right]=$$

$$=\sum_k\int_0^t\frac{w_k}{R}dw_k+\int_0^t\frac{n}{2R}ds-\frac{1}{8}\int_0^t\frac{1}{R^3}d\left[R^2\right]=$$

$$=\sum_k\int_0^t\frac{w_k}{R}dw_k+\int_0^t\frac{n}{2R}ds-\frac{4}{8}\int_0^t\frac{1}{R^3}R^2ds=$$

$$=\sum_k\int_0^t\frac{w_k}{R}dw_k+\int_0^t\frac{n-1}{2R}ds. \qquad \square$$

Az alábbiakban a jelölés egyszerűsítése céljából feltesszük, hogy $m=n=1$. Az olvasó egyszerűen kiterjesztheti a gondolatmenetet az általános esetre.

3.5.1. A megoldás egyértelműsége

Minden differenciálegyenlet esetén az alapvető kérdés az egyenlet megoldhatósága, illetve a megoldás egyértelműsége. Első lépésben az egyértelműség kérdését tisztázzuk. Először az erős megoldások egyértelműségét tárgyaljuk. A tárgyalás során szükségünk lesz a közismert Gronwall-egyenlőtlenségre.

3.90. Lemma. *Ha valamely folytonos f függvény esetén minden $t\geq 0$ esetén*

$$0\leq f(t)\leq\alpha(t)+\int_0^t\beta(s)f(s)\,ds,$$

ahol α integrálható, $\beta\geq 0$ és folytonos, akkor

$$f(t)\leq\alpha(t)+\int_0^t\alpha(s)\exp\left(\beta(t-s)\right)ds$$

minden $t\geq 0$ esetén. Speciálisan, ha minden $t\geq 0$ esetén

$$0\leq f(t)\leq\int_0^t\beta(s)f(s)\,ds,$$

akkor $f=0$.

3.91. Tétel (Egyértelműség)**.** *Legyenek a $b(t,x)$ és a $\sigma(t,x)$ folytonos, valós értékű függvények*[29]*. Ha az egyenlet b és σ együtthatói az x változó szerint lokálisan kielégítik a Lipschitz-feltételt, vagyis minden N esetén található olyan*

[29] Emlékeztetünk, hogy az egyszerűbb jelölés céljából csak az egydimenziós esettel foglalkozunk, de az állítás vektor értékű egyenletekre is teljesül.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

K_N konstans, amelyre

$$|b(t,x)-b(t,y)| \le K_N |x-y|,$$
$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le K_N |x-y|$$

valahányszor $t, |x|, |y| \le N$, akkor, adott kezdeti feltétel esetén, az egyenlet megoldása erős értelemben egyértelmű, vagyis az egyenlet bármely két megoldásának trajektóriái csak egy nullmértékű halmazban térhetnek el.

Bizonyítás. Legyenek X_1 és X_2 az egyenlet megoldásai. Legyen τ_1 az első olyan időpont, ahol az $|X_1|$ és τ_2 ahol az $|X_2|$ átlépi az N szintet. Legyen továbbá $\tau \triangleq \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge N$. A folytonosság miatt világos, hogy $|X_1^\tau| \le N$ és $|X_2^\tau| \le N$. Vegyük észre, hogy ha $N \nearrow \infty$, akkor a megállási idők sorozata egy nullmértékű halmaztól eltekintve a végtelenbe tart, mert ha nem így lenne, akkor egy pozitív mértékű halmazon az X_1 vagy az X_2 egy véges időtartományon korlátlan lenne, ami ellentmond annak, hogy a megoldások trajektóriái a teljes számegyenesen biztosan folytonosak. E miatt elegendő megmutatni, hogy $X_1^\tau = X_2^\tau$.

A két megoldást egymásból kivonva, felhasználva, hogy a kezdeti érték közös

$$X_1^\tau(t) - X_2^\tau(t) = \int_0^{t\wedge\tau} b(u, X_1(u)) - b(u, X_2(u))\, du + \\ + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma(u, X_1(u)) - \sigma(u, X_2(u))\, dw(u).$$

Tetszőleges u és v számokra

$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 \le 2\left(u^2+v^2\right).$$

Ezt felhasználva

$$\mathbf{E}\left(\left(X_1^\tau(t) - X_2^\tau(t)\right)^2\right) \le 2\cdot\mathbf{E}\left(\left(\int_0^{t\wedge\tau} b(u, X_1(u)) - b(u, X_2(u))\, du\right)^2\right) + \\ + 2\cdot\mathbf{E}\left(\left(\int_0^{t\wedge\tau} \sigma(u, X_1(u)) - \sigma(u, X_2(u))\, dw\right)^2\right).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A τ definíciója miatt az integrációs tartományon $|X_1(u)|, |X_2(u)| \leq N$, így az első várható értékre a Cauchy-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbf{E}\left(\left(\int_0^{t\wedge\tau} b(u, X_1(u)) - b(u, X_2(u))\, du\right)^2\right) \leq \tag{3.31}$$

$$\leq \mathbf{E}\left(\left(\int_0^{t\wedge\tau} |b(u, X_1(u)) - b(u, X_2(u))|\, du\right)^2\right) \leq$$

$$\leq K_N^2 \cdot \mathbf{E}\left(\left(\int_0^{t\wedge\tau} |X_1(u) - X_2(u)|\, du\right)^2\right) \leq$$

$$\leq K_N^2 \cdot t \cdot \mathbf{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau} (X_1(u) - X_2(u))^2\, du\right) \leq$$

$$\leq K_N^2 \cdot t \cdot \mathbf{E}\left(\int_0^{t} (X_1^\tau(u) - X_2^\tau(u))^2\, du\right).$$

A másik integrálban a Burkholder–Davis–Gundy-egyenlőtlenség (3.14) sorban szereplő legegyszerűbb verziója alapján

$$\mathbf{E}\left(\left(\int_0^{t\wedge\tau} \sigma(u, X_1(u)) - \sigma(u, X_2(u))\, dw\right)^2\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau} (\sigma(u, X_1(u)) - \sigma(u, X_2(u)))^2\, d[w]\right) \leq$$

$$\leq K_N^2 \cdot \mathbf{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau} (X_1(u) - X_2(u))^2\, du\right) \leq$$

$$\leq K_N^2 \cdot \mathbf{E}\left(\int_0^{t} (X_1^\tau(u) - X_2^\tau(u))^2\, du\right).$$

Ebből ha

$$f(t) \triangleq \mathbf{E}\left((X_1^\tau(t) - X_2^\tau(t))^2\right),$$

akkor tetszőleges, de rögzített T esetén a $[0, T]$ szakaszon a Fubini-tétel alapján

$$f(t) \leq 2K_N^2 (T+1) \int_0^t f(u)\, du.$$

Vegyük észre, hogy az X_1^τ és az X_2^τ korlátossága miatt az f folytonos. Így a Gronwall-egyenlőtlenség alapján $f = 0$. Így minden t-re majdnem minden kimenetelre $X_1^\tau(t) = X_2^\tau(t)$. Mivel a trajektóriák folytonosak, a racionális időpontokban való egyenlőségből következik a trajektóriák egyenlősége, így a racionális időpontokhoz tartozó nulla mértékű halmazokat egyesítve kapjuk, hogy az X_1^τ és az X_2^τ trajektóriái egy nulla valószínűségű halmaztól eltekintve azonosak. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.92. Példa. Lineáris differenciálegyenletek megoldása.

Tekintsük a Black–Scholes-modellben szereplő

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \quad S(0) = S_0$$

egyenletet. Az Itô-formula segítségével könnyen igazolható, hogy az

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma w(t)\right)$$

kielégíti az egyenletet. Világos, hogy az egyértelműségi tétel feltételei teljesülnek, és így az $S(t)$ az egyenlet egyetlen megoldása. Vegyük észre, hogy ugyanakkor a Bessel-folyamatot definiáló

$$dR = \frac{n-1}{2R}dt + dB$$

egyenletben az együtthatók nem teljesítik a tétel feltételeit. □

Bár az egyértelműségi tétel igen elegáns, valójában túl gyenge, ugyanis nem alkalmazható például a Bessel-folyamatok négyzetét megadó

$$d\rho = \delta dt + 2\sqrt{\rho}dw, \quad \rho(0) = x$$

alakú egyenletekre, vagy a pénzügyi matematikában fontos szerepet játszó

$$dr = \theta(\mu - r) + \sigma\sqrt{r}dw$$

CIR modellre[30], vagy a

$$dS = \mu S dt + \sigma S^{\gamma} dw$$

úgynevezett CEV modellre[31]. Ha az egyenlet egydimenziós, akkor az egyértelműségi tétel élesíthető:

3.93. Tétel (Yamada–Watanabe)**.** *Tegyük fel, hogy a vizsgált* (3.27) *sztochasztikus differenciálegyenlet egydimenziós és a* $b(t,x)$ *kielégíti a lokális Lipschitz-feltételt, vagyis minden* N*-re*

$$|b(t,x) - b(t,y)| \le K_N \cdot |x-y|, \quad t, |x|, |y| \le N$$

továbbá

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \le k(|x-y|),$$

[30] Cox–Ingersoll–Ross modell.
[31] Constant Elasticity of Variance modell.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ahol K_N minden N-re egy pozitív konstans és $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ egy olyan szigorúan monoton növekedő függvény, amelyre minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{k^2(u)} du = \infty.$$

Ilyenkor a megoldás, amennyiben létezik, egyértelmű.

Bizonyítás. A k függvényre tett feltételek szerint van olyan $a_n \searrow 0$ sorozat, amelyre

$$\int_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{1}{k^2(u)} du = n,$$

vagy ami ugyanaz,

$$\int_{a_n}^{a_{n-1}} \frac{1}{n \cdot k^2(u)} du = 1.$$

1. Legyenek (ρ_n) olyan kompakt tartójú, folytonos függvények, amelyek tartója része az $(0, a_{n-1})$ nyílt intervallumnak, $\int_0^{a_{n-1}} \rho_n(u)\, du = 1$, valamint

$$0 \le \rho_n(x) \le \frac{2}{n \cdot k^2(x)}. \tag{3.32}$$

A (ρ_n) függvények konstruálásához legyenek (δ_n) a $(-a_n/2,0)$ intervallumra támaszkodó folytonosan deriválható nem negatív függvények amelyek integrálja egy. Legyen továbbá

$$\rho_n(x) \stackrel{\circ}{=} \int_{a_{n-1}}^{a_n} \frac{1}{n \cdot k^2(v)} \delta_n(x - v)\, dv = \int_{-a_n/2}^{0} \frac{1}{n \cdot k^2(x - v)} \delta_n(v)\, dv.$$

A p_n tekinthető két sűrűségfüggvény konvolúciójának, így nem negatív, az integrálja egy és a tartója az $(a_n/2, a_{n-1})$ szakasz.

$$\left| \frac{1}{n \cdot k^2(x)} - \rho_n(x) \right| \le \int_{-a_n/2}^{0} \left| \frac{1}{n \cdot k^2(x)} - \frac{1}{n \cdot k^2(x - v)} \right| \delta_n(v)\, dv \le$$
$$\le \int_{-a_n/2}^{0} \frac{1}{n \cdot k^2(x)} \delta_n(v)\, dv = \frac{1}{n \cdot k^2(x)}.$$

Következésképpen

$$0 \le \rho_n(x) \le \frac{2}{n \cdot k^2(x)}.$$

Mivel a δ_n folytonosan deriválható, ezért a konvolúció képletéből látható, hogy a parametrikus integrál is deriválható így a ρ_n függvény eleget tesz a feltételeknek.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

2. Definiáljuk a

$$\psi_n(x) \stackrel{\circ}{=} \int_0^{|x|} \int_0^y \rho_n(u)\, du dy$$

függvényeket. Mivel a ρ_n folytonos, ezért a $\psi_n(x)$ kétszer folytonosan deriválható, és mivel a ρ_n integrálja egy, ezért $|\psi_n'(x)| \leq 1$ minden x esetén. Ha X_1 és X_2 két azonos kezdeti értékhez tartozó megoldás, akkor

$$X_1(t) - X_2(t) = \int_0^t b(s, X_1(s)) - b(s, X_2(s))\, ds + \\ + \int_0^t \sigma(s, X_1(s)) - \sigma(s, X_2(s))\, dw(s).$$

Meg kell mutatni, hogy $X_1 - X_2 = 0$, amihez nyilván elegendő belátni, hogy a másik oldal nulla. Ennek igazolásához lokalizálhatjuk az egyenlőséget, és feltehetjük, hogy $|X_1| \leq N$ és $|X_2| \leq N$, illetve hogy a lokalizált sztochasztikus integrál négyzetesen integrálható. A ψ_n kétszer folytonosan deriválható függvényt az $X_1 - X_2$ folyamatra alkalmazva az Itô-formula szerint, felhasználva, hogy $\psi_n(0) = 0$,

$$\psi_n(X_1(t) - X_2(t)) = \int_0^t \psi_n'(X_1(s) - X_2(s))\, d(X_1(s) - X_2(s)) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \psi_n''(X_1(s) - X_2(s))\, d[X_1(s) - X_2(s)].$$

Mivel a ψ_n' korlátos, így a sztochasztikus integrálok feltételezett martingál tulajdonsága miatt a dw-s tag várható értéke nulla, így

$$\mathbf{E}(\psi_n(X_1(t) - X_2(t))) = \\ = \mathbf{E}\left(\int_0^t \psi_n'(X_1(s) - X_2(s))\,(b(s, X_1(s)) - b(s, X_2(s)))\, ds\right) + \\ + \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(\int_0^t \psi_n''(X_1(s) - X_2(s))\,(\sigma(s, X_1(s)) - \sigma(s, X_2(s)))^2\, ds\right),$$

ahol kihasználtuk a polaritási és az asszociativitási szabályt, valamint hogy egy szemimartingál kvadratikus variációja éppen a lokális martingál rész kvadratikus variációja. Az együtthatók növekedésére tett feltételeket, illet-

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ve a $|\psi_n'| \leq 1$ becslést kihasználva

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\psi_n\left(X_1(t) - X_2(t)\right)\right) \leq \\
&\leq \mathbf{E}\left(\int_0^t \left|b\left(s, X_1(s)\right) - b\left(s, X_2(s)\right)\right| ds\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(\int_0^t \left|\psi_n''\left(X_1(s) - X_2(s)\right)\right| \left(\sigma\left(s, X_1(s)\right) - \sigma\left(s, X_2(s)\right)\right)^2 ds\right) \leq \\
&\leq K_N \int_0^t \mathbf{E}\left(\left|X_1(s) - X_2(s)\right|\right) ds + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbf{E}\left(\left|\psi_n''\left(X_1(s) - X_2(s)\right)\right| k^2\left(X_1(s) - X_2(s)\right)\right) ds.
\end{aligned}$$

A második integrál becsléséhez vegyük észre, hogy $|\psi_n''| = \rho_n$, és ezért a fenti (3.32) sor alapján a második integrálra

$$\int_0^t \mathbf{E}\left(\left|\psi_n''\left(X_1(s) - X_2(s)\right)\right| k^2\left(X_1(s) - X_2(s)\right)\right) ds \leq \int_0^t \mathbf{E}\left(\frac{2}{n}\right) ds = \frac{2}{n}t.$$

Összefoglalva

$$\mathbf{E}\left(\psi_n\left(X_1(t) - X_2(t)\right)\right) \leq K_N \int_0^t \mathbf{E}\left(\left|X_1(s) - X_2(s)\right|\right) ds + \frac{1}{n}t.$$

Ha $n \to \infty$, akkor a Fatou-lemma alapján

$$\mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} \psi_n\left(X_1(t) - X_2(t)\right)\right) \leq K_N \int_0^t \mathbf{E}\left(\left|X_1(s) - X_2(s)\right|\right) ds.$$

Tetszőleges x-re ha n elég nagy akkor $0 < a_{n-1} < x$ és mivel a $a_{n-1} \to 0$ és a ρ_n integrálja a $(0, a_{n-1})$ intervallumon egy ezért a Fatou-lemma alapján

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) &\stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \int_0^{|x|} \int_0^y \rho_n(u)\, du dy \geq \int_0^{|x|} \lim_{n\to\infty} \int_0^y \rho_n(u)\, du dy = \\
&= \int_0^{|x|} 1 dy dy = |x|.
\end{aligned}$$

Ebből

$$\mathbf{E}\left(\left|X_1(t) - X_2(t)\right|\right) \leq K_N \int_0^t \mathbf{E}\left(\left|X_1(s) - X_2(s)\right|\right) ds.$$

A Gronwall-egyenlőtlenség alapján $\mathbf{E}\left(\left|X_1(t) - X_2(t)\right|\right) = 0$, következésképpen az $X_1(t) = X_2(t)$ majdnem minden kimenetelre. Az X_1 és az X_2 folytonossága miatt, a nullmértékű halmazokat a racionális időpontokban egyesítve kapjuk, hogy az X_1 és az X_2 ekvivalens. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.94. Példa. A tételben $k(x) = x^\alpha$, ahol $\alpha \geq 1/2$ megfelelő. Ha a μ és a σ konstansok, akkor

$$dS = \mu S dt + \sigma\sqrt{|S|}dw$$

egyenletnek, ha létezik megoldása, akkor a megoldás egyértelmű.

Ha $\alpha = 1/2$, akkor a

$$\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$$

egyenlőtlenség miatt használható a feltétel. Hasonlóan ha $0 < \alpha \leq 1$, akkor

$$||x|^p - |y|^p| \leq |x-y|^p,$$

így ha $1/2 \leq \alpha \leq 1$ és a

$$dS = \mu S dt + \sigma |S|^\alpha dw$$

egyenletnek, ha létezik megoldása, akkor a megoldás egyértelmű. □

Yamada–Watanabe tétele némiképpen általánosítható. Ezt az általánosítást szokás összehasonlítási tételnek mondani.

3.95. Tétel (Összehasonlítási tétel)**.** *Tegyük fel, hogy a (b_1, σ) és a (b_2, σ) feladatok esetén teljesülnek a Yamada–Watanabe-tétel feltételei. Tegyük továbbá fel, hogy az egyenleteknek léteznek az X_1 és X_2 módon jelölt megoldásai. Ha $X_1(0) \leq X_2(0)$ és $b_1(t,x) \leq b_2(t,x)$, akkor egy nullmértékű halmaztól eltekintve $X_1(t) \leq X_2(t)$.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása csak annyiban más, hogy a ψ_n függvény helyett a $\psi_n \chi([0,\infty))$ függvényeket kell venni, amelyek az x^+ függvényhez fognak tartani, illetve értelemszerűen módosítani kell a $b_1 - b_2$ becslését:

$$\begin{aligned} b_1(s, X_1(s)) - b_2(s, X_2(s)) &= b_1(s, X_1(s)) - b_1(s, X_2(s)) + \\ &\quad + b_1(s, X_2(s)) - b_2(s, X_2(s)) \leq \\ &\leq b_1(s, X_1(s)) - b_1(s, X_2(s)) \leq K|X_1(s) - X_2(s)|, \end{aligned}$$

ugyanis a feltétel miatt $b_1 \leq b_2$. Ha $X_1(s) < X_2(s)$, akkor $\psi_n'(X_1(s) - X_2(s)) = 0$, így

$$\begin{aligned} &\psi_n'(X_1(s) - X_2(s))(b_1(s, X_1(s)) - b_2(s, X_2(s))) \leq \\ &\leq K \cdot |X_1(s) - X_2(s)| \chi(X_1(s) \geq X_2(s)) = K(X_1(s) - X_2(s))^+. \end{aligned}$$

Így a bizonyítás végén az $\mathbf{E}\left((X_1(t) - X_2(t))^+\right) = 0$ egyenlőséget kapjuk, amiből a majdnem mindenhol fennálló $X_1(t) \leq X_2(t)$ becsléshez jutunk. A nullmértékű halmazok összevonásával a már bemutatott módon kapjuk a tételt. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Felmerülhet a kérdés, hogy ha két különböző téren oldjuk meg az egyenletet, vagyis a valószínűségi mezőt nem rögzítjük előre, akkor mit lehet mondani a megoldás egyértelműségéről. A válasz nem túl meglepő, de mindenképpen igazolandó: Az eloszlások azonosak lesznek.

Emlékeztetünk, hogy egy X sztochasztikus folyamat eloszlásán az összes lehetséges $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ véges időpont sorozatokhoz tartozó $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_k))$ változók eloszlásainak halmazát értjük. Természetesen ha adott egy sztochasztikus folyamat, akkor a folyamat tekinthető egy függvénytér értékű valószínűségi változónak is. Ha a trajektóriák függvényterén adott valamiféle topológia, akkor a trajektóriák terén értelmezettek a Borel-halmazok, és eloszláson a Borel-halmazokon értelmezett $P(B) = \mathbf{P}\left(X^{-1}(B)\right)$ mértéket is érthetjük. Külön gondot kell fordítani arra, hogy a két definíció azonos eloszlásfogalmat definiáljon. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az X a teljes $\mathbb{R}_+$ időtengelyen értelmezve van. Ha az X folytonos, akkor az említett eloszlások tekinthetőek az $\mathbb{R}_+$ félegyenesen értelmezett folytonos függvények terének cilinderhalmazain értelmezett kompatibilis mértékcsaládnak[32]. A kompakt időtartományokon való egyenletes konvergenciára nézve a folytonos függvények tere egy teljes szeparábilis metrikus tér[33], amely Borel-halmazainak σ-algebrája megegyezik a koordinátaleképezések által generált σ-algebrával. Ennek igazolása viszonylag egyszerű: Egy oldalról elég meggondolni, hogy a koordinátaleképezések mindegyike folytonos a kompakt halmazokon egyenletes konvergencia topológiára nézve, így mérhető a Borel-halmazok σ-algebrájára, következésképpen a koordinátaleképezések által generált σ-algebra része a Borel-halmazok σ-algebrájának. Más oldalról, ha két folytonos függvény egy intervallum racionális időpontjaiban közel van, akkor a teljes intervallumon egyenletesen is közel van, így minden nyílt halmaz mérhető a koordinátaleképezések által generált σ-algebrára nézve, vagyis a Borel-halmazok mindegyike eleme a koordinátaleképezések által generált σ-algebrának. Ebből következően belátható, hogy a cilinderhalmazokon értelmezett valószínűségi mértékek tetszőleges kompatibilis családja kiterjeszthető a folytonos függvények Borel-halmazaira[34]. Az így kapott mértéket szintén szokás a folytonos trajektóriákkal rendelkező X folyamat eloszlásának mondani, vagyis a két definíció folytonos trajektóriák esetén azonos eredményre vezet[35].

[32] Miként ismert, egy mértékcsaládot kompatibilisnek mondunk, ha a halmaz mértéke nem függ attól, hogy miként reprezentáltuk a halmazt, és melyik mérték szerint vettük a mértékét, amennyiben persze az adott halmaznak több mérték szerint is vehetjük a mértékét.

[33] A távolságot a $d(f,g) = \sum_n \frac{1}{2^n} \sup_{0 \le x \le n} |f(x) - g(x)|$ formulával definiálhatjuk.

[34] V.ö.: 3.4.3. pont, 139. oldal.

[35] Érdemes megjegyezni, hogy nem folytonos trajektóriák esetében a helyzet nem ilyen egyszerű, és ezért ha a trajektóriák tere nem a folytonos függvények tere, akkor az

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.96. Tétel (Eloszlásban való egyértelműség)**.** *Ha valamely sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása bármely hordozó mező esetén egyértelmű, akkor a megoldások eloszlása is egyértelmű, feltéve persze, hogy a kezdeti értékek eloszlása azonos.*

Bizonyítás. A bizonyítás igen egyszerű, és a sztochasztikus folyamatok eloszlásának fogalmára épül. Az igazolást több apróbb részre bontjuk.

1. Jelölje $C(\mathbb{R}_+)$ a $t=0$ pontban nulla értéket felvevő folytonos függvények halmazát. Legyen w egy tetszőleges Wiener-folyamat. Mivel a trajektóriák folytonosak, a w tekinthető egy $\omega \mapsto w(\cdot,\omega) \in C(\mathbb{R}_+)$ leképezésnek, amely nyilván mérhető az $f \mapsto f(t)$ alakú koordinátaleképezések által generált σ-algebrára nézve. A Wiener-folyamat definíciójából evidens, hogy a $(w(t_1), w(t_2), \ldots, w(t_n))$ alakú vektorok eloszlása egyértelmű. A mértékek egyértelmű kiterjesztéséről szóló tételből evidens, hogy a w eloszlása nem függ a w Wiener-folyamattól. Az így kapott a $C(\mathbb{R}_+)$ téren értelmezett egyértelműen definiált mértéket szokás Wiener-mértéknek nevezni. Vagyis miközben rengeteg Wiener-folyamat van, a Wiener-mérték egyértelmű.

2. Tegyük fel, hogy az (X, w_X) pár megoldása az egyenletnek a w_X Wiener-folyamatot hordozó valamilyen mező felett. Ekkor az $(X(0), X - X(0), w_X)$ hármas eloszlása egy valószínűségi mérték az $\Omega \triangleq \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+)$ tér Borel-halmazain. Az $\widehat{X}(t,\omega)$ módon jelölt $(t,\omega) \triangleq (t,u,x,w) \mapsto x(t) + u$ hozzárendelés egy sztochasztikus folyamat, ugyanis az Ω elemeihez az idő egy függvényét rendeli. A folyamat eloszlása éppen azonos lesz az X eloszlásával. A $\widehat{W}(t,\omega)$ módon jelölt $(t,\omega) \triangleq (t,u,x,w) \mapsto w(t)$ folyamat eloszlása pedig azonos lesz a w_X Wiener-folyamat eloszlásával. Megmutatjuk, hogy az $\widehat{X}$ folyamat az Ω felett megoldása a differenciálegyenletnek, természetesen a $\widehat{W}$ Wiener-folyamat és az $\widehat{X}(0,\omega) = u$ kezdeti feltétel mellett. Ehhez az szükséges, hogy az $\widehat{X}(t) - \widehat{X}(0)$ változó értéke éppen megegyezzen a megfelelő két sztochasztikus integrál összegével. Ez pontosan azt jelenti, hogy az $\widehat{X}(t) - \widehat{X}(0)$ az

$$\widehat{Z}_n \triangleq \sum_k b\left(s_{k-1}^{(n)}, \widehat{X}\left(s_{k-1}^{(n)}\right)\right)\Delta s_k^{(n)} + \sum_k \sigma\left(s_{k-1}^{(n)}, \widehat{X}\left(s_{k-1}^{(n)}\right)\right)\Delta\widehat{W}\left(s_k^{(n)}\right)$$

közelítő összegek sztochasztikus konvergenciában vett határértéke. Mivel az (X, w_X) pár megoldása az egyenletnek, ezért az $X(t) - X(0)$ éppen a

$$Z_n \triangleq \sum_k b\left(s_{k-1}^{(n)}, X\left(s_{k-1}^{(n)}\right)\right)\Delta s_k^{(n)} + \sum_k \sigma\left(s_{k-1}^{(n)}, X\left(s_{k-1}^{(n)}\right)\right)\Delta w_X\left(s_k^{(n)}\right)$$

egyenletes konvergencia toplógia helyett egy másik speciális topológiát, az úgynevezett Szkorohod-topológiát, kell a trajektóriák terén bevezetni.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

sztochasztikus konvergenciában vett határértéke. A konstrukció miatt a kalapos és a kalap nélküli változók eloszlása azonos. A sztochasztikus konvergencia definíciójában szereplő $\mathbf{P}\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right)$ egyenlőtlenség csak az eloszlástól függ, ezért a kalap nélküli változók sztochasztikus konvergenciája implikálja a kalapos változók sztochasztikus konvergenciáját.

3. Legyen (Y, w_Y) egy másik megoldás. Tekintsük az

$$\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C\left(\mathbb{R}_+\right) \times C\left(\mathbb{R}_+\right) \times C\left(\mathbb{R}_+\right) \times C\left(\mathbb{R}_+\right)$$

téren az

$$\left(X\left(0\right), Y\left(0\right), X - X\left(0\right), Y - Y\left(0\right), w_X, w_Y\right)$$

eloszlását. Jelölje $g\left(B \mid x\right)$ az $X\left(0\right)$ kezdeti értékhez, vagyis az Ω szorzat első komponenséhez tartozó regresszív feltételes valószínűséget. A feltételes valószínűség definíciója alapján a szorzattér minden B Borel-halmazára és az $X\left(0\right)$ képterének minden C Borel-halmazára

$$P\left(B \cap \left\{X\left(0\right) \in C\right\}\right) = \int_C g\left(B \mid x\right) dF\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}} \chi_C g\left(B \mid x\right) dF\left(x\right) = \\ = \mathbf{E}\left(\chi_C\left(X\left(0\right)\right) g\left(B \mid X\left(0\right)\right)\right),$$

ahol $F\left(x\right)$ a kezdeti érték eloszlásfüggvénye és P az Ω téren bevezetett eloszlás. A transzformált valószínűségi változók várható értékének képletéből – felhasználva, hogy az $X\left(0\right)$ és az $Y\left(0\right)$ eloszlása megegyezik – evidens, hogy

$$\mathbf{E}(\chi_C(X(0))g(B \mid X(0))) = \int_C g(B \mid x)dF(x) = \mathbf{E}(\chi_C(Y(0))g(B \mid Y(0))).$$

Ha most B valamilyen az $X - X\left(0\right), Y - Y\left(0\right)$ komponensekhez tartozó Borel-mérhető halmaz, akkor a $\mathbf{P}\left(B \mid X\left(0\right) = x\right)$ és a $\mathbf{P}\left(B \mid Y\left(0\right) = y\right)$ regresszív feltételes valószínűségek nullmértékű halmaztól eltekintve azonosak. Hasonló gondolatmenet érvényes az utolsó két komponens, vagyis a w_X és a w_Y esetén is.

4. Végezetül vezessük be az ismételten Ω-val jelölt $\Omega \triangleq \mathbb{R} \times C\left(\mathbb{R}_+\right) \times \\ \times C\left(\mathbb{R}_+\right) \times C\left(\mathbb{R}_+\right)$ szorzatot és tekintsük rajta az

$$\left(X\left(0\right), X - X\left(0\right), Y - Y\left(0\right), w_X\right)$$

eloszlását. Vegyük észre, hogy az első és az utolsó komponensek esetén az X eloszlását használtuk, amely csak azért nem jelent problémát mert az előző pontban beláttuk, hogy a szorzaton generált mérték azonos az

$$\left(Y\left(0\right), X - X\left(0\right), Y - Y\left(0\right), w_Y\right)$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

eloszlásával. Az X és az Y megoldásokhoz hozzárendeljük az $\widehat{X} \triangleq u + x$ és az $\widehat{Y} \triangleq u + y$ folyamatokat, amelyek a kezdeti feltételek eloszlásának azonossága miatt a közös u melletti megoldásai a sztochasztikus differenciálegyenletnek. Az erős megoldás egyértelműsége miatt majdnem minden kimenetelre $\widehat{X} = \widehat{Y}$. De az $\widehat{X}$ eloszlása megegyezik az X eloszlásával az $\widehat{Y}$ eloszlása pedig megegyezik az Y eloszlásával. Következésképpen az X és az Y eloszlása azonos. □

A tétel bizonyításában követett gondolatmenet átvezet a megoldás létezésének vizsgálatához. Gyakran szokás hivatkozni a következő észrevételre:

3.97. Következmény (Egyértelmű trajektóriák és gyenge megoldás)**.** *Ha valamely sztochasztikus differenciálegyenletnek van gyenge megoldása és teljesül az erős megoldás egyértelműségének feltétele, akkor az egyenlet erős értelemben is megoldható.*

Bizonyítás. A gyenge megoldás létezése és az erős megoldás egyértelműsége miatt az

$$\Omega \triangleq \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+),$$
$$\mathcal{A} \triangleq \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+)) \times \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+)) = \mathcal{B}(\mathbb{R} \times C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathbb{R}_+))$$

mérhető téren definiálható a sztochasztikus differenciegyenlet P-vel jelölt egyértelmű eloszlása. Mivel az Ω egy teljes szeparábilis metrikus tér, ezért a P-nek van a harmadik komponens szerint vett reguláris feltétles valószínűsége, vagyis minden $w \in C(\mathbb{R}_+)$ esetén definiálható a

$$P(A \mid W = w) \triangleq P(A, w), \quad A \in \mathcal{A}$$

mérték, amely éppen a harmadik komponens, a Wiener-folyamat, által definiált σ-algebra szerinti feltételes valószínűség regressziós függvénye. Az egyszerűbb jelölés céljából, ha a $C(\mathbb{R}_+)$ egy részhalmazára hivatkozunk, akkor azt azonosítjuk az általa generált cilinderhalmazzal. Az előző tétel bizonyítása alapján ha tekintjük a

$$(P(f \in A, w) \times P(g \in B, w)) \cdot dW \triangleq Q((f, g) \in A \times B \mid W = w) \cdot dW$$

szorzatmértéket, ahol $A, B \in \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+))$, akkor definálhatunk két megoldást és az erős megoldás egyértelműsége miatt a Q mérték a

$$\Delta \triangleq \mathbb{R} \times \{f \times f \mid f \in C(\mathbb{R}_+)\} \times C(\mathbb{R}_+)$$

halmazra koncentrálódik. Rögzítsünk egy w értéket.

$$P(A, w) = P(A, w) \cdot P(C(\mathbb{R}_+), w) = Q(A \times C(\mathbb{R}_+), w) =$$
$$= Q(A \times C(\mathbb{R}_+) \cap \Delta, w) = Q(A \times A, w) = P^2(A, w),$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

amiből $P(A,w)$ tetszőleges A esetén vagy nulla, vagy egy. Mivel a $C(\mathbb{R}_+)$ egy szeparábilis metrikus tér a $C(\mathbb{R}_+)$ felírható megszámlálható, diszjunkt zárt gömb egyesítéseként. A $C(\mathbb{R}_+)$ tetszőleges zárt gömbökből álló partíciójában pontosan egy gömb valószínűsége lehet nulla, így ha a partíciókat minden határon túl finomítjuk, akkor, felhasználva, hogy a $C(\mathbb{R}_+)$ teljes, az egy valószínűségű gömbök egyetlen $f(w)$-vel jelölt pontra húzódnak. Az így kapott $w \mapsto f(w)$ leképezés a $C(\mathbb{R}_+)$ teret a $C(\mathbb{R}_+)$ térre képező Borel mérhető leképezés ugyanis tetszőleges $B \in \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+))$ halmaz esetén

$$\{w \mid f(w) \in B\} = P(B,w) = 1,$$

amely a w Borel-mérhető függvénye. $P(\{f(w)\},w) = 1$, következésképpen az

$$X(t,\omega) = X(t,(\lambda,f,w)) = \lambda + f(w)(t)$$

megoldása az egyenletnek ugyanis a konstrukció miatt az egyenlet megoldása a $(\lambda,f,w) \mapsto \lambda + f$ projekció és ez egy valószínűséggel megegyezik a $\lambda + f(w)$ leképezéssel.

Legyen most $\widetilde{w}$ egy tetszőleges Wiener-folyamat és legyen

$$\widetilde{X}(t,\omega) \triangleq f(\widetilde{w}(\omega))(t),$$

ahol $\widetilde{w}(\omega)$ az ω kimenetelhez tartozó trajektóriája a $\widetilde{w}$-nak. Az $\widetilde{X}$ egy összetett leképezés, amely során a belső függvény a Wiener-folyamat által megvalósított $w : \Omega \to C(\mathbb{R}_+)$ leképezés a külső függvény pedig az $f : C(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$ Borel-mérhető leképezés. Az adaptált folyamatok által generált σ-algebrára nézve az $\widetilde{X}$ mérhető marad, ezért az $\widetilde{X}$ adaptált marad. Legyen

$$\widetilde{Z}_n \triangleq \sum_k b\left(s_{k-1}^{(n)}, \widetilde{X}\left(s_{k-1}^{(n)}\right)\right)\Delta s_k^{(n)} + \sum_k \sigma\left(s_{k-1}^{(n)}, \widetilde{X}\left(s_{k-1}^{(n)}\right)\right)\Delta\widetilde{w}\left(s_k^{(n)}\right) =$$
$$= \sum_k b\left(s_{k-1}^{(n)}, f(\widetilde{w})\left(s_{k-1}^{(n)}\right)\right)\Delta s_k^{(n)} + \sum_k \sigma\left(s_{k-1}^{(n)}, f(\widetilde{w})\left(s_{k-1}^{(n)}\right)\right)\Delta\widetilde{w}\left(s_k^{(n)}\right).$$

A $\widetilde{Z}_n$ eloszlása megegyezik a

$$Z_n \triangleq \sum_k b\left(s_{k-1}^{(n)}, f(w)\left(s_{k-1}^{(n)}\right)\right)\Delta s_k^{(n)} + \sum_k \sigma\left(s_{k-1}^{(n)}, f(w)\left(s_{k-1}^{(n)}\right)\right)\Delta w\left(s_k^{(n)}\right)$$

eloszlásával, így $\widetilde{X}$ az egyenlet $\widetilde{w}$-hoz tartozó megoldása, ugyanis az $X - X(0) = f(w)$ megoldása az egyenletnek. □

3.5.2. Erős megoldás létezése

Az erős megoldások létezését a következő tétel garantálja:

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.98. Tétel (Erős megoldás létezése)**.** *Tegyük fel, hogy a* $b(t,x)$ *és a* $\sigma(t,x)$ *függvények folytonosak és*

$$|b(t,x)-b(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leq K\cdot|x-y|$$

és

$$|b(t,x)|^2+|\sigma(t,x)|^2\leq K^2\left(1+x^2\right).$$

Ha $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_0)$*, akkor az* $X(0)=\xi$ *kezdeti feltétel mellett az alpont elején definiált* (3.27) *egyenletnek van, mégpedig egyetlen* X *megoldása.*

Bizonyítás. A tétel feltételei mellett a megoldás egyértelmű. A megoldás létezését a közönséges differenciálegyenletekhez hasonlóan egy alkalmasan választott metrikus térben definiált iteráció határértékeként definiáljuk. Kézenfekvő módon legyen $X_0\stackrel{\circ}{=}\xi$ és

$$X_{k+1}(t)\stackrel{\circ}{=}X_0+\int_0^t b(s,X_k(s))\,ds+\int_0^t\sigma(s,X_k(s))\,dw(s).$$

Minden lépésben az X_k folyamatok folytonosak, következésképpen az integrandusok is folytonosak, így az iteráció korlátlanul folytatható. Triviálisan minden k indexre $X_k(0)=\xi$. Mivel a trajektóriák folytonosak, ezért a trajektóriák körében a természetes metrika a kompakt halmazokon való egyenletes konvergencia. Így a folyamatok között a természetes metrika a kompakt időtartományokon a sztochasztikus konvergenciában való egyenletes konvergencia.Tegyük fel, hogy van olyan X folyamat, hogy a megadott konvergenciában $X_k\to X$, vagyis minden $\varepsilon>0$ esetén

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\leq s\leq T}|X_k(s)-X(s)|>\varepsilon\right)\to 0.$$

A sztochasztikusan konvergens sorozatoknak van majdnem mindenhol konvergens részsorozata, így egy részsorozatra az X_k trajektóriái majdnem minden kimenetelre egyenletesen tartanak az X trajektóriáihoz, így az X majdnem minden kimenetelre folytonos. A feltétel szerint

$$|b(s,X_k(s))-b(s,X(s))|\leq K\cdot|X_k(s)-X(s)|,$$

így ha

$$|b(s,X_k(s))-b(s,X(s))|>\varepsilon,$$

akkor

$$|X_k(s)-X(s)|>\varepsilon/K,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

következésképpen

$$\mathbf{P}\left(\sup_{0\le s\le T}|b\left(s,X_k\left(s\right)\right)-b\left(s,X\left(s\right)\right)|>\varepsilon\right)\le$$
$$\le\mathbf{P}\left(\sup_{0\le s\le T}|X_k\left(s\right)-X\left(s\right)|>\frac{\varepsilon}{K}\right)\to 0.$$

Hasonló igaz a második integrátorra. Mivel a sztochasztikus és a közönséges integrálás véges időtartományon felcserélhető a sztochasztikusan egyenletes konvergenciával, ezért

$$X(t)\stackrel{\circ}{=}\lim_{k\to\infty}X_k(t)=\xi+\lim_{k\to\infty}\int_0^t b(s,X_k(s))ds+\lim_{k\to\infty}\int_0^t\sigma(s,X_k(s))dw(s)=$$
$$=\xi+\int_0^t b\left(s,X\left(s\right)\right)ds+\int_0^t\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)dw\left(s\right),$$

vagyis az X megoldása az egyenletnek.

Rögzítsünk egy $T<\infty$ számot és mutassuk meg az iteráció konvergenciáját a $[0,T]$ szakaszon. A konvergencia igazolásához a sztochasztikus konvergenciához képest egy valamivel erősebb konvergencia fogalmat választunk, nevezetesen az

$$\|X\|_T\stackrel{\circ}{=}\sqrt{\mathbf{E}\left(\max_{0\le s\le T}X^2\left(s\right)\right)}$$

normát. Miként könnyen látható, ha $\mathcal{X}$ a $[0,T]$ szakaszon értelmezett folytonos, adaptált folyamatok ekvivalencia osztályainak tere, akkor az $(\mathcal{X},\|\cdot\|_T)$ Banach-tér.

Mivel az $\mathcal{X}$ Banach-tér a konvergencia teljesüléséhez elég belátni, hogy az (X_k) Cauchy-sorozat. Az egyértelműség igazolásakor már bemutatott (3.31) becslés értelemszerű módosításával

$$\mathbf{E}\left(\max_{0\le u\le T}\left(\int_0^u b\left(s,X_k\left(s\right)\right)ds-\int_0^u b\left(s,X_{k-1}\left(s\right)\right)ds\right)^2\right)\le$$
$$\le\mathbf{E}\left(\max_{0\le u\le T}\left(\int_0^u\left|b\left(s,X_k\left(s\right)\right)-b\left(s,X_{k-1}\left(s\right)\right)\right|ds\right)^2\right)\le$$
$$\le K^2\cdot\mathbf{E}\left(\max_{0\le u\le T}\left(\int_0^u\left|X_k\left(s\right)-X_{k-1}\left(s\right)\right|ds\right)^2\right)\le$$
$$\le K^2\cdot\mathbf{E}\left(\max_{0\le u\le T}u\cdot\int_0^u\left(X_k\left(s\right)-X_{k-1}\left(s\right)\right)^2ds\right)\le$$
$$\le K^2T\int_0^T\mathbf{E}\left(X_k\left(s\right)-X_{k-1}\left(s\right)\right)^2ds.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Hasonlóan, szintén a már látott becslés értelemszerű módosításával a sztochasztikus integrálokra vonatkozó (3.15) Burkholder–Davis–Gundy-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\mathbf{E}\left(\left(\max_{0\le u\le T}\left(\int_0^u \sigma\left(s,X_k\left(s\right)\right)dw\left(s\right)-\int_0^u \sigma\left(s,X_{k-1}\left(s\right)\right)dw\left(s\right)\right)\right)^2\right)=$$

$$=\mathbf{E}\left(\left(\max_{0\le u\le T}\left(\int_0^u \sigma\left(s,X_k\left(s\right)\right)-\sigma\left(s,X_{k-1}\left(s\right)\right)dw\left(s\right)\right)\right)^2\right)\le$$

$$\le 4\cdot\mathbf{E}\left(\int_0^T\left(\sigma\left(s,X_k\left(s\right)\right)-\sigma\left(s,X_{k-1}\left(s\right)\right)\right)^2 ds\right)\le$$

$$\le 4\cdot K^2\cdot\mathbf{E}\left(\int_0^T\left(X_k\left(s\right)-X_{k-1}\left(s\right)\right)^2 ds\right).$$

Mivel $\left(a+b\right)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)$, ezért alkalmas L konstansra

$$\begin{aligned}\left\|X_{k+1}-X_k\right\|_T^2 &\triangleq \mathbf{E}\left(\max_{0\le t\le T}\left(X_{k+1}\left(s\right)-X_k\left(s\right)\right)^2\right)\le\\ &\le L\int_0^T\mathbf{E}\left(\left(X_k\left(s\right)-X_{k-1}\left(s\right)\right)^2\right)ds\le\\ &\le L\int_0^T\mathbf{E}\left(\max_{0\le t\le s}\left(X_k\left(t\right)-X_{k-1}\left(t\right)\right)^2\right)ds=\\ &= L\int_0^T\left\|X_k-X_{k-1}\right\|_s^2 ds.\end{aligned}$$

Az egyenlőtlenséget iteratíve használva

$$\left\|X_{k+1}-X_k\right\|_T^2\le L^k\int_0^T\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\ldots\left\|X_1-X_0\right\|_{t_k}^2 dt_k\ldots dt_2dt_1.$$

A kvadratikus növekedésre vonatkozó második feltétel és a feltételezett $\xi\in$ $\in L^2\left(\Omega\right)$ miatt ismételten a már bemutatott gondolatmenet alapján

$$\left\|X_1-X_0\right\|_T^2\triangleq\mathbf{E}\left(\max_{0\le u\le T}\left(\left(X_1\left(u\right)-X_0\left(u\right)\right)^2\right)\right)=$$

$$=\mathbf{E}\left(\max_{0\le u\le T}\left(\int_0^u b\left(s,\xi\right)ds+\int_0^u\sigma\left(s,\xi\right)dw\left(s\right)\right)^2\right)\le$$

$$\le 2\cdot\mathbf{E}\left(\max_{0\le u\le T}\left(\int_0^u b\left(s,\xi\right)ds\right)^2+\max_{0\le u\le T}\left(\int_0^u\sigma\left(s,\xi\right)dw\left(s\right)\right)^2\right)\le$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$$\leq 2 \cdot \mathbf{E}\left(T\int_0^T b^2(s,\xi)\,ds + 4\cdot\int_0^T \sigma^2(s,\xi)\,ds\right) \leq$$
$$\leq A \cdot \mathbf{E}\left(\int_0^T b^2(s,\xi) + \sigma^2(s,\xi)\,ds\right) \leq$$
$$\leq A \cdot \mathbf{E}\left(\int_0^T K^2\left(1+\xi^2\right)ds\right) < \infty.$$

A többszörös integrált indukcióval egyszerűen kiszámolhatjuk. Ha $k = 1$, akkor $\int_0^T dt_1 = T$. Ha $k = 2$, akkor

$$\int_0^T \int_0^{t_1} dt_2 dt_1 = \int_0^T t_1 dt_1 = \frac{T^2}{2},$$

illetve általában teljes indukcióval az integrál értéke $T^k/k!$. Ebből

$$\|X_{k+1} - X_k\|^2 \leq \|X_1 - X_0\|^2 \frac{(LT)^k}{k!},$$

így a Weierstrass-kritérium alapján az (X_k) Cauchy-sorozat, következésképpen az (X_k) sorozat konvergens. □

1. A feltétel szerint a ξ mérhető az $\mathcal{F}_0$-ra nézve. Ilyenkor mivel a w független növekményű, a ξ változó független a w Wiener-folyamattól. A ξ $\mathcal{F}_0$-mérhetőségét kihasználtuk, ugyanis többször felhasználtuk, hogy az (X_k) sorozat elemei adaptáltak arra a filtrációra nézve, amelyre nézve a w Wiener-folyamat. Természetesen ha a ξ nem mérhető az $\mathcal{F}_0$-ra nézve, akkor $\mathcal{F}$-mérhető megoldás nem is létezik. Ugyanakkor a filtráció meghatározásában szabadságunk van és mindaddig bővíthetjük a filtrációt, amíg a w Wiener-folyamat marad a kibővített filtrációra nézve. Ha például a ξ független a w-től, akkor a ξ és a w által generált filtrációra nézve a w Wiener-folyamat marad, így általában elég feltenni, hogy a ξ független a w-től és elegendő a filtrációt a $\sigma(\xi)$-vel bővíteni. Ilyenkor persze az X megoldás az új kibővített filtrációra lesz csak adaptált.

2. Időnként a tételben a kvadratikus növekedés feltétele helyett a

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|)$$

lineáris növekedés feltételét szokás megadni. Mivel

$$\frac{1}{2}|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq \sqrt{|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2} \leq$$
$$\leq K\sqrt{1+x^2} \leq K(1+|x|),$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

illetve ha

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|),$$

akkor

$$\begin{aligned} |b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 &\leq (|b(t,x)| + |\sigma(t,x)|)^2 \leq \\ &\leq K^2(1+|x|)^2 = \\ &= K^2\left(1+|x|^2+2|x|\right) \leq \\ &\leq K^2\left(1+|x|^2\right) + K^2\left(1+|x|^2\right), \end{aligned}$$

vagyis a két megkötés ekvivalens.

3. Vegyük észre, hogy a kvadratikus növekedés feltételét csak az

$$\mathbf{E}\left(\int_0^T b^2(s,\xi) + \sigma^2(s,\xi)\,ds\right) < \infty$$

becslésnél használtuk ki. Világos, hogy ha $\xi = x$ konstans, akkor ez biztosan teljesül a σ és a b feltételezett folytonossága miatt, és ilyenkor a kvadratikus növekedés feltételére nincsen szükség.

3.5.3. A martingálprobléma

A következőkben a gyenge megoldások létezését próbáljuk meg igazolni. Első lépésként az úgynevezett martingálproblémát definiáljuk. A sztochasztikus differenciálegyenlet együtthatóihoz rendeljük hozzá az

$$(Af)(t,x) \triangleq \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + b(t,x)\frac{\partial}{\partial x}f(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,x) \qquad (3.33)$$

differenciáloperátort. Az A értelmezési tartománya legyen az olyan $f(t,x)$ függvények halmaza, amelyek a t szerint folytonosan deriválhatóak az x szerint pedig kétszer folytonosan deriválhatóak. A függvényosztály szokásos jelölése $C^{1,2}$.

3.99. Lemma. *Legyen X a $dX = b\cdot dt + \sigma\cdot dw$ sztochasztikus differenciálegyenlet egy gyenge megoldása. Ha az $f(t,x)$ függvény az A operátor imént bevezetett $C^{1,2}$ értelmezési tartományának egy eleme, akkor az*

$$M^f(t) \triangleq f(t,X(t)) - f(0,X(0)) - \int_0^t (Af)(s,X(s))\,ds$$

egy folytonos lokális martingál. Ha az f kompakt tartójú, akkor az M^f minden véges intervallumon négyzetesen integrálható martingál. A lokális martingál, illetve a martingál tulajdonság természetesen a gyenge megoldás által meghatározott sztochasztikus alaptéren értendő.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Mivel az X egy gyenge megoldás, ezért egy alkalmas w Wiener-folyamattal

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s, X(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\, dw(s).$$

Az Itô-formula szerint

$$f(t, X(t)) - f(0, X(0)) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X(s))\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\, dX(s) + \\ + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X(s))\, d[X](s).$$

Az X kvadratikus variációja az első tag véges változásúsága és a polaritási szabály miatt

$$[X](s) = \int_0^s \sigma^2(u, X(u))\, d[w](u) = \int_0^s \sigma^2(u, X(u))\, du.$$

Az asszociativitási szabály alapján egyszerű behelyettesítéssel

$$M^f(t) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\, \sigma(s, X(s))\, dw(s).$$

Mivel a lokális martingálok szerinti sztochasztikus integrálok lokális martingálok, ezért a lemma első fele evidens. Tegyük fel, hogy az f kompakt tartójú, és legyen K az f tartója. Akkor az integrandus nulla a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(s, X(s))\, \sigma(s, X(s))\, \chi((s, X(s)) \in K)$$

halmazon kívül. A $\partial f/\partial x$ derivált és a σ folytonos függvények, ezért a $\partial f/\partial x(K)\, \sigma(K)$ halmaz korlátos, következésképpen az integrandus korlátos. Így a martingál kritérium miatt az M^f minden véges szakaszon négyzetesen integrálható martingál. □

3.100. Lemma. *Legyen X egy folytonos sztochasztikus folyamat és tegyük fel, hogy valamilyen $b(t,x)$ és $\sigma(t,x)$ folytonos függvényekkel definiált A operátorra tetszőleges az operátor értelmezési tartományába eső, vagyis minden $f \in C^{1,2}$ esetén az M^f lokális martingál. Akkor az X a*

$$dX(t) = b(t, X(t))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dw(t)$$

sztochasztikus differenciálegyenlet gyenge megoldása. A gyenge megoldásban szereplő Wiener-folyamat konstruálásához esetlegesen ki kell bővíteni az alapul vett sztochasztikus alapteret.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Az állítás igazolásához elég feltenni, hogy az $f(t,x)=x$ és az $f(t,x)=x^2$ függvényekkel az M^f lokális martingál. Legyen $f(t,x)=x$. Ha bevezetjük a $B(t)\stackrel{\circ}{=}\int_0^t b(s,X(s))\,ds$ jelölést, akkor a feltétel alapján az

$$X(t)-X(0)-\int_0^t b(s,X(s))\,ds=(X-B)(t)-(X-B)(0)$$

lokális martingál. Számoljuk ki a kvadratikus variációját! Ehhez használjuk fel az $f(x)=x^2$ függvényt. A feltétel miatt az

$$X^2(t)-X^2(0)-2\int_0^t X(s)\,b(s,X(s))\,ds-\int_0^t\sigma^2(s,X(s))\,ds=$$
$$=X^2(t)-X^2(0)-2\int_0^t X(s)\,dB(s)-\int_0^t\sigma^2(s,X(s))\,ds$$

szintén lokális martingál. A parciális integrálás formulája szerint

$$\int_0^t XdB=(XB)(t)-\int_0^t BdX$$

ugyanis mivel a B véges változású a keresztvariáció nulla. Ugyanakkor az Itô-formula szerint

$$B^2(t)=2\int_0^t BdB,$$

ugyanis ismételten a kvadratikus variáció nulla. Ezeket visszaírva, és ismételten a parciális integrálás formuláját használva

$$X^2(t)-X^2(0)-2(XB)(t)+2\int_0^t BdX-\int_0^t\sigma^2(s,X(s))\,ds=$$
$$=(X-B)^2(t)-(X(0)-B(0))^2-B^2+2\int_0^t BdX-\int_0^t\sigma^2(s,X(s))\,ds=$$
$$=(X-B)^2(t)-(X(0)-B(0))^2-B^2+$$
$$+2\int_0^t BdB+2\int_0^t Bd(X-B)-\int_0^t\sigma^2(s,X(s))\,ds=$$
$$=(X-B)^2(t)-(X(0)-B(0))^2+2\int_0^t Bd(X-B)-\int_0^t\sigma^2(s,X(s))\,ds.$$

Mivel az $X-B$ lokális martingál, ezért az $\int_0^t Bd(X-B)$ is lokális martingál. Következésképpen az

$$(X-B)^2(t)-(X(0)-B(0))^2-\int_0^t\sigma^2(s,X(s))\,ds$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

is lokális martingál. A kvadratikus variáció jellemzése alapján az $X-B$ kvadratikus variációja éppen

$$[X-B](t)=\int_0^t \sigma^2(s,X(s))\,ds.$$

Ha $\sigma(s,X(s))\neq 0$, akkor definiálhatjuk a

$$w(t)\stackrel{\circ}{=}\int_0^t \frac{1}{\sigma(s,X(s))}d(X-B)(s)$$

lokális martingált. Mivel a polaritási és asszociativitási szabály miatt

$$\begin{aligned}[w](t)&=\int_0^t \frac{1}{\sigma^2(s,X(s))}d[X-B](s)=\\&=\int_0^t \frac{1}{\sigma^2(s,X(s))}\sigma(s,X(s))^2\,ds=t,\end{aligned}$$

ezért a Lévy-féle karakterizációs tétel alapján a w Wiener-folyamat és

$$\begin{aligned}\int_0^t \sigma(s,X(s))\,dw(s)&=\int_0^t \sigma(s,X(s))\frac{1}{\sigma(s,X(s))}d(X-B)(s)=\\&=(X-B)(t)-(X-B)(0),\end{aligned}$$

amit átrendezve

$$\begin{aligned}X(t)-X(0)&=B(t)+\int_0^t \sigma(s,X(s))\,dw(s)=\\&=\int_0^t b(t,X(s))\,ds+\int_0^t \sigma(s,X(s))\,dw(s),\end{aligned}$$

vagyis az X gyenge megoldása az egyenletnek. Ha azonban a $\sigma(s,X(s))\neq 0$ feltétellel nem akarunk élni, akkor az alapteret ki kell bővíteni. Az X folyamatot hordozó alaptér mellett tekintsünk egy tetszőleges másik valószínűségi mezőt, amelyen értelmezve van egy $\widetilde{w}$ Wiener-folyamat. Például tekinthetjük a nullából induló folytonos függvények terét a Wiener-mértékkel. Kibővített valószínűségi mezőnek definiáljuk az alaptér és a $\widetilde{w}$ folyamatot hordozó tér szorzatát.

Az egyszerűbb jelölés céljából legyen $L\stackrel{\circ}{=}X-B$. Legyen továbbá

$$\begin{aligned}\widehat{w}(t)\stackrel{\circ}{=}&\int_0^t \frac{1}{\sigma(s,X(s))}\chi(\sigma(s,X(s))\neq 0)\,dL(s)+\\&+\int_0^t \chi(\sigma(s,X(s))=0)\,d\widetilde{w}(s).\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Számoljuk ki a $\widehat{w}$ kvadratikus variációját. Az összeg kvadratikus variációja és a polaritási formula alkalmazásával

$$\begin{aligned}
[\widehat{w}](t) &= \int_0^t \frac{1}{\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)^2}\chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)\neq 0\right)d\left[L\right]\left(s\right)+\\
&\quad+\int_0^t \chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)=0\right)d\left[\widetilde{w}\right]\left(s\right)+\\
&\quad+2\int_0^t \frac{1}{\sigma(s,X(s))}\chi(\sigma(s,X(s))\neq 0)\chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)=0\right)d\left[L,\widetilde{w}\right]\left(s\right)=\\
&=\int_0^t \frac{1}{\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)^2}\chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)\neq 0\right)\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)^2 ds+\\
&\quad+\int_0^t \chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)=0\right)ds=\\
&=\int_0^t \chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)\neq 0\right)ds+\int_0^t \chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)=0\right)ds=t.
\end{aligned}$$

Vagyis a Lévy-féle karakterizációs tétel miatt a $\widehat{w}$ ismét Wiener-folyamat. Vegyük észre, hogy

$$\left[\int_0^t \chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)=0\right)dL\left(s\right)\right]=\int_0^t \sigma^2\left(s,X\left(s\right)\right)\chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)=0\right)ds=0,$$

következésképpen

$$\int_0^t \chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)=0\right)dL\left(s\right)=0.$$

Ebből a $\widehat{w}$ definícióját beírva, az asszociativitási szabály alapján

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \sigma\left(s,X\left(s\right)\right)d\widehat{w}\left(s\right)=\\
&=\int_0^t \sigma\left(s,X\left(s\right)\right)\frac{1}{\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)}\chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)\neq 0\right)dL\left(s\right)+\\
&\quad+\int_0^t \sigma\left(s,X\left(s\right)\right)\chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)=0\right)d\widetilde{w}\left(s\right)=\\
&=\int_0^t \chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)\neq 0\right)dL\left(s\right)=\\
&=\int_0^t \chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)\neq 0\right)dL\left(s\right)+\int_0^t \chi\left(\sigma\left(s,X\left(s\right)\right)=0\right)dL\left(s\right)=\\
&=\int_0^t 1dL=L\left(t\right)-L\left(0\right).
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az $L \triangleq X - B$ jelölést visszaírva

$$\int_0^t \sigma(s, X(s))\, d\widehat{w}(s) = X(t) - X(0) - \int_0^t b(s, X(s))\, ds,$$

amit átrendezve

$$X(t) - X(0) = \int_0^t b(s, X(s))\, ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\, d\widehat{w}(s),$$

így az X valóban gyenge megoldása az egyenletnek. □

A figyelmes olvasó azonnal észrevette, hogy a $\sigma(s, X(s)) = 0$ esetben a sztochasztikus integrálok integrandusai nem balról folytonos függvények. Az ebből eredő problémákat a következő pontban a sztochasztikus integrálás kiterjesztésével fogjuk orvosolni.

3.101. Lemma. *Az előző állításban elegendő feltenni, hogy minden kompakt tartójú kétszer folytonosan deriválható $f(x)$ esetén az M^f martingál.*

Bizonyítás. Tekintsük a

$$\tau_n \triangleq \inf\{t \mid |X(t)| \geq n\}$$

szintátlépési időket. Legyen g_n egy olyan kompakt tartójú, kétszer deriválható függvény amely a $[-n, n]$ szakaszon éppen egy. Ekkor ha $f(x) = x$, vagy $f(x) = x^2$, akkor az fg_n szorzathoz tartozó M^{fg_n} lokális martingál valódi martingál, ugyanis az fg_n kompakt tartójú. Ugyanakkor az $M^{fg_n}(t) - M^{fg_n}(0)$ martingált megállítva a τ_n pontban

$$fg_n(X(\tau_n \wedge t)) - \int_0^{\tau_n \wedge t} Afg_n(X(s))ds = f(X(\tau_n \wedge t)) - \int_0^{\tau_n \wedge t} Af(X(s))\, ds$$

egy martingál. Következésképpen az M^f lokális martingál. □

3.102. Definíció. Ha egy X folyamatra tetszőleges $f(t, x)$ kompakt tartójú, a t szerint folytonosan deriválható, az x szerint kétszer folytonosan deriválható függvényre az M^f martingál, akkor azt mondjuk, hogy az X megoldása a martingálproblémának.

3.103. Példa. Wiener-folyamat és a tükrözött Wiener-folyamat mint sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása.

Ha a sztochasztikus differenciálegyenlet b és σ paraméterei nem függnek az időtől, akkor az A operátor helyettesíthető az

$$(Af)(x) \triangleq b(x)\frac{d}{dx}f(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

másodrendű, lineáris differenciáloperátorral. Ezek közül a legegyszerűbb a $b = 0$, $\sigma = 1$ eset, amelyhez tartozó megoldások értelemszerűen a különböző pontokból elindított Wiener-folyamatok. Például ha $f(x) = x^2$, akkor

$$M^f(t) \stackrel{\circ}{=} w^2(t) - w^2(0) - \int_0^t 1 ds = w^2(t) - t,$$

amely lokális martingál. Ha $f(x) = x$, akkor

$$M^f(t) \stackrel{\circ}{=} w(t) - w(0) - \int_0^t 0 ds = w(t),$$

amely szintén lokális martingál. Vegyük észre, hogy ha a w helyébe a $|w|$ tükrözött Wiener-folyamatot írjuk, akkor az első kifejezés továbbra is lokális martingál lesz, a második azonban nem. Legyen f egy olyan kétszer folytonosan deriválható függvény, amelyre $f'(0) = 0$. Ilyenkor a

$$g(x) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \geq 0 \\ f(-x), & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

szintén egy kétszer folytonosan deriválható függvény. A g szimmetriája miatt

$$M^f(t) = f(|w|(t)) - f(|w|(0)) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(|w|(t))\, ds =$$
$$= g(w(t)) - g(w(0)) - \frac{1}{2}\int_0^t g''(w(t))\, ds,$$

amely az Itô-formula miatt lokális martingál. A w és a $|w|$ Markov-folyamatok, így, miként alább látni fogjuk, definiálható a

$$(Gf)(x) \stackrel{\circ}{=} \lim_{h \searrow 0} \frac{E^x(f(X(h))) - f(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \searrow 0} \frac{E^x(f(X(h))) - E^x(f(X(0)))}{h}$$

infinitezimális generátoruk. Érdemes felidézni, hogy Markov-folyamatok esetén minden x esetén definálható egy az x pontból egy valószínűséggel elindított folyamat P^x eloszlása. Az E^x az ehhez az eloszláshoz tartozó várható érték. A G operátor értelmezési tartománya értelemszerűen azokból az f függvényekből áll, amelyekre a határérték az X folyamat minden lehetséges indulóállapota esetén létezik és persze véges. Ha X egy Wiener-folyamat és f egy kompakt tartójú, kétszer folytonosan deriválható függvény, akkor az imént elmondottak alapján, felhasználva, hogy mivel az f kompakt tartójú

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ezért az M^f valódi martingál[36]

$$(Gf)(x) = \lim_{h\searrow 0} \frac{E^x(f(w(h))) - f(x)}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{E^x(f(w(h)) - f(w(0)))}{h} = \tag{3.34}$$

$$= \lim_{h\searrow 0} \frac{E^x\left(M^f(h) + \int_0^h (Af)(w(s))\,ds\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\searrow 0} \frac{E^x\left(\int_0^h (Af)(w(s))\,ds\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\searrow 0} \frac{1}{2} \frac{E^x\left(\int_0^h f''(w(s))ds\right)}{h} = \frac{1}{2} E^x\left(\lim_{h\searrow 0} \frac{\int_0^h f''(w(s))ds}{h}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} E^x\left(f''(w(0))\right) = \frac{1}{2} f''(x),$$

ahol kihasználtuk, hogy mivel az f'' folytonos és kompakt tartójú, ezért korlátos, így a várható érték alatti kifejezés is egyenletesen korlátos, így a határérték és a várható érték felcserélhető. Vagyis a Wiener-folyamatok mint Markov-folyamatok infinitezimális generátorának értelmezési tartománya tartalmazza a kompakt tartójú, kétszer folytonosan deriválható függvényeket, és ezen az osztályon a G éppen az $f''/2$ operátor. Ha azonban az X a tükrözött Wiener-folyamat, akkor az X értékkészlete az $\mathbb{R}^+$, így az infinitezimális generátora is csak az $\mathbb{R}_+$-on értelmezett függvényekből áll, de csak az olyan kétszer deriválható függvényeket tartalmazza, amelyekre $f'(0) = 0$. Például ha $f \geq 0$, és az $x = 0$ egy δ sugarú környezetében $f(x) = x$, akkor[37]

$$(Gf)(0) \stackrel{\circ}{=} \lim_{h\searrow 0} \frac{E^0(f(|w|(h))) - 0}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{1}{h\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}} f(|z|) \exp\left(-\frac{z^2}{2h}\right) dz =$$

$$= \lim_{h\searrow 0} \frac{2}{h\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbf{0}}^{\infty} f(z) \exp\left(-\frac{z^2}{2h}\right) dz =$$

$$= \lim_{h\searrow 0} \frac{2}{h\sqrt{2\pi h}} \int_0^{\infty} f\left(\sqrt{h}u\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sqrt{h} du \geq$$

$$\geq \lim_{h\searrow 0} \frac{2}{h\sqrt{2\pi h}} \int_0^{\delta/\sqrt{h}} \sqrt{h}u \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \sqrt{h} du \geq \lim_{h\searrow 0} \frac{C}{\sqrt{h}} \to \infty.$$

Az elmondottak közvetlen általánosításával azonnal belátható, hogy ha egy sztochasztikus differenciálegyenlet b és σ paraméterei folytonosak és nem

[36] A Markov-folyamat definíciójával összhangban $w(t)$ most az x pontból indított Wiener-folyamatot jelöli.

[37] Az f természetesen nem kompakt tartójú, de a példa alapján könnyen csinálható olyan példa is, ahol az f kompakt tartójú, illetve a számolás egyszerű módosításával belátható, hogy valahányszor $f \in C^2$ és $f'(0) \neq 0$, akkor a határérték nem létezik.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

függnek a t-től, akkor a megoldásokból készített homogén Markov-folyamatok infinitezimális generátora értelmezve van a kétszer folytonosan deriválható, kompakt tartójú függvények téren, ahol a generátor éppen az

$$(Af)(x) = b(x) f'(x) + \frac{1}{2}\sigma(x) f''(x)$$

differenciáloperátor. Ebből következően a $|w|$ egyetlen ilyen típusú sztochasztikus differenciálegyenletnek sem lehet a megoldása. A sztochasztikus folyamatok elméletének terminológiája szerint a $|w|$ tükrözött Wiener-folyamat folytonos diffúzió, de nem Itô-diffúzió. □

3.5.4. Gyenge megoldások létezése, Szkorohod tétele

A sztochasztikus differenciálegyenletek elméletének egyik legszebb eredménye a következő:

3.104. Tétel (Szkorohod egzisztencia tétele)**.** *Ha a $b(t,x)$ és a $\sigma(t,x)$ függvények folytonosak és teljesül a lineáris növekedés feltétele, vagyis alkalmas L konstanssal*

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq L \cdot (1 + |x|),$$

akkor a

$$dX(t) = b(t, X(t))\, dt + \sigma(t, X(t))\, dw(t), \quad X(0) = x$$

egyenletnek van gyenge megoldása, vagyis egy alkalmas valószínűségi mezőn az egyenletnek van olyan X megoldása, amelyre $X(0) = x$.

A tétel bizonyításához szükségünk lesz néhány valószínűségszámításból ismert eredményre. Ezeket először röviden ismertetjük. Az első az ugyancsak Szkorohodtól származó reprezentációs tétel:

3.105. Állítás (Szkorohod)**.** *Legyen (X,d) egy teljes szeparábilis metrikus tér, és legyen (P_n) az (X,d) Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mértékek egy sorozata, amely gyengén tart egy P valószínűségi mértékhez. Ekkor található olyan $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező és az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ téren értelmezett (X,d) értékű valószínűségi változók (ξ_n) sorozata, amelyre egyrészt a ξ_n eloszlása éppen P_n, másrészt a ξ_n majdnem minden kimenetelre tart egy ξ változóhoz, amely eloszlása éppen P. Vagyis egy teljes szeparábilis metrikus téren a valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája reprezentálható valószínűségi változók majdnem mindenhol való konvergenciájával.*

A másik állítás a Prohorovtól származó következő kompaktsági feltétel:

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.106. Állítás (Prohorov)**.** *Legyen (X,d) egy metrikus tér. Az $(X,\mathcal{B}(X))$ téren értelmezett (P_n) valószínűségi mértékeket szorosnak mondjuk, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik $K_\varepsilon\subseteq X$ kompakt halmaz, hogy minden n-re egyidejűleg $P_n(K^c)\leq\varepsilon$. Ha valamely (X,d) metrikus tér Borel-halmazain értelmezett (P_n) sorozat szoros, akkor a sorozatnak létezik (P_{n_k}) gyengén konvergens részsorozata.*

Szkorohod egzisztencia tételének bizonyítása során Prohorov tételét a $C([0,\infty))$ metrikus téren akarjuk alkalmazni[38]. A szorossági feltétel megtalálásához szükségünk lesz az folytonos függvények terében a kompaktságot karakterizáló Arzelà–Ascolli-tételre:

3.107. Állítás (Arzelà–Ascolli)**.** *Legyen $\mathcal{F}$ valamely $[a,b]$ kompakt szakaszon értelmezett folytonos függvények egy családja. Az $\mathcal{F}$ lezártja pontosan akkor kompakt az egyenletes konvergencia topológiában, ha az $\mathcal{F}$ pontonként korlátos és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos, vagyis minden x pontban az $\{f(x)\mid f\in\mathcal{F}\}$ halmaz korlátos és bármilyen $\varepsilon>0$ számhoz van olyan δ, hogy minden $f\in\mathcal{F}$ esetén $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ valahányszor $|x-y|<\delta$.*

Az Arzelà–Ascolli-tétellel karakterizálhatjuk a folytonos függvények terén értelmezett szoros sorozatokat:

3.108. Állítás. *Legyen (P_n) a $C([0,\infty))$ téren értelmezett valószínűségi mértékek egy családja. A (P_n) halmaz pontosan akkor szoros, ha*

$$\lim_{y\nearrow\infty}\sup_n P_n(|f(0)|>y)=0$$

és bármely T és $\varepsilon>0$ esetén

$$\lim_{\delta\searrow 0}\sup_n P_n(\{f\mid U(f,T,\delta)>\varepsilon\})=0,$$

ahol

$$U(f,T,\delta)\stackrel{\circ}{=}\max\{|f(t)-f(s)|\mid 0\leq s\leq t\leq T,|t-s|<\delta\}$$

az f függvény $[0,T]$ szakaszon δ-hoz tartozó folytonossági modulusa.

Bizonyítás. Egy metrikus térben egy K halmaz pontosan akkor kompakt, ha minden a halmazba eső sorozatnak van konvergens részsorozata. A $C([0,\infty))$

[38] Ha az X topológikus tér σ-kompakt, vagyis $X=\cup_{n=1}^\infty K_n$, ahol K_n kompakt, akkor az $\|f\|=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\sup_{x\in K_n}|f(x)|=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\|f\|_{C(K_n)}$ egy kvázinorma és a $d(f,g)=$ $=\|f-g\|$ egy teljes metrikus tér. Ha az X metrikus tér is, akkor a $C(X)$ teljes szeparábilis metrikus tér.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

topológiájának definíciója szerint ha egy sorozat konvergens, akkor a $[0,\infty)$ minden kompakt részhalmazán a sorozat egyenletesen konvergens. Megfordítva tegyük fel, hogy egy $K \subseteq C([0,\infty))$ halmazba eső függvények összessége minden $[0,T]$ alakú szakaszra való leszűkítése kompakt. Ha most $(f_n) \subseteq K$, akkor a sorozat leszűkítése a [0,1] intervallumra rendelkezik egy konvergens részsorozattal, amit jelöljön $\left(f_n^{(1)}\right)$. Ezt követően az $\left(f_n^{(1)}\right)$ leszűkítése a [0,2] intervallumra szintén rendelkezik egy konvergens részsorozattal, stb. Könnyen látható, hogy az $\left(f_n^{(n)}\right)$ úgynevezett diagonális sorozat, amely az (f_n) egy olyan részsorozata, amely a $[0,\infty)$ minden kompakt szakaszán egyenletesen konvergens. Ebből következően a $C([0,\infty))$ egy K részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha minden $[0,T]$ alakú szakaszra való leszűkítése kompakt.

Tegyük fel először, hogy a (P_n) mértéksorozat szoros. Legyen $\tau > 0$ tetszőleges, és legyen K olyan kompakt halmaz, amelyre $P_n(K) > 1-\tau$ minden n-re. Ekkor a K tetszőleges $[0,T]$ szakaszra való leszűkítése is kompakt. Ekkor az Arzelà–Ascolli-tétel miatt az $\{f(0) \mid f \in K\}$ halmaz korlátos, így ha y elég nagy, akkor az $\{|f(0)| > y\}$ halmaz nem eshet a K-ba, vagyis $P_n(|f(0)| > y) < \tau$ minden n-re, így az első feltétel teljesül. Az egyenlő mértékben való egyenletes folytonosság felhasználásával hasonlóan igazolható a második feltétel is.

A fordított irány igazolásához tegyük fel, hogy a két feltétel teljesül. Vegyünk egy $[0,T]$ szakaszt és egy $\tau > 0$ számot. Legyen $y > 0$ olyan, amelyre

$$\sup_n P_n(|f(0)| > y) \le \frac{\tau}{2^{T+1}}.$$

A (δ_k) sorozatot válasszuk úgy, hogy

$$\sup_n P_n\left(\left\{f \mid U(f,T,\delta_k) > \frac{1}{k}\right\}\right) \le \frac{\tau}{2^{T+k+1}}.$$

Legyen

$$K_T \triangleq \left\{f \mid |f(0)| \le y, U(f,T,\delta_k) \le \frac{1}{k}, k = 1,2,\ldots\right\}, \quad K \triangleq \cap_{T=1}^{\infty} K_T.$$

A K halmaz zárt és

$$P_n(K_T) \ge 1 - \frac{\tau}{2^{T+1}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau}{2^{T+k+1}} = 1 - \frac{\tau}{2^T}$$

és

$$P_n(K) \ge 1 - \sum_{T=1}^{\infty} \frac{\tau}{2^T} = 1 - \tau.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Meg kell mutatni, hogy a K kompakt a $C([0,\infty))$ térben. Az $f(0)$ korlátossága és az egyenlő mértékben való egyenletes folytonosság miatt minden $f \in K_T$ esetén

$$|f(t)| \le |f(0)| + \sum_k |f(t_k) - f(t_{k-1})| \le |f(0)| + N\varepsilon \le L,$$

vagyis a K_T halmazba eső függvények családja minden pontban egyenletesen korlátos, így az Arzelà–Ascolli-tétel miatt, a K_T lezártja kompakt a $C([0,T])$ térben. Mivel a K_T zárt, ezért a K_T kompakt a $C([0,T])$ térben, következésképpen a K kompakt a $C([0,\infty))$ térben. □

3.109. Állítás. *Legyen (X_n) valamely valószínűségi mezőn értelmezett folytonos sztochasztikus folyamatok egy családja. Ha léteznek α, β és γ pozitív konstansok, amelyekre minden n-re*

$$\mathbf{E}\left(|X_n(0)|^\gamma\right) \le M < \infty$$

és

$$\mathbf{E}\left(|X_n(t) - X_n(s)|^\alpha\right) \le M_T |t-s|^{1+\beta}, \quad 0 \le s \le t \le T,$$

akkor az (X_n) folyamatok eloszlásaiból álló (P_n) sorozat szoros.

Bizonyítás. A Markov-egyenlőtlenség szerint minden n-re

$$\mathbf{P}\left(|X_n(0)| > y\right) \le \frac{M}{y^\gamma},$$

és így ha $y \to \infty$, akkor az előző állítás első feltétele teljesül.

Legyen ε és $\delta > 0$ tetszőleges. Az egyszerűbb jelölés kedvéért feltehetjük, hogy a T egész szám. Ugyancsak a Markov-egyenlőtlenség szerint tetszőleges c esetén

$$\mathbf{P}\left(\left|X_n\left(\frac{i+1}{2^m}\right) - X_n\left(\frac{i}{2^m}\right)\right| > \frac{1}{2^{mc}}\right) \le M_T \left(\frac{1}{2^m}\right)^{1+\beta} 2^{\alpha m c} = \\ = M_T 2^{-m-m(\beta-c\alpha)}.$$

Felhasználva, hogy a $[0,T]$ szakaszban éppen $T\cdot 2^m$ darab diadikus intervallum van

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\le i\le 2^m T-1}\left|X_n\left(\frac{i+1}{2^m}\right) - X_n\left(\frac{i}{2^m}\right)\right| > \frac{1}{2^{mc}}\right) \le M_T T \cdot 2^{-m(\beta-c\alpha)}.$$

Legyen $0 < c\alpha < \beta$, továbbá a ν legyen olyan, amelyre

$$\frac{1 + 2/\left(2^c - 1\right)}{2^{\nu c}} < \varepsilon$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

és

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{m=\nu}^{\infty}\max_{0\le i\le 2^m T-1}\left|X_n\left(\frac{i+1}{2^m}\right)-X_n\left(\frac{i}{2^m}\right)\right|>\frac{1}{2^{mc}}\right)\le M_T T\sum_{m=\nu}^{\infty}2^{-m(\beta-c\alpha)}<\delta,$$

ahol ε és δ a korábban rögzített konstansok. Ha Ω_ν jelöli a valószínűség mögötti egyesítés által kijelölt halmazt, akkor értelemszerűen $\mathbf{P}(\Omega_\nu)<\delta$ és ha $\omega\notin\Omega_\nu$, akkor

$$\left|X_n\left(\frac{i+1}{2^m},\omega\right)-X_n\left(\frac{i}{2^m},\omega\right)\right|\le\frac{1}{2^{mc}},\quad m\ge\nu,\frac{i+1}{2^m}\le T.$$

Jelölje $\mathbb{D}_T$ a $[0,T]$ szakaszba eső diadikus racionális számokat. Az $[i/2^\nu,(i+1)/2^\nu)$ alakú intervallumba eső diadikus racionális számok felírhatók

$$s=i/2^\nu+\sum_{l=1}^{j}d_l/2^{\nu+l}$$

alakba, ahol értelemszerűen d_l 0, vagy 1. Ha $\omega\notin\Omega_\nu$, akkor a j darab digitális jegyet közbeszúrva

$$\left|X_n(s)-X_n\left(\frac{i}{2^\nu}\right)\right|\le\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{2^{(\nu+l)c}}\le\frac{1}{2^{\nu c}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{2^{lc}}=$$
$$=\frac{2^{-c}}{2^{\nu c}(1-2^{-c})}=\frac{1}{2^{\nu c}}\frac{1}{2^c-1}.$$

Legyenek $s,t\in\mathbb{D}_T$. Ha most alkalmas i-re

$$t\in\left[\frac{i-1}{2^\nu},\frac{i}{2^\nu}\right),\quad s\in\left[\frac{i}{2^\nu},\frac{i+1}{2^\nu}\right),$$

akkor a ν megválasztása miatt

$$|X_n(s)-X_n(t)|\le\left|X_n(s)-X_n\left(\frac{i}{2^\nu}\right)\right|+\left|X_n\left(\frac{i}{2^\nu}\right)-X_n\left(\frac{i-1}{2^\nu}\right)\right|+$$
$$+\left|X_n\left(\frac{i-1}{2^\nu}\right)-X_n(t)\right|\le$$
$$\le\frac{1}{2^{\nu c}}\frac{1}{2^c-1}+\frac{1}{2^{\nu c}}+\frac{1}{2^{\nu c}}\frac{1}{2^c-1}=\frac{1}{2^{\nu c}}\left(\frac{2}{2^c-1}+1\right)<\varepsilon.$$

Ha pedig

$$t\in\left[\frac{i}{2^\nu},\frac{i+1}{2^\nu}\right),\quad s\in\left[\frac{i}{2^\nu},\frac{i+1}{2^\nu}\right),$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

akkor, ismételten a ν megválasztása miatt

$$|X_n(s) - X_n(t)| \le \left|X_n(s) - X_n\left(\frac{i}{2^\nu}\right)\right| + \left|X_n\left(\frac{i}{2^\nu}\right) - X_n(t)\right| \le$$
$$\le 2\frac{1}{2^{\nu c}}\frac{1}{2^c - 1} < \varepsilon.$$

Ebből következően, ha $\omega \notin \Omega_\nu, s, t \in \mathbb{D}_T$ és $|s-t| \le 1/2^\nu$, akkor

$$|X_n(s) - X_n(t)| \le \varepsilon.$$

A $\mathbb{D}_T$ sűrű a $[0,T]$-ben és mivel az X_n folytonos, ezért ha $\omega \notin \Omega_\nu$, akkor az egyenlőtlenség minden $0 \le s \le t \le T$ esetén igaz. Ebből következően minden n-re

$$\mathbf{P}\left(\max_{s,t\in[0,T],|s-t|<2^{-\nu}} |X_n(s) - X_n(t)| > \varepsilon\right) \le \mathbf{P}(\Omega_\nu) < \delta$$

vagyis a második feltétel is teljesül. □

3.110. Állítás. *Szkorohod egzisztencia tétele teljesül, ha b és σ korlátos.*

Bizonyítás. Az állítás bizonyítását több lépésre bontjuk. Az állítás több dimenzióban is érvényes, de a jelölés egyszerűsége miatt csak az egydimenziós esetben mutatjuk meg. Az általános eset indoklása a bizonyítás egyszerű módosításával kapható. A bizonyítás alapgondolata viszonylag egyszerű: Első lépésben a b és σ függvényeket kicseréljük olyan (b_n) és (σ_n) függvényekre amelyekre teljesül az erős megoldás létezéséről szóló tétel. Az így kapott egyenleteket megoldjuk, majd a megoldásokból kapott (X_n) sorozatról belátjuk, hogy kielégíti a Prohorov-tétel feltételeit, vagyis belátjuk, hogy az (X_n) sorozat eloszlásainak halmaza tartalmaz egy gyengén konvergáló részsorozatot. Szkorohod reprezentációs tétele miatt található olyan valószínűségi mező, amely felett találhatók $\left(\widetilde{X}_n\right)$ függvényértékű valószínűségi változók, amelyek eloszlása megegyezik az (X_n) eloszlásával, és amelyre majdnem minden kimenetelre az $\left(\widetilde{X}_n\right)$ sorozat konvergál. A konstrukcióban szereplő (b_n) és a (σ_n) függvények minden t-re az x változó szerint a kompakt halmazokon egyenletesen tartanak a b és a σ függvényekhez. Vegyük észre, hogy miként azt korábban már többször használtuk az azonos eloszlás feltétele miatt az $\widetilde{X}_n$ szintén gyenge megoldása a sztochasztikus differenciálegyenletnek. Ennek oka az, hogy az egyenlet megoldása azt jelenti, hogy a folyamat két, a folyamattól függő, szochasztikus integrál összege. A sztochasztikus integrálok az integrandusok folytonossága miatt a közelítő összegek sztochasztikus konvergenciában vett határértékei és mivel az eloszlások azonosak ezért a közelítő összegek eloszlása is azonos és közelítő összegek sztochasztikus konvergenciája, illetve az összegnek a folyamathoz való konvergenciája is egyszerre teljesül. Mivel az

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$\left(\widetilde{X}_n\right)$ sorozat tagjai gyenge megoldásai a megfelelő egyenletnek, ezért kielégítik a b_n és a σ_n együtthatók által definiált $A_n f$ operátorhoz tartozó martingál problémát, vagyis tetszőleges f kompakt tartójú függvény esetén az

$$M_n^f(t) \triangleq f\left(t, \widetilde{X}_n(t)\right) - f\left(0, \widetilde{X}_n(0)\right) - \int_0^t (A_n f)\left(s, \widetilde{X}_n(s)\right) ds$$

martingál. Mivel $(A_n f)(t,x)$ minden t-re a b és a σ függvényekhez tartozó $(Af)(t,x)$ függvényhez tart, mégpedig az $f(t,x)$ x-szerinti tartóján egyenletesen, ezért

$$(A_n f)\left(s, \widetilde{X}_n(s)\right) \to (Af)\left(s, \widetilde{X}(s)\right).$$

Mivel az M_n^f egyenletesen korlátos, így a határérték a feltételes várható értékkel felcserélhető, ezért a határérték elvégzése után az $\widetilde{X}$ kielégíti a martingál problémát a b és a σ függvényekkel, így az $\widetilde{X}$ az eredeti egyenlet gyenge megoldása.

Most térjünk rá a bizonyítás egyes lépéseinek bemutatására.

1. Legyen $g(x) \geq 0$ olyan végtelen sokszor deriválható függvény, amely tartója része a $[-1,1]$ szakasznak, és amely integrálja egy. A

$$\begin{aligned}\sigma_n(t,x) &= n\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t,y)\, g(n(x-y))\, dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma\left(t, x - \frac{u}{n}\right) g(u)\, du = \\ &= \int_{-1}^{1} \sigma\left(t, x - \frac{u}{n}\right) g(u)\, du\end{aligned}$$

függvény minden t-re az x szerint végtelen sokszor deriválható és a deriválás elvégezhető az integráljel alatt. A σ_n függvények mindegyike korlátos és a közös korlátjuk megegyezik a σ korlátjával. A σ korlátossága miatt

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \sigma_n(t,x)}{\partial x}\right| &\leq n^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma(t,y) g'(n(x-y))| dy \leq L \cdot n^2 \int_{-\infty}^{\infty} |g'(n(x-y))|\, dy = \\ &= Ln\int_{-\infty}^{\infty} |g'(u)|\, du = Ln\int_{-1}^{1} |g'(u)|\, du \triangleq K,\end{aligned}$$

ahol az L a σ egy korlátja. Így a K Lipschitz-konstans választható a t-től függetlenül. A σ folytonos, így a kompakt halmazokon egyenletesen folytonos, ezért minden t-re

$$|\sigma_n(t,x) - \sigma(t,x)| \leq \int_{-1}^{1} \left|\sigma\left(t, x - \frac{u}{n}\right) - \sigma(t,x)\right| g(u)\, du \to 0$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

az x változó szerint kompakt halmazokon egyenletesen. Hasonlóan eljárva konstruálhatjuk a $b_n(t,x)$ függvényeket.

2. Legyen M olyan folytonos, korlátos martingál, amelyre $M(0)=0$. Az Itô-formula szerint

$$M^4(t) = 4\cdot M^3 \bullet M + 6\cdot M^2 \bullet [M].$$

Felhasználva, hogy az M korlátossága miatt az $M^3\bullet M$ sztochasztikus integrál martingál

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(M^4(t)\right) &= 6\cdot\mathbf{E}\left(\left(M^2\bullet[M]\right)(t)\right) \le 6\cdot\mathbf{E}\left(\sup_{0\le s\le t} M^2(s)\cdot[M](t)\right)\le\\ &\le 6\sqrt{\mathbf{E}\left(\left(\sup_{0\le s\le t} M^2(s)\right)^2\right)}\sqrt{\mathbf{E}\left([M]^2(t)\right)} =\\ &= 6\sqrt{\mathbf{E}\left(\sup_{0\le s\le t} M^4(s)\right)}\sqrt{\mathbf{E}\left([M]^2(t)\right)}.\end{aligned}$$

Az M^2 nem negatív submartingál, így a Doob-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\left(\sup_{0\le s\le t} M^2(s)\right)^2\right) &= \mathbf{E}\left(\sup_{0\le s\le t} M^4(s)\right)\le\\ &\le\left(\frac{2}{2-1}\right)^2\cdot\mathbf{E}\left(M^4(t)\right)\le\\ &\le 4\cdot 6\sqrt{\mathbf{E}\left(\sup_{0\le s\le t} M^4(s)\right)}\sqrt{\mathbf{E}\left([M]^2(t)\right)}\end{aligned}$$

vagyis alkalmas C konstanssal

$$\mathbf{E}\left(\sup_{0\le s\le t} M^4(s)\right)\le C\cdot\mathbf{E}\left([M]^2(t)\right),$$

ahol a C konstans független az M-től. Könnyen látható, hogy lokalizációval az egyenlőtlenség kiterjeszthető tetszőleges folytonos lokális martingálra[39].

3. A sztochasztikus differenciálegyenletek erős megoldásáról szóló tétel alapján léteznek a

$$dX_n(t) = b(t,X_n(t))\,dt + \sigma_n(t,X_n(t))\,dw$$

[39] Vegyük észre, hogy a belátott egyenlőtlenség az általános Burkholder–Davis–Gundy-egyenlőtlenség, $p=4$, egy speciális esetét igazoltuk. V.ö.: (3.16) sor, 107. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

megoldások. Az előző egyenlőtlenséget, valamint a b_n és a σ_n egyenletes korlátosságát felhasználva

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(\left(X_n(t)-X_n(s)\right)^4\right)=\\
&=\mathbf{E}\left(\left(\int_s^t b_n(u,X_n(u))\,du+\int_s^t \sigma_n(u,X_n(u))\,dw\right)^4\right)\leq\\
&\leq 8\cdot\mathbf{E}\left(\left(\int_s^t b_n(u,X_n(u))\,du\right)^4+\left(\int_s^t \sigma_n(u,X_n(u))\,dw\right)^4\right)\leq\\
&\leq C\cdot|t-s|^4.
\end{aligned}$$

Mivel $X_n(0)=x$, ezért az (X_n) sorozat teljesíti a Prohorov-tétel feltételeit, így a bizonyítás elején említett megfontolások miatt létező $\widetilde{X}$ gyenge megoldása a sztochasztikus differenciálegyenletnek. □

A bizonyítás következő lépéseként elhagyjuk a korlátosság feltételét és egyedül a b és a σ folytonosságát tesszük fel. Ilyenkor előfordulhat, hogy a megoldás egy véges időtartományon végtelenhez tart[40]. Ezt kezelendő definiáljuk a felrobbanó megoldás fogalmát: Tekintsük a fázistér, jelen esetben[41] az $\mathbb{R}$, egy pont kompaktifikációját[42], és a fázistér értékű folytonos függvények helyett tekintsük azokat a kompaktifikált térbe ható f folytonos függvényeket[43], amelyekre ha $f(t)=y^*$, ahol y^* a kompaktifikáció során a fázistérhez hozzávett pont, akkor minden $s\geq t$ esetén is $f(s)=y^*$. Másképpen fogalmazva a fázistérbe ható folytonos függvények helyett a lehetséges trajektóriák legyenek a kompaktifikált térbe ható folytonos függvények családja, de a trajektóriákat megállítjuk a kompaktifikációhoz használt y^* pont e-vel jelölt elérési idejében[44].

3.111. Definíció. Egy sztochasztikus differenciálegyenlet felrobbanó megoldásán egy olyan X a kompaktifikált térbe ható, folytonos és adaptált folyamatot értünk, amelyre a sztochasztikus differenciálegyenlethez tartozó (3.28) integrálegyenlet a $[0,e)$ véletlen intervallum minden pontjában teljesül.

Érdemes hangsúlyozni, hogy ha X egy felrobbanó megoldása egy sztochasztikus differenciálegyenletnek, akkor a

$$\tau_n \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid |X(t)|\geq n\}$$

[40] Gondoljuk például az $x'=x^2$ közönséges differenciálegyenletre.
[41] A gondolatmenet minden további nélkül alkalmazható akkor is, ha a fázistér valamilyen véges dimenziós $\mathbb{R}^d$ tér.
[42] A kompaktifikált tér egy kompakt metrikus tér.
[43] Egydimenziós fázistér esetén a kompaktifikált térben való folytonosság azt jelenti, hogy a robbanás időpontja felé haladva a trajektória nem oszcillálhat a két, $\pm\infty$, végtelen között.
[44] e mint explosion, robbanás.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

időpontok megállási idők, és $\tau_n \nearrow e$. Ennek igazolásához először megjegyezzük, az y^* környezetei az $\{|x| > \alpha\}$ alakú halmazok és mivel az X folytonos, ezért az $\{|X(t,\omega)| \mid t \le e(\omega)\}$ összefüggő, így $\tau_n \le e$. Ha $e(\omega) < \infty$, akkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a $[0, e(\omega) - \varepsilon]$ szakasz kompakt, ezért az $X(t,\omega)$ trajektória ezen a szakaszon valós értékű és ezért a folytonosság miatt korlátos, így elég nagy n indexre $\tau_n(\omega) \ge e(\omega) - \varepsilon$. Ha $e(\omega) = \infty$, akkor az $X(t,\omega)$ az egész időtengelyen valós értékű, így a $\tau_n \nearrow \infty$, ugyanis, ha a $(\tau_n(\omega))$ sorozat határértéke véges lenne, akkor ez ellentmondana annak, hogy az $X(t,\omega)$ valós értékű folytonos függvény. Megmutatjuk, hogy a τ_n megállási idő. Vegyük észre, hogy a τ_n egy zárt halmaz folytonos adaptált folyamat általi találati ideje, így a korábban bemutatott gondolatmenet egyszerűen módosítható:

$$\{\tau_n \le t\} = \{|X|([0,t]) \cap [0,n] \neq \emptyset\}$$

ugyanis a metszetben szereplő két halmaz kompakt, így amennyiben nincs közös pontjuk a távolságuk pozitív. Ebből következően

$$\{\tau_n > t\} = \{|X(r)| < n, r \in \mathbb{Q}, r \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Következésképpen az e is megállási idő, ugyanis

$$\{e \le t\} = \cap_n \{\tau_n \le t\} \in \mathcal{F}_t.$$

3.112. Lemma. *Ha a $b(t,x)$ és a $\sigma(t,x)$ folytonos függvények és teljesül a lineáris növekedési feltétel, illetve ha a b és a σ folytonos és nem függenek a t-től, akkor a fenti* (3.27) *sztochasztikus differenciálegyenlet rendelkezik felrobbanó gyenge megoldással*[45].

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy alkalmas valószínűségi mezőn létezik olyan a kompaktifikált térbe ható folytonos, adaptált sztochasztikus folyamat, amelyre ha ρ_n jelöli az $\{|X| \ge n\}$ halmaz találati idejét, akkor minden n-re és minden kétszer folytonosan deriválható, kompakt tartójú $f(x)$ függvény esetén az

$$L(t \wedge \rho_n) \stackrel{\circ}{=} f(X(t \wedge \rho_n)) - f(X(0)) - \int_0^{t \wedge \rho_n} Af(X(s))\, ds$$

martingál. Ebből következően az L a $[0, \lim \rho_n)$ véletlen intervallumon lokális martingál. Ebből a már bemutatott módon belátható, hogy az egyenletnek az X gyenge megoldása a $[0, \lim \rho_n) = [0, e)$ intervallumon. Legyen

$$p(t,x) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{1 + |b(t,x)| + |\sigma(t,x)|}.$$

[45] Később, Szkorohod tételének igazolásaként, megmutatjuk, hogy az első esetben a megoldás nem robban fel.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$0 < p \leq 1$ egy olyan folytonos függvény, amelyre a $\widetilde{b} \triangleq pb$ és az $\widetilde{\sigma} \triangleq p\sigma$ függvények korlátossak. Legyen $\widetilde{A}$ a megfelelő differenciáloperátor. Az előző állítás alapján van olyan valószínűségi mező, amelyen értelmezve van egy $\widetilde{X}$, amelyre az

$$\widetilde{L}(t) \triangleq f\left(\widetilde{X}(t)\right) - f\left(\widetilde{X}(0)\right) - \int_0^t \left(\widetilde{A}f\right)\left(\widetilde{X}(s)\right) ds \tag{3.35}$$

martingál. Legyen $Q(t) \triangleq \int_0^t p\left(s, \widetilde{X}(s)\right) ds$, és legyen

$$e \triangleq Q(\infty) = \int_0^\infty p\left(s, \widetilde{X}(s)\right) ds.$$

Mivel $0 < p \leq 1$ a Q minden t-re véges, illetve $0 < e \leq \infty$. Mivel $p > 0$ ezért a Q szigorúan monoton nő, és nyilván folytonos, így van folytonos inverze, amelyet jelöljön $\sigma(t)$. A $\sigma(t)$ nyilván a $[0, e)$ halmazon van értelmezve és $\lim_{t \nearrow e} \sigma(t) = \infty$. Mivel a p és az $\widetilde{X}$ folytonosak, ezért a Q definíciójában szereplő integrál tekinthető Riemann-integrálnak, ezért az integrál a közelítő összegek határértéke, így a Q adaptált, következésképpen, mivel a $\sigma(t)$ éppen azon első időpont, ahol a Q eléri a t szintet, a $\sigma(t)$ minden t időpontra megállási idő. Vezessük be a $\mathcal{G}_t \triangleq \mathcal{F}_{\sigma(t)}$ filtrációt és legyen

$$X(t) \triangleq \left\{ \begin{array}{cl} \widetilde{X}(\sigma(t)), & \text{ha } t < e \\ y^*, & \text{ha } t \geq e \end{array} \right|.$$

Alább egy külön lemmában belátjuk, hogy az $X(t)$ a kompaktifikált térbe ható folytonos leképezés. Ha ezt már tudjuk, akkor már majdnem készen vagyunk. Legyen τ_n az $\widetilde{X}$ szintátlépési ideje. A fenti (3.35) sorban definiált $\widetilde{L}$ $\mathcal{F}$-martingál. Ebből következően felhasználva, hogy az $\widetilde{A}$ definíciója alapján $\widetilde{A} = pA$

$$\widetilde{L}^{\tau_n}(t) = \widetilde{L}(\tau_n \wedge t) = f\left(\widetilde{X}(t \wedge \tau_n)\right) - f\left(\widetilde{X}(0)\right) - \int_0^{t\wedge\tau_n} \left(\widetilde{A}f\right)\left(\widetilde{X}(s)\right) ds =$$
$$= f\left(\widetilde{X}(t \wedge \tau_n)\right) - f\left(\widetilde{X}(0)\right) - \int_0^{t\wedge\tau_n} p\left(s, \widetilde{X}(s)\right)(Af)\left(\widetilde{X}(s)\right) ds$$

megállított folyamat is $\mathcal{F}$-martingál. Következésképpen a megállási opciókról szóló tétel miatt a $t \mapsto \sigma(t)$ helyettesítéssel kapott

$$t \mapsto \widetilde{L}^{\tau_n}(\sigma(t)) =$$
$$= f\left(\widetilde{X}(\sigma(t) \wedge \tau_n)\right) - f\left(\widetilde{X}(0)\right) - \int_0^{\sigma(t)\wedge\tau_n} p\left(s, \widetilde{X}(s)\right)(Af)\left(\widetilde{X}(s)\right) ds$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$\mathcal{G}$-martingál. Legyen ρ_n a bizonyítás elején bevezetett megállási idő, vagyis

$$\rho_n \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid |X(t)| \geq n\}.$$

Vegyük észre, hogy az X definíciója alapján $\tau_n = \sigma(\rho_n)$, így

$$\sigma(t) \wedge \tau_n = \sigma(t) \wedge \sigma(\tau_n) = \sigma(t \wedge \rho_n),$$

Ebből

$$\widetilde{X}(\sigma(t) \wedge \tau_n) = \widetilde{X}(\sigma(t \wedge \rho_n)) \stackrel{\circ}{=} X(t \wedge \rho_n).$$

Ugyanakkor

$$\int_0^t \frac{1}{p\left(s, \widetilde{X}(s)\right)} dQ(s) = \int_0^t \frac{p\left(s, \widetilde{X}(s)\right)}{p\left(s, \widetilde{X}(s)\right)} ds = t,$$

így $s = \sigma(s)$ helyettesítéssel

$$\sigma(t) = \int_0^{\sigma(t)} \frac{1}{p\left(s, \widetilde{X}(s)\right)} dQ(s) = \int_0^{\sigma(Q(s))} \frac{1}{p\left(\sigma(s), \widetilde{X}(\sigma(s))\right)} dQ(\sigma(s)) =$$
$$= \int_0^t \frac{1}{p(\sigma(s), X(s))} ds,$$

következésképpen ismét $s = \sigma(s)$ helyettesítéssel

$$\int_0^{\sigma(t\wedge\rho_n)} p\left(s, \widetilde{X}(s)\right)(Af)\left(\widetilde{X}(s)\right) ds =$$
$$= \int_0^{t\wedge\rho_n} p\left(\sigma(s), \widetilde{X}(\sigma(s))\right)(Af)\left(\widetilde{X}(\sigma(s))\right) d\sigma(s) = \int_0^{t\wedge\rho_n} (Af)(X(s)) ds.$$

Ebből az

$$\widetilde{L}^{\tau_n}(\sigma(t)) = f(X(t \wedge \rho_n)) - f(X(0)) - \int_0^{t\wedge\rho_n} (Af)(X(s)) ds$$

$\mathcal{G}$-martingál, amiből az állítás már evidens. □

Térjünk rá a lemmára:

3.113. Lemma. *Ha valamely ω kimenetelre $e(\omega) < \infty$, akkor a kompaktifikált tér topológiájában*

$$\lim_{t \nearrow e(\omega)} X(t, \omega) = y^*.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy ha egy ω kimenetelre

$$e(\omega) \stackrel{\circ}{=} \int_0^\infty p\left(s, \widetilde{X}(s,\omega)\right) ds < \infty,$$

akkor az ω-hoz tartozó trajektórián

$$\lim_{t \nearrow e(\omega)} X(t,\omega) = \lim_{t \nearrow e(\omega)} \widetilde{X}(\sigma(t,\omega),\omega) = \lim_{t \nearrow \infty} \widetilde{X}(t,\omega) = y^*.$$

Legyenek $0 < y < z$ olyanok, hogy $\left|\widetilde{X}(0)\right| = |x| < z$. Definiáljuk a megállási időkből álló következő sorozatot:

$$\begin{array}{cc} \sigma_1 \stackrel{\circ}{=} 0, & \tau_1 \stackrel{\circ}{=} \inf\left\{t > \sigma_1 \mid \left|\widetilde{X}(t)\right| > z\right\}, \\ \sigma_2 \stackrel{\circ}{=} \inf\left\{t > \tau_1 \mid \left|\widetilde{X}(t)\right| < y\right\}, & \tau_2 \stackrel{\circ}{=} \inf\left\{t > \sigma_2 \mid \left|\widetilde{X}(t)\right| > z\right\}. \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Egy adott kimenetelre három eset lehetséges: Van olyan n index, hogy $\tau_n < \infty$, és $\sigma_{n+1} = \infty$, vagy van olyan index, hogy $\sigma_n < \infty$, de $\tau_n = \infty$, illetve hogy minden n-re a σ_n és a τ_n véges. Megmutatjuk, hogy ha valamilyen $y < z$ esetén az utóbbi két eset teljesül, akkor $\int_0^\infty p\left(s, \widetilde{X}(s)\right) ds = \infty$.

1. Ha valamely kimenetelre $\sigma_n < \infty$ és $\tau_n = \infty$, akkor erre a kimenetelre a $t \geq \sigma_n$ halmazon $\left|\widetilde{X}(t)\right| \leq z$. Ha a b és a σ együtthatók függnek a t-től, akkor a feltételek szerint teljesül a lineáris növekedés feltétele, így

$$p\left(t, \widetilde{X}(t)\right) = \frac{1}{1 + \left|b\left(t, \widetilde{X}(t)\right)\right| + \left|\sigma\left(t, \widetilde{X}(t)\right)\right|} \geq \frac{1}{1 + L\left(1 + \left|\widetilde{X}(t)\right|\right)} \geq$$
$$\geq \frac{1}{1 + L(1+z)} \stackrel{\circ}{=} p^* > 0.$$

Ha a b és a σ nem függ a t-től, akkor a $\{|u| \leq z\}$ halmazon a folytonos $|b|$ és $|\sigma|$ rendelkezik maximummal, így

$$p\left(t, \widetilde{X}(t)\right) = p\left(\widetilde{X}(t)\right) = \frac{1}{1 + \left|b\left(\widetilde{X}(t)\right)\right| + \left|\sigma\left(\widetilde{X}(t)\right)\right|} \geq p^* > 0,$$

így mind a két esetben $\int_0^\infty p\left(s, \widetilde{X}(s)\right) ds = \infty$.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

2. Tekintsük azt az esetet, amikor a τ_n és a σ_n véges. Megmutatjuk, hogy ilyenkor $\sum_n (\tau_n - \sigma_n) = \infty$, következésképpen ilyenkor mind a két esetben

$$\int_0^\infty p\left(s, \widetilde{X}(s)\right) ds \geq \sum_n \int_{\sigma_n}^{\tau_n} p\left(s, \widetilde{X}(s)\right) ds \geq \sum_n \int_{\sigma_n}^{\tau_n} p^* ds = \\ = p^* \sum_n (\tau_n - \sigma_n) = \infty.$$

Elegendő belátni, hogy majdnem minden kimenetelre

$$\prod_n \chi(\sigma_n < \infty) \cdot \exp\left(-\sum (\tau_n - \sigma_n)\right) = \\ = \prod_n (\chi(\sigma_n < \infty) \exp(-(\tau_n - \sigma_n))) = 0.$$

Mivel a változók nem negatívak ez ekvivalens avval, hogy

$$\mathbf{E}\left(\prod_n (\chi(\sigma_n < \infty) \exp(-(\tau_n - \sigma_n)))\right) = 0.$$

A nem negatív változókra vonatkozó kiemelési szabály alapján, felhasználva, hogy a megállított σ-algebrák monotonok a megállási idő szerint, illetve hogy minden megállási idő mérhető a saját megállított σ-algebrájára nézve

$$\mathbf{E}\left(\prod_{n=1}^{m+1} (\chi(\sigma_n < \infty) \exp(-(\tau_n - \sigma_n))) \mid \mathcal{F}_{\sigma_{m+1}}\right) = \\ = \prod_{n=1}^{m} (\chi(\sigma_n < \infty) \exp(-(\tau_n - \sigma_n))) \times \\ \times \mathbf{E}\left(\chi(\sigma_{m+1} < \infty) \exp(-(\tau_{m+1} - \sigma_{m+1})) \mid \mathcal{F}_{\sigma_{m+1}}\right).$$

Vizsgáljuk meg a feltételes várható értéket. Az $\widetilde{X}(t)$ korlátos együtthatókkal kielégíti a sztochasztikus differenciálegyenletet, így felírható

$$\widetilde{X}(t) = \widetilde{X}(0) + M(t) + V(t)$$

alakban, ahol $V(t) = \int_0^t v(s)\, ds$ és M egy folytonos martingál, amely kvadratikus variációja $[M](t) = \int_0^t m^2(s)\, ds$, és ahol a v és az m^2 egyenletesen korlátos függvények. A közös korlátot jelölje $c > 0$. A következő pontban tárgyalt erős Markov-tulajdonság miatt a feltételes várható érték számolható úgy, mintha az $\widetilde{X}$ folyamatot a σ_{m+1} pontból indítottuk volna, vagyis mintha

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$\widetilde{X}(0) = y$ lenne és a τ_{m+1} a z pontba érkezés időpontja. Jelölje ν az első olyan időpontot, amikor a V túllép a $(z-y)/2$ szinten és μ, amikor az M átlépi a $(z-y)/2$ szintet. Világos, hogy $\tau_{m+1} \geq \nu \wedge \mu$. A V integrálelőállításából könnyen látható, hogy $\nu \geq (z-y)/(2c)$. Az

$$\exp\left((sM)^2 - \frac{1}{2}[sM]\right)$$

exponenciális martingálra és a $\mu \wedge k$ megállási időre alkalmazva a megállási opciókról szóló tételt, majd k-val végtelenhez tartva a Fatou-lemma felhasználásával

$$\mathbf{E}\left(\chi(\mu < \infty)\exp\left((sM)^2(\mu) - \frac{1}{2}[sM](\mu)\right)\right) \leq$$
$$\leq \mathbf{E}\left(\exp\left((sM)^2 - \frac{1}{2}[sM]\right)(0)\right) = 1.$$

Ugyanakkor

$$\chi(\mu < \infty)\exp\left(s^2 M^2(\mu)\right) = \chi(\mu < \infty)\exp\left(s^2\left(\frac{z-y}{2}\right)^2\right),$$

így

$$\mathbf{E}\left(\chi(\mu < \infty)\exp\left(-\frac{s^2}{2}[M](\mu)\right)\right) \leq \exp\left(-s^2\left(\frac{z-y}{2}\right)^2\right).$$

Továbbá

$$[M](\mu) = \int_0^\mu m^2(s)\,ds \leq c\mu,$$

vagyis

$$\mathbf{E}(\exp(-\mu)) = \mathbf{E}(\chi(\mu < \infty)\exp(-\mu)) \leq$$
$$\leq \mathbf{E}\left(\chi(\mu < \infty)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{[M](\mu)}{c/2}\right)\right) \leq$$
$$\leq \exp\left(-\frac{2}{c}\left(\frac{z-y}{2}\right)^2\right).$$

Így

$$\mathbf{E}\left(\chi(\sigma_{m+1} < \infty)\exp\left(-(\tau_{m+1} - \sigma_{m+1})\right) \mid \mathcal{F}_{\sigma_{m+1}}\right) \leq$$
$$\leq \exp\left(-\left(\frac{(z-y)^2}{2c} \wedge \frac{z-y}{2c}\right)\right) < 1.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ebből következően a szorzat nullához tart.

3. Végül tekintsük a harmadik esetet. Ha $e(\omega) < \infty$, akkor csak az lehetséges, hogy minden $y < z$ esetén ez az eset teljesül, vagyis van olyan n index, hogy $\tau_n < \infty$, és $\sigma_{n+1} = \infty$. Ilyenkor minden $t \geq \tau_n$ esetén $\left|\widetilde{X}(t)\right| \geq y$. Mivel az y tetszőleges, ezért a kompaktifikált térben a kívánt $\widetilde{X} \to y^*$ konvergencia ilyenkor teljesül. □

A Szkorohod egzisztencia tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy a $b(t,x)$ és a $\sigma(t,x)$ folytonos és hogy teljesül a lineáris növekedés feltétele, vagy ami ezzel ekvivalens, teljesül a

$$b^2(t,x) + \sigma^2(t,x) \leq K\left(1 + x^2\right)$$

kvadratikus növekedési feltétel. Legyen X a felrobbanó megoldás. Legyen $\tau_n \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid |X(t)| \geq n\}$, és legyen f egy olyan kompakt tartójú kétszer folytonosan deriválható függvény, amely az $|x| \leq n$ szakaszon x^2. Ekkor az

$$f(X(t \wedge \tau_n)) - f(X(0)) - \int_0^{t\wedge\tau_n} Af(X(s))\,ds$$

martingál. Várható értéket véve

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(X^2(t\wedge\tau_n)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(X^2(0)\right) + \mathbf{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_s} 2X(s)\,b(s,X(s)) + \sigma^2(s,X(s))\,ds\right) \leq \\
&\leq \mathbf{E}\left(X^2(0)\right) + \mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau_s} 2X(s)b(s,X(s)) + K\left(1 + X^2(s)\right) - b^2(s,X(s))ds = \\
&= \mathbf{E}\left(X^2(0)\right) + \mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau_s} -(b(s,X(s)) - X(s))^2 + X^2(s) + K\left(1 + X^2(s)\right)ds \leq \\
&\leq \mathbf{E}\left(X^2(0)\right) + C\cdot\mathbf{E}\int_0^{t\wedge\tau_s}\left(1 + X^2(s)\right)ds.
\end{aligned}$$

Vagyis

$$\mathbf{E}\left(X^2(t\wedge\tau_n) + 1\right) \leq \mathbf{E}\left(X^2(0)\right) + 1 + C\int_0^t \mathbf{E}\left(X^2(s\wedge\tau_n) + 1\right)ds.$$

A Gronwall-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbf{E}\left(X^2(t\wedge\tau_n)\right) \leq \left(\mathbf{E}\left(X^2(0)\right) + 1\right)\exp(Ct).$$

Ha egy pozitív valószínűségű halmazon $e < \infty$, akkor egy ugyancsak pozitív valószínűségű halmazon egy alkalmas T esetén $e < T$. Ekkor

$$\left(\mathbf{E}\left(X^2(0)\right) + 1\right)\exp(C\cdot T) \geq \mathbf{E}\left(X^2(T\wedge\tau_n)\right) \geq n^2\cdot\mathbf{P}(e < T) \to \infty,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ami lehetetlen. Így a megoldás minden t-re véges. Vegyük észre, hogy a Fatou-lemma alapján

$$\mathbf{E}\left(X^2(t)\right) \leq \left(\mathbf{E}\left(X^2(0)\right)+1\right)\exp(Ct) < \infty,$$

vagyis a kvadratikus növekedési feltétel teljesülése esetén $\mathbf{E}\left(X^2(t)\right) < \infty$ minden t-re. □

A bizonyításból azonnal látszik, hogy érvényes a következő tétel:

3.114. Tétel. *Ha a $b(x)$ és $\sigma(x)$ folytonos, esetleg többdimenziós függvények, akkor a*

$$dX = b(X)\,dt + \sigma(X)\,dw$$

egyenletnek van, esetlegesen felrobbanó gyenge megoldása.

3.115. Következmény. *Ha a $b(t,x)$ és a $\sigma(t,x)$ függvények kielégítik a lineáris növekedési feltételt és lokálisan kielégítik a Lipschitz-feltételt, vagyis minden N esetén található olyan K_N konstans, amelyre*

$$|b(t,x)-b(t,y)| \leq K_N|x-y|,$$
$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \leq K_N|x-y|$$

valahányszor $|x|,|y| \leq N$, akkor, a

$$dX(t) = b(t,X)\,dt + \sigma(t,X)\,dw, \quad X(0)=x$$

egyenletnek tetszőleges x kezdeti feltétel esetén van egyértelmű erős megoldása.

Bizonyítás. Elegendő azt megjegyezni, hogy a lineáris növekedés feltétele miatt Szkorohod tétele alapján van gyenge megoldás. Az egyértelműségi tétel miatt a lokális Lipschitz-feltétel alapján ha van erős megoldás, akkor az egyértelmű, így az egyértelmű trajektóriákról szóló következmény[46] alapján létezik egyértelmű erős megoldás. □

3.5.5. Néhány példa

3.116. Példa. Bessel-folyamatok.

Az idáig elmondottakat egy érdekes folyamatosztály a Bessel-folyamatok bevezetésével szemléltethetjük. A Bessel-folyamatokkal korábban már találkoztunk. Legyen $\mathbf{w}$ egy $n \geq 2$ dimenziós Wiener-folyamat. Ha $\rho^2(t) \triangleq$

[46] V.ö.: 3.97. Következmény, 158. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$\|\mathbf{w}(t)\|^2$, akkor az Itô-formula alapján

$$\rho^2 - \rho^2(0) = 2\sum_{k=1}^{n} w_k \bullet w_k + n \cdot t = 2\sum_{k=1}^{n} \rho \frac{w_k}{\rho} \bullet w_k + n \cdot t =$$
$$= 2\rho \bullet \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{\rho} \bullet w_k \right) + n \cdot t,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\rho > 0$. A polaritási formula és a Lévy-féle karakterizációs tétel szerint

$$\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{\rho} \bullet w_k \right](t) = \left(\sum_{i,j} \frac{w_i w_j}{\rho^2} \bullet [w_i, w_j] \right)(t) = t,$$

vagyis

$$d\rho^2 = ndt + 2\rho dw,$$

ahol a w egy Wiener-folyamat. A ρ^2 helyett Q-t írva a $\delta = n$ esetben a

$$dQ = \delta dt + 2\sqrt{|Q|}dw$$

egyenlethez jutunk. A Szkorohod-tétel miatt az egyenletnek minden $\delta \geq 0$ esetén van gyenge megoldása. A Yamada–Watanabe-tétel miatt, felhasználva, hogy $\left|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\right| \leq \sqrt{|x-y|}$ a megoldás egyértelmű és a mivel a gyenge megoldás létezése és a megoldás egyértelműsége miatt létezik, mégpedig egyetlen megoldás ezért a Q minden w Wiener-folyamat esetén tetszőleges kezdeti érték mellett egyértelműen definiálható. Ha $\delta = 0$ és $x = 0$, akkor $Q \equiv 0$, így az összehasonlítási tétel miatt ha $\delta \geq 0$ és $x \geq 0$, akkor $Q \geq 0$, így ilyenkor az abszolút érték elhagyható.

3.117. Definíció. Ha $x \geq 0$ és $\delta \geq 0$, akkor a

$$dQ = \delta dt + 2\sqrt{Q}dw, \quad Q(0) = x$$

egyenlet megoldását δ-dimenziós négyzetes Bessel-folyamatnak mondjuk. A δ-dimenziós négyzetes Bessel-folyamat négyzetgyökét δ-dimenziós Bessel-folyamatnak mondjuk.

Mivel egy $r \triangleq \|x\| > 0$ pontból elindított kétdimenziós Wiener-folyamat egy valószínűséggel nem éri el az origót az összehasonlítási tétel alapján világos, hogy ha $\delta \geq 2$ és $x = Q(0) > 0$, akkor $Q > 0$, így ilyenkor alkalmazható az Itô-formula. Miként azt láttuk, ha $R \triangleq \sqrt{Q}$ a megfelelő Bessel-folyamat, akkor

$$dR = \frac{\delta - 1}{2R}dt + dw \triangleq \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{R}dt + dw,$$

ahol a $\nu \triangleq \delta/2 - 1$ paramétert a Bessel-folyamat indexének mondjuk. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.118. Példa. Girszanov ellenpéldája.

Kézenfekvően merül fel a kérdés, hogy lehet-e a Yamada–Watanabe-tételt élesíteni. A következő, Girszanovtól származó ellenpélda azt mutatja, hogy nem: Ha $0 < \alpha < 1/2$, akkor a

$$dX = |X|^{\alpha}\, dw, \quad X(0) = 0$$

egyenletnek az $X \equiv 0$ erős megoldása, de az egyenlet gyenge megoldása nem egyértelmű[47], ugyanis megmutatjuk, hogy alkalmas valószínűségi mezőn van egy másik, nullától különböző, megoldás is.

A konstrukció alapgondolata viszonylag egyszerű. Legyen w egy Wiener-folyamat.

$$w = 1 \bullet w = |w|^{\alpha} |w|^{-\alpha} \bullet w = |w|^{\alpha} \bullet \Big(|w|^{-\alpha} \bullet w \Big) \stackrel{\circ}{=} |w|^{\alpha} \bullet L,$$

feltéve, hogy az $L \stackrel{\circ}{=} |w|^{-\alpha} \bullet w$ integrál létezik[48]. Ez utóbbi igazolására vezessük be az integrál kvadratikus variációjából álló

$$[L](t) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t \left(w^2(s) \right)^{-\alpha} ds$$

folyamatot. Mivel a w majdnem minden trajektóriája csak egy nullmértékű halmazon lehet nulla[49], ezért a trajektóriánként vett integrál értelmes, bár lehet, hogy az értéke végtelen. Megmutatjuk, hogy minden t esetén ez csak egy nulla valószínűségű halmazon fordulhat elő: Fubini tétele alapján $u = x^2$

[47] Emlékeztetünk, hogy a Yamada–Watanabe-tétel az $\alpha \geq 1/2$ esetről szól.

[48] Mivel az integrandus nem balról reguláris, az integrál csak az alább tárgyalt kiterjesztett értelemben létezik, ezért a példa némiképpen korai.

[49] $\int_0^{\infty} \mathbf{E}\left(\chi(w(t) = 0)\right) dt = 0$, így a Fubini-tétel szerint egy valószínűséggel

$$\int_0^{\infty} \chi(w(t) = 0)\, dt = 0.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

helyettesítéssel, kihasználva, hogy $\alpha < 1/2$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left([L](t)\right) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \frac{1}{|x|^{2\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) dxds = \\
&= \int_0^t \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) dxds = \\
&= \int_0^t \frac{2}{\sqrt{2\pi s}} \int_0^{\infty} u^{-\alpha} \exp\left(-\frac{u}{2s}\right) \frac{1}{2\sqrt{u}} duds = \\
&= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_0^{\infty} u^{-(\alpha+1/2)} \exp\left(-\frac{u}{2s}\right) duds = \\
&= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2s}\right) dt = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} (2s)^{1/2-\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) ds = \\
&= C \int_0^t t^{-\alpha} dt < \infty.
\end{aligned}$$

A probléma csak az, hogy az $L \stackrel{\circ}{=} |w|^{-\alpha} \bullet w$ lokális martingál, de nem Wiener-folyamat. A helyettesítéses integrálás formulájával[50] azonban az L-et Wiener-folyamattá alakíthatjuk. Az iterált logaritmusok tétele miatt majdnem minden trajektóriára

$$\limsup_{t \nearrow \infty} \frac{w(t)}{\sqrt{t \log\log t}} = 1, \quad \liminf_{t \nearrow \infty} \frac{w(t)}{\sqrt{t \log\log t}} = -1,$$

így tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén majdnem minden trajektóriára elég nagy t-re

$$|w(t)| \leq (1+\varepsilon) \sqrt{t \log\log t} \leq (1+\varepsilon)\, t.$$

Ebből

$$\frac{1}{|w(t)|^{2\alpha}} \geq C \frac{1}{t^{2\alpha}},$$

amiből $\lim_{t \nearrow \infty} [L](t) = \infty$. Az $[L]$ előállításában szereplő $|w|^{-2\alpha}$ folyamat trajektóriái nullmértékű halmaztól eltekintve pozitívak, így az $[L]$ trajektóriái szigorúan monoton nőnek és folytonosak. Legyen

$$\tau(s) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid [L](t) \geq s\}$$

az $[L]$ folytonos inverze. Legyen $\widehat{w}(s) = L(\tau(s))$. A kvadratikus variációra belátott (3.13) formula szerint

$$[\widehat{w}](s) = [L](\tau(s)) = [L]\left([L]^{-1}(s)\right) = s,$$

[50] V.ö.: 3.42. tétel, 104. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

így a $\widehat{w}$ a $\mathcal{G}_s \triangleq \mathcal{F}_{\tau(s)}$ filtrációra nézve Wiener-folyamat. Legyen $X(s) \triangleq w(\tau(s))$. A sztochasztikus integrálokra érvényes helyettesítési formula miatt

$$X(t) \triangleq w(\tau(t)) = \int_0^{\tau(t)} |w(s)|^\alpha \, dL(s) = \int_0^t |w(\tau(s))|^\alpha \, dL(\tau(s)) \triangleq$$
$$\triangleq \int_0^t |X(s)|^\alpha \, d\widehat{w}(s),$$

következésképpen az X a $dX = |X|^\alpha \, dw$ egyenlet egy gyenge megoldása. □

3.5.6. Erős Markov-tulajdonság

A Markov-folyamatok a sztochasztikus folyamatok egy külön családja. A Markov-tulajdonság a folyamat eloszlásaira ír elő bizonyos megkötést: A folyamat jövőjének eloszlása a múlttól csak a jelen állapoton keresztül függ. Markov-folyamatra a legegyszerűbb példa a kumulatív folyamatok. Valamely folyamatos összeg jövője mindig csak az aktuális összeg értékétől függ, és független attól, hogy miként, konkrétan milyen úton értünk el az éppen aktuális összegig. A sztochasztikus differenciálegyenletek tipikus példái a folyamatos összegzésnek, ugyanis az egyenletet megadó integrálok mindegyike egy-egy folyamatos összeg.

Mivel a Markov-tulajdonság a folyamat eloszlásaira vonatkozik, ezért mindig ki kell jelölni a lehetséges trajektóriák terét. Mivel az általunk tárgyalt sztochasztikus differenciálegyenletek trajektóriái folytonosak, ezért az eloszlásokat hordozó tér az $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ időtengelyen értelmezett folytonos függvények $C([0,\infty)) = C(\mathbb{R}_+)$ tere[51]. A kompakt szakaszokon való egyenletes konvergenciára nézve a $C([0,\infty))$ tér teljes szeparábilis metrikus tér. A sztochasztikus differenciálegyenletek megoldásainak eloszlásai ezen tér Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mértékek. Érdemes emlékeztetni, hogy a teljes szeparábilis metrikus terek Borel-halmazain értelmezett valószínűségi mértékek matematikai tulajdonságai igen kedvezőek. Többek között a valószínűségi mértékek automatikusan kompakt regulárisak, illetve ha $\mathcal{F}$ a Borel-halmazok egy rész σ-algebrája, akkor az $\mathcal{F}$-re vett feltételes valószínűségeknek van reguláris verziója, vagyis ha a $\mathbf{P}$ valamilyen valószínűségi mérték, akkor létezik egy olyan $P(\omega, A)$ függvény, amely egyrészt az A szerint minden ω-ra Borel-mérték, másrészt amelyre minden A Borel-mérhető halmazra az $\omega \mapsto P(\omega, A)$ a $\mathbf{P}(A \mid \mathcal{F})$ feltételes valószínűség egy verziója, így többek között $\mathcal{F}$-mérhető.

Legyen $\Omega \triangleq C([0,\infty))$ és jelölje $\mathcal{B}$ az Ω Borel-halmazait. Az így kapott $(\Omega, \mathcal{B})$ mérhető teret kézenfekvő módon elláthatjuk az úgynevezett kanoni-

[51] Korábban szintén a $C(\mathbb{R}_+)$-szal jelöltük a nullából induló folytonos függvényeket. A túl sok index nem teszi világosabbá a tárgyalást, ezért inkább az inkonzisztens jelölés bűnét választjuk.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

kus filtrációval, ahol $\mathcal{B}_t$ az a legszűkebb σ-algebra, amelyre nézve minden $0 \leq s \leq t$ esetén az $\omega \mapsto \omega(s)$ koordinátaleképezések mérhetőek. Az így kapott filtráció azonban nem tesz eleget a szokásos feltételeknek, vagyis például nem jobbról folytonos, valamint a nullmértékű halmazokat sem tartalmazza. A nullmértékű halmazokat nem tudjuk egyszerűen odacsapni a filtrációhoz ugyanis nem tudjuk, hogy a téren értelmezett több mérték közül melyik mérték szerint kell a nullmértékű halmazokat venni. A szokásos feltételek hiánya nagyon sok technikai probléma forrása, amelyek megoldására számos mértékelméleti bravúr ismert. A filtráció nullmértékű halmazokkal való kibővítése általában két okból szükséges. Egyrészt a majdnem minden kimenetelre megegyező folyamatok azonosítása miatt, másrészt, például Lévy-folyamatok esetén, a filtráció jobbról való folytonosságának biztosítása céljából. Az első probléma az eloszlások vizsgálatakor nem releváns, ugyanis minden folyamatot kanonikus módon azonosítunk a koordinátafolyamattal és az $(\Omega, \mathcal{B})$ téren csak a mértékeket cserélgetjük. A filtráció jobbról való folytonossága elsősorban azért szükséges, hogy a $\{\tau < t\} \in \mathcal{B}_t$ feltételeknek eleget tevő gyenge megállási időkről be tudjuk látni, hogy valódi megállási idők, vagyis hogy teljesítik az erősebb $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{B}_t$ feltételt is. Ugyanakkor, szemben a találati időkkel, az eredeti tér összes megállási ideje nem feltétlenül értelmezhető az $(\Omega, \mathcal{B}, (\mathcal{B}_t))$ kanonikus reprezentációban. Mivel az általunk tárgyalt esetben a trajektóriák folytonosak és a zárt halmazok találati idejei a filtráció jobbról való folytonossága nélkül is megállási idők, ezért ha körültekintően járunk el, akkor nincsen igazán szükségünk a filtráció jobbról való folytonosságára. Ugyanakkor érdemes azonban megjegyezni, hogy az egyes pontokban való tartózkodási idők, mivel azok az adott pont komplementerének, vagyis egy nyílt halmaznak a találati idejei, a filtráció jobbról való folytonosságának hiánya miatt, nem lesznek feltétlenül megállási idők.

Az erős Markov-tulajdonság értelmezéséhez szükségünk van az eltolás operátor fogalmára. Legyen τ tetszőleges véletlen időpont. A $\tau(\omega) = \infty$ azt jelenti, hogy a τ által leírt esemény az ω trajektóriára nem következik be. Egy $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat esetén a $\{\tau < \infty\}$ halmazon tekinthetjük a $(t, \omega) \mapsto X(t + \tau(\omega), \omega)$ újraindított folyamatot. Az így kapott folyamat az X alakulását adja meg a τ bekövetkezésekor, illetve azt követően. Az $(\Omega, \mathcal{B})$ kanonikus reprezentációban a τ egy operátort definiál, amely értelmezési tartománya a $\{\tau < \infty\} \subseteq \Omega$ halmaz. Az operátort szokás eltolás operátornak mondani, ugyanis azokat az ω trajektóriákat, amelyekre $\tau(\omega) < \infty$ balra eltolja, mégpedig $\tau(\omega)$-val. Az operátor szokásos jelölése θ_τ. A θ_τ minden ω trajektóriához hozzárendeli a trajektória τ véletlen időpont által leírt esemény bekövetkezése utáni alakulását. Érdemes hangsúlyozni, hogy a balra való eltoláskor a szigorúan a τ előtti időpontokban felvett értékek eltűnnek. Tetszőleges $B \in \mathcal{B}$ halmaz esetén $\theta_\tau^{-1}(B)$ azokat az ω trajektóriákat jelöli, amelyekre egyrészt a τ által jelzett esemény bekövetkezett, másrészt amelyek-

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

re a $B \subseteq C([0,\infty))$ által leírt tulajdonság a τ után teljesül, vagyis amelyre a $t \mapsto \omega(\tau(\omega)+t)$ folytonos függvény értelmes és eleme a B halmaznak.

A sztochasztikus differenciálegyenletek vizsgálatára rátérve tegyük fel, hogy minden x esetén az $X(0)=x$ kezdeti feltétel mellett a vizsgált sztochasztikus differenciálegyenlet rendelkezik egy egyértelmű eloszlással rendelkező gyenge megoldással. A gyenge megoldás által az $(\Omega,\mathcal{B})$ téren generált eloszlást jelölje P^x. A $P(x,B) \stackrel{\circ}{=} P^x(B)$ interpretálható mint egy átmenetvalószínűség függvény, amely azt mondja meg, hogy mi annak a valószínűsége, hogy az x-ből elindított folyamat trajektóriái a B halmazban fognak haladni[52]. Valamely (P^x) család erős Markov-tulajdonságán a következőt értjük:

3.119. Definíció (Erős Markov-tulajdonság)**.** Az $(\Omega,\mathcal{B})$ kanonikus téren értelmezett (P^x) valószínűségi mértékekből álló családot erős Markov-tulajdonságúnak mondunk, ha az $(\Omega,\mathcal{B},(\mathcal{B}_t))$ minden τ megállási idejére és minden $B\in\mathcal{B}$ halmazra tetszőleges x esetén

$$P^x\left(\theta_\tau^{-1}(B)\mid\mathcal{B}_\tau\right)(\omega)=P^{\omega(\tau(\omega))}(B)=$$
$$=P^{(\theta_\tau(\omega))(0)}(B)\quad \text{a } \{\tau<\infty\} \text{ halmaz } P^x\text{-majdnem minden}$$
$$\omega \text{ kimenetele esetén.}$$

Vagyis a folyamat τ utáni alakulásának a τ előtti információkra vonatkozó feltételes valószínűségének kiszámolásához elegendő ismernünk azt, hogy a folyamat hol volt a τ bekövetkezésekor[53].

3.120. Lemma. *Az $(\Omega,\mathcal{B})$ kanonikus téren értelmezett (P^x) család pontosan akkor erős Markov-tulajdonságú, ha tetszőleges $\Phi:(\Omega,\mathcal{B})\to\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}\stackrel{\circ}{=}[0,\infty]$ mérhető, nem negatív funkcionál és $\tau<\infty$ megállási idő esetén*

$$E^x(\Phi(\theta_\tau X)\mid\mathcal{B}_\tau)=E^x(\Phi(\theta_\tau X)\mid X(\tau))=E^{X(\tau)}(\Phi(X)),$$

ahol $X(t,\omega)=\omega(t)$ a koordinátaleképezés. Hasonló állítás igaz, ha $\Phi:(\Omega,\mathcal{B})\to\mathbb{R}$ mérhető funkcionál.

3.121. Példa. Erős Markov-tulajdonság és a találati idők.

A leggyakorabban használt megállási idő valamely a szint eléréséhez szükséges τ_a találati idő. Folytonos trajektóriák esetén $X(\tau_a)=a$. Ha $\tau_a<\infty$, akkor

$$E^x(\Phi(\theta_{\tau_a}X)\mid\mathcal{B}_{\tau_a})=E^{X(\tau_a)}(\Phi(X))=E^a(\Phi(X)).\qquad\square$$

[52] Megmutatható, de a definícióból nem következik, hogy az $x\mapsto P^x(A)$ leképezés Borel-mérhető. A $P(x,A)\stackrel{\circ}{=}P^x(A)$ a definíció alapján azonban automatikusan nem átmenetvalószínűség. Amennyiben ezt mégis fel akarjuk tételezni, akkor ezt igazolni kell.

[53] Vagyis a jövő múlt alapján való előrebecsléséhez elegendő a jelen állapotot ismerni.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy az $E^{X(\tau)}(\Phi(X))$ kifejezés értéke nem függ közvetlenül a τ megállási időtől, csak attól, hogy hol van a folyamat a τ időpontban. Miként jeleztük Markov-folyamatra a legegyszerűbb példát a folyamatos összegzés szolgáltatja. Az erős Markov-tulajdonság esetén függetlenül attól, hogy az egyes trajektóriák esetén mennyi időbe telt egy adott szint elérése a szint átlépése után a növekménynek azonos módon kell alakulnia. Vagyis az olyan összegzések amelyekben az összeadandók értékei explicite módon függnek az eltelt időtől általában nem lesznek erős Markov-tulajdonságúak. Ennek megfelelően ha egy sztochasztikus differenciálegyenlet b és σ paramétere függ az időtől, akkor a folyamat várhatóan nem lehet erős Markov-tulajdonságú, hacsak az eltelt t időt nem vesszük be az állapotváltozók közé.

3.122. Példa. Elemi példák mérhető funkcionálokra.

Függvénytereken az $f \mapsto f(x)$, illetve a sztochasztikus folyamatok kanonikus reprezentálása esetén $\omega \mapsto \omega(t)$ a módon jelölt pontfunkcionálok, vagy másképpen koordinátafüggvények által generált mérhetőségi struktúra szerint mérhető függvényre a legegyszerűbb példák természetesen maguk az $\omega \mapsto \omega(t)$ koordinátafüggvények. Tipikus, és gyakran használt példa a trajektóriák szuprémuma, vagy infimuma egy adott időtartomány felett. Természetesen, ahhoz hogy a szuprémum-funkcionál mérhető legyen valami megkötést kell tenni a trajektóriákra. Mivel a jobbról, vagy balról reguláris függvények egyértelműen meghatározottak a racionális időpontokban felvett értékeik által, ezért ilyenkor a szuprémum, illetve az infimum által definiált funkcionál mérhető a koordinátafunkcionálok által generált σ-algebrára nézve. A folytonos függvények terén további példa mérhető funkcionálra valamely időtartományon vett integrál. Folytonos függvények esetén ugyanis az integrál Riemann-integrál, így a Φ funkcionál a koordinátafunkcionálok lineáris kombinációjának határértéke. Ha

$$\tau_a \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid X(t) \geq a\}$$

a folytonos függvények terén egy szintelérési idő, akkor az $\omega \mapsto \tau_a(\omega)$ egy nem negatív mérhető funkcionál, ugyanis

$$\{\omega \mid \tau_a(\omega) \leq t\} = \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} X(s) \geq a \right\}$$

és az utóbbi halmaz mérhető a pontfunkcionálok által generált σ-algebrára nézve. Hasonló igaz a

$$\tau_a \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid |X(t)| \geq a\}$$

találati időkre. Legyen X egy többdimenziós folytonos folyamat és legyen K egy kompakt halmaz.

$$\tau_K \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid X(t) \in K\} = \inf\{t \mid d(X(t), K) = 0\}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az $Y(t) \stackrel{\circ}{=} d(X(t), K)$ egy folytonos folyamat és nyilvánvalóan τ_K éppen az Y-hoz tartozó τ_0 elérési idő, így a τ_K egy mérhető nem negatív funkcionál. □

3.123. Tétel. *Ha valamely folytonos együtthatókkal rendelkező*

$$dX = b(X)\,dt + \sigma(X)\,dw$$

homogén sztochasztikus differenciálegyenletnek minden $X(0) = x$ kezdeti érték esetén van egyértelmű eloszlással rendelkező gyenge megoldása, akkor az ezekből az egyértelmű eloszlásokból álló (P^x) család erős Markov-tulajdonságú.

Az erős Markov-tulajdonság bizonyítását a megállási opciókról szóló tételre vezetjük vissza. A tétel bizonyítását több lépésre bontjuk.

3.124. Lemma. *A tételben szereplő feltétel helyettesíthető avval, hogy*

1. *tetszőleges x esetén $P^x(\omega(0) = x) = 1$,*
2. *az $X(t, \omega) \stackrel{\circ}{=} \omega(t)$ koordinátaleképezés a $(\mathcal{B}_t)$ filtráció mellett megoldása a az egyenlethez tartozó martingálproblémának, és a*
3. *martingálprobléma megoldásának eloszlása egyértelmű.*

Bizonyítás. A bizonyítás megkezdése előtt érdemes megjegyezni, hogy a lemmában szereplő feltételek esetén a sztochasztikus analízis nem használható, ugyanis a $(\mathcal{B}_t)$ filtráció nem teljesíti a szokásos feltételeket. Ezért a $(\mathcal{B}_t)$ helyett az

$$\mathcal{F}_t \stackrel{\circ}{=} \sigma(\mathcal{B}_t \cup \mathcal{N})_{t+} \stackrel{\circ}{=} \cap_{s>t}\sigma(\mathcal{B}_s \cup \mathcal{N})$$

filtrációt kell használni. Vegyük észre, hogy mivel a P^x rögzített, ezért a nullmértékű halmazok $\mathcal{N}$ családja egyértelmű. Ha egy $(\mathcal{B}_t)$-adaptált Z folyamat martingál az $(\mathcal{F}_t)$ szerint akkor a $(\mathcal{B}_t)$ szerint is az, ugyanis mivel $\mathcal{B}_s \subseteq \mathcal{F}_s$ ezért

$$\mathbf{E}(Z(t) \mid \mathcal{B}_s) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z_t \mid \mathcal{F}_s) \mid \mathcal{B}_s) = Z(s).$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy az M^f martingál a $(\mathcal{B}_t)$ szerint. Ha $A \in \in (\mathcal{B}_{s+1/n} \cup \mathcal{N})$, akkor van olyan $B \in \mathcal{B}_{s+1/n}$, amely a P^x mérték szerint csak nullmértékű halmazban különbözik az A-tól. Mivel az M^f martingál a $(\mathcal{B}_t)$ alatt, ezért

$$\int_A M^f(t)dP^x = \int_B M^f(t)dP^x = \int_B M^f\left(s+\frac{1}{n}\right)dP^x = \int_A M^f\left(s+\frac{1}{n}\right)dP^x.$$

Mivel az f kompakt tartójú, ezért az M^f korlátos, így $n \to \infty$ esetén a határérték az integrál alatt is elvégezhető. Ebből, felhasználva, hogy az M^f folytonos

$$\int_A M^f(t)\,dP^x = \int_A M^f(s)\,dP^x, \quad A \in \mathcal{F}_s,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ami éppen a bizonyítandó $\mathcal{F}$-martingáltulajdonság.

A bizonyítás érdemi részére rátérve, egy x kezdeti érték esetén a megoldás eloszlására biztosan $P^x(\omega(0) = x) = 1$. Ha a koordinátaleképezés a $(\mathcal{B}_t)$ mellett martingál, akkor az $(\mathcal{F}_t)$ mellett is az, így egy alkalmasan bővített téren az egyenletnek van megoldása, így az egyenletnek van gyenge megoldása. De ez a gyenge megoldás egyúttal megoldása a martingálproblémának is, és mivel a martingálprobléma megoldásának eloszlása a lemma feltétele miatt egyértelmű, ezért a P^x az egyenlet gyenge megoldásainak egyértelmű eloszlása. Ha pedig az egyenletnek van gyenge megoldása, akkor a koordinátaleképezés a gyenge megoldás eloszlása mellett megoldása az egyenletnek, de akkor az M^f egy $(\mathcal{F}_t)$ alatti martingál. Mivel az M^f az együtthatók folytonossága miatt ilyenkor $(\mathcal{B}_t)$ adaptált is, ezért az M^f egyúttal $(\mathcal{B}_t)$ martingál is. És mivel a gyenge megoldás eloszlása egyértelmű, ezért a martingálprobléma eloszlása is egyértelmű. □

A tétel bizonyítása. Rögzített x esetén tekintsük a $D \mapsto P^x(D \mid \mathcal{B}_\tau)$ feltételes valószínűséget. Mivel a $C([0,\infty))$ egy teljes szeparábilis metrikus tér és a $\mathcal{B}_\tau$ a Borel-halmazok egy rész σ-algebrája, ezért a $\mathcal{B}_\tau$ szerinti feltételes valószínűségnek létezik egy reguláris verziója, amelyet jelöljön $R(\omega, D)$. Rögzítsük egy olyan ω_0 kimenetelt, amelyre $\tau(\omega_0) < \infty$ és definiáljuk az $y \stackrel{\circ}{=} \omega_0(\tau(\omega_0))$ értéket. Ha megmutatjuk, hogy egy később pontosan definiált fix N a P^x szerint nullmértékű halmaztól eltekintve az $F \mapsto R\left(\omega_0, \theta_\tau^{-1}(F)\right)$ mérték mellett az $X(t,\omega) \stackrel{\circ}{=} \omega(t)$ koordinátaleképezés megoldása a martingálproblémának, mégpedig egy olyan megoldása, amelyre ezen mérték mellett majdnem minden kimenetelre az olyan $h \in C([0,\infty))$ függvények halmaza, amelyekre $h(0) = y$ egy valószínűségű halmazt alkot, akkor a sztochasztikus differenciálegyenlet gyenge megoldásának feltételezett egyértelmű eloszlása miatt minden $F \in \mathcal{B}(C([0,\infty)))$-ra

$$P^x\left(\theta_\tau^{-1}(F) \mid \mathcal{B}_\tau\right)(\omega_0) \stackrel{m.m.}{=} R\left(\omega_0, \theta_\tau^{-1}(F)\right) = P^y(F) = P^{\omega_0(\tau(\omega_0))}(F),$$

ami éppen a bizonyítandó egyenlőség.

A kezdeti értékre vonatkozó egyenlőség igazolása a következő: Tekintsük azon függvények A halmazát, amelyek a $t = 0$ pontban az y értéket veszik fel. Meg kell mutatni, hogy $R\left(\omega_0, \theta_\tau^{-1}(A)\right) = 1$. A $B \stackrel{\circ}{=} \theta_\tau^{-1}(A)$ az olyan h folytonos függvények halmaza, amelyekre $\tau(h) < \infty$ és $h(\tau(h)) = y$. De a $h \mapsto \tau(h)$ maga a τ megállási idő, a $h \mapsto h(\tau(h))$ pedig a koordinátafolyamat kiértékelése a τ megállási idő által definiált időpontban, így a $h \mapsto h(\tau(h))$ éppen a megállított változó, vagyis egy $\mathcal{B}_\tau$-mérhető valószínűségi változó. Ha egy esemény a feltétel szerint mérhető, akkor a feltételes valószínűsége $\mathbf{P}(A \mid \mathcal{F}) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\chi_A \mid \mathcal{F}) \stackrel{m.m.}{=} \chi_A$. A reguláris feltételes valószínűség definíciója miatt a feltételes valószínűség közvetlen behelyettesítéssel kapható, így

$$R(\omega_0, B) = \chi_B(\omega_0) = \chi(\{h \mid h(\tau(h)) = y\})(\omega_0) = 1.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ugyanakkor van itt egy csekély technikai probléma: Minden B esetén a χ_B csak egy verziója a feltételes valószínűségnek és nem világos, hogy a reguláris verzió aktuálisan melyik reprezentánssal azonos, így egy konkrét ω_0 esetén az egyenlőség még sem biztos, hogy teljesül. Ha az egyes B halmazokhoz tartozó azokat a nullmértékű halmazokat, amelyeken a reguláris verzió eltér a χ_B-től egyesítjük, nem világos hogy milyen ω_0 kimenetelek maradnak meg. A bizonyítás első felének befejezéseként meg szeretnénk mutatni, hogy van olyan N nullmértékű halmaz, amelyen kívül már a χ_B választható a reguláris verziónak. Ennek kulcsa a következő észrevétel: A kanonikus reprezentációban a $\mathcal{B}_\tau$ megállított σ-algebra szerkezete igen egyszerű: éppen a $\tau \wedge t$ alakú változók által generált σ-algebra. A t változó helyébe csak a racionális időpontokat írva azonnal látható, hogy a $\mathcal{B}_\tau$ valójában megszámlálható függvény által van generálva. Ebből következően megadható megszámlálható $(B_n) \subseteq \subseteq \mathcal{B}_\tau$ halmaz, amely már generálja a $\mathcal{B}_\tau$ σ-algebrát. Mivel feltehetjük, hogy a (B_n) család metszet zárt, ezért elegendő a $\mathcal{B}_\tau$-n értelmezett mértékeket a (B_n) halmazokon megadni, ugyanis két mérték pontosan akkor esik egybe a $\mathcal{B}_\tau$-n, ha a (B_n) halmazokon egybeesnek. Ha a B_n halmazokhoz tartozó nullmértékű halmazokat egyesítjük, akkor minden $\omega_0 \notin N$ esetén a $\chi_B(\omega_0)$ éppen a feltételes valószínűség egy verziója.

Térjünk rá annak igazolására, hogy a koordinátaleképezés megoldása a martingálproblémának. Legyen $F \in \mathcal{B}_s$. Mivel a $\mathcal{B}_s$ egy generált σ-algebra, ezért a generált σ-algebrák általános szerkezete miatt egy alkalmas $U \subseteq \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ halmazra és $0 \leq s_k \leq s$ sorozatra

$$F = \{y \in C([0,\infty)) \mid (y(s_1), y(s_2), \ldots) \in U\}.$$

Ebből a

$$\theta_\tau^{-1} F = \{y \in C(\mathbb{R}_+) \mid (y(s_1+\tau(y)), y(s_2+\tau(y)), \ldots) \in U\} \in \mathcal{B}_{\tau+s} \subseteq \mathcal{F}_{\tau+s}, \tag{3.36}$$

ahol az utolsó reláció az $y \mapsto y(s_k + \tau(y))$ függvények $\mathcal{B}_{\tau+s}$-mérhetőségének következménye. Legyen R a $D \mapsto P^x(D \mid \mathcal{B}_s)$ reguláris verziója. A reguláris feltételes valószínűség definíciója alapján a feltételes várható érték a feltételes valószínűség szerinti integrálként írható fel, így tetszőleges ξ valószínűségi változó esetén

$$\int_\Omega \xi dR = E^x(\xi \mid \mathcal{B}_s).$$

Ugyanakkor az $X(t) = \omega(t)$ koordinátaleképezések esetén

$$M^f(t,\omega) \stackrel{\circ}{=} f(t,\omega(t)) - f(0,\omega(0)) - \int_0^t (Af)(s,\omega(s))\, ds,$$

így tetszőleges y függvényre

$$M^f(t,\theta_\tau y) = f(t,y(t+\tau)) - f(0,y(\tau)) - \int_0^t (Af)(s,y(s+\tau))\, ds.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ugyanakkor mivel a sztochasztikus differenciálegyenletben az együtthatók nem függnek a t-től, ezért elegendő az időtől független martingálproblémával foglalkozni, vagyis feltehetjük, hogy az f nem függ a t-től. Így

$$\begin{aligned}
M^f(t,\theta_\tau y) &= f(y(t+\tau)) - f(y(\tau)) - \int_0^t (Af)(y(s+\tau))\,ds = \\
&= f(y(t+\tau)) - f(y(\tau)) - \int_\tau^{t+\tau} (Af)(y(u))\,du = \\
&= M^f(t+\tau,y) - f(y(\tau)) + f(y(0)) + \int_0^\tau (Af)(y(u))\,du = \\
&= M^f(t+\tau,y) - M^f(y(\tau)).
\end{aligned}$$

Jelölje Q az $A \mapsto R\left(\omega_0, \theta_\tau^{-1}(A)\right)$ mértéket. Ha $t > s$, akkor a megállási opciók tétele alapján, felhasználva, hogy mivel az f kompakt tartójú, ezért az M^f a P^x mellett korlátos martingál, ugyanis a lemma alapján P^x alatt a koordinátaleképezés megoldása a martingálproblémának

$$\begin{aligned}
\int_F M^f(t,y)dQ(y) &= \int_\Omega M^f(t,y)\,\chi_F(y)\,dQ(y) = \\
&= \int_\Omega M^f(t,\theta_\tau y)\,\chi_F(\theta_\tau y)\,R(\omega_0,dy) = \\
&= \int_\Omega \left(M^f(t+\tau,y) - M^f(\tau,y)\right)\chi_{\theta_\tau^{-1}F}(y)\,R(\omega_0,dy) = \\
&= E^x\left(\left(M^f(t+\tau) - M^f(\tau,y)\right)\chi_{\theta_\tau^{-1}F} \mid \mathcal{B}_s\right)(\omega_0) = \\
&= E^x\Big(E^x\left(M^f(t+\tau) - M^f(\tau,y) \mid \mathcal{F}_{\tau+s}\right)\chi_{\theta_\tau^{-1}F} \mid \mathcal{B}_s\Big)(\omega_0) = \\
&= E^x\Big(\left(M^f(s+\tau) - M^f(\tau,y)\right)\chi_{\theta_\tau^{-1}F} \mid \mathcal{B}_s\Big)(\omega_0) = \\
&= \int_F M^f(s,y)\,dQ(y),
\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk a fenti (3.36) sort. Következésképpen az M^f martingál a Q mérték alatt. □

Érdemes megjegyezni, hogy a tétel a jelen alakjában alkalmazható valamely zárt halmaz találati idejére, de nem alkalmazható valamely nyílt halmaz találati idejére, ugyanis amennyiben a filtráció nem jobbról folytonos a nyílt halmazok találati idejei nem feltétlenül megállási idők.

3.5.7. Infinitezimális generátor és a resolvens operátor

Legyen Y egy homogén Markov-folyamat. Egy Markov-folyamat homogenitásán azt értjük, hogy az $s < t$ időpontok között átmenetvalószínűségek egyedül

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$t-s$ időtartamtól függnek. Jelölje F az Y folyamat fázisterét, jellemzően $F = \mathbb{R}^n$. Tetszőleges $g \in \mathcal{B}_b(F)$ korlátos mérhető függvényre definiáljuk a

$$(P_t g)(x) \triangleq \mathbf{E}(g(Y(t)) \mid Y(0) = x) \triangleq E^x(g(Y(t)))$$

operátorokat. Evidens módon a homogén Markov-tulajdonság miatt

$$\begin{aligned}(P_{t+s} g)(Y(0)) &\triangleq \mathbf{E}(g(Y(t+s)) \mid Y(0)) = \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(g(Y(t+s)) \mid Y(t)) \mid Y(0)) = \\ &= \mathbf{E}(P_s g(Y(t)) \mid Y(0)) = P_t(P_s g(Y(0))),\end{aligned}$$

amiből a lineáris operátorok körében szokásos jelöléssel $P_{t+s} = P_t \cdot P_s$, vagyis a (P_t) egy operátor félcsoport. Triviális módon $P_0 = I$. A P_t segítségével tetszőleges $p > 0$ számra definiáljuk az

$$(R_p g)(x) \triangleq \int_0^\infty \exp(-ps)(P_s g)(x)\, ds$$

rezolvens operátort[54]. A definícióban szereplő integrál a konkrét operátor félcsoportok esetén eltérő módon értelmezhető.

3.125. Példa. Az egydimenziós Wiener-folyamat rezolvens operátora

$$\begin{aligned}(R_p f)(x) &\triangleq \int_0^\infty \exp(-pu)\, \mathbf{E}(f(w(t)))\, dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left(-\sqrt{2p}\,|x-y|\right) f(y)\, dy,\end{aligned}$$

ahol w egy az x pontból elindított Wiener-folyamat és $f \geq 0$ tetszőleges Borel-mérhető függvény.

A Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned}(R_p f)(x) &\triangleq \int_0^\infty \exp(-pt) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) f(y)\, dy dt \triangleq \\ &\triangleq \int_{\mathbf{R}} u_p(x,y) f(y)\, dy,\end{aligned}$$

ahol

$$u_p(x,y) \triangleq \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-pt - \frac{(x-y)^2}{2t}\right) dt.$$

[54] Szokás még potenciáloperárorról is beszélni.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A $z \triangleq |x-y|$ és $\gamma \triangleq \sqrt{2p}$ jelölés mellett

$$u_p \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\gamma^2 t + \frac{z^2}{t}\right)\right) dt.$$

Ha $t = zs^2/\gamma$ helyettesítést végzünk, akkor

$$u_p \triangleq \frac{2\sqrt{z/\gamma}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\gamma z) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} z\gamma \left(s - s^{-1}\right)^2\right) ds.$$

Most $v \triangleq s - s^{-1}$ helyettesítéssel

$$u_p = \frac{2\sqrt{z/\gamma}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\gamma z) \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} z\gamma v^2\right) \frac{ds}{dv} dv.$$

A $v \triangleq s - s^{-1}$ másodfokú egyenletet megoldva, elemi számolással

$$s(v) = v + s(-v)$$

amiből $s'(v) + s'(-v) = 1$, tehát

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{2\sqrt{z/\gamma}}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\gamma z) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} z\gamma v^2\right) dv = \\ &= \gamma^{-1} \exp(-\gamma z). \end{aligned}$$

A bevezetett γ és z konstansokat visszahelyettesítve éppen a bizonyítandó összefüggést kapjuk. □

3.126. Definíció. Egy (P_t) operátorfélcsoport G infinitezimális generátorának $\mathcal{D}(G)$ értelmezési tartománya az olyan f függvényekből áll, amelyekre a

$$Gf \triangleq \lim_{h \searrow 0} \frac{P_h f - f}{h}$$

határérték létezik, ahol természetesen a határérték értelmezése az operátorfélcsoport specifikációjától függ. A G operátort az operátorfélcsoport infinitezimális generátorának mondjuk.

Az operátorfélcsoportok elmélete az absztrakt analízis egyik legkidolgozottabb fejezete, amely bemutatása önmagában is több kötetet igényelne, ezért csak az elmélet egy az Itô-formulához kapcsolódó „fölhözragadt" verzióját tárgyaljuk röviden. Legyen most $f \in C_b(F)$, ahol a $C_b(F)$ a fázistéren értelmezett korlátos és folytonos függvények halmazát jelöli.. A korlátosság és a folytonosság miatt minden x-re a

$$t \mapsto E^x(Y(t)) \triangleq (P_t f)(x)$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

függvény korlátos és folytonos, így a

$$g(x) \stackrel{\circ}{=} (R_p f)(x) \stackrel{\circ}{=} \int_0^\infty \exp(-ps)(P_s f)(x)\, ds$$

függvény jól definiált.

1. Tegyük fel, hogy valamely $f \in C_b(F)$ függvényre x-re a $t \mapsto (P_t f)(x) \stackrel{\circ}{=} E^x(f(Y(t)))$ módon definiált függvény t szerint deriválható. $(Gf)(x)$ jelölje a $t = 0$ pontban vett deriváltat. Tegyük fel, hogy az alábbi számolás az f függvény esetén végrehajtható[55]

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E^x f(Y(t)) &\stackrel{\circ}{=} \lim_{h\to 0} E^x\left(\frac{f(Y(t+h)) - f(Y(t))}{h}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0} E^x\left(E^{Y(t)}\left(\frac{f(Y(t+h)) - f(Y(t))}{h}\right)\right) = \\
&= \lim_{h\to 0} E^x\left(E^{Y(t)}\left(\frac{f(Y(h)) - f(Y(0))}{h}\right)\right) = \\
&= E^x\left(\lim_{h\to 0} E^{Y(t)}\left(\frac{f(Y(h)) - f(Y(0))}{h}\right)\right) = \\
&= E^x(Gf(Y(t))).
\end{aligned}$$

A számolás során az egyedüli problémás lépés a határérték és az E^x szerinti várható érték felcserélhetősége. Azokat az f korlátos és folytonos függvényeket amelyekre a gondolatmenet teljesül jelölje $\mathcal{D}(G)$.

2. Legyen $f \in \mathcal{D}(H)$. Az f korlátossága miatt a $t \mapsto E^x(f(Y(t)))$ valósból valósba képező függvény korlátos, így a következő számolásban használhatjuk a parciális integrálás formuláját

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\left[\exp(-pt)\, E^x f(Y(t))\right]_0^\infty = \\
&= -\int_0^\infty \frac{d\exp(-pt)}{dt} E^x(f(Y(t)))\, dt - \int_0^\infty \exp(-pt)\frac{d}{dt}E^x f(Y(t))\, dt = \\
&= p(R_p f)(x) - \int_0^\infty \exp(-pt)\, E^x((Gf)(Y(t)))\, dt = \\
&= p(R_p f)(x) - (R_p(Gf))(x) = (R_p(pI - G)f)(x).
\end{aligned}$$

[55] A félcsoportok absztrakt elméletében fel szokás tételezni, hogy a fázistéren adott egy topológia és ebben a topológiában az operátorok folytonosak. Ha a deriváltakat létezését ebben a topológiában követeljük meg, akkor a limesz és az operátor a feltételezett folytonosság miatt felcserélhető. A lényeg az, hogy egy adott f függvény esetén közvetlenül nem egyszerű eldönteni, hogy eleme-e a G értelmezési tartományának vagy sem, ugyanis az absztrakt megfogalmazás időnként elrejti a tényleges nehézségeket.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Vegyük észre, felhasználtuk, hogy a parciális integrálás formulájában ha két tag véges, akkor a harmadiknak is végesnek kell lenni. Az egyenlőség másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy minden $f \in \mathcal{D}(H)$ esetén

$$R_p(pI - G) f = f. \tag{3.37}$$

3. Legyen ismételten $f \in C_b(F)$. Egyszerű számolással

$$\begin{aligned} P_t(R_p f) &= P_t \int_0^\infty \exp(-ps) P_s f ds = \\ &= \int_0^\infty \exp(-ps) P_t P_s f ds = \\ &= \int_0^\infty \exp(-ps) P_{t+s} f ds = \\ &= \int_t^\infty \exp(-p(u-t)) P_u f du = \\ &= \exp(pt) \int_t^\infty \exp(-pu) P_u f du. \end{aligned}$$

Az egyenlőség igazolásához csak a P_t és az integrálás felcserélhetőségét biztosító

$$P_t \int_0^\infty \exp(-ps) P_s f ds = \int_0^\infty \exp(-ps) P_{t+s} f ds$$

egyenlőséget érdemes közelebbről megvizsgálni. Ez másképpen a Fubini-tétel és a Markov-tulajdonság alapján teljesülő

$$\begin{aligned} &E^x \left(\int_0^\infty \exp(-ps) E^{Y(t)} (f(Y(s))) ds \right) = \\ &= \int_0^\infty \exp(-ps) E^x \left(E^{Y(t)} (f(Y(s))) \right) ds = \\ &= \int_0^\infty \exp(-ps) E^x (f(Y(t+s))) ds \end{aligned}$$

egyenlőséget jelenti. A számolás eredményeként kapott alakot behelyettesítve

$$\begin{aligned} &\lim_{h \searrow 0} \frac{P_{t+h}(R_p f) - P_t(R_p f)}{h} = \\ &= \lim_{h \searrow 0} \frac{\exp(p(h+t)) \int_{t+h}^\infty \exp(-pu) P_u f du - \exp(pt) \int_t^\infty \exp(-pu) P_u f du}{h}. \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A határérték mögötti rész

$$\frac{\exp(p(h+t)) - \exp(pt)}{h} R_p f -$$
$$- \frac{\exp(p(h+t)) \int_0^{t+h} \exp(-ps) P_s f ds - \exp(pt) \int_0^t \exp(-ps) P_s f ds}{h}$$

módon írható. A második sor

$$\frac{\exp(p(h+t))}{h} \int_t^{t+h} \exp(-ps) P_s f ds +$$
$$+ \frac{\exp(p(h+t)) - \exp(pt)}{h} \int_0^t \exp(-ps) P_s f ds.$$

Ha $h \to 0$, akkor a határérték

$$p \exp(pt) R_p f - \exp(pt) \exp(-pt) P_t f - p \exp(pt) \int_0^t \exp(-ps) P_s f ds =$$
$$= p \exp(pt) R_p f - P_t f - p \exp(pt) \int_0^t \exp(-ps) P_s f ds.$$

Speciálisan ha $t = 0$, akkor

$$G(R_p f) = p R_p f - f,$$

vagy ami ugyanaz:

$$(pI - G)(R_p) = I, \tag{3.38}$$

feltéve, ha $R_p f \in \mathcal{D}(H)$. Vegyük észre, hogy

$$E^x(G(R_p f(Y(t)))) = E^x((pR_p f - f)(Y(t))) =$$
$$= p E^x(pR_p f(Y(t))) - E^x(f(Y(t))).$$

A második kifejezés éppen a derivált képletében szereplő $-P_t f$. Számoljuk ki az első tagot. A Fubini-tétel szerint az integrálokat megcserélve és a Markov-tulajdonságot felhasználva

$$p \int_0^\infty \exp(-ps) E^x(P_s f(Y(t))) ds = p \int_0^\infty \exp(-ps) P_{s+t} f ds =$$
$$= \int_t^\infty \exp(-p(u-t)) P_u f du =$$
$$= p \exp(pt) R_p(f) - p \exp(pt) \int_0^t P_u f du,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ami éppen a derivált többi tagja. Ebből következően tetszőleges $f \in C_b(F)$ függvényre $R_p f \in \mathcal{D}(G)$. A belátott (3.37) és (3.38) sorok együttes interpretációja, hogy a $C_b(F)$ téren értelmezett R_p minden pozitív p estén éppen a $pI - G$ inverze, vagyis

$$R_p = (pI - G)^{-1},$$

ami éppen indokolja a rezolvens elnevezést, ugyanis általában egy B operátor rezolvensén a $z \mapsto (zI - B)^{-1}$ leképezést szokás érteni.

3.127. Példa. Homogén sztochasztikus differenciálegyenletek infinitezimális generátora.

Legyenek $b(x)$ és $\sigma(x)$ folytonos függvények és tekintsünk egy $dY(t) = b(Y(t))\,dt + \sigma(Y(t))\,dw(t)$ alakú sztochasztikus differenciálegyenletet és tekintsük az általa definiált Y homogén Markov-folyamatot. Az Y folytonossága miatt az előző gondolatmenet használható. Az egyedüli problémát a $\mathcal{D}(G)$ értelmezési tartományának meghatározása jelenti. Megmutatjuk, ha f kompakt tartójú és kétszer folytonosan deriválható, akkor $f \in \mathcal{D}(G)$ és ilyenkor $Gf = Af$, ahol az A a martingálprobléma definiálásakor felírt (3.33) operátor. Minden x-re tekintsük a

$$t \mapsto (P_t f)(x) \stackrel{\circ}{=} E^x(f(Y(t))) = E^x\left(M^f(t) + f(Y(0)) + \int_0^t (Af)(Y(s))\right) ds =$$
$$= E^x(f(Y(0))) + \int_0^t E^x((Af)(Y(s)))\,ds$$

leképezést, ahol felhasználtuk, hogy mivel az f kompakt tartójú, ezért az M^f martingál, így a várható értéke nulla. Mivel a b, σ és az Y folytonos, ezért az $s \mapsto A(f(Y(s)))$ is folytonos és mivel az f második deriváltja is kompakt tartójú ezért ez a függvény korlátos is, így a határérték és az E^x szerinti várható érték megcserélhető, így az integrál alatti kifejezés folytonos. Ebből következően ilyenkor a kifejezés deriválható. A derivált a $t = 0$ pontban éppen az

$$E^x(Af(Y(0))) = (Af)(x)$$

ugyanis az $Y(0)$ az E^x alatt egy valószínűséggel éppen x. Ebből következően $f \in \mathcal{D}(G)$ következésképpen a G az A kiterjesztése. Természetesen a gondolatmenet pontosan arra épül. hogy az Itô-formula által megadott

$$M^f(t) = \int_0^t \sigma(Y(t)) \frac{\partial f}{\partial x}(Y(t))\,dw$$

sztochasztikus integrál mikor lesz valódi martingál. Arra azonban, hogy egy sztochasztikus integrál mikor lesz martingál csak elégséges feltételek állnak rendelkezésre. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.6. Az integrálás kiterjesztése előrejelezhető integrandusokra

Az idáig bemutatott sztochasztikus integrálás az alkalmazások egy jelentős részében megfelelő. Ugyanakkor a sztochasztikus analízis néhány tételének igazolásához az integrálfogalmat ki kell terjeszteni. Ilyen tétel például a pénzügyi alkalmazásokban alapvető szerepet játszó integrálreprezentációs tétel[56]. A kiterjesztés két irányba történhet. Egyrészt nem folytonos integrátorok bevezetésével, másrészt nem balról reguláris integrandusok bevezetésével. Mivel a sztochasztikus analízis leggyakoribb alkalmazásaiban az integrátorok folytonosak, ezért a lehetséges integrátorok bővítését nem tárgyaljuk[57].

Az integrál kiterjesztésének általános háttere igen egyszerű: Legyenek adva X és Y metrikus terek, tegyük fel, hogy az Y teljes, és legyen f az X egy sűrű részhalmazát az Y térbe képező izometria. Ekkor az f izometriaként kiterjeszthető a teljes X térre. A kiterjesztés igen egyszerű. Ha $x_n \to x$, akkor az (x_n) Cauchy-sorozat az X-ben, de akkor az izometria miatt az $(f(x_n))$ Cauchy-sorozat az Y-ban. Mivel az Y teljes, ezért létezik olyan $y \in Y$, amelyre $f(x_n) \to y$. Az $f(x) \doteq y$ módon definiált függvény éppen a keresett kiterjesztés. Könnyen látható, hogy a kiterjesztés után az f izometria marad.

3.6.1. Előrejelezhető folyamatok és kiterjesztés Itô-izometriával

A kibővítés több módon is megtehető. Az itt röviden vázolt kiterjesztés a Burkholder–Davis–Gundy-féle (3.15) egyenlőtlenségre és a martingál kritériumra épül. Ezek alapján ha L egy folytonos lokális martingál és az X olyan adaptált balról reguláris folyamat, amelyre $\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[L]\right) < \infty$, akkor az $N = X \bullet L$ egy folytonos négyzetesen integrálható martingál. $\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[L]\right)$ egy L^2 norma az $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ téren értelmezett lehetséges integrandusok terén. Mivel az idáig bevezetett integrandusok balról regulárisak, ezért az idáig bevezetett integrandusok tere ebben az L^2 normában nem teljes. Az integrál kiterjesztésekor ezt a teret egyszerűen teljessé tesszük.

3.128. Állítás. *Ha N négyzetesen integrálható martingál, akkor az $N^2 - [N]$ valódi martingál.*

[56] A tételt már használtuk az előző pontban.

[57] Az integrátor általában egy Wiener-folyamat, vagy egy Wiener-folyamat szerinti integrál, vagy valamilyen Wiener-folyamattal felírt sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $N(0)=0$. Legyen (τ_n) az $N^2-[N]$ lokalizációs sorozata. Ha $p=2$, akkor a második

$$\left\| \sup_{0\le s\le t} |X(s)| \right\|_p \le \frac{p}{p-1} \|X(t)\|_p .$$

Doob-egyenlőtlenség miatt tetszőleges $[0,t]$ véges szakaszon az N^2 rendelkezik integrálható majoránssal. A megállított folyamat martingál tulajdonsága miatt

$$\mathbf{E}\left(N^2(t\wedge\tau_n)\right) = \mathbf{E}\left([N]^{\tau_n}(t)\right).$$

A monoton konvergencia tétel és a majorált konvergencia tétel egyidejű használatával belátható, hogy $\mathbf{E}\left(N^2(t)\right) = \mathbf{E}\left([N](t)\right)$, következésképpen az $\mathbf{E}\left([N](t)\right)$ is véges. Ebből következik, hogy az $N^2-[N]$ folyamat a $[0,t]$ szakaszon rendelkezik időtől független integrálható majoránssal, így valódi martingál. □

3.129. Következmény (Itô-izometria)**.** *Ha L folytonos lokális martingál és X olyan balról reguláris és adaptált folyamat, amelyre nézve $\mathbf{E}\left(\int_0^t X^2 d[L]\right) < \infty$, akkor*

$$\mathbf{E}\left((X\bullet L)^2(t)\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^t X^2 d[L]\right)$$

ahol a t lehet végtelen is.

3.130. Definíció. Jelölje $\mathcal{P}$ az $\mathbb{R}_+\times\Omega$ tér azon részhalmazaiból álló σ-algebrát, amelyet a folytonos[58], adaptált folyamatok generálnak. A $\mathcal{P}$ σ-algebrára nézve mérhető kétváltozós függvényeket *előrejelezhető folyamatoknak* mondjuk[59].

3.131. Példa. Ha X folytonos adaptált folyamat, akkor az

$$Y(t) \stackrel{\circ}{=} \operatorname{sign}(X(t)) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 1, & \text{ha } X(t)>0 \\ -1, & \text{ha } X(t)\le 0 \end{cases},$$

[58] Könnyen megmutatható, hogy a generált σ-algebra megegyezik a balról reguláris, adaptált folyamatok által generált σ-algebrával.

[59] Az előrejelezhető elnevezés oka az, hogy ha τ egy megállási idő, akkor a τ gráfja pontosan akkor előrejelezhető halmaz, ha a τ megállási idő előrejelezhető, vagyis ha van olyan (τ_n) megállási időkből álló sorozat, amelyre $\tau_n \nearrow \tau$ és minden olyan kimenetelre, amelyre $\tau(\omega)>0$ a $\tau_n(\omega)$ „előrejelzi" a $\tau(\omega)$ értéket, vagyis $\tau_n(\omega)<\tau(\omega)$. Nem minden megállási idő előrejelezhető, például a Poisson-folyamatok ugrásainak időpontja nem előrejelezhető megállási idő. Megmutatható, hogy folytonos integrátor esetén az integrandusokat jóval bővebb σ-algebrából is választhatjuk. Ennek azonban nincsen jelentősége. Az előrejelezhető folyamatokra a mértékelmélet szokásos megfontolásait használni tudjuk és ez a sztochasztikus analízis szempontjából elegendő.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

vagy az

$$Y \doteq \frac{1}{X}\chi\left(X \neq 0\right)$$

folyamatok előrejelezhetőek, de nem balról regulárisak.

3.132. Példa. A balról folytonos adaptált folyamatok előrejelezhetőek.

Legyen X balról folytonos, adaptált folyamat. Az adaptáltság miatt az

$$X_n\left(t\right) \doteq X\left(0\right)\chi\left(\{0\}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} X\left(\frac{k}{2^n}\right)\chi\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

folyamat adaptált lépcsős folyamat. Az X balról való folytonossága[60] miatt minden (t,ω) párra $X_n\left(t,\omega\right) \to X\left(t,\omega\right)$. Könnyen belátható, hogy a $\chi\left((a,b]\right)$ balról reguláris függvények előállnak folytonos függvények határértékeiként, következésképpen az

$$Y_n \doteq X\left(\frac{k}{2^n}\right)\chi\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

folyamatok előrejelezhetőek. □

3.133. Példa. Ha X előrejelezhető, akkor az X^τ is előrejelezhető.

Ha az X folytonos, akkor az X^τ is folytonos. A folytonos adaptált folyamatok π rendszert alkotnak. Könnyen látható, hogy az olyan folyamatok, amelyekre a megállított folyamat előrejelezhető λ rendszert alkotnak, így a monoton osztály tétel miatt ha az X előrejelezhető, akkor tetszőleges τ megállási idő esetén az X^τ is előrejelezhető. □

A sztochasztikus analízis tárgyalása során számos σ-algebrát szokás bevezetni Ezek közül a legszűkebb az előrejelezhető halmazok családja. Ez a család valóban szűk. Megmutatható például, hogy a Poisson-folyamatok nem előrejelezhető folyamatok. Ebből is látható, hogy nem minden jobbról folytonos, bal oldali határértékkel rendelkező folyamat előrejelezhető. A σ-algebra szűkösségére utal, hogy a jobbról reguláris $\chi\left([0,\tau)\right)$ véletlen intervallumok nem feltétlenül előrejelezhetőek, miközben a balról reguláris trajektóriájú $\chi\left([0,\tau]\right)$ folyamatok előrejelezhetőek. Ennek oka, hogy nem minden τ megállási idő előrejelezhető abban az értelemben, hogy van olyan (τ_n) sorozat, hogy $\tau_n \nearrow \tau$.

A monoton osztály tétellel látható be, hogy az előrejelezhető folyamatok trajektóriái mérhetőek, így az $\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d\left[L\right]\right)$ kifejezés minden előrejelezhető

[60] Vegyük észre, hogy a gondolatmenet nem vihető át jobbról folytonos folyamatokra, ugyanis az analóg módon képzett $X\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\chi\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)$ nem lenne adaptált.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

X folyamat esetén értelmezhető és a

$$\mu(A) \doteq \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \chi_A d[L]\right)$$

egy mértéket definiál az előrejelezhető halmazok osztályán. A mérték szerinti integrál konstrukciójából evidens, hogy tetszőleges X előrejelezhető folyamat esetén

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} X d\mu = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty d[L]\right)$$

Az így kapott $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}, \mu)$ téren értelmezett L^2 teret jelölje $\mathcal{L}^2(L)$, vagy ha az L folytonos lokális martingál egyértelmű, akkor egyszerűen $\mathcal{L}^2$. Az $X \in \in \mathcal{L}^2(L)$ folyamat normáját az $\|X\|_L$ módon fogjuk jelölni.

Emlékeztetünk, hogy a teljes számegyenesen[61] négyzetesen integrálható martingálok egyenletesen integrálhatóak, így egyértelműen kiterjeszthetők a $t = \infty$ időpontra. Vagyis a minden $t \leq \infty$ esetén teljesülő

$$M(s) = \mathbf{E}(M(t) \mid \mathcal{F}_s), \quad s \leq t$$

egyenlőség miatt a négyzetesen integrálható martingálok $\mathcal{H}^2$-vel jelölt tere azonosítható az $\mathcal{F}_t \nearrow \mathcal{F}_\infty \doteq \sigma(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ téren négyzetesen integrálható függvények $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$ terével. Az így kapott Hilbert-térben a normát $\|M\|_{\mathcal{H}^2}$-vel fogjuk jelölni. A Doob-egyenlőtlenség miatt minden $t \leq \infty$ esetén

$$\mathbf{E}\left(M^2(t)\right) \leq \mathbf{E}\left(\left(\sup_{0\leq s\leq t} M(s)\right)^2\right) \leq 4 \cdot \mathbf{E}\left(M^2(t)\right),$$

ezért az $M(t)$ értéknek az $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$ térben vett konvergenciája ekvivalens avval hogy a trajektóriák időtengelyen való egyenletes konvergenciában vett távolsága $L^2(\Omega)$-ban nullához tart. Mivel minden L^2-ben konvergens sorozatnak van majdnem mindenhol konvergens részsorozata, ezért, legalábbis egy részsorozatra, majdnem minden trajektória egyenletesen is konvergens. Mivel folytonos függvények egyenletes konvergens sorozatának határértéke is folytonos, ezért a folytonos négyzetesen integrálható martingálok családja zárt részhalmaza a négyzetesen integrálható martingálok családjának. Az Itô-izometria minden $t \leq \infty$ esetén tekinthető az $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$, illetve a vele ekvivalens $\mathcal{H}^2$ és az $\mathcal{L}^2(L)$ egy-egy lineáris altere közötti izometriának. Ha $X \in \mathcal{L}^2(L)$, akkor jelölje $X \bullet L$ azt a négyzetesen integrálható martingált, amit az $X \mapsto X \bullet L$ izometria $\mathcal{L}^2(L)$-re való kiterjesztése segítségével kapunk. Mivel a folytonos adaptált folyamatok, következésképpen a balról reguláris folyamatok sűrűek az $\mathcal{L}^2(L)$-ben a kiterjesztett leképezés minden $\mathcal{L}^2(L)$ esetén

[61] Emlékeztetünk, hogy a négyzetesen integrálhatóság azt jelenti, hogy az L^2-norma korlátos.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

értelmes. A kiterjesztés során kapott $\mathcal{H}^2$ martingálok folytonosak, ugyanis a folytonos martingálok egy zárt alteret alkotnak. Természetesen a kiterjesztés során konstruált sztochasztikus integrálokra már nem lesz igaz, hogy az integrál az integrálközelítő összegek határértéke, de az Itô–Stieltjes-integrálokra belátott számolási szabályok kivétel nélkül átvihetők a kiterjesztett integrálfogalomra is.

3.6.2. A kiterjesztett integrál tulajdonságai

Az Itô–Stieltjes-integrál linearitása miatt a következő állítás evidens:

3.134. Állítás (Linearitás). *Ha* $X_1, X_2 \in \mathcal{L}^2(L)$, *akkor* $(X_1 + X_2) \bullet L = X_1 \bullet L + X_2 \bullet L$.

3.135. Állítás (Polaritási formula). *Ha* L *és* N *folytonos lokális martingálok és* $X \in \mathcal{L}^2(L)$, *akkor* $[X \bullet L, N] = X \bullet [L, N]$. *Az* $X \bullet L$ *az egyetlen olyan a* $t = 0$ *pontban nulla értéket felvevő, folytonos négyzetesen integrálható martingál, amire ez az egyenlőség minden* N *folytonos négyzetesen integrálható martingálra teljesül.*

Bizonyítás. Az egyértelműség könnyen igazolható: Ha M egy másik ilyen folytonos, négyzetesen integrálható martingál, akkor

$$0 = X \bullet [L, N] - X \bullet [L, N] = [X \bullet L, N] - [M, N] = [X \bullet L - M, N].$$

Ha most $N \stackrel{\circ}{=} X \bullet L - M$, akkor $[X \bullet L - M] = 0$, következésképpen az $X \bullet \bullet L - M$ konstans. Mivel mind a két folyamat a nulla időpontban nulla, ezért az eltérés azonosan nulla, amivel az egyértelműséget igazoltuk.

Az azonosság teljesülésére rátérve vegyük észre, hogy az azonosság lokalizálható: Legyen (τ_n) egy lokalizációs sorozat. Egyrészt a folytonos lokális martingálok kvadratikus variációjára már belátott megállítási szabály miatt

$$[X \bullet L, N^{\tau_n}] = [X \bullet L, N]^{\tau_n}.$$

Másrészt a trajektóriánként vett integrálra triviálisan igaz a megállítási szabály, így

$$(X \bullet [L, N])^{\tau_n} = X \bullet [L, N]^{\tau_n} = X \bullet [L, N^{\tau_n}].$$

Következésképpen, ha igazolni tudjuk, hogy az

$$[X \bullet L, N^{\tau_n}] = X \bullet [L, N^{\tau_n}]$$

egyenlőség teljesül, akkor

$$[X \bullet L, N]^{\tau_n} = [X \bullet L, N^{\tau_n}] = X \bullet [L, N^{\tau_n}] = X \bullet [L, N]^{\tau_n} = (X \bullet [L, N])^{\tau_n},$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

amiből, mivel $\tau_n \nearrow \infty$, a kívánt egyenlőség már következik. Mivel az N folytonos, ezért elegendő az

$$[X \bullet L, N] = X \bullet [L, N]$$

azonosságot N és $[N]$ korlátossága esetén igazolni. Ennek belátásához a keresztvariáció jellemzése alapján elég belátni, hogy az

$$(X \bullet L) N - X \bullet [L, N]$$

lokális martingál. De mivel az $X \bullet L$ négyzetesen integrálható, az N pedig korlátos, vagyis szintén négyzetesen integrálható, ezért[62] ha az X folytonos, akkor az Itô–Stieltjes-integrálásra már belátott polaritási szabály miatt[63]

$$(X \bullet L) N - X \bullet [L, N] = (X \bullet L) N - [(X \bullet L), N]$$

kifejezés valódi martingál, vagyis ha $t > s$, akkor

$$\mathbf{E}\left((X \bullet L)(t) N(t) - \int_0^t X d[L, N] \mid \mathcal{F}_s\right) = (X \bullet L)(s) N(s) - \int_0^s X d[L, N].$$

Ha $X \in \mathcal{L}^2(L)$, akkor vannak olyan folytonos $X_n \in \mathcal{L}^2(L)$ folyamatok, amelyekre $X_n \to X$ az $\mathcal{L}^2(L)$ térben. A $\mathcal{H}^2$ tér topológiája miatt minden u időpontra

$$(X_n \bullet L)(u) \overset{L^2(\Omega)}{\to} (X \bullet L)(u).$$

Az alább külön belátott Kunita–Watanabe-egyenlőtlenség miatt felhasználva, hogy az $X_n \overset{\mathcal{L}^2}{\to} X$ és az $[N]$ korlátos, $[N] \leq K$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\left(\int_0^u (X_n - X)\, d[L, N]\right)^2\right) &\leq \mathbf{E}\left(\int_0^u (X_n - X)^2 d[L] \int_0^u 1 d[N]\right) = \\ &= \mathbf{E}\left([N](u) \int_0^u (X_n - X)^2 d[L]\right) \leq \\ &\leq K \cdot \mathbf{E}\left(\int_0^u (X_n - X)^2 d[L]\right) \to 0,\end{aligned}$$

vagyis minden u esetén

$$\int_0^u X_n d[L, N] \overset{L^2(\Omega)}{\to} \int_0^u X d[L, N].$$

A feltételes várható érték $L^1(\Omega)$ folytonossága miatt a határérték és a feltételes várható érték felcserélhető, amiből az állítás már könnyen igazolható. □

[62] V.ö.: 3.128. állítás, 206. oldal.
[63] V.ö.: 3.38. tétel, 96. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A Cauchy-egyenlőtlenség sztochasztikus integrálásra átszabott verzióját már az előző állítás igazolásakor is felhasználtuk.

3.136. Állítás (Kunita–Watanabe-egyenlőtlenség)**.** *Ha U és V szorzatmérhető folyamatok, X és Y folytonos lokális martingálok, akkor*

$$\left|\int_0^t UV\,d\,[X,Y]\right| \le \int_0^t |UV|\,d\mathrm{Var}\left([X,Y]\right) \le \sqrt{\int_0^t U^2 d\,[X]}\sqrt{\int_0^t V^2 d\,[Y]}.$$

Bizonyítás. Az első egyenlőség triviálisan teljesül. Ha X és Y folytonos lokális martingálok, akkor tetszőleges a és b konstansok esetén

$$[aX+bY] = a^2\,[X] + 2ab\,[X,Y] + b^2\,[Y]\,,$$

ahol az egyenlőség majdnem mindenhol értelemben értendő. Ha az a és a b racionális számok, akkor a nullmértékű halmazokat egyesíthetjük és feltehetjük, hogy az egyenlőség minden trajektóriára teljesül. Mivel a kvadratikus variáció alatt nem tudunk határértéket venni, az egyenlőséget nem tudjuk minden a és b esetére kiterjeszteni. De azért feltehetjük, hogy minden a és b racionális számra

$$a^2\,[X] + 2ab\,[X,Y] + b^2\,[Y] \ge 0,$$

amely egyenlőtlenséget már kiterjeszthetünk minden valós a és b konstansokra. Mivel a diszkrimináns nem lehet pozitív, ezért majdnem minden trajektóriára

$$|[X,Y]| \le \sqrt{[X]}\sqrt{[Y]}.$$

Legyen s tetszőleges. Az egyenlőtlenséget az

$$\widetilde{X}\,(t) \doteq X\,(s+t) \quad \text{és} \quad \widetilde{Y}\,(t) \doteq Y\,(s+t)$$

folyamatokra alkalmazva és felhasználva, hogy

$$\left[\widetilde{X},\widetilde{Y}\right](t) = [X,Y]\,(t) - [X,Y]\,(s)$$

könnyen belátható, hogy

$$\left|[X,Y]_{t_1}^{t_2}\right| \le \sqrt{[X]_{t_1}^{t_2}}\sqrt{[Y]_{t_1}^{t_2}}.$$

Természetesen ez ismét csak majdnem mindenhol értelemben teljesül. Ezért a nullmértékű halmazokat egyesítve minden racionális t_1, t_2 számra egy közös nullmértékű halmaztól eltekintve az egyenlőtlenség teljesül. Kihasználva, hogy a trajektóriák folytonosak minden t_1 és t_2 esetére is kiterjeszthető az

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

egyenlőtlenség. Rögzítsünk egy kimenetelt és az $[X,Y]$, $[X]$ és az $[Y]$ ezen kimeneteléhez tartozó trajektóriáját jelölje f, g és h. Így ha $t_1 < t_2$, akkor

$$|f(t_2) - f(t_1)| \le \sqrt{g(t_2) - g(t_1)}\sqrt{h(t_2) - h(t_1)}. \tag{3.39}$$

Legyen

$$\mu \triangleq \mathrm{Var}(f) + g + h \quad \text{és} \quad \nu_a \triangleq a^2 g + 2af + h.$$

A fenti (3.39) sorból triviálisan, ha $t_1 < t_2$, akkor a

$$\nu_a(t_2) - \nu_a(t_1) = a^2(g(t_2) - g(t_1)) + 2a(f(t_2) - f(t_1)) + h(t_2) - h(t_1)$$

nem negatív, ugyanis az a szerint vett másodfokú polinom diszkriminánsa nem pozitív. Így a ν_a minden a esetén nem csökkenő. Tehát

$$0 \le \frac{d\nu_a}{d\mu} = a^2\frac{dg}{d\mu} + 2a\frac{df}{d\mu} + \frac{dh}{d\mu}$$

a μ mérték szerint majdnem mindenhol. A nullmértékű halmazokat egyesítve ismét igazolható, hogy ez minden a esetén teljesül. Így ismételten a μ szerint majdnem mindenhol

$$\left|\frac{df}{d\mu}\right| \le \sqrt{\frac{dg}{d\mu}}\sqrt{\frac{dh}{d\mu}}.$$

Tetszőleges u és v Borel-mérhető függvények esetén

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty |uv|\,df\right| = \left|\int_0^\infty |uv|\,\frac{df}{d\mu}d\mu\right| &\le \int_0^\infty |uv|\left|\frac{df}{d\mu}\right|d\mu \le \\ &\le \int_0^\infty |uv|\sqrt{\frac{dg}{d\mu}}\sqrt{\frac{dh}{d\mu}}d\mu \le \\ &\le \sqrt{\int_0^\infty u^2\frac{dg}{d\mu}d\mu}\sqrt{\int_0^\infty v^2\frac{dh}{d\mu}d\mu} = \\ &= \sqrt{\int_0^\infty u^2 dg}\sqrt{\int_0^\infty v^2 dh}\end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítani kívánt Kunita–Watanabe-egyenlőtlenség. □

A polaritási formula kulcs szerepet játszik az Itô-izometria segítségével kiterjesztett integrálfogalom tulajdonságainak igazolásakor. Példaként tekintsük a megállítási és az asszociativitási szabályok igazolását:

3.137. Állítás (Megállítási szabály)**.** *Ha τ megállási idő, akkor*

$$X \bullet M^\tau = (\chi([0,\tau])\,X) \bullet M = (X \bullet M)^\tau. \tag{3.40}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A kvadratikus variáció megfelelő tulajdonsága és a polaritási szabály szerint

$$[(X \bullet M)^\tau, N] = [X \bullet M, N]^\tau = (X \bullet [M,N])^\tau = X \bullet [M,N]^\tau = \\ = X \bullet [M^\tau, N] = [X \bullet M^\tau, N],$$

ami csak akkor lehetséges, ha

$$(X \bullet M)^\tau = X \bullet M^\tau.$$

Hasonlóan,

$$[X \bullet M^\tau, N] = X \bullet [M^\tau, N] = X \bullet [M,N]^\tau = \\ = (\chi([0,\tau])\, X) \bullet [M,N] = \\ = [(\chi([0,\tau])\, X) \bullet M, N],$$

amiből

$$X \bullet M^\tau = (\chi([0,\tau])\, X) \bullet M. \qquad \square$$

3.138. Állítás (Asszociativitási szabály)**.** *Ha $X \in \mathcal{L}^2(M)$ és $Y \in \mathcal{L}^2(X \bullet M)$, akkor $XY \in \mathcal{L}^2(M)$ és*

$$(YX) \bullet M = Y \bullet (X \bullet M). \tag{3.41}$$

Bizonyítás. Az $X \in \mathcal{L}^2$ definíciója szerint $\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[M]\right) < \infty$. Ebből következően majdnem minden kimenetelre az $\int_0^\infty X^2 d[M]$ trajektóriánként vett integrál véges. A polaritási szabály szerint

$$[X \bullet M] = [X \bullet M, X \bullet M] = X \bullet [M, X \bullet M] = \\ = X \bullet (X \bullet [M,M]) = X^2 \bullet [M,M],$$

ahol kihasználtuk, hogy az asszociativitási szabály trajektóriánként vett integrálokra teljesül. Ha $Y \in \mathcal{L}^2(X \bullet M)$, akkor

$$\infty > \mathbf{E}\left(\int_0^\infty Y^2 d[X \bullet M]\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty Y^2 d \int_0^s X^2 d[M]\right) = \\ = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty Y^2 X^2 d[M]\right),$$

vagyis $YX \in \mathcal{L}^2(M)$. Ugyanakkor ismételten a polaritási szabály miatt

$$[(YX) \bullet M, N] = (YX) \bullet [M,N] \doteq \int_0^t YX d[M,N] = \tag{3.42}$$
$$= \int_0^t Y d \int_0^s X d[M,N] \doteq Y \bullet (X \bullet [M,N]),$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ahol felhasználtuk, hogy mivel $X \in \mathcal{L}^2(M)$, ezért a Kunita–Watanabe-egyenlőtlenség miatt

$$\int_0^t |X|\, d\mathrm{Var}([M,N]) \le \sqrt{\int_0^t X^2 d[M]}\sqrt{\int_0^t 1 d[N]} < \infty,$$

így az X majdnem minden kimenetelre $[M,N]$ integrálható. Továbbá

$$Y \bullet (X \bullet [M,N]) = Y \bullet [X \bullet M, N] = [Y \bullet (X \bullet M), N],$$

vagyis a fenti (3.42) sorral összevetve

$$[(YX) \bullet M, N] = [Y \bullet (X \bullet M), N],$$

amiből a sztochasztikus integrál egyértelműsége alapján

$$(YX) \bullet M = Y \bullet (X \bullet M),$$

ami éppen a bizonyítani kívánt asszociativitási szabály. □

3.6.3. Az integrál további kiterjesztése

Célunk egy olyan integrálfogalom definiálása, amelyre érvényes az $[X \bullet L] = = X^2 \bullet [L]$ polaritási szabály. Mivel az $[X \bullet L]$ véges, ezért ilyenkor az $X^2 \bullet [L]$ is véges kell hogy legyen. A kérdés az, hogy ha L egy folytonos lokális martingál és X egy olyan előrejelezhető folyamat, amelyre $\int_0^t X^2(s)\, d[L](s) < \infty$ minden t esetén, akkor van-e olyan $X \bullet L$ módon jelölt folytonos, a nullában nulla értéket felvevő lokális martingál, amelyre minden N folytonos lokális martingálra $[X \bullet L, N] = X \bullet [L,N]$? Miként már többször láttuk, ha ilyen $X \bullet L$ folytonos lokális martingál van, akkor az $X \bullet L$ egyértelmű. Valóban, ha $[X \bullet L, N] = [M,N] = X \bullet [L,N]$ minden N folytonos lokális martingál esetén, akkor minden N folytonos lokális martingálra $[X \bullet L - M, N] = 0$, amiből $X \bullet L = M$, vagyis ha van olyan integrálfogalom amely teljesíti a polaritási formulát, akkor az integrál egyértelmű.

3.139. Definíció. Legyen L lokális martingál. Az $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(L)$ téren az olyan X előrejelezhető folyamatok halmazát értjük, amelyekhez az L-nek van olyan (τ_n) lokalizációs sorozata, hogy minden n-re $X \in \mathcal{L}^2(L^{\tau_n})$, vagyis

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[L^{\tau_n}]\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[L]^{\tau_n}\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^{\tau_n} X^2 d[L]\right) = \\ = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \chi([0,\tau_n])\, X^2 d[L]\right) < \infty.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.140. Tétel (Sztochasztikus integrál létezése)**.** *Ha L folytonos lokális martingál, akkor tetszőleges $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(L)$ folyamathoz létezik olyan $X \bullet L$ módon jelölt,*

1. *a nulla pontban nulla értéket felvevő, folytonos lokális martingál, amelyre minden N folytonos lokális martingálra érvényes az*

$$[X \bullet L, N] = X \bullet [L, N] \tag{3.43}$$

polaritási szabály[64]*.*

2. *Az $\mathcal{L}^2_{loc}(L)$ tér pontosan azokból az előrejelezhető folyamatokból áll, amelyekre minden t-re*

$$[X \bullet L](t) = \int_0^t X^2 d[L] \stackrel{\circ}{=} \left(X^2 \bullet [L]\right)(t) < \infty. \tag{3.44}$$

3. *Tetszőleges τ megállási időre teljesül az*

$$(X \bullet L)^\tau = \chi([0,\tau])\, X \bullet L = X^\tau \bullet L^\tau = X \bullet L^\tau \tag{3.45}$$

megállítási szabály.

4. *Ha $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(L)$, akkor $Y \in \mathcal{L}^2_{loc}(X \bullet L)$ pontosan akkor, ha $XY \in \mathcal{L}^2_{loc}(L)$ és ilyenkor teljesül az*

$$(YX) \bullet L = Y \bullet (X \bullet L) \tag{3.46}$$

asszociativitási szabály.

5. *Az $X \bullet L$ bilineáris, vagyis*

$$X \bullet (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2) = \alpha_1 (X \bullet L_1) + \alpha_2 (X \bullet L_2)$$

és

$$(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) \bullet L = \alpha_1 (X_1 \bullet L) + \alpha_2 (X_2 \bullet L),$$

feltéve, hogy az összes kifejezés értelmes. Ha az egyenlőségben szereplő három tagból kettő értelmes, akkor értelmes a harmadik is.

Bizonyítás. Az állítások igazolása a korábbiak alapján már egyszerű:

1. Legyen $X \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(L)$ és (τ_n) legyen az L olyan lokalizációs sorozata, amelyre $X \in \mathcal{L}^2(L^{\tau_n})$. Tekintsük az $I_n \stackrel{\circ}{=} X \bullet L^{\tau_n}$ integrálokat. Az I_{n+1} a $[0,\tau_n]$ szakaszon megegyezik az

$$I_{n+1}^{\tau_n} \stackrel{\circ}{=} (X \bullet L^{\tau_{n+1}})^{\tau_n} = X \bullet (L^{\tau_{n+1}})^{\tau_n} = X \bullet L^{\tau_n} = I_n$$

[64] Miként korábban, most is belátható, hogy a polaritási formula megkövetelése egyértelműen definiálja az $X \bullet L$ lokális martingált.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

folyamattal, vagyis a $X \bullet L$ integrál egyértelműen definiálható ha értékét a $[0, \tau_n]$ szakaszon az I_n-nel értelmezzük. A konstrukcióból nyilvánvaló, hogy az $X \bullet L$ nem függ a (τ_n) lokalizációs sorozattól. Az $X \bullet L$ a nulla időpontban biztosan eltűnik és folytonos. Triviálisan

$$(X \bullet L)^{\tau_n} \stackrel{\circ}{=} (X \bullet L^{\tau_n})^{\tau_n} = X \bullet L^{\tau_n}.$$

Az $X \bullet L^{\tau_n}$ négyzetesen integrálható martingál és ezért az $(X \bullet L)^{\tau_n}$ megállított folyamat is négyzetesen integrálható martingál, így az $X \bullet L$ lokális martingál. Meg kell mutatni, hogy teljesül a (3.43) polaritási formula. A kvadratikus variációra vonatkozó megállítási szabály szerint

$$\begin{aligned}[X \bullet L, N]^{\tau_n} &= \left[(X \bullet L)^{\tau_n}, N^{\tau_n}\right] \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} \left[X \bullet L^{\tau_n}, N^{\tau_n}\right] = X \bullet \left[L^{\tau_n}, N^{\tau_n}\right] = \\ &= X \bullet [L, N]^{\tau_n} = (X \bullet [L, N])^{\tau_n},\end{aligned}$$

amiből a (3.43) általános polaritási formula evidens.

2. A trajektóriánkénti integrálás elemi szabályai szerint a polaritási szabály alapján

$$\begin{aligned}[X \bullet L] &\stackrel{\circ}{=} [X \bullet L, X \bullet L] = X \bullet [L, X \bullet L] = \\ &= X \bullet (X \bullet [L, L]) = X^2 \bullet [L].\end{aligned}$$

Az $[X \bullet L]$ kvadratikus variáció majdnem mindenhol való végességéből és a fenti sorból következően ha $X \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(L)$, akkor teljesül a (3.44). Megfordítva, ha az előrejelezhető X folyamathoz vesszük az olyan (τ_n) megállási időket, ahol a $t \mapsto \int_0^t X^2 d[L]$ véges, folytonos folyamat először lépi át az n szintet, akkor $\mathbf{E}\left(\int_0^\infty X^2 d[L^{\tau_n}]\right) \leq n$, vagyis $X \in \mathcal{L}^2(L^{\tau_n})$, vagyis $X \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(L)$, tehát az $\mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(L)$ tér tartalmazza az összes olyan előrejelezhető folyamatot, amelyre majdnem minden kimenetelre minden t-re teljesül a (3.44).

3. Legyen τ tetszőleges megállási idő. Ha $X \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(L)$, akkor az

$$|\chi([0, \tau])\, X| \leq |X|$$

miatt triviálisan $\chi([0, \tau])\, X \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(L)$. A már belátott analóg szabály alapján

$$\begin{aligned}((X \bullet L)^{\tau})^{\tau_n} &= ((X \bullet L)^{\tau_n})^{\tau} \stackrel{\circ}{=} (X \bullet L^{\tau_n})^{\tau} = \\ &= \chi([0, \tau])\, X \bullet L^{\tau_n} \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} (\chi([0, \tau])\, X \bullet L)^{\tau_n}.\end{aligned}$$

A (3.45) egyenlőség többi részének igazolása analóg.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

4. Az $XY \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(L)$ ekvivalens az $X^2Y^2 \bullet [L]$ végességével. A trajektóriánkénti integrálás miatt mindig teljesül az

$$Y^2X^2 \bullet [L] = Y^2 \bullet \left(X^2 \bullet [L]\right) = Y^2 \bullet [X \bullet L]$$

azonosság, következésképpen $Y \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(X \bullet L)$ pontosan akkor, ha $XY \in \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(L)$. Ha

$$Y \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(X \bullet L),$$

akkor alkalmas (τ_n) lokalizációs sorozatra $Y \in \mathcal{L}^2((X \bullet L)^{\tau_n}) = \mathcal{L}^2((X \bullet L^{\tau_n}))$.

$$\begin{aligned}(Y \bullet (X \bullet L))^{\tau_n} &\overset{\circ}{=} (Y \bullet (X \bullet L^{\tau_n})^{\tau_n})^{\tau_n} = \\ &= ((Y \bullet (X \bullet L^{\tau_n}))^{\tau_n})^{\tau_n} = \\ &= ((YX \bullet L^{\tau_n}))^{\tau_n} \overset{\circ}{=} (YX \bullet L)^{\tau_n},\end{aligned}$$

amiből az asszociativitási szabály evidens.

5. A linearitás a konstrukció miatt evidens. □

3.6.4. Folytonos szemimartingálok szerinti integrálás

A már elmondottak alapján értelemszerűen definiáljuk a folytonos szemimartingálok szerinti integrálást.

3.141. Definíció. Legyen X egy folytonos szemimartingál és legyen $X = X(0) + V + L$ az X egyértelmű felbontása, ahol a szemimartingál definíciójának megfelelően L folytonos lokális martingál és V folytonos, véges változású folyamat, továbbá az egyszerűség kedvéért $V(0) = L(0) = 0$. Az Y előrejelezhető folyamatot az X szemimartingál szerint integrálhatónak mondjuk, ha egyrészt $Y \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(L)$, vagyis majdnem minden ω kimenetelre minden t esetén

$$\int_0^t Y^2(s,\omega)\, d[L](s,\omega) < \infty,$$

másrészt majdnem minden trajektóriára és minden t időpontra léteznek az $(Y \bullet V)(t,\omega) \overset{\circ}{=} \int_0^t Y(s,\omega)\, dV(s,\omega)$ trajektóriánként vett integrálok, vagyis majdnem minden ω kimenetelre és minden t időpontra

$$\int_0^t |Y|(s,\omega)\, d\mathrm{Var}(V)(s,\omega) < \infty.$$

Definíció szerint

$$\begin{aligned}(Y \bullet X)(t) &\overset{\circ}{=} \int_0^t Y(s)\, dX(s) \overset{\circ}{=} \int_0^t Y(s)\, dV(s) + \int_0^t Y(s)\, dL(s) \overset{\circ}{=} \\ &\overset{\circ}{=} (Y \bullet V)(t) + (Y \bullet L)(t).\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az olvasó könnyen beláthatja, hogy az így kapott $Y \bullet X$ integrálfogalomra teljesülnek a sztochasztikus integrálásra már bemutatott szabályok. A kiterjesztett integrálfogalom egyik fő előnye, hogy az integrálok és a határérték felcserélésére átvihetjük a majorált konvergencia kritériumot:

3.142. Tétel (Majorált konvergencia tétele)**.** *Legyen X folytonos szemimartingál. Tegyük fel, hogy (Y_n) előrejelezhető folyamatok olyan sorozata, amelyre az Y_n majdnem minden kimenetelre minden időpontban valamely Y_∞ folyamathoz tart. Ha van olyan az X szerint integrálható Y folyamat, amelyre $|Y_n| \leq Y$, akkor $Y_n \bullet X \to Y_\infty \bullet X$, ahol a konvergencia sztochasztikus konvergenciában minden kompakt intervallumon egyenletesen, vagyis*

$$\sup_{s \leq t} |(Y_n \bullet X)(s) - (Y_\infty \bullet X)(s)| \xrightarrow{p} 0, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Bizonyítás. Az állítást elég külön-külön az X korlátos változású és lokális martingál részére belátni. Az integrál linearitása miatt elegendő belátni az állítást ha $Y_\infty = 0$.

Először tegyük fel, hogy az X véges változású. Mivel $|Y_n| \leq Y$, ezért tetszőleges ω-ra és $[0,t]$ intervallumra az $Y_n(\omega)$ trajektória a $[0,t]$ szakaszon integrálható. Trajektóriánként alkalmazva a Lebesgue-féle majorált konvergencia tételt minden $s \leq t$ felső határra

$$\left| \int_0^s Y_n dX \right| \leq \int_0^t |Y_n| \, d\mathrm{Var}(X) \to 0,$$

tehát az integrál trajektóriánként, a felső határ szerint egyenletesen, nullához tart. A pontonkénti konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, így az állításban szereplő konvergencia teljesül.

Legyen X folytonos lokális martingál. Az Y a feltétel szerint az X szerint integrálható, tehát $Y \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(X)$. Legyen τ olyan megállási idő, amelyre $X^\tau \in \in \mathcal{H}^2$ és $Y \in \mathcal{L}^2(X^\tau)$. Ha $Y \in \mathcal{L}^2(X^\tau)$, akkor az $|Y_n| \leq Y$ miatt $Y_n \in \in \mathcal{L}^2(X^\tau)$, így az $Y_n \to 0$ miatt a majorált konvergencia tétel felhasználásával

$$\|Y_n\|^2_{X^\tau} \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\int_0^\infty Y_n^2 d[X^\tau] \right) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty Y_n^2 d[X]^\tau \right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(\int_0^\infty \chi([0,\tau]) Y_n^2 d[X] \right) \to 0,$$

tehát az $\mathcal{L}^2(X^\tau)$ térben $Y_n \to 0$.

Legyen (τ_n) az X integrandus $\mathcal{H}^2$-lokalizációs sorozata. Legyen $\varepsilon, \delta > 0$ és jelölje σ az egyik olyan τ_n megállási időt, amelyre $\mathbf{P}(\tau_n \leq t) \leq \delta$. A $[0,\sigma]$ véletlen intervallumon az $Y_n \bullet X$ megegyezik az $Y_n \bullet X^\sigma$ folyamattal, vagyis ha $s \leq \sigma(\omega)$, akkor

$$(Y_n \bullet X)(s,\omega) = (Y_n \bullet X^\sigma)(s,\omega).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ha $A \triangleq \left\{\sup_{s\le t} |Y_n \bullet X|(s) > \varepsilon\right\}$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}((\sigma \le t) \cap A) + \mathbf{P}((\sigma > t) \cap A) \le \\ &\le \mathbf{P}(\sigma \le t) + \mathbf{P}((\sigma > t) \cap A) \le \delta + \mathbf{P}(A_\sigma)\end{aligned}$$

ahol A_σ az A-val analóg módon képzett halmaz, vagyis

$$A_\sigma \triangleq \left\{\sup_{s\le t} |Y_n \bullet X^\sigma|(s) > \varepsilon\right\}.$$

Mivel az $\mathcal{L}^2(X^\sigma)$ topológiában $Y_n \to 0$, és mivel a $Z \mapsto Z \bullet X^\sigma$ izometria, ezért a $\mathcal{H}^2$-ben $Y_n \bullet X^\sigma \to 0$. A Doob-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\left(\sup_{s\le\infty} |Y_n \bullet X^\sigma|(s)\right)^2\right) &\le 4\left(\mathbf{E}^2\left((Y_n \bullet X^\sigma)(\infty)\right)^2\right) = \\ &= 4\|Y_n \bullet X^\sigma\|^2_{\mathcal{H}^2} \to 0.\end{aligned}$$

A Markov-egyenlőtlenség szerint az L^2-konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért

$$\mathbf{P}(A_\sigma) \triangleq \mathbf{P}\left(\sup_{s\le t} |Y_n \bullet X^\sigma|(s) > \varepsilon\right) \to 0. \qquad \square$$

A majorált konvergencia tétele segítségével megmutathatjuk, hogy balról reguláris folyamatok esetén a sztochasztikus integrálok és az Itô–Stieltjes-integrálok egybeesnek, vagyis a sztochasztikus integrálás valóban kiterjesztése az Itô–Stieltjes-integrálásnak.

3.143. Definíció. Egy X folyamatot lokálisan korlátosnak mondunk, ha az $X - X(0)$ rendelkezik olyan (τ_n) lokalizációs sorozattal, amelyre nézve az $(X - X(0))^{\tau_n}$ egyenletesen korlátos.

Ha egy X folyamat lokálisan korlátos és előrejelezhető és az M egy folytonos lokális martingál, akkor van olyan (τ_n) lokalizációs sorozat, hogy az $(X - X(0))^{\tau_n}$ és az $[M^{\tau_n}]$ is korlátos, így $X \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(M)$, vagyis az $X \bullet M$ létezik.

3.144. Lemma. *Minden balról reguláris folyamat lokálisan korlátos, így minden balról reguláris, adaptált folyamat integrálható tetszőleges folytonos szemimartingál esetén.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $X(0) = 0$. Legyen

$$\tau_n \triangleq \inf\{t \mid |X(t)| > n\}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A balról való folytonosság miatt $|X^{\tau_n}| \leq n$, ugyanis ha a τ_n időpontban nem teljesülne, akkor a balról való folytonosság miatt a τ_n csökkenthető lenne. A jobb oldali határérték létezése miatt $\tau_n \nearrow \infty$, ugyanis ellenkező esetben a (τ_n) véges torlódási pontjában nem létezhetne a jobb oldali határérték. Triviálisan minden lokálisan korlátos folyamatra és tetszőlges M lokális martingálra az $X^2 \bullet [M]$ folyamat véges, így $X \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(M)$, így az M feltételezett folytonossága miatt az X integrálható. □

3.145. Lemma. *Ha X balról reguláris és adaptált, akkor az*

$$X^*(t) \triangleq \sup\{|X(s)| \mid s \leq t\}$$

folyamat is lokálisan korlátos és ezért tetszőleges M folytonos lokális martingál esetén integrálható.

Bizonyítás. Az X reguláris, ezért a szuprémumot elég a racionális koordinátájú időpontokban venni, így az X^* mérhető a balról reguláris folyamatok által generált σ-algebrára nézve, így az X^* előrejelezhető. Ha X lokálisan korlátos, akkor triviálisan ugyan avval a (τ_n) lokalizációs sorozattal az X^* is lokálisan korlátos. □

3.146. Tétel. *Ha X folytonos szemimartingál, Y balról reguláris, adaptált folyamat, akkor az $Y \bullet X$ integrál előáll Itô–Stieltjes-típusú közelítő összegek határértékeként, ahol a konvergencia sztochasztikusan a véges szakaszokon egyenletes.*

Bizonyítás. Legyen $\left(t_k^{(n)}\right)$ egy infinitezimális partíciósorozat és legyen $Y^{(n)} \triangleq \sum_k Y\left(t_{k-1}^{(n)}\right)\chi\left(t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right]$ a megfelelő lépcsős függvény. Mivel a partíciósorozat végtelenül finomodik tetszőleges t esetén a t időpontot tartalmazó intervallumok alsó határa balról a t-hez tart. Az Y balról folytonos, ezért $Y^{(n)}(t,\omega) \to Y(t,\omega)$ minden t és ω esetén. Vegyük a $K(t) \triangleq \sup_{s<t}|Y(s)|$ folyamatot. és mivel $\left|Y^{(n)}\right| \leq K$, ezért a majorált konvergencia tétel szerint

$$Y^{(n)} \bullet X \to Y \bullet X,$$

ahol a konvergencia sztochasztikusan a véges szakaszokon egyenletes. □

3.6.5. Sztochasztikus integrálás és mértékcsere

Miként említettük, ekvivalens mértékcsere esetén a sztochasztikus és a majdnem mindenhol való konvergencia nem változik. Ebből következően valamely folyamat kvadratikus variációja sem változik a lokálisan ekvivalens mértékcsere során. A lokálisan ekvivalens mértékcsere nyilvánvalóan nem befolyásolja a trajektóriánként definiált sztochasztikus integrálok értékét.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Kevésbé nyilvánvaló, hogy a sztochasztikus integrál értéke „általában" ugyancsak nem változik a lokális martingálok szerint vett integrálokra. Ennek indoklása némiképpen bonyolultabb. Ha S egy folytonos szemimartingál és X egy balról reguláris, adaptált folyamat, akkor miként láttuk minden t-re az $\int_0^t X dS$ sztochasztikus integrál az Itô-féle közelítő összegek sztochasztikus konvergenciában vett határértéke. Mivel a lokálisan ekvivalens mértékcsere véges intervallumon nem befolyásolja a sztochasztikus konvergenciát a filtráció egyes σ-algebráin, ezért az integrálás eredménye nem függ az alapul vett mértéktől. Világos, hogy a folytonos, korlátos és adaptált folyamatok π-rendszert alkotnak és az olyan X korlátos, előrejelezhető folyamatok, amelyekre a két mérték mellett vett S szerinti integrál megegyezik λ-rendszer. Emlékeztetünk, hogy a sztochasztikus integrálás additív művelet és a sztochasztikus integrálokra érvényes a majorált konvergencia tétele, illetve minden korlátos, előrejelezhető folyamat sztochasztikusan integrálható. Így a monoton osztály tétel miatt minden olyan korlátos X folyamat esetén, amely mérhető a folytonos, adaptált folyamatok által generált legszűkebb σ-algebra szerint a két integrál megegyezik. De éppen ezen σ-algebra elemeire definiáltuk a sztochasztikus integrálást. Az idáig elmondottakat a következő lemmában foglalhatjuk össze:

3.147. Lemma. *Ha* $\mathbf{P}$ *és* $\mathbf{Q}$ *lokálisan ekvivalens mértékek és* S *folytonos szemimartingál, akkor minden korlátos előrejelezhető* X *folyamatra az* $X \bullet S$ *sztochasztikus integrál független a* $\mathbf{P}$ *és a* $\mathbf{Q}$ *mértéktől.*

A tétel általában is igaz, bár tetszőleges S szemimartingál esetén nem definiáltuk a sztochasztikus integrált. A filtrációkkal persze vigyázni kell és mind a két mérték esetén azonos filtrációkat kell tekinteni. Többek között például azért, mert az adaptált, folytonos folyamatok, illetve az előrejelezhetőség definíciója függ a filtrációtól. Miként említettük a kibővített filtrációk definíciója függ attól, hogy milyen nullmértékű halmazokkal bővítettük a filtrációt. Mivel a két oldalon azonos filtrációknak kell lenni, ezért többek között a nullmértékű halmazok azonos osztályaival kell a filtrációkat bővíteni. Ezt oldja fel többek között a már említett lokálisan nullmértékű halmazok bevezetése.

3.148. Tétel. *Ha* X *előrejelezhető és* S *folytonos szemimartingál, akkor az* $X \bullet S$ *sztochasztikus integrál, invariáns a lokálisan ekvivalens mértékcserére, vagyis az* $X \bullet S$ *pontosan akkor létezik egy* $\mathbf{P}$ *mérték alatt, ha létezik a vele lokálisan ekvivalens* $\mathbf{Q}$ *alatt is, és ilyenkor a két integrál értéke azonos.*

Bizonyítás. Mivel a véges változású rész szerinti integrál nyilván invariáns a lokálisan ekvivalens mértékcserére, ezért elegendő a lokális martingál szerinti résszel foglalkozni. Legyen tehát S tetszőleges folytonos lokális martingál a $\mathbf{P}$ mérték mellett. Az S szemimartingál a $\mathbf{Q}$ alatt és miként láttuk ha X korlátos és előrejelezhető, akkor $(X \bullet S)_{\mathbf{P}} = (X \bullet S)_{\mathbf{Q}}$. Érdemes hangsúlyozni, hogy a két oldalon, a mértékek különbözősége miatt a közös integrátorok

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

matematikai tulajdonságai különbözőek, így a két oldalon teljesen más matematikai konstrukciók állnak. Ha most X tetszőleges a $\mathbf{P}$ alatt integrálható, előrejelezhető folyamat és $X_n \stackrel{\circ}{=} X\chi\left(|X| \leq n\right)$, akkor, mivel az X_n korlátos, az állítás igaz, vagyis $(X_n \bullet S)_{\mathbf{P}} = (X_n \bullet S)_{\mathbf{Q}}$. Meg fogjuk mutatni, hogy az $(X \bullet S)_{\mathbf{Q}}$ integrál is létezik. Ha ez teljesül, akkor mind a két oldalon alkalmazva a majorált konvergencia tételt az állítás már egyszerűen indokolható.

Legyen tehát $S = S(0) + N + V$ az S felbontása a $\mathbf{Q}$ alatt. A V véges változású és folytonos ezért $[V] = [V, N] = 0$. Mivel a kvadratikus variáció a lokálisan ekvivalens mértékcsere során nem változik, ezért $[N] = [S]$. Az X pontosan akkor integrálható az S lokális martingál szerint a $\mathbf{P}$ alatt, ha $X^2 \bullet [S] < \infty$ majdnem mindenhol a $\mathbf{P}$ alatt. Amihez persze elegendő, ha ugyanez minden véges szakaszon teljesül, vagyis elegendő, ha egy lokálisan nullmértékű halmazon teljesül. Így az $[S] = [N]$ miatt triviálisan

$$X^2 \bullet [N] = X^2 \bullet [S] < \infty$$

lokálisan majdnem mindenhol a $\mathbf{P}$ alatt, így a $\mathbf{Q}$ és a $\mathbf{P}$ lokális ekvivalenciája miatt a $\mathbf{Q}$ alatt is, tehát az $X \bullet N$ integrál létezik a $\mathbf{Q}$ alatt. A V véges változású folyamat mellett az $X \bullet V$ integrál pontosan akkor létezik, ha $|X| \bullet \mathrm{Var}(V) < \infty$, ahol $\mathrm{Var}(V)$ a V trajektóriánként vett teljes megváltozásainak folyamata. A Girszanov-transzformáció szerint

$$V \stackrel{\circ}{=} -\Lambda^{-1} \bullet [S, \Lambda] = -\left[S, \Lambda^{-1} \bullet \Lambda\right] \stackrel{\circ}{=} -[S, L],$$

ahol az L lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt. A Kunita–Watanabe-egyenlőtlenség szerint

$$|X| \bullet \mathrm{Var}(V) \leq \sqrt{X^2 \bullet [S]}\sqrt{1^2 \bullet [L]} < \infty,$$

tehát az $X \bullet V$ integrál is létezik. Így az

$$(X \bullet S)_{\mathbf{Q}} \stackrel{\circ}{=} (X \bullet N)_{\mathbf{Q}} + (X \bullet V)_{\mathbf{Q}}$$

integrál is létezik és az állítást igazoltuk. □

Érdemes megjegyezni a következőt: Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték lokálisan abszolút folytonos a $\mathbf{P}$ valószínűségi mértékre nézve, ha a $\mathbf{Q}$ leszűkítése minden $\mathcal{F}_t$ σ-algebrára abszolút folytonos a $\mathbf{P}$ leszűkítésére nézve. Világos, hogy a szokásos feltételek nem feltétlenül maradnak érvényben, ha a $\mathbf{P}$-ről áttérünk a $\mathbf{Q}$-ra, de a nullmértékű halmazok halmaza csak nőhet. Így a $\mathbf{Q}$ alatt az előrejelezhető folyamatok halmaza elvileg bővülhet. A bemutatott gondolatmenettel megmutatható, hogy tetszőleges az eredeti filtrációra nézve előrejelezhető, integrálható folyamat integrálható lesz a $\mathbf{Q}$ alatt is és a $\mathbf{P}$ alatti integrálja a $\mathbf{Q}$ alatti integrál egy verziója lesz.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3.7. Az integrálreprezentációs tétel

Miként jeleztük az integrál kiterjesztésére az integrálreprezentációs tétel miatt van szükség. Az integrálreprezentációs tételek a piac teljességének indoklása során játszanak alapvető szerepet. Két tételt tárgyalunk: először a Dudley-féle, majd az Itô-féle reprezentációs tételt mutatjuk be. Mind a két tétel arról szól, hogy egy ξ valószínűségi változó milyen körülmények között írható fel, reprezentálható $\xi = \lambda + \int_0^T X dw$ módon.

3.7.1. Lokális martingálokkal való integrálreprezentációs tétel

Emlékeztetünk, hogy ha w Wiener-folyamat, akkor az $\mathcal{F}_t^0 \stackrel{\circ}{=} \sigma\left(w\left(s\right) \mid s \leq t\right)$ egy filtrációt definiál. Ellenpéldával megmutattuk, hogy az $\mathcal{F}^0$ nem jobbról folytonos. Megmutatható, hogy ha az $\mathcal{F}^0$ helyett az $\mathcal{F}_t \stackrel{\circ}{=} \sigma\left(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N}\right)$ kibővített filtrációt tekintjük, akkor az $\mathcal{F}$ jobbról folytonos lesz, vagyis ilyenkor $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} \stackrel{\circ}{=} \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$. Mivel a w folytonos, ezért minden t-re $w\left(t\right) = \lim_{s \nearrow t} w\left(s\right)$. Ezért a $w\left(t\right)$ mérhető az $\mathcal{F}_{t-}^0 \stackrel{\circ}{=} \sigma\left(w\left(s\right) \mid s < t\right)$ σ-algebrára. Ebből következően $\mathcal{F}_t^0 = \mathcal{F}_{t-}^0 \stackrel{\circ}{=} \sigma\left(\mathcal{F}_s^0 \mid s < t\right)$. Ez nyilván teljesül az $\mathcal{F}$ kibővített filtrációra is. Ezt úgy szokás mondani, hogy az $\mathcal{F}$ balról is folytonos, és mivel jobbról is folytonos, ezért az $\mathcal{F}$ filtrációt folytonosnak mondjuk.

3.149. Tétel (Dudley)**.** *Legyen w egy Wiener-folyamat és $\mathcal{F}$ legyen a w által generált kibővített filtráció. Tetszőleges ξ $\mathcal{F}_T$-mérhető változó esetén létezik $X \in \mathcal{L}_{loc}^2\left(w\right)$ folyamat, amelyre*

$$\xi = \int_0^T X dw.$$

Az állítás akkor is érvényes, ha az $\mathcal{F}$ nem feltétlenül a w által generált filtráció, de az $\mathcal{F}$ folytonos és a w Wiener-folyamat az $\mathcal{F}$-re nézve[65]*.*

Bizonyítás. A bizonyításban használt legfőbb eszköz a következő, korábban már felhasznált észrevétel: Tetszőleges $0 \leq a < b$ esetén az

$$I_{a,b}\left(t\right) \stackrel{\circ}{=} \int_a^t \frac{1}{b-s} dw\left(s\right)$$

sztochasztikus integrál értelmes, folytonos az $[a, b)$ szakaszon, és ha $t \nearrow b$, akkor az $I(t, \omega)$ trajektóriái majdnem minden kimenetelre a $-\infty$ és a $+\infty$ között ingadoznak. Az I folyamat tekinthető úgy, mintha egy Wiener-folyamatot „összenyomtunk" volna az a és a b időpontok közé[66].

[65] Tipikus eset, amikor az $\mathcal{F}$ egy többdimenziós Wiener-folyamat által generált kiterjesztett filtráció és w az egyik koordináta.

[66] V.ö.: 3.51. példa, 108. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Első lépésben belátjuk, hogy tetszőleges $t_n \nearrow T$ sorozat esetén van olyan (ξ_n) sorozat, hogy minden n-re ξ_n mérhető az $\mathcal{F}_{t_n}$ σ-algebra szerint és majdnem mindenhol $\xi_n \to \xi$. Ennek igazolása a következő: Ha $\eta \triangleq \arctan \xi$, akkor az η korlátos, így a Lévy-féle martingál konvergencia tétel[67] miatt majdnem mindenhol

$$\eta_n \triangleq \mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{F}_{t_n}) \to \mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{F}_{t_n}) = \mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{F}_{T-}).$$

Ugyanakkor az $\mathcal{F}$ filtráció a feltétel szerint balról folytonos, vagyis $\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_T$, így $\mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{F}_{T-}) = \mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{F}_T) = \eta$. Az (η_n) segítségével a (ξ_n) sorozat már könnyen definiálható:

$$\xi_n \triangleq \tan(\eta_n) \to \tan(\eta) = \xi.$$

Véges mérték esetén a majdnem mindenhol való konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia. Ebből következően megadható olyan (ξ_{n_k}) részsorozat, amelyre

$$\mathbf{P}\left(|\xi_{n_k} - \xi| > \frac{1}{k^3}\right) < \frac{1}{k^2}.$$

Az egyszerűbb jelölés kedvért az eredeti sorozat helyett vegyük ezt a részsorozatot. A bizonyítás végén szükségünk lesz a következő becslésre:

$$\mathbf{P}\left((n+1)\,|\xi_{n+1} - \xi_n| > \frac{4}{n^2}\right) = \mathbf{P}\left(|\xi_{n+1} - \xi_n| > \frac{4}{n^2(n+1)}\right) \leq \tag{3.47}$$

$$\leq \mathbf{P}\left(|\xi_{n+1} - \xi| > \frac{1}{n^2(n+1)}\right) + \mathbf{P}\left(|\xi_n - \xi| > \frac{3}{n^2(n+1)}\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}\left(|\xi_{n+1} - \xi| > \frac{1}{(n+1)^3}\right) + \mathbf{P}\left(|\xi_n - \xi| > \frac{1}{n^3}\right) \leq \tag{3.48}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Tekintsük a

$$I_n(t) \triangleq \int_{t_n}^{t} \frac{1}{t_{n+1} - s}\, dw(s)$$

integrálokat. Az I_n egy a $[t_n, t_{n+1})$ intervallumba „beszorított” Wiener-folyamat. Miként megjegyeztük, ha $t \nearrow t_{n+1}$, akkor az I_n integrálfolyamat a $\pm\infty$ között ingadozik, és mivel az I_n folyamat folytonos, ezért

$$\tau_n \triangleq \inf\{s \geq t_n : I_n(s) = \xi_n - \xi_{n-1}\} =$$
$$= \inf\{s \geq t_n : I_n(s) - (\xi_n - \xi_{n-1}) = 0\} < t_{n+1}.$$

[67] A tétel szerint ha η egy integrálható valószínűségi változó és $(\mathcal{F}_n)$ σ-algebrák egy monoton növekedő sorozata, akkor $\mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{F}_n) \to \mathbf{E}(\eta \mid \mathcal{F}_\infty)$, ahol $\mathcal{F}_\infty$ az $\mathcal{F}_n$ σ-algebrák egyesítése által generált σ-algebra.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Mivel a $\xi_n - \xi_{n-1}$ változó $\mathcal{F}_{t_n}$-mérhető, könnyen belátható, hogy az

$$I_n(s) - (\xi_n - \xi_{n-1}), \quad t_{n+1} > s \geq t_n$$

folyamat adaptált és folytonos a $[t_n, t_{n+1})$ szakaszon, így a τ_n találati idő megállási idő.

A $0 \leq s \leq t_1$ halmazon az X legyen nulla és indukcióval a $(t_n, t_{n+1}]$ szakaszokon legyen

$$X(s,\omega) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} 1/(t_{n+1}-s), & \text{ha} \quad t_n < s \leq \tau_n \\ 0, & \text{ha} \quad \tau_n < s \leq t_{n+1} \end{cases} = \frac{1}{t_{n+1}-s}\chi(s \leq \tau_n).$$

Tetszőleges n-re a $\tau_n < t_{n+1}$ miatt

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} X^2 d[w] &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{(t_{n+1}-s)^2}\chi(s \leq \tau_n)\, ds = \\ &= \int_{t_n}^{\tau_n} \frac{1}{(t_{n+1}-s)^2} ds = \left[\frac{1}{t_{n+1}-s}\right]_{t_n}^{\tau_n} = \\ &= \frac{1}{t_{n+1}-\tau_n} - \frac{1}{t_{n+1}-t_n} < \infty. \end{aligned}$$

Így minden n-re $X \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ a $[t_n, t_{n+1}]$ szakaszon, következésképpen a sztochasztikus integrál additivitása miatt $X \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ a $[0, t_{n+1}]$ szakaszon is. Ebből következően az $\int_0^{t_{n+1}} X dw$ integrál értelmes. Ugyanakkor

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{n+1}} X dw &= \sum_{k \leq n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} X dw = \sum_{k \leq n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{t_{k+1}-s}\chi(s \leq \tau_k)\, dw = \\ &= \sum_{k \leq n} \int_{t_k}^{\tau_k} \frac{1}{t_{k+1}-s} dw = \sum_{k \leq n} I_k(\tau_k) = \sum_{k \leq n} (\xi_k - \xi_{k-1}) = \xi_n, \end{aligned}$$

ahol értelemszerűen feltettük, hogy $\xi_0 \stackrel{\circ}{=} 0$.

Ha az X a teljes $[0,T]$ szakaszon is integrálható, akkor a majorált konvergencia tétel miatt, felhasználva, hogy az egy pontból álló halmazok az integrátor folytonossága miatt elhagyhatóak, vagyis hogy a $[0,T]$ és a $(0,T)$ halmazon való integrálok egybeesnek

$$\int_0^T X dw = \int_0^T \lim_{n\to\infty} \chi((0, t_{n+1}])\, X dw = \lim_{n\to\infty} \int_0^{t_{n+1}} X dw = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi,$$

ami éppen a bizonyítani kívánt reprezentáció. □

Az X integrálhatóságához meg kell mutatni, hogy $X \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}(w)$, vagyis hogy majdnem minden kimenetelre

$$\int_0^T X^2(s)\, ds < \infty.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Legyen

$$\gamma_n \stackrel{\circ}{=} [I_n](\tau_n) = \int_{t_n}^{\tau_n} \frac{1}{(t_{n+1}-s)^2} ds = \\ = \frac{1}{t_{n+1}-\tau_n} - \frac{1}{t_{n+1}-t_n} \stackrel{\circ}{=} f_n^{-1}(\tau_n).$$

Evidens módon $\int_0^T X^2(s)\,ds = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n$. Meg kell mutatni, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n < \infty$ majdnem mindenhol. Az f_n^{-1} függvény éppen a $[t_n, t_{n+1})$ intervallumot képezi a $[0,\infty)$ félegyenesre. Ha $\widehat{w}_n(s) \stackrel{\circ}{=} I_n(f_n(s))$ a megfelelő „széthúzott" Wiener-folyamat, akkor

$$\widehat{w}_n(\gamma_n) = \widehat{w}_n\left(f_n^{-1}(\tau_n)\right) = I_n(\tau_n) = \xi_n - \xi_{n-1}$$

és mivel az f és az f^{-1} szigorúan monoton nő, valójában γ_n az első olyan időpont, ahol a $\widehat{w}_n$ Wiener-folyamat eltalálja a $\xi_n - \xi_{n-1}$ változót. Vegyük észre, hogy a $\xi_n - \xi_{n-1}$ az $\mathcal{F}_{t_n}$ σ-algebrára nézve mérhető, a $\widehat{w}_n$ pedig a $[t_n, t_{n+1})$ időintervallumon értelmezett I_n áttranszformálása. Következésképpen az I_n, így a $\widehat{w}_n$ is független a $\xi_n - \xi_{n-1}$ változótól.

Vizsgáljuk meg a γ_n eloszlását. Az egyszerűség kedvéért az n indexet elhagyva tetszőleges B Borel-mérhető halmazra, ha F jelöli a $\xi \stackrel{\circ}{=} \xi_n - \xi_{n-1}$ eloszlását, akkor

$$\mathbf{P}(\gamma \in B) \stackrel{\circ}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}(\gamma \in B \mid \xi = x)\, dF(x).$$

Vegyük észre, hogy ez az egyenlőség egy triviális azonosság. Bármely valószínűség felírható tetszőleges másik változóra vonatkozó feltételes valószínűségek integráljaként. Az azonosság felírásához pusztán a feltételes valószínűség definíciója szükséges és az, hogy a feltételes valószínűség mindig létezik, vagy ami ugyanaz, hogy a feltételes várható érték integrálható változó esetén mindig létezik. Kérdés csak az, hogy hogyan lehet kiszámolni a feltételes valószínűséget?

Az egyetlen széles körben használható feltétel a következő:

3.150. Lemma. *Ha a ξ és az η független, véges vagy végtelen dimenziós vektorváltozók és $Z(x,y)$ egy két-változós, szorzatmérhető függvény, akkor*

$$\mathbf{E}(Z(\xi,\eta) \mid \eta = y) = \mathbf{E}(Z(\xi, y)),$$

vagyis függetlenség esetén a feltétel „behelyettesíthető és elhagyható". A ξ és az η képtere tetszőleges mérhető tér lehet, amelyre nézve a ξ és az η valószínűségi változó és a Z szorzatmérhető.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Ha $Z = \chi_A \chi_B$ alakú mérhető tégla karakterisztikus függvénye, akkor

$$\mathbf{E}\left(Z\left(\xi,\eta\right) \mid \eta\right) = \mathbf{E}\left(\chi_A\left(\xi\right)\chi_B\left(\eta\right) \mid \eta\right) = \chi_B\left(\eta\right)\mathbf{E}\left(\chi_A\left(\xi\right) \mid \eta\right) = \\ = \chi_B\left(\eta\right)\mathbf{E}\left(\chi_A\left(\xi\right)\right),$$

így a regressziós függvény definíciója miatt

$$\mathbf{E}\left(Z(\xi,\eta) \mid \eta = y\right) = \chi_B(y)\mathbf{E}(\chi_A(\xi)) = \mathbf{E}(\chi_B(y)\chi_A(\xi)) = \\ = \mathbf{E}(Z(\xi,y)).$$

Az általános eset a lépcsős függvényekkel való közelítéssel kapható. □

Jelölje $C\left([0,\infty)\right)$ a nullából induló folytonos függvények terét. A $C\left([0,\infty)\right)$ teret a Borel-halmazok által generált, vagy ami ugyanaz, a pontfunkcionálok által generált σ-algebrával látjuk el. A konkrét helyzetben a Z egyik változója az $x \in C\left([0,\infty)\right)$ függvények, a másik az $y \in \mathbb{R}$ számok. A $Z\left(x,y\right)$ függvény értéke legyen az az első időpont, amikor az x függvény eléri az y értéket. Legyen $\lambda \geq 0$ tetszőleges. Ha $y > 0$, akkor felhasználva, hogy egy kompakt halmazon értelmezett folytonos függvény felveszi a maximumát

$$\{(x,y) \mid Z(x,y) > \lambda\} = \{(x,y) \mid x\left(t\right) < y, \forall t \leq \lambda\} = \\ = \cup_n \left\{(x,y) \mid x\left(t\right) \leq y - \frac{1}{n}, \forall t \leq \lambda\right\} = \\ = \cup_n \left\{(x,y) \mid x\left(r\right) \leq y - \frac{1}{n}, \forall r \leq \lambda, r \in \mathbb{Q}\right\}. \tag{3.49}$$

Bármely r időpontra az $\{(x,y) \mid x\left(r\right) \leq y - 1/n\}$ halmaz zárt, így a halmaz $\mathcal{B}\left(C\left([0,\infty)\right)\right) \times \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right) = \mathcal{B}\left(C\left([0,\infty)\right) \times \mathbb{R}\right)$ mérhető. Következésképpen a fenti (3.49) halmaz szorzatmérhető. Hasonlóan járhatunk el, ha $y < 0$. Ha $y = 0$, akkor a fenti (3.49) halmaz üres. Vagyis a Z esetén alkalmazható a lemma.

A lemma szerint ha

$$\gamma^{(x)} \stackrel{\circ}{=} \inf\left\{s \geq 0 \mid w\left(s\right) = x\right\},$$

akkor

$$\mathbf{P}\left(\gamma \in B\right) \stackrel{\circ}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}\left(\gamma \in B \mid \xi = x\right) dF\left(x\right) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}\left(\gamma^{(x)} \in B\right) dF\left(x\right).$$

Mivel $\gamma^{(x)}$ az x pont találati ideje, akkor a $\gamma^{(x)}$ sűrűségfüggvény éppen

$$h\left(u\right) = |x| \frac{1}{\sqrt{u^3 2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2u}\right), \quad u \geq 0.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A sűrűségfüggvény képletéből

$$h(u) \leq \frac{|x|}{u^{3/2}},$$

vagyis

$$\mathbf{P}\left(\gamma^{(x)} \geq u\right) \leq |x| \int_u^\infty y^{-3/2} dy = -2|x| \left[\frac{1}{\sqrt{y}}\right]_u^\infty = 2\frac{|x|}{\sqrt{u}}.$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\gamma_n \geq \frac{1}{n^2}\right) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{P}\left(\gamma_n^{(x)} \geq \frac{1}{n^2}\right) dF(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \min\left(\mathbf{P}\left(\gamma_n^{(x)} \geq \frac{1}{n^2}\right), 1\right) dF(x) \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \min\left(2\frac{|x|}{\sqrt{1/n^2}}, 1\right) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} \min\left(2n|x|, 1\right) dF(x) = \\
&= \mathbf{E}\left(\min\left(2n|\xi_n - \xi_{n-1}|, 1\right)\right) \leq \\
&\leq \mathbf{P}\left(2n|\xi_n - \xi_{n-1}| > \frac{8}{(n-1)^2}\right) + 1 \cdot \frac{8}{(n-1)^2}.
\end{aligned}$$

A tárgyalás elején levő (3.47) becslés alapján

$$\mathbf{P}\left(n|\xi_n - \xi_{n-1}| > \frac{4}{(n-1)^2}\right) \leq \frac{2}{(n-1)^2},$$

ezért

$$\mathbf{P}\left(\gamma_n \geq \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{8}{(n-1)^2} = \frac{10}{(n-1)^2}.$$

Az $\sum 1/(n-1)^2$ sor konvergens, így a Borel–Cantelli-lemma miatt majdnem minden kimenetelre véges sok indextől eltekintve $\gamma_n < 1/n^2$, vagyis a $\sum \gamma_n$ sor majdnem minden kimenetelre konvergens, tehát az integrálhatóság teljesül. □

3.151. Példa. Integrálreprezentáció többdimenziós Wiener-folyamat esetén.

A Dudley-féle tételben csak a filtráció folytonosságára van szükség. Ez teljesül például akkor, ha a filtrációt egy többdimenziós Wiener-folyamat definiálja, miközben a reprezentálást csak az egyik koordináta segítségével akarjuk elvégezni. A Dudley-tétel szerint az előállítás ilyenkor is megvalósítható. Vagyis ha az X nem mérhető az integrátor által generált filtrációra nézve,

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

akkor esetlegesen az integrátor által generált filtrációra nem mérhető változó is előállítható sztochasztikus integrálként. Erre tekinthetjük a következő példát:

Legyen (w_1, w_2) egy kétdimenziós Wiener-folyamat. Legyen

$$E(t) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(w_2(t) - \frac{t}{2}\right) = \exp\left(w_2(t) - \frac{[w_2](t)}{2}\right).$$

Az E éppen a w_2 exponenciális martingálja, így az Itô-formulával könnyen igazolható, hogy az E lokális martingál. Ugyanakkor az E valódi martingál: Ha $t > s$, akkor, felhasználva, hogy a w_2 független növekményű

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(E(t) \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}\left(\exp\left(w_2(t) - \frac{t}{2}\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \exp(w_2(s))\, \mathbf{E}(\exp(w_2(t) - w_2(s)) \mid \mathcal{F}_s) = \\
&= \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \exp(w_2(s))\, \mathbf{E}(\exp(w_2(t) - w_2(s))) = \\
&= \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \exp(w_2(s)) \exp\left(\frac{t-s}{2}\right) = E(s),
\end{aligned}$$

ahol az utolsó sorban kihasználtuk a lognormális eloszlás várható értékének képletét. Legyen továbbá $a > 1$ és

$$\tau_a \stackrel{\circ}{=} \inf\{t < T \mid a + I(t) = E(t)\},$$

ahol ismét

$$I(t) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t \frac{1}{T-s} dw_1(s), \quad t < T$$

a w_1 Wiener-folyamat már látott „összenyomása".

Miként korábban láttuk az I „összenyomott" Wiener-folyamat a $[0, T)$ szakaszon a $-\infty$ és ∞ között ingadozik, az E trajektóriái, mivel folytonosak, külön-külön korlátosak a $[0, T]$ kompakt szakaszon, ezért $\tau_a < T$. Világos, hogy a τ_a megállási idő a (w_1, w_2) által generált filtrációra nézve. Legyen a $[0, T]$ szakaszon

$$X(s) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{T-s} \chi(s \leq \tau_a).$$

Felhasználva, hogy $E \geq 0$ és $E(0) = 1 < a = a + I(0)$ azonnal látható, hogy a $[0, \tau_a)$ szakaszon az $a + I$ az E felett van, így ezen a szakaszon

$$a + I(t) \stackrel{\circ}{=} a + \int_0^t \frac{1}{T-s} dw_1(s) \geq E(t) \geq 0.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Vagyis

$$X \bullet w_1 \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{T-s}\chi\left(s \leq \tau_a\right) \bullet w_1 = \frac{1}{T-s} \bullet w_1^{\tau_a} = I^{\tau_a} \geq -a,$$

így az X egy „megengedett" befektetési stratégia a w_1-re nézve.

Ha $H_T \stackrel{\circ}{=} E\left(\tau_a\right)$, akkor

$$H_T \stackrel{\circ}{=} E\left(\tau_a\right) = a + I\left(\tau_a\right) = a + \int_0^{\tau_a} \frac{1}{T-s} dw_1\left(s\right) =$$
$$= a + \int_0^T X dw_1\left(s\right) = a + \left(X \bullet w_1\right)\left(T\right),$$

vagyis a w_1 egy a (w_1, w_2) által generált filtrációra nézve mérhető változót is elő tudott állítani. (Persze az X csak a (w_1, w_2)-re nézve adaptált.)

A megállási opciókról szóló tétel miatt, felhasználva, hogy az E martingál és $\tau_a \leq T$

$$\mathbf{E}\left(H_T\right) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(E\left(\tau_a\right)\right) = \mathbf{E}\left(E\left(0\right)\right) = 1,$$

így a replikáló stratégiában a replikáló konstans értéke $a > 1$ nem a várható érték. Ugyanakkor az Itô-formulával való elemi számolással

$$E\left(t\right) = 1 + \int_0^t E\left(s\right) dw_2\left(s\right).$$

Az $E\left(t\right)$ triviálisan nem negatív. Következésképpen $E \bullet w_2 \geq -1$.

$$H_T \stackrel{\circ}{=} E\left(\tau_a\right) = 1 + \int_0^{\tau_a} E\left(s\right) dw_2\left(s\right) =$$
$$= 1 + \int_0^T \chi\left(s \leq \tau_a\right) E\left(s\right) dw_2\left(s\right),$$

így van olyan replikáló, alulról korlátos portfólió is, ahol a konstans éppen a H_T tranzakció várható értéke. Vegyük észre, hogy ebben az előállításban sem mérhető a H_T az integrálban szereplő w_2 Wiener-folyamat által generált filtrációra nézve. Ebben az előállításban szereplő integrál azonban martingál a (w_1, w_2) által generált filtrációra nézve. □

3.7.2. Négyzetesen integrálható martingálokkal való integrálreprezentációs tétel

A Dudley-tételben az előállítás nem egyértelmű, ennek megfelelően nem tudjuk garantálni, hogy a reprezentációban szereplő konstans éppen a ξ változó várható értéke legyen. Az alább tárgyalandó Itô-féle reprezentációs tételben

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

a legfontosabb az, hogy az előállításban szereplő konstans éppen a várható érték. Ugyancsak érdemes hangsúlyozni, hogy az előállításban szereplő sztochasztikus integrál nem csak lokális martingál, hanem valódi martingál, ugyanis az előállításban szereplő integrál X integrandusára $X \in \mathcal{L}^2(w)$. Ugyanakkor ennek ára is van. Egyrészt a ξ nem lehet tetszőleges, fel kell tenni, hogy a ξ négyzetesen integrálható, másrészt a ξ-nek mérhetőnek kell lenni az előállító Wiener-folyamat által generált filtrációban szereplő σ-algebrára nézve. Az eszközárazási képletben a beárazható követelések mérhetőségére szigorú megkötéseket kell tenni. A modellben a filtrációt az alapul vett Wiener-folyamatok generálják. Ennek oka éppen az alább tárgyalt tételben rejlik.

Legyen tehát w egy Wiener-folyamat és jelölje $\mathcal{F}$ a w által generált filtrációt. Emlékeztetünk, hogy $\mathcal{F}_t \triangleq \sigma\left(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N}\right)$, ahol $\mathcal{F}^0$ a w által generált filtráció. Könnyen látható, hogy minden $F \in \mathcal{F}_t$ halmazhoz található olyan $F_0 \in \mathcal{F}_t^0$ és N nullmértékű halmaz, hogy $F \Delta F_0 = N$. Az $\mathcal{F}_t^0$, definíció szerint, éppen a $w(s)$, $s \leq t$ alakú változók által generált legszűkebb σ-algebra. Világos, hogy ez a σ-algebra megegyezik a $w(s_1) - w(s_2)$, $s_1, s_2 \leq t$ alakú növekmények által generált σ-algebrával. Ugyancsak emlékeztetünk, hogy valamely véges számú $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ változók által generált σ-algebra minden eleme felírható

$$\{\omega \mid (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)(\omega) \in B\}$$

módon, ahol B az $\mathbb{R}^m$ egy tetszőleges Borel-mérhető halmaza. Vagyis a $(\xi_k)_{k=1}^m$ változók által generált σ-algebra éppen az m-dimenziós Borel-halmazok inverzképeinek halmaza.

Emlékeztetünk, hogy az $\mathcal{F}_t^0$ σ-algebra definíció szerint az $w(s)$, $s \leq t$ valószínűségi változók alapján generált σ-algebra. Tekintsük a $\Delta w(t_k) \triangleq w(t_k) - w(t_{k-1})$, $t_k, t_{k-1} \leq t$ alakú növekményekből álló $\mathcal{D}$ halmazt. A $\mathcal{D}$ tetszőleges véges elemű részhalmaza esetén tekintsük az ezen véges számú változó által generált σ-algebrát, majd tekintsük ezen σ-algebrák unióját. Világos, hogy egyrészt metszet zárt rendszert kapunk, másrészt az így kapott $\mathcal{S}$ halmazcsalád szintén generálja az $\mathcal{F}_t^0$ σ-algebrát. A monoton osztály tételből evidens, hogy tetszőleges ν (véges) előjeles mérték esetén ha $\nu(S) = 0$ minden $S \in \mathcal{S}$ halmazra, akkor a $\nu = 0$, vagyis az $\mathcal{S}$ elemei egyértelműen meghatározzák az előjeles mértékeket. (Venni kell az összes olyan korlátos u függvényt, amelyre $\int_\Omega u d\nu = 0$. Mivel a ν mérték véges, ezért a lehetséges u függvények halmaza lineáris tér.) Ezt követően tekintsük a következő egyszerű lemmát:

3.152. Lemma. *Jelölje $\mathcal{F}$ valamely w Wiener-folyamat által generált filtrációt. Ha a h végigfutja $[0,T]$ szakaszon értelmezett determinisztikus lépcsős függvényosztály elemeit, akkor az*

$$(\mathcal{E}(h \bullet w))(T) \triangleq \exp\left(\int_0^T h dw - \frac{1}{2}\int_0^T h^2 d[w]\right)$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

alakú függvények által generált lineáris tér sűrű az $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ *térben. A* $T = \infty$ *megengedett, azonban ilyenkor is a* h *függvények tartója korlátos kell, hogy legyen, ugyanis ellenkező esetben az integrálok értelmetlenek.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{U}$ az $(\mathcal{E}(h \bullet w))(T)$ alakú függvények által generált lineáris teret. Megmutatjuk, hogy ha a g függvény merőleges az $\mathcal{U}$-ra, akkor $g \overset{m.m.}{=} 0$. Ebből a lemma már következni fog, mert ha egy függvény merőleges az $\mathcal{U}$-ra, akkor merőleges az $\mathcal{U}$ által generált zárt altérre is, amely ezek szerint a teljes L^2 tér, ugyanis ha a generált zárt altér az L^2-nek csak egy valódi zárt altere lenne, akkor létezne egy a generált zárt altérre merőleges nem nulla elem is. Vagyis elegendő belátni, hogy ha minden

$$h \doteq \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \chi((t_k, t_{k+1}]),$$

esetén

$$0 = \mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_k \lambda_k \Delta w(t_k) - \frac{1}{2}\sum_k \lambda_k^2 \Delta t_k\right) \cdot g\right) \doteq$$
$$\doteq C \cdot \mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_k \lambda_k \Delta w(t_k)\right) \cdot g\right),$$

akkor $g = 0$. Evidens módon tetszőleges (λ_k, t_k) sorozat esetén $C \neq 0$, vagyis feltehetjük, hogy

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_k \lambda_k \Delta w(t_k)\right) \cdot g\right) = 0.$$

A következő gondolatmenet célja, hogy a λ_k valós paraméterek helyébe az $i\lambda_k$ imaginárius értékeket tegyük.

Rögzítsük a λ_0 kivételével a λ_k konstansokat. Az

$$\exp(\lambda_k \Delta w(t_k)), \quad k = 1,2,\ldots,m$$

alakú kifejezések lognormálisak, így van szórásuk, vagyis $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$-beli elemek. Mivel függetlenek egymástól, ezért a négyzetük szorzatának várható értéke éppen a négyzetek várható értékeinek szorzata. Így a szorzatuk is $L^2(\Omega)$-beli. A g szintén $L^2(\Omega)$-ban van. Két négyzetesen integrálható függvény szorzata integrálható, következésképpen a $g \in L^2(\Omega)$-vel szorozva az $\exp(\sum_{k=1}^m \lambda_k \Delta w(t_k))$ változót egy $L^1(\Omega)$-beli u függvényt kapunk. Mivel erre a későbbiekben szükségünk lesz érdemes hangsúlyozni, hogy ugyanez a gondolatmenet érvényes az $\exp(\lambda_k |\Delta w(t_k)|)$ változókra is, egyedül azt kell

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

csak felhasználni, hogy ha ξ normális eloszlású, akkor az $\exp(|\xi|)$ változónak van szórása: Legyen $\xi \cong N(0,\sigma)$. $\mathbf{E}\left((\exp(|\xi|))^2\right) = \mathbf{E}(\exp(2|\xi|))$ és így elegendő az $\mathbf{E}(\exp(c|\xi|))$-vel, $c \geq 0$ és $\xi \cong N(0,1)$ várható értékkel foglalkozni. A lognormális eloszlás várható értékének végessége miatt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\exp(c|\xi|)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(c|x|)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\exp(cx)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \leq \\ &\leq 2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(cx)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx < \infty.\end{aligned}$$

Térjünk vissza a λ_0 változóra.

$$\begin{aligned}M(\lambda_0) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_k \lambda_k \Delta w(t_k)\right)\cdot g\right) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\exp(\lambda_0\Delta w(t_0))\cdot u) \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} \int_\Omega \exp(\lambda_0\Delta w(t_0))\cdot u d\mathbf{P} \stackrel{\circ}{=} \int_\Omega \exp(\lambda_0\Delta w(t_0))\,d\mu \equiv 0,\end{aligned}$$

ahol $\mu(A) \stackrel{\circ}{=} \int_A u d\mathbf{P}$ egy előjeles mérték. Minden előjeles mérték definíció szerint csak véges értékeket vehet fel, tehát fontos, hogy az u integrálható a $\mathbf{P}$-re nézve. Könnyen látható, hogy az M végtelen sokszor deriválható és a deriválás elvégezhető az integrál alatt. (Emlékeztetünk, hogy ehhez elegendő, hogy a magfüggvény paraméter szerinti parciális deriválása után a deriváltnak legyen deriváláshoz használt paramétertől független integrálható majoránsa. Mivel a deriválás lokális művelet, az integrálható majoráns elegendő ha a deriválandó paraméter tetszőleges értéke esetén egy a paraméter érték köré rajzolt nyílt sávban létezik.) Formálisan az integrál alatt deriválva

$$M^{(n)}(\lambda_0) = \int_\Omega (\Delta w(t_0))^n \exp(\lambda_0\Delta w(t_0))\,d\mu.$$

Mivel tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén alkalmas k konstanssal

$$x^n \exp(x) \leq k\exp(x(1+\varepsilon)), \quad x \geq 0, \quad \text{ha} \quad \lambda_0 \in (\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon),$$

akkor

$$\begin{aligned}|(\Delta w(t_0))^n \exp(\lambda_0\Delta w(t_0))| &\leq |(\Delta w(t_0))^n| \exp(|\lambda_0\Delta w(t_0)|) \leq \\ &\leq k\exp((|\lambda_0|+\varepsilon)|\Delta w(t_0)|)\end{aligned}$$

amely kifejezés, miként láttuk, integrálható.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A deriválást elvégezve az $M(\lambda) \equiv 0$ alapján

$$M^{(n)}(\lambda_0) = \int_\Omega (\Delta w(t_0))^n \exp(\lambda_0 \Delta w(t_0))\, d\mu = 0.$$

Ha $\lambda_0 = 0$, akkor

$$\int_\Omega (\Delta w(t_0))^n\, d\mu = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Tekintsük az

$$\int_\Omega \exp(i\lambda_0 \Delta w(t_0))\, d\mu = \int_\Omega \sum_n \frac{(i\lambda_0 \Delta w(t_0))^n}{n!} d\mu$$

integrált. A bizonyítás alapgondolata, hogy az összegzést és az integrálást fel tudjuk cserélni. Ezt a majorált konvergencia tétellel fogjuk igazolni. A $\Delta w(t_0)$ eloszlása normális, így miként már megjegyeztük az $\exp(|\lambda_0 \Delta w(t_0)|)$ változónak van szórása. Az $u \in L^2(\Omega)$ miatt

$$\int_\Omega \sum_n \frac{|(i\lambda_0 \Delta w(t_0))|^n}{n!} d|\mu| = \int_\Omega \sum_n \frac{|\lambda_0 \Delta w(t_0)|^n}{n!} d|\mu| =$$
$$= \int_\Omega \exp(|\lambda_0 \Delta w(t_0)|)\, d|\mu| = \int_\Omega \exp(|\lambda_0 \Delta w(t_0)|)\, |u|\, d\mathbf{P} < \infty.$$

Ezt felhasználva az alábbi sorban használhatjuk a majorált konvergencia tételt:

$$\int_\Omega \exp(i\lambda_0 \Delta w(t_0))\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\lambda_0)^n}{n!} \int_\Omega (\Delta w(t_0))^n\, d\mu = 0.$$

Vagyis minden λ_0 valós szám esetén

$$\mathbf{E}(\exp(i\lambda_0 \Delta w(t_0)) \cdot u) = 0.$$

Ezt követően a g helyébe írjuk az

$$\exp(i\lambda_0 w\Delta(t_0))\, g$$

függvényt. Mivel a komplex exponenciális függvény korlátos az új függvény szintén négyzetesen integrálható marad. Ezt követően vegyük a λ_1 változót, majd ismételjük meg a gondolatmenetet a λ_1-re stb. Véges lépés után az

$$M(i\lambda_0, \ldots, i\lambda_n) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\exp\left(\sum_k i\lambda_k \Delta w(t_k)\right) \cdot g\right) \equiv 0$$

azonossághoz jutunk.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az olyan $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ korlátos függvények, amelyekre

$$\mathbf{E}(f(\Delta w(t_1), \dots, \Delta w(t_k)) \cdot g) = 0$$

λ-rendszert alkotnak. A $\sum_k \exp(i\lambda_k x)$ korlátos függvények π-rendszert alkotnak, így alkalmazhatjuk a monoton osztály tételt. Következésképpen minden $f(x_1, \dots, x_m)$ Borel-mérhető, korlátos függvényre

$$\mathbf{E}(f(\Delta w(t_1), \dots, \Delta w(t_k)) \cdot g) = 0.$$

Ha $f = \chi_B$, ahol B az $\mathbb{R}^n$ egy Borel-mérhető halmaza, akkor

$$\mathbf{E}(\chi_B(\Delta w(t_1), \dots, \Delta w(t_k)) \cdot g) = 0.$$

A generált σ-algebra korábban említett konstrukciója miatt ha

$$A \in \sigma(\Delta w(t_0), \dots, \Delta w(t_m)) = \sigma(w(t_0), \dots, w(t_m)),$$

akkor $\mathbf{E}(\chi_A g) = 0$. Vegyük észre, hogy a $\nu(A) \stackrel{\circ}{=} \int_A g d\mathbf{P}$ egy előjeles mérték. A monoton osztály tétel miatt a már korábban említett észrevétel alapján

$$\mathbf{E}(\chi_A g) = 0, \quad \text{ha} \quad A \in \sigma(w(s), \quad s \le T) = \mathcal{F}_T^w.$$

Az $\mathcal{F}$ filtráció a feladat megfogalmazása szerint a w által generált filtráció, ezért

$$\int_A g d\mathbf{P} = 0, \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

A g függvény $\mathcal{F}_T$-mérhető, következésképpen $g \stackrel{m.m.}{=} 0$, ugyanis ha például az $A \stackrel{\circ}{=} \{g > 0\}$ halmaz mértéke pozitív lenne, akkor $\int_A g d\mathbf{P} > 0$ lenne, ami lehetelen, ugyanis $A \in \mathcal{F}_T$. □

3.153. Tétel (Itô)**.** *Legyen w Wiener-folyamat, és jelölje $\mathcal{F}$ a w által generált filtrációt. Ha $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$, akkor található, mégpedig egyetlen olyan $X \in \mathcal{L}^2(w)$, amelyre $\xi = \mathbf{E}(\xi) + \int_0^T X dw$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{U}$ az olyan ξ változók halmaza, amelyekre a tételben szereplő előállítás valamilyen $X \in \mathcal{L}^2(w)$ folyamattal lehetséges. Az $\mathcal{U}$ triviálisan lineáris tér. Ha $\xi \in \mathcal{U}$, akkor az előállítás két oldalát négyzetre emelve az Itô-izometria alapján

$$\mathbf{E}(\xi^2) = (\mathbf{E}(\xi))^2 + 2\mathbf{E}(\xi) \cdot \mathbf{E}\left(\int_0^T X dw\right) + \mathbf{E}\left(\left(\int_0^T X dw\right)^2\right) =$$

$$= (\mathbf{E}(\xi))^2 + \mathbf{E}\left(\left(\int_0^T X dw\right)^2\right) = (\mathbf{E}(\xi))^2 + \|(X \bullet w)(T)\|_2^2 \stackrel{\circ}{=}$$

$$\stackrel{\circ}{=} (\mathbf{E}(\xi))^2 + \|X \bullet w\|_{\mathcal{H}^2}^2 = (\mathbf{E}(\xi))^2 + \|X\|_w^2,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ugyanis a feltétel szerint $X \in \mathcal{L}^2(w)$, így az $X \bullet w$ négyzetesen integrálható martingál, tehát

$$\mathbf{E}((X \bullet w)(T)) = \mathbf{E}((X \bullet w)(0)) = 0.$$

Az $\mathcal{U}$ zárt az $L^2(\Omega)$-ban, ugyanis ha $(\xi_n) \subseteq \mathcal{U} \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ és $\xi_n \to \xi_\infty$, akkor $\mathbf{E}(\xi_n) \to \mathbf{E}(\xi_\infty)$ és ezért a (ξ_n), illetve az $(\mathbf{E}(\xi_n))$ Cauchy-sorozatok. Így a megfelelő (X_n) is Cauchy-sorozat az $\mathcal{L}^2(w)$ térben. Mivel az $\mathcal{L}^2(w)$, miként minden L^2-tér, teljes, ezért az (X_n) sorozatnak van $X_\infty \in \mathcal{L}^2(w)$ határértéke, természetesen az $\mathcal{L}^2(w)$-ben definiált konvergencia szerint. Ugyancsak az Itô-izometria szerint az $L^2(\Omega)$ térben

$$\int_0^T X_n dw \to \int_0^T X_\infty dw,$$

ezért az integrálelőállítás teljesül a ξ_∞ határértékre is.

Megmutatjuk, hogy az $\mathcal{U}$ tartalmazza a

$$\xi \stackrel{\circ}{=} \mathcal{E}(h \bullet w)(T) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(h \bullet w - \frac{1}{2} h^2 \bullet [w]\right)(T)$$

alakú változókat, ahol h egy lépcsős függvény. Természetesen $h^2 \bullet [w]$ értelemszerűen a h^2 integrálfüggvénye a λ Lebesgue-mérték szerint.

Az Itô-formula alapján tetszőleges M folytonos szemimartingálra, ha

$$\mathcal{E}(M) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(M - \frac{1}{2}[M]\right),$$

akkor

$$\mathcal{E}(M) - \mathcal{E}(M)(0) = \mathcal{E}(M) \bullet (M - 1/2\,[M]) + \frac{1}{2}\mathcal{E}(M) \bullet [M - 1/2\,[M]] =$$
$$= \mathcal{E}(M) \bullet (M - 1/2\,[M]) + \frac{1}{2}\mathcal{E}(M) \bullet [M] = \mathcal{E}(M) \bullet M.$$

Így ha az M lokális martingál, akkor az $\mathcal{E}(M)$ mindig lokális martingál. Ha $M \stackrel{\circ}{=} h \bullet w$, akkor

$$\mathcal{E}(M) \bullet M \stackrel{\circ}{=} \mathcal{E}(M) \bullet (h \bullet w) = (\mathcal{E}(M)\, h) \bullet w,$$

így

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M)(0) + (\mathcal{E}(M)\, h) \bullet w.$$

Elegendő belátni, hogy tetszőleges lépcsős h esetén a $[0, T]$ szakaszon

$$\mathcal{E}(M)\, h = h \exp\left(h \bullet w - \frac{1}{2} h^2 \bullet [w]\right) \in \mathcal{L}^2(w),$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ugyanis ekkor az $\mathcal{E}(M)$ valódi martingál, így, felhasználva, hogy az $\mathcal{F}_0$ a triviális σ-algebra

$$\mathbf{E}(\mathcal{E}(M)(T)) = \mathbf{E}(\mathcal{E}(M)(0)) = \mathcal{E}(M)(0).$$

Mivel a h lépcsős és determinisztikus, ezért felhasználva, hogy a w független növekményű

$$(h \bullet w)(s) = \sum_{t_i \le s} \lambda_i \Delta w(t_i \wedge s) = N\left(0, \sqrt{\int_0^s h^2(u)\,du}\right).$$

$$\|h\mathcal{E}(M)\|_w^2 =$$

$$= \mathbf{E}\left(\int_0^T \left(h \exp\left((h \bullet w) - \frac{1}{2}\left(h^2 \bullet [w]\right)\right)\right)^2 (s)\,ds\right) =$$

$$= \int_0^T \mathbf{E}\left(\left(h \exp\left(h \bullet w - \frac{1}{2} h^2 \bullet [w]\right)\right)^2 (s)\right) ds =$$

$$= \int_0^T h^2(s) \exp\left(-\left(\int_0^s h^2(u)\,du\right)\right) \cdot \mathbf{E}\left(\exp\left((h \bullet w)(s)\right)^2\right) ds =$$

$$= \int_0^T h^2(s) \exp\left(-\int_0^s h^2(u)du\right) \cdot \mathbf{E}\left(\exp\left(2N\left(0, \sqrt{\int_0^s h^2(u)du}\right)\right)\right) ds =$$

$$= \int_0^T h^2(s) \exp\left(-\int_0^s h^2(u)\,du\right) \exp\left(2\int_0^s h^2(u)\,du\right) ds =$$

$$= \int_0^T h^2(s) \exp\left(\int_0^s h^2(u)\,du\right) ds = \exp\left(\int_0^T h^2(s)\,ds\right) - 1 < \infty.$$

Következésképpen, miként állítottuk, a $[0,T]$ szakaszon

$$h\mathcal{E}(M) \in \mathcal{L}^2(w).$$

Így az $\mathcal{E}(h \bullet w)(T)$ alakú változókra teljesül a tétel, vagyis minden h lépcsős függvényre $\mathcal{E}(h \bullet w)(T) \in \mathcal{U}$. Ha $\mathcal{F}$ a Wiener-folyamat által generált filtráció, akkor az $\mathcal{E}(h \bullet w)(T)$ alakú változók által generált lineáris tér sűrű az $L^2(\mathcal{F}_T)$ térben, az $\mathcal{U}$ zárt lineáris tér, így $\mathcal{U} = L^2(\mathcal{F}_T)$.

Az egyértelműség igazolása céljából tegyük fel, hogy

$$\xi = \mathbf{E}(\xi) + \int_0^T X_1 dw = \mathbf{E}(\xi) + \int_0^T X_2 dw,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

vagyis

$$\int_0^T X_1 dw - \int_0^T X_2 dw = 0.$$

Az Itô-izometria felhasználásával

$$0 = \mathbf{E}\left(\left(\int_0^T X_1 - X_2 dw\right)^2\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^T (X_1 - X_2)^2 d[w]\right).$$

Definíció szerint az $\mathcal{L}^2(w)$ az $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{R}, \alpha_w)$, ahol $\alpha_w \triangleq \lambda \times \mathbf{P}$ a Wiener-folyamathoz tartozó Doléans-mérték, szerint ekvivalens folyamatokból áll, így $X_1 = X_2$ vagyis az α_w szerint majdnem mindenhol megegyeznek. □

3.154. Következmény. *Az Itô-féle reprezentációs tételben a konstans egyértelmű, vagyis ha előírjuk, hogy $X \in \mathcal{L}^2(w)$, akkor a $x = \mathbf{E}(\xi)$ az egyetlen olyan konstans, amelyre*

$$\xi = x + \int_0^T X dw.$$

Bizonyítás. Ha $X \in \mathcal{L}^2(w)$, akkor a sztochasztikus integrál valódi martingál és ezért a várható értéke nulla. Ebből következően $x = \mathbf{E}(\xi)$. □

3.7.3. Lokális martingálok reprezentálása

Az Itô és a Dudley integrálreprezentációs tételek közötti alapvető eltérés, hogy az Itô-féle tételben az előállítás egyértelmű. Ez kulcs szerepet játszik a következő állításban.

3.155. Tétel. *Legyen w egy Wiener-folyamat. Ha $\mathcal{F}$ a w által generált filtráció, akkor tetszőleges M $\mathcal{F}$-lokális martingálra*

$$M = M(0) + X \bullet w,$$

ahol $X \in \mathcal{L}^2_{loc}(w)$. Ha $M \in \mathcal{H}^2$, akkor $X \in \mathcal{L}^2(w)$.

Bizonyítás. Ha $M \in \mathcal{H}^2$, akkor $M(\infty) \in L^2(\Omega)$ és

$$M(t) = \mathbf{E}(M(\infty) \mid \mathcal{F}_t).$$

Az Itô-féle integrálreprezentációs tétel szerint $M(\infty) = M(0) + \int_0^\infty X dw$, ahol $X \in \mathcal{L}^2(w)$. Így

$$M(t) = \mathbf{E}(M(\infty) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(M(0)) + \int_0^\infty X dw \mid \mathcal{F}_t\right) =$$

$$= \mathbf{E}(M(0)) + \int_0^t X dw,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ugyanis mivel $X \in \mathcal{L}^2(w)$ ezért az $X \bullet w \in \mathcal{H}^2$ integrálfüggvény martingál. Megjegyezzük, hogy az X az α_w Doléans-mérték erejéig egyértelmű.

Ilyenkor tehát az állítás teljesül. Vegyük észre, hogy elvileg csak minden t időpontra majdnem mindenhol értelemben azonos a két oldal, de mivel mind a két oldalon jobbról reguláris folyamatok vannak a nullmértékű halmazok egyetlen nullmértékű halmazba egyesíthetőek. A későbbiek miatt hangsúlyozni kell, hogy az M az előállítás miatt rendelkezik folytonos verzióval.

Legyen $M(\infty) \in L^1(\Omega)$. Mivel a majorált konvergencia tétel és a mérték végessége miatt a korlátos függvények sűrűek az $L^1(\Omega)$-ban, és mivel ugyancsak a mérték végessége miatt egyrészt $L^2(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$, másrészt a korlátos függvények mindegyike négyzetesen integrálható, ezért az $L^2(\Omega)$ sűrű az $L^1(\Omega)$ térben, így van olyan $\xi_n \in L^2(\Omega)$ sorozat, amelyre $\xi_n \to M(\infty)$ az $L^1(\Omega)$ konvergenciában. Tekintsük az

$$M_n(t) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(\xi_n \mid \mathcal{F}_t)$$

martingálokat. A Doob-egyenlőtlenség miatt

$$\mathbf{P}\left(\sup_t |M_n(t) - M(t)| > \lambda\right) \leq \frac{\|M_n(\infty) - M(\infty)\|_1}{\lambda}.$$

Mivel $\|M_n(\infty) - M(\infty)\|_1 \to 0$, ezért valószínűségben

$$\sup_t |M_n(t) - M(t)| \to 0.$$

Mivel minden sztochasztikusan konvergens sorozatnak van majdnem mindenhol konvergens részsorozata, ezért részsorozatra áttérve feltehető, hogy a konvergencia majdnem mindenhol értelemben is teljesül, vagyis az egyenletes konvergencia topológiában az (M_n) trajektóriái egy nulla valószínűségű halmaztól eltekintve az M-hez konvergálnak. Miként a bizonyítás előző pontjában megjegyeztük M_n-ről feltehető, hogy folytonos, és az egyenletes konvergenciából következően az M is folytonos.

Ha M lokális martingál, akkor létezik korlátos megállási időkből álló (τ_n) lokalizációs sorozat. Így az M^{τ_n} megállított martingálokra feltehető, hogy $M^{\tau_n}(\infty) = M^{\tau_n}(T) = M(\tau_n) \in L^1(\Omega)$, ahol a T a τ_n egy korlátja. Így az M^{τ_n} folytonos minden n-re. Ebből következően az M is folytonos. Így feltehető, hogy a lokalizált folyamatok korlátosak, vagyis hogy az M^{τ_n} folyamatok $\mathcal{H}^2$-ben vannak, vagyis teljesül rájuk az állítás. Ennek megfelelően[68]

$$M^{\tau_n} = M^{\tau_n}(0) + X_n \bullet w \stackrel{\circ}{=} M(0) + X_n \bullet w.$$

[68] A megállított folyamat definíciójában időnként szokás az $M(0)\chi(\tau > 0)$ módon lokalizálni a $t = 0$ ponthoz tartozó értéket. Ezt most az egyszerűség kedvéért elhagyjuk. Ha a $t = 0$ pontban szükséges lokalizációtól el akarunk tekinteni, akkor a lokális martingál definícióját oly módon kell módosítani, hogy az $L - L(0)$ folyamatról kell feltenni, hogy rendelkezik lokalizációs sorozattal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ugyanakkor

$$M^{\tau_{n-1}} = \left(M^{\tau_n}\right)^{\tau_{n-1}} = \left(M(0) + X_n \bullet w\right)^{\tau_{n-1}} = \\ = M(0) + \left(X_n \bullet w\right)^{\tau_{n-1}} = M(0) + X_n \chi\left([0, \tau_{n-1}]\right) \bullet w.$$

Ez előállítás egyértelműsége miatt $X_{n-1} \overset{m.m.}{=} X_n \chi\left([0, \tau_{n-1}]\right)$, és az X_n-ek „összeragaszthatók" egyetlen $X \in \mathcal{L}^2_{\text{loc}}$ folyamattá. □

3.156. Következmény. *Legyen w Wiener-folyamat és legyen $\mathcal{F}$ a w által generált filtráció. Ha L lokális martingál az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve, akkor az L folytonos.*

Bizonyítás. Az előző állítás szerint az $\mathcal{F}$ szerinti lokális martingálok sztochasztikus integrálként írhatók fel a w folyamat szerint, így folytonosak. □

A folytonos filtráció fontos következménye, hogy ha M egy martingál egy folytonos filtrációra nézve, akkor tetszőleges t időpontban

$$\lim_{s \searrow t} M(s) = M(t) \overset{m.m.}{=} \lim_{s \nearrow t} M(s).$$

Az első egyenlőség azért igaz, mert a martingálokat eleve jobbról regularizálva definiáljuk. A második egyenlőség a Lévy-féle konvergencia tétel[69] következménye, amely szerint

$$\lim_{s \nearrow t} M(s) \overset{m.m.}{=} \lim_{s \nearrow t} \mathbf{E}\left(M(t) \mid \mathcal{F}_s\right) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}\left(M(t) \mid \mathcal{F}_{t-}\right) = \\ = \mathbf{E}\left(M(t) \mid \mathcal{F}_t\right) \overset{m.m.}{=} M(t).$$

Mivel az egyenlőségek minden lépésben csak majdnem mindenhol teljesülnek, ezért a filtráció folytonossága csak azt implikálja, hogy minden t időpontban a trajektóriák közül majdnem mindegyik folytonos, vagyis egy adott t időpontban az ugrás valószínűség nulla. Ugyanakkor a „nullmértékű halmazok bosszújának" tipikus esetéről van szó. Mivel a lehetséges időpontok halmaza nem megszámlálható, nem tudjuk igazolni, hogy majdnem mindegyik trajektória folytonos. A tipikus példa a Poisson-folyamat, amely minden időpontban nulla valószínűséggel ugrik, de a trajektóriái egy valószínűséggel nem folytonosak.

3.157. Példa. Az állítás nem igaz minden folytonos filtrációra nézve[70].

[69] Ha $\mathcal{F}_n \nearrow \mathcal{F}_\infty$ és ξ integrálható, akkor $\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}_n\right) \to \mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{F}_\infty\right)$, ahol a konvergencia L^1-ben és majdnem mindenhol értelemben is teljesül.

[70] A példa azért fontos, mert a Sztochasztikus analízis könyvben az idevágó állítás hibás.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Legyen X egy Poisson-folyamat. Az X által generált filtrációról könnyen igazolható, hogy jobbról folytonos. (Elegendő felhasználni, hogy a trajektóriák minden t időpontban egy ideig konstansok.) Ha az $\mathcal{F}^X$-et kiegészítjük a nullmértékű halmazokkal, akkor az így kapott kibővített filtráció balról is folytonos lesz, ugyanis ha $t_n \nearrow t$, akkor majdnem minden kimenetelre $X(t_n) \nearrow X(t)$, ugyanis minden t időpontban az ugrás valószínűsége nulla, vagyis minden t időpontban a trajektóriák majdnem minden kimenetelre folytonosak. Így minden t-re az $X(t)$ mérhető az $\mathcal{F}_{t-}$ σ-algebrára nézve, így $\mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_t$. Ugyanakkor az $\mathcal{F}$ hordozza, a nem folytonos trajektóriákkal rendelkező $X(t) - \lambda t$ kompenzált Poisson-folyamatot, amely martingál. □

3.158. Példa. Tetszőleges lokális martingál esetén nem teljesül az integrálreprezentációs tulajdonság.

Legyen $((w_1, w_2), \mathcal{G})$ független koordinátákból álló kétdimenziós Wiener-folyamat. Legyen $X \triangleq w_1 \bullet w_2$, és $\mathcal{F}$ legyen az X által generált filtráció. Evidens módon $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t$, és az $[X]$ kvadratikus variáció $\mathcal{F}$-adaptált. Mivel

$$[X](t) = \int_0^t w_1^2 d[w_2] = \int_0^t w_1^2(s)\, ds,$$

ezért a w_1^2 éppen az $[X]$ deriváltja, tehát a w_1^2 szintén $\mathcal{F}$-adaptált, következésképpen az Itô-formula szerint a

$$Z(t) \triangleq (w_1 \bullet w_1)(t) = \frac{1}{2}\left(w_1^2 - [w_1]\right)(t)$$

is $\mathcal{F}$-adaptált. A Z $\mathcal{F}$-martingál, ugyanis ha $s < t$, akkor, felhasználva, hogy a $Z \triangleq w_1^2 - [w_1]$ $\mathcal{G}$-martingál

$$\mathbf{E}(Z(t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(Z(t) \mid \mathcal{G}_s) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(Z(s) \mid \mathcal{F}_s) = Z(s).$$

Mivel analóg módon

$$\mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{G}_s) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(X(s) \mid \mathcal{F}_s) = X(s),$$

ezért az X is $\mathcal{F}$-martingál. Tegyük fel, hogy az $(X, \mathcal{F})$ párra teljesül a reprezentációs tulajdonság és legyen

$$Z = Y \bullet X \triangleq Y \bullet (w_1 \bullet w_2) = Y w_1 \bullet w_2.$$

A w_1 és w_2 függetlenek, ezért $[w_1, w_2] = 0$, és így a Z két fajta előállítását felhasználva

$$0 < [Z \bullet Z] = [w_1 \bullet w_1, Y \bullet X] = [w_1 \bullet w_1, Y w_1 \bullet w_2] = Y w_1^2 \bullet [w_1, w_2] = 0,$$

lenne, ami lehetetlen. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

4. fejezet

Az eszközárazás diffúziós modellje

A származtatott termékek árazásának fő állítása, hogy megfelelő „matematikai és közgazdasági" feltételek teljesülése esetén ha H_T valamely T időpontban esedékes követelés, akkor a $t < T$ időpontban a követelés ára

$$\pi_t(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{R(t)}{R(T)} H_T \mid \mathcal{F}_t\right),$$

ahol R a diszkont tényező és $\mathbf{Q}$ az úgynevezett kockázatsemleges, vagy (lokális) martingál mérték. Speciálisan a $t = 0$ pontban

$$\pi(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{R(T)}\right).$$

Emlékeztetünk, hogy diszkrét és véges időhorizonton a képlet a teljesség megkötése esetén, felhasználva a nincsen arbitrázs tulajdonságot, érvényes minden H_T-re. Ha a piac nem teljes, de arbitrázsmentes, akkor az egyenlőség teljesüléséhez elegendő, hogy a H_T „sztochasztikus integrálként" előállítható legyen az alaptermékekkel.

Mielőtt a részletek tárgyalására rátérnénk érdemes egy gyors áttekintést tenni. Tegyük fel, hogy alkalmas (X, Y) portfólió súlyokkal

$$H_T = \lambda + \int_0^T X dR + \int_0^T Y dS.$$

Hasonlóan a diszkrét időhorizonthoz, folytonos időhorizonton a sztochasztikus integrálok tekinthetők olyan folytonos befektetésfolyamatoknak, amelyek

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

során az egyes időpontokban az egységnyi nagyságú befektetéseken realizálódó dR és dS pillanatnyi árfolyamnyereségek megszorozzuk az X és Y aktuális porfóliósúlyokkal, majd ezeket a pillanatnyi nyereségeket vagy veszteségeket az időtengely mentén kumuláljuk. Ez a tevékenység a modell feltételezései szerint költségmentesen végezhető, így kézenfekvő közgazdasági gondolat, hogy a H_T ára éppen az induló λ konstans legyen. Ugyanis ellenkező esetben az olcsóbbat megvéve a drágábbat eladva arbitrázsnyereséghez lehetne jutni. Vagyis ha például $\pi(H_T) < \lambda$, akkor a H_T termék az olcsóbb, azt meg kell venni, az előállító portfóliót pedig el kell adni. Ekkor a $t = 0$ időpontban $\lambda - -\pi(H_T)$ nyereséghez jutunk, de a $t = T$ időpontban mind a két esetben éppen a H_T termékhez jutunk, következésképpen a felvett pozíció nettó egyenlege nyilván nulla. Mivel a sztochasztikus integrálok mögötti árfolyamspekulációs folyamat a modell feltételei szerint költségmentes, a $t = 0$ időpontban keletkezett pozitív nyereség az időszak végére is megmarad. Ez azonban arbitrázs, amit elvileg definíció szerint kizárunk. A kérdés pusztán az, hogyan tudjuk a λ konstanst kifejezni a modell paramétereivel? Vagyis hogyan tudnánk a sztochasztikus integráloktól megszabadulni. A kézenfekvő gondolat, hogy vegyünk várható értéket. De mivel mind az S mind az R valódi szemimartingál, a sztochasztikus integrálok várható értéke nem lesz nulla. Az egyik terméktől az ármérce módosításával meg lehet szabadulni. Miként alább megmutatjuk, ha az R tényezővel diszkontálunk, akkor

$$\frac{H_T}{R(T)} = \frac{\lambda}{R(0)} + \int_0^T X d\frac{R}{R} + \int_0^T Y d\frac{S}{R}, \tag{4.1}$$

ugyanis az $R/R \equiv 1$ konstans folyamat szerinti integrál értéke nulla. Ugyanakkor az $\overline{S} \triangleq S/R$ diszkontált részvényárfolyam általában továbbra is valódi szemimartingál. Ha azonban a mértéket megváltoztatjuk, akkor az S/R esetlegesen (lokális) martingállá tehető az új mérték alatt, és ilyenkor alkalmas feltételek mellett a sztochasztikus integrál martingál lesz, így a várható értéke minden időpontban, így a T-ben is, nulla lesz, amely miatt a λ értéke éppen a $H_T R(0)/R(T)$ várható értéke, amely éppen az árazó formula teljesülését jelentené a $t = 0$ időpontban.

A gondolatmenet, szemben a diszkrét és véges időhorizonttal, folytonos időhorizont esetében bizonyos megszorítások nélkül nem alkalmazható. A szükséges egyik feltétel értelemszerűen, az hogy a H_T követelésnek és a piacot leíró kötvény és részvény folyamatoknak mérhetőnek kell lenni a véletlen forrást reprezentáló valamely Wiener-folyamat által generált filtrációra nézve. A filtrációra tett megszorítás az integrálreprezentációs tétel folyománya és lényegében a teljesség feltétele folytonos időhorizontra. Lényegesebb probléma, hogy a sztochasztikus integrálok általában csak lokális martingálok. Korlátos, de folytonos időhorizonton lehetséges a „duplázási stratégia”, ugyanis egy korlátos intervallum végtelen sok részintervallumra bontható, így folytonos

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

időhorizonton még a korlátos időtartományok is úgy viselkednek, mintha az időtartomány korlátlan lenne. Így ahhoz, hogy értelmes modellhez jussunk, a megengedett, lehetséges portfóliók körét korlátozni kell. Általában az irodalomban két megoldás ismert. Az egyik szerint a H_T követelésnek az S/R folyamat martingálmértékére nézve négyzetesen integrálhatónak kell lenni. Ilyenkor a fent levezetett (4.1) sorban alkalmazható az Itô-féle reprezentációs tétel és így a szochasztikus integrál valódi martingál lesz. Mi azonban egy másik, némiképpen nehezebb utat fogunk követni: A lehetséges fedező porfóliók körét szűkítjük, és csak alulról korlátos értékfolyamatokkal rendelkező porfóliókat engedünk meg. Mind a két megoldás azonos eredményre vezet, de ez utóbbi talán némiképpen kevésbé „átlátszó".

4.1. Önfinanszírozó portfóliók és az ármérce

Legyen (R, S) két kockázatos termék és jelölje (X, Y) a termékekből tartott mennyiségeket. Az opcióárazás szokásos modelljében R a kötvény, S a részvény ára. Az (R, S) folyamatokról feltesszük, hogy folytonos szemimartingálok, az (X, Y) portfólió súlyokból álló folyamatokról pedig tegyük fel, hogy az alábbi integrálok léteznek. Az (X, Y) mennyiségeket tartalmazó portfólió értéke értelemszerűen $V \stackrel{\circ}{=} XR + YS$.

4.1. Definíció. Az (X, Y, R, S) vektorfolyamatot önfinanszírozónak mondjuk, ha

$$XR + YS \stackrel{\circ}{=} V = V(0) + X \bullet R + Y \bullet S. \tag{4.2}$$

Rögzített (R, S) esetén a megadott (4.2) feltételt kielégítő (X, Y) párt önfinanszírozó portfóliónak mondjuk.

Az olvasóban felmerülő első kérdés az lehet, hogy egyáltalán léteznek-e önfinanszírozó portfóliók. A most következő gondolatmenet célja többek között ennek igazolása. Az önfinanszírozás definíciója jobban érthető, ha az integrálokat a hagyományos jelöléssel írjuk fel. Az önfinanszírozás feltétele

$$V(t) = V(0) + \int_0^t X(s)\, dR(s) + \int_0^t Y(s)\, dS(s),$$

amely szerint a portfólió értékét a t időpontban úgy kapjuk, hogy a portfólió nulla időpontban vett értékéhez hozzáadjuk a portfólióban szereplő eszközök

$$X(s)\, dR(s) + Y(s)\, dS(s)$$

értékváltozásából származó nyereségek és veszteségek kumulált összegét. Hangsúlyozni kell, hogy a képlet a diszkrét időhorizonton tárgyalt egyenlőség formális átvételéből adódik. Ennek ellenére folytonos időhorizonton az

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

önfinanszírozás interpretációja nem annyira kézenfekvő, mint a diszkrét esetben. Az interpretációval kapcsolatos legnagyobb nehézség abból ered, hogy az önfinanszírozást diszkrét időhorizonton az

$$Y(t)S(t) + R(t)X(t) = Y(t+1)S(t) + X(t+1)R(t)$$

képletből definiáltuk, amely tartalmilag tényleg az önfinanszírozást jelenti és az integrálalakot ennek következményeként definiáltuk. A definícióból ugyancsak nem világos, hogy az $(X(s), Y(s))$ „időpontja" miként viszonyul a $(dR(s), dS(s))$ időpontjához. Ha azonban az Itô-integrálásnál megszokott konvenciót vesszük, akkor a megváltozások az s időpont „után" következnek be. Az önfinanszírozás elnevezés némiképpen félrevezető, talán jobb lenne költségmentes kumulált árfolyamnyereségről beszélni.

Az önfinanszírozás feltétele miatt a V értékfolyamat szemimartingál. Vegyük észre, hogy az, hogy a V szemimartingál egyedül az önfinanszírozás feltételéből következik, ugyanis ilyenkor a V sztochasztikus integrálok összege. Mivel az X és az Y nem feltétlenül szemimartingálok, általában a $V \doteq XR + YS$ szorzatösszeg nem lesz automatikusan szemimartingál.

Legyen U egy további szemimartingál. Ha $U \neq 0$, akkor az S és R termékek árát kifejezhetjük az U-ban is, vagyis ha $U \neq 0$, akkor az U választható ármércének. Az $1/x$ függvény az $x > 0$ halmazon tetszőlegesen sokszor deriválható, így az Itô-formula miatt az $\overline{U} \doteq S/U$ és az $\overline{R}/U$ szintén szemimartingál és az új ármérce mellett a portfólió értéke

$$\overline{V} \doteq X\frac{R}{U} + Y\frac{S}{U} \doteq X \cdot \overline{R} + Y \cdot \overline{S}.$$

Kézenfekvően merül fel a kérdés, hogy vajon az $\left(X, Y, \overline{R}, \overline{S}\right)$ vektorfolyamat önfinanszírozó marad-e vagy sem, vagyis érvényes-e a

$$\overline{V} - \overline{V}(0) = X \bullet \overline{R} + Y \bullet \overline{S},$$

egyenlőség?

4.2. Állítás. *Az új ármérce bevezetése nem módosítja a portfólió önfinanszírozó jellegét.*

Bizonyítás. Mivel egy általánosan használt, igen alapvető összefüggésről van szó, ezért a kérdést általános szemimartingálok esetén igazoljuk. Az általános és a folytonos eset igazolása közötti egyetlen eltérés, hogy a parciális integrálás formulájában az integrandusok balról regularizált verzióját kell alkalmazni[1]. Amennyiben az olvasót ez zavarja, úgy az ugrásokra vonatkozó megjegyzéseket nyugodtan figyelmen kívül hagyhatja.

[1] Értelemszerűen egy X reguláris folyamat esetén X_- a balról vett határértékekből álló, balról regularizált folyamatot jelöli.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A folyamatok szemimartingál tulajdonsága miatt alkalmazható a parciális integrálás formulája, amely szerint

$$\overline{V} \stackrel{\circ}{=} \frac{V}{U} = \overline{V}(0) + V_- \bullet \frac{1}{U} + \frac{1}{U_-} \bullet V + \left[V, \frac{1}{U}\right].$$

Vegyük észre, hogy a nem folytonos esetben az $U \neq 0$ nem implikálja, hogy $U_- \neq 0$. Ebből következően az sem igaz, hogy az $1/U$ szintén szemimartingál marad[2]. Ezt kizárandó a nem folytonos esetben definíció szerint megköveteljük, hogy az $1/U$ függvény szintén jobbról reguláris legyen és így többek között implicite megköveteljük, hogy az $U_- \neq 0$ is teljesüljön. Az önfinanszírozás $V - V(0) = X \bullet R + Y \bullet S$ feltételét beírva és kihasználva, hogy az $1/U_-$ folyamat balról reguláris és így lokálisan korlátos, így az asszociativitási szabály használható:

$$\begin{aligned}\frac{1}{U_-} \bullet V &\stackrel{\circ}{=} \frac{1}{U_-} \bullet (X \bullet R) + \frac{1}{U_-} \bullet (Y \bullet S) = \\ &= \left(\frac{1}{U_-} X\right) \bullet R + \left(\frac{1}{U_-} Y\right) \bullet S = X \bullet \left(\frac{1}{U_-} \bullet R\right) + Y \bullet \left(\frac{1}{U_-} \bullet S\right).\end{aligned}$$

A polaritási szabály szerint

$$\left[V, \frac{1}{U}\right] = X \bullet \left[R, \frac{1}{U}\right] + Y \bullet \left[S, \frac{1}{U}\right].$$

Visszahelyettesítve, elemi átrendezéssel

$$\begin{aligned}\overline{V} - \overline{V}(0) = V_- \bullet \frac{1}{U} + \left(X \bullet \left(\frac{1}{U_-} \bullet R\right) + X \bullet \left[R, \frac{1}{U}\right]\right) + \\ + \left(Y \bullet \left(\frac{1}{U_-} \bullet S\right) + Y \bullet \left[S, \frac{1}{U}\right]\right).\end{aligned}$$

Térjünk rá a V_- tagra. A sztochasztikus integrálás általános elméletében megmutatható, hogy nem folytonos integrátorok esetén érvényes a $\Delta(H \bullet G) = H \cdot \Delta G$ szabály, vagyis az integrálfolyamat ugrásai az integrandus és az integrátor ugrásainak szorzataként kapható. Ez véges változású integrátorok esetén evidens, lokálos martingálok esetén pedig lényegében része az integrál definíciójának. Ezt felhasználva $\Delta V = X\Delta R + Y\Delta S$, vagyis $V_- = XR_- + YS_-$. Ezt beírva

$$V_- \bullet \frac{1}{U} = XR_- \bullet \frac{1}{U} + YS_- \bullet \frac{1}{U}.$$

[2] Vegyük az $U(t) \stackrel{\circ}{=} 1 - t$, ha $t < 1$ és 1 ha $t \geq 1$ folyamatot. Az U jobbról reguláris és korlátos változású, de az $1/U$ nem korlátos változású, így nem is szemimartingál.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ezt is behelyettesítve

$$\overline{V} - \overline{V}(0) = \left(XR_- \bullet \frac{1}{U} + \left(X \bullet \left(\frac{1}{U_-} \bullet R\right) + X \bullet \left[R, \frac{1}{U}\right]\right)\right) + \\ + \left(YS_- \bullet \frac{1}{U} + Y \bullet \left(\frac{1}{U_-} \bullet S\right) + Y \bullet \left[S, \frac{1}{U}\right]\right),$$

ami éppen

$$\overline{V} - \overline{V}(0) = X \bullet \left(R_- \bullet \frac{1}{U}\right) + X \bullet \left(\frac{1}{U_-} \bullet R\right) + X \bullet \left[R, \frac{1}{U}\right] + \\ + Y \bullet \left(S_- \bullet \frac{1}{U}\right) + Y \bullet \left(\frac{1}{U_-} \bullet S\right) + Y \bullet \left[S, \frac{1}{U}\right].$$

Ebbe az

$$\overline{S} = \frac{S}{U} = \overline{S}(0) + S_- \bullet \frac{1}{U} + \frac{1}{U_-} \bullet S + \left[S, \frac{1}{U}\right],$$
$$\overline{R} = \frac{R}{U} = \overline{R}(0) + R_- \bullet \frac{1}{U} + \frac{1}{U_-} \bullet R + \left[R, \frac{1}{U}\right]$$

relációkat behelyettesítve

$$\overline{V} - \overline{V}(0) = X \bullet \overline{R} + Y \bullet \overline{S},$$

vagyis az $\left(X, Y, \overline{R}, \overline{S}\right)$ önfinanszírozó. □

A diszkontálás kapcsán jelezni kell, hogy a diszkontált értékfolyamat alulról való korlátosságát meg akarjuk őrizni, ez az ármércére további megkötéseket jelent. Ha a V negatív értéket is felvehet, akkor az U nem vehet fel tetszőlegesen kicsi értéket, mert akkor a V/U nem lenne alulról egyenletesen korlátos. Ennek elkerülése céljából számos szerző megköveteli, hogy a V folyamat ne csak alulról korlátos, hanem nem negatív is legyen. Ilyenkor tetszőleges $U > 0$ használható, ugyanis a $V/U \geq 0$ érvényben marad még akkor is, ha az U esetleg tetszőlegesen kicsi értéket is felvehet.

Ha diszkontfaktornak az R folyamatot tekintjük, akkor $\overline{R} = R/R = 1$, így a következő állítás evidens:

4.3. Tétel. *Ha $R > 0$, akkor az (X, Y, R, S) pontosan akkor önfinanszírozó, ha a diszkontált értékfolyamatra*

$$\overline{V} - \overline{V}(0) = X \bullet \overline{R} + Y \bullet \overline{S} = Y \bullet \overline{S}.$$

Az állítás minden trivialitása ellenére igen hasznos. Az önfinanszírozó portfóliók halmazát a tétellel azonosítottuk az $Y \bullet \overline{S}$ alakú sztochasztikus integrálokkal. Tetszőleges olyan Y és $\overline{V}(0)$ esetén, amelyre az $Y \bullet \overline{S}$ létezik, a fenti képlettel meghatározható a $\overline{V} - \overline{V}(0)$. De mivel az önfinanszírozás követelménye miatt $\overline{V} = X\overline{R} + Y\overline{S} = X \cdot 1 + Y \cdot \overline{S}$, ezért $X = \overline{V} - Y\overline{S} = \overline{V}(0) + Y \bullet \overline{S} - Y\overline{S}$.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

4.2. Ekvivalens lokális martingálmérték és arbitrázs

Az ekvivalens lokális martingálmértékek létezése szorosan összefügg az arbitrázs fogalmával. Mielőtt a definíciót megadnánk emlékeztetni szeretnénk, hogy a Dudley-féle integrálreprezentációs tétel alapján bármilyen $\xi \in \mathcal{F}_T$ előállítható $\int_0^T X dw$ alakban. Így könnyen látható hogy a Black–Scholes-modell a lehetséges portfóliókra tett minden további megkötés nélkül az arbitrázs bármilyen értelmes definíciója esetén tartalmaz arbitrázst. Ezt úgy zárhatjuk ki, ha nem minden önfinanszírozó portfóliót engedünk meg. A megengedett portfólió fogalma az irodalomban nem egyértelmű. A legegyszerűbb definíció talán a következő:

4.4. Definíció. Egy (X, Y) párt megengedettnek mondunk, ha a $V \triangleq XR + YS$ értékfolyamat alulról egyenletesen korlátos[3].

A definícióval kapcsolatos legfőbb gond az, hogy a V értékfolyamatra mint valamiféle kereskedett termékre szokás gondolni. Az alulról való korlátosság feltétele miatt egy lehetséges portfólió mínusz egyszerese nem feltétlenül megengedett. Vagyis például valaminek a megvétele megengedett, de az eladása már nem.

4.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (R, S) modellben az (X, Y) pár arbitrázs a T időpontban, ha

1. az (X, Y, R, S) önfinanszírozó,
2. a $V \triangleq XR + YS$ értékfolyamathoz tartozó (X, Y) pár a $[0, T]$ időtartományon megengedett,
3. $V(0) = 0$, $V(T) \geq 0$ és $\mathbf{E}(V(T)) > 0$.

Ha a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ mértékek ekvivalensek, akkor a sztochasztikus integrálok megegyeznek, és a mértékek ekvivalenciája miatt az utolsó egyenlőségben a $\mathbf{P}$ helyébe $\mathbf{Q}$ is írható, vagyis az arbitrázs fogalma invariáns az ekvivalens mértékcserére nézve.

[3] A matematikai pénzügyi elmélet „kulcs” fogalma a megengedett stratégia fogalma. Az irodalomban számos eltérő definíció ismert. Néhány szerző akkor nevez egy befektetési stratégiát megengedettnek, ha az értékfolyamat a kockázatmentes mérték alatt martingál. Mások akkor, ha az értékfolyamat, ugyancsak a kockázatmentes mérték alatt, négyzetesen integrálható. Ezen definíciók előnye, hogy ha egy stratégia megengedett, akkor a mínusz egyszerese is megengedett. Ugyanakkor mivel ezt a kockázatsemleges mérték alatt követelik meg egy kicsit kilóg a lóláb, bár ilyenkor a várható jelenérték szabály könnyen igazolható. A jelen definíció előnye, hogy az alsó korlát létezése független az alapul vett mértéktől, hátránya azonban, hogy segítségével a várható jelenérték szabály nem igazán indokolható és az árat a lehetséges fedező konstansok minimumával kell definiálni.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

4.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ téren értelmezett (R, S) modell rendelkezik lokális martingálmértékkel, ha létezik egy a $\mathbf{P}$-vel ekvivalens $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték és olyan U ármérce, amely mellett az $\overline{S} \triangleq S/U$ és $\overline{R} = R/U$ diszkontált árfolyamok[4] lokális martingált alkotnak. Ha másképpen nem mondjuk, akkor ármércén mindig az R kötvényt értjük. Ilyenkor a $\mathbf{Q}$ pontosan akkor lokális martingálmérték, ha az $\overline{S} \triangleq S/R$ diszkontált folyamat lokális martingál. Hasonlóan definiálhatjuk a martingálmértéket.

Nyilvánvaló módon a $\mathbf{Q}$ függ az ármércétől. Ha ennek szerepe van, akkor az ármércét a $\mathbf{Q}$ alsó vagy felső indexeként szokás írni. Ha nincsen index, akkor az ármérce általában az R kötvény. Az R-hez tartozó martingálmértéket, illetve lokális martingálmértéket szokás kockázatsemleges mértéknek is nevezni.

4.7. Állítás. *Ha az (X, Y) pár arbitrázs az (R, S) modellben, és $U \geq u_0 > 0$ tetszőleges ármérce, akkor az (X, Y) arbitrázs az $(R/U, S/U)$ modellben is. A $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^R$ pontosan akkor kockázatsemleges mérték az (R, S) modellben, ha kockázatsemleges mérték az $(R/U, S/U)$ modellben az R-nek megfelelő R/U diszkontfaktor szerint.*

Bizonyítás. Az (X, Y) pár pontosan akkor önfinanszírozó az (R, S) árak mellett, ha önfinanszírozó az $(R/U, S/U)$ árak mellett. Az U pozitivitása miatt az $XR + YS$ előjele megegyezik az $XR/U + YS/U$ előjelével. Az $U \geq u_0 > 0$ miatt a diszkontált értékfolyamat alulról korlátos marad. A második állítás evidens, ugyanis

$$\overline{S} \triangleq \frac{S}{R} = \frac{S/U}{R/U}. \qquad \square$$

Az alulról való korlátosság feltétele kulcs szerepet játszik a következő elemi, ugyanakkor a matematikai pénzügyekben kiemelkedő jelentőségű állításban:

4.8. Tétel. *Ha a $[0, T]$ szakaszon $R \geq r_0 > 0$ és az (R, S) modellben van ekvivalens lokális martingálmérték, akkor a modellben nincsen arbitrázs.*

Bizonyítás. Az $R \geq r_0$ feltétel közgazdaságilag triviális megkötés, ugyanis az R általában a kötvényt jelenti, vagy valamilyen más kockázatmentes befektetést jelöl. Általában fel szokás tenni, hogy $R(0) = r_0 > 0$, és a feltétel hallgatólagosan azt jelenti, hogy a diszkonttényezőként használt kötvény ára monoton nő. Általában az R függhet a véletlentől, de szemben az S-sel az értéke nem csökkenhet.

[4] Mind a kettő egyszerre.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Tegyük fel, hogy a $\mathbf{Q}$ mérték mellett az S/R lokális martingál. Legyen az (X,Y) az (R,S) modellben önfinanszírozó portfólió. Tegyük fel, hogy $V(0) = 0$ és a V legyen alulról korlátos. Az (X,Y) önfinanszírozó az $\left(1,\overline{S}\right)$ modellben is és az $R \geq r_0 > 0$ feltétel miatt a $\overline{V}$ diszkontált értékfolyamat szintén alulról korlátos. A sztochasztikus integrálok lokálisan martingálok, így a

$$\overline{V} \stackrel{\circ}{=} \frac{XR+YS}{R} \stackrel{\circ}{=} X \bullet \overline{R} + Y \bullet \overline{S} = Y \bullet \overline{S}$$

a $\mathbf{Q}$ alatt alulról korlátos lokális martingál. Emlékeztetünk arra, hogy minden L alulról korlátos lokális martingál szupermartingál, ugyanis, ha $t > s$ és a lokális martingál definíciójából következő $\mathbf{E}\left(L^{\tau_n}(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = L^{\tau_n}(s)$ egyenlőségben alkalmazzuk a Fatou-lemmát, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(L(t) \mid \mathcal{F}_s\right) &= \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} L^{\tau_n}(t) \mid \mathcal{F}_s\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(L^{\tau_n}(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \\ &= \liminf_{n\to\infty} L^{\tau_n}(s) = L(s).\end{aligned}$$

Szupermartingálok esetén a várható érték csökken, tehát $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}(T)\right) \leq 0$, következésképpen ha $\overline{V}(T) \geq 0$, akkor $\overline{V}(T) \stackrel{m.m.}{=} 0$. Természetesen mindez a $\mathbf{Q}$ mérték alatt. De a $\mathbf{Q}$ és a $\mathbf{P}$ ekvivalenciája miatt a nullmértékű halmazok egybeesnek a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ alatt, amelyből $V(T) \stackrel{m.m.}{=} 0$ a $\mathbf{P}$ alatt, tehát az (X,Y) nem lehet arbitrázs. □

Problémát jelent, hogy az állítás nem fordítható meg, vagyis az arbitrázsmentesség még nem implikálja az ekvivalens martingálmérték létezését. Diszkrét időhorizont esetében az ekvivalens martingálmértéket közvetlenül az arbitrázsmentesség közgazdasági definíciójából származtattuk. Erre folytonos időhorizont esetében nincsen mód. Ezért ahhoz, hogy az árazási problémát kezelni tudjuk, vagyis hogy az ekvivalens martingálmértéket meg tudjuk konstruálni, közvetlen megszorításokat kell bevezetnünk az S és R folyamatokra.

4.3. Új ármércére való áttérés

Legyen U és W két ármérce és legyen $\mathbf{Q}^U$ és $\mathbf{Q}^W$ a két ekvivalens martingál, illetve ekvivalens lokális martingálmérték. Hogyan számolható ki a $d\mathbf{Q}^U/d\mathbf{Q}^W$ Radon–Nikodym derivált? Miként korábban, a Girszanov-formula tárgyalásakor láttuk igaz a következő:

4.9. Állítás. *Tegyük fel, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ mértékek lokálisan ekvivalensek. Legyen L adaptált, jobbról reguláris folyamat és legyen Λ a deriváltfolyamat.*

1. *Az L pontosan akkor lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, ha az $L\Lambda$ szorzat lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt.*

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

2. *Az L pontosan akkor martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, ha az $L\Lambda$ szorzat martingál a $\mathbf{P}$ alatt.*

Mivel $L \doteq S/U$ lokális martingál a $\mathbf{Q}^U$ alatt és $L\Lambda \doteq S/W$ lokális martingál a $\mathbf{Q}^W$ alatt, ezért az egyedül lehetséges szorzó nyilván $D \doteq U/W$. A D azonban nem választható Λ-nak, ugyanis a várható értéke nem lesz konstans módon 1, amit a Λ deriváltfolyamattól elvárunk. Ennek megfelelően azt sejtjük, hogy

$$\Lambda = \frac{U}{W}\frac{W(0)}{U(0)}$$

és így

$$\frac{d\mathbf{Q}^U}{d\mathbf{Q}^W} = \Lambda(T) = \frac{U(T)}{U(0)}\frac{W(0)}{W(T)}. \tag{4.3}$$

Ami természetesen csak akkor igaz, ha a Λ martingál. Tegyük fel, hogy az aktuális ármérce éppen W és legyen $\mathbf{Q}^W$ a hozzá tartozó aktuális mérték. Az U folyamat a W ármércében kifejezve U/W. Így az új ármérce régi ármérce szerinti értéke martingál kell hogy legyen a régi ármérce szerinti lokális martingálmérték szerint. Vagyis a régi ármérce által meghatározott „szemüvegen" keresztül nézve a folyamatokat az új ármércének martingálnak kell lenni. Például ha az induló Black–Scholes-modellben az R vagy az S szerint diszkontálunk, akkor az $R/R \equiv 1$ vagy az $S/S \equiv 1$ konstans folyamat nyilván tetszőleges $\mathbf{P}$ mérték esetén martingál. További példaként tekintsük a következőt: Ha az R ármércéhez tartozó $\mathbf{Q} \doteq \mathbf{Q}^R$ kockázatsemleges mérték mellett az $\overline{S} \doteq S/R > 0$ diszkontált árfolyam martingál, akkor az S választható ármércének.

$$\frac{d\mathbf{Q}^S}{d\mathbf{Q}} = \frac{d\mathbf{Q}^S}{d\mathbf{Q}^R} = \frac{S(T)}{S(0)}\frac{R(0)}{R(T)} = \frac{\overline{S}(T)}{\overline{S}(0)}.$$

Ahhoz, hogy az S ármércéről vissza tudjunk térni az R ármércére szükséges, hogy az R/S martingál legyen az S-hez tartozó $\mathbf{Q}^S$ mérték mellett.

Mivel egy igen fontos összefüggésről van szó egy másik indoklást is bemutatunk. Először egy hasznos számolási szabályt mutatunk be: Tetszőleges $\mathcal{G}$ rész σ-algebra esetén ha $G \in \mathcal{G}$, akkor

$$\mathbf{Q}(G) = \int_G \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}d\mathbf{P} = \int_G \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{G}\right)d\mathbf{P},$$

vagyis a $\mathcal{G}$ σ-algebrán a Radon–Nikodym-derivált éppen $\mathbf{E}(d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \mid \mathcal{G})$. Minden ξ a $\mathbf{Q}$ mérték szerint integrálható változóra, és minden $F \in \mathcal{G}$ esetén

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$$\int_F \xi d\mathbf{Q} = \int_F \xi \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\xi \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{G} \right) d\mathbf{P} =$$
$$= \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\xi \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{G} \right) \mathbf{E} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{G} \right)^{-1} \mathbf{E} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{G} \right) d\mathbf{P} =$$
$$= \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\xi \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{G} \right) \mathbf{E} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{G} \right)^{-1} d\mathbf{Q}.$$

Mivel az utolsó integrálban szereplő kifejezés $\mathcal{G}$-mérhető, ezért igaz a következő formula:

4.10. Állítás (Bayes-formula)**.** *Ha létezik az* $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi \mid \mathcal{G})$ *feltételes várható érték és a* $\mathbf{Q}$ *és* $\mathbf{P}$ *mértékek ekvivalensek, akkor*

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi \mid \mathcal{G}) = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\xi \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{G} \right)}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{G} \right)}.$$

Legyen $D > 0$ valamilyen termék, amelyik a $\mathbf{Q}$ martingálmérték mellett martingál. Új ármércének válasszuk a D folyamatot. Ekkor az $\overline{S}$ folyamat helyett az $\widehat{S} \stackrel{\circ}{=} \overline{S}/D$, a $\overline{R} = 1$ helyett pedig a $\widehat{R} \stackrel{\circ}{=} 1/D$ folyamatot kell vizsgálni. Mi lesz az $\left(\widehat{S}, \widehat{R}\right)$ modell martingálmértéke?

4.11. Állítás. *Legyen* $\mathbf{Q}$ *az* $\left(\overline{S}, \overline{R}\right)$ *egy martingálmértéke és tegyük fel, hogy a* D *egy pozitív martingál a* $\mathbf{Q}$ *alatt a* $[0, T]$ *szakaszon. Ha az* $\mathbf{R}$ *deriváltja*

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}} \stackrel{\circ}{=} \frac{D(T)}{D(0)}, \tag{4.4}$$

akkor az $\mathbf{R}$ *az* $\left(\widehat{S}, \widehat{R}\right) \stackrel{\circ}{=} \left(\overline{S}/D, \overline{R}/D\right)$ *egy martingálmértéke.*

Bizonyítás. A Bayes-formula szerint ha a Z egy martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, akkor

$$\mathbf{E}^{\mathbf{R}} \left(\frac{Z(T)}{D(T)} \mid \mathcal{F}_t \right) = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\frac{Z(T)}{D(T)} \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}} \mid \mathcal{F}_t \right)}{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}} \mid \mathcal{F}_t \right)} =$$
$$= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\frac{Z(T)}{D(T)} D(T) \mid \mathcal{F}_t \right)}{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(D(T) \mid \mathcal{F}_t \right)} = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(Z(T) \mid \mathcal{F}_t \right)}{D(t)} = \frac{Z(t)}{D(t)},$$

vagyis a Z/D martingál az $\mathbf{R}$ alatt. Az összefüggést a $Z = \overline{S}$ és $Z = \overline{R}$ esetekben alkalmazva éppen az állítást kapjuk. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

4.12. Példa. A forward mérték.

Az egyszerűbb jelölés céljából tegyük fel, hogy $R(0) = 1$. Az R-rel való diszkontáláshoz tartozó $\mathbf{Q}$ mérték mellett az egyik legismertebb árazó mérték, az úgynevezett forward mérték. Ennek megértéséhez meg kell jegyezni, hogy az árazás kérdéséhez két módon közelíthetünk: Vagy azt kérdezzük, hogy mi lesz egy a T időszakban realizálódó a H_T követelés $t < T$ időpontban fizetendő $\pi_t(H_T)$ prompt ára, vagy azt is kérdezhetjük, hogy milyen, a T időpontban fizetendő $F(H_T, t, T)$ módon jelölt úgynevezett forward árban kell a $t < T$ időpontban megállapodni, ahhoz, hogy a megállapodás értéke a t időpontban nulla legyen. Mivel az $F(H_T, t, T)$ árban a t időpontban állapodunk meg, ezért definíció szerint az $F(H_T, t, T)$ valószínűségi változóról feltesszük, hogy $\mathcal{F}_t$-mérhető.

Az $F(H_T, t, T)$ képletének levezetéséhez először vezessük be a B elemi kötvényeket. Az elemi kötvény definíciója szerint $B(t, T)$ a T időpontban azonosan egyet fizető fizetési kötelezettség árfolyama a $t < T$ időpontban, vagyis a $H_T = 1$ kifizetéshez tartozó árazó folyamat. A később bemutatott árazó képlet alapján, feltéve, hogy az $1/R(T)$ integrálható a $\mathbf{Q}$ alatt

$$B(t,T) = \pi_t(1) = R(t)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = R(t)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Ha az R folyamat determinisztikus, akkor $B(t,T) = R(t)/R(T)$, az általános esetben azonban a B és az R különböző. Ahhoz, hogy a t időpontban a szerződés értéke nulla legyen teljesülni kell a

$$0 = \pi_t(H_T - F(H_T, t, T))$$

egyenlőségnek. Az árazó képletből

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T - F(H_T,t,T)}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{F(H_T,t,T)}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) - F(H_T,t,T)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) - \frac{F(H_T,t,T)}{R(t)} B(t,T),
\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk azt, hogy az $F(H_T, t, T)$ mérhető az $\mathcal{F}_t$-re, illetve, hogy a $H_T/R(T)$ integrálható a $\mathbf{Q}$ szerint, így a várható érték szétszedhető. Egyszerű átrendezéssel

$$F(H_T,t,T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{R(T)}\frac{R(t)}{B(t,T)} \mid \mathcal{F}_t\right).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Vezessük be a

$$\frac{d\mathbf{Q}_T}{d\mathbf{Q}} \stackrel{\circ}{=} \frac{R_T^{-1}}{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(R_T^{-1}\right)} = \frac{1}{R(T)\,B(0,T)}$$

új mértéket. A $\mathbf{Q}_T$ a

$$D(t) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{1}{R(t)}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{R(t)}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{B(t,T)}{R(t)}$$

új diszkontfaktorhoz tartózó mérték. Vagyis ha a $\mathbf{Q}$ alatt az R-rel diszkontált változókat a $\mathbf{Q}_T$-re való áttéréskor D-vel diszkontáljuk, akkor valójában az R-rel való diszkontálás helyett a $B(t,T)$-vel való diszkontálásra térünk át.

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{d\mathbf{Q}_T}{d\mathbf{Q}} \mid \mathcal{F}_t\right) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{R(T)\,B(0,T)} \mid \mathcal{F}_t\right) =$$
$$= \frac{1}{B(0,T)\,R(t)}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{R(t)}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{B(t,T)}{B(0,T)\,R(t)}.$$

A Bayes-tétel alapján

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_T}(H_T \mid \mathcal{F}_t) = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H_T d\mathbf{Q}_T/d\mathbf{Q} \mid \mathcal{F}_t)}{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(d\mathbf{Q}_T/d\mathbf{Q} \mid \mathcal{F}_t)} = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_T \frac{1}{R(T)B(0,T)} \mid \mathcal{F}_t\right)}{\frac{B(t,T)}{B(0,T)R(t)}} =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_T \frac{1}{R(T)\,B(0,T)} \frac{B(0,T)\,R(t)}{B(t,T)} \mid \mathcal{F}_t\right) =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_T \frac{1}{R(T)} \frac{R(t)}{B(t,T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = F(H_T,t,T),$$

vagyis a H_T kifizetés t időpontban érvényes forward ára éppen a $\mathbf{Q}_T$ szerinti feltételes várható értéke a H_T kifejezésnek. Ez indokolja, hogy a $\mathbf{Q}_T$ kifejezést forward mértéknek hívjuk. A Black–Scholes-világban az R determinisztikus, így ilyenkor $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_T$ és ilyenkor például a $H_T = S_T$ forward ára

$$F(S_T,t,T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S_T \mid \mathcal{F}_t) = R(T)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S(T)}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) =$$
$$= R(T)\,\frac{S(t)}{R(t)} = S(t)\,\frac{R(T)}{R(t)} = S(t)\exp(r(T-t)).$$

Általában az $F(H_T,t,T)$ forward ár nem csak abban különbözik a $\pi_t(H_T)$ prompt ártól, hogy a $\pi_t(H_T)$ kiszámolásakor diszkontálni kell, az $F(H_T,t,T)$ meghatározásakor pedig nem, hanem az árazó képletben szereplő várható értékhez tartozó mérték meghatározásakor más folyamat az S/R, illetve az S/B martingálmértékét kell meghatározni. A forward mérték segítségével egy H_T

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

kifizetés $t < T$ időpontban érvényes prompt árát a következőképpen számolhatjuk ki.

$$\pi_t(H_T) = R(t)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = B(t,T)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{R(T)}\frac{R(t)}{B(t,T)} \mid \mathcal{F}_t\right) =$$
$$= B(t,T)\,F(H_T,t,T) = B(t,T)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_T}(H_T \mid \mathcal{F}_t).$$

A képlet pontosan megfeleltethető az eredeti árazó képletnek ha figyelembe vesszük, hogy $\mathbf{Q}_T$ éppen a $B(t,T)$-hez tartozó kockázatsemleges ár és $B(T,T) = 1$. □

4.4. Az eszközárazás diffúziós modellje

4.13. Definíció. Az X folyamatot Itô-folyamatnak vagy Itô-diffúziónak mondjuk, ha az X felírható

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,dw(s)$$

módon, ahol w Wiener-folyamat, az $a(s,\omega)$ és $b(s,\omega)$ folyamatok előrejelezhetőek, valamint

$$\mathbf{P}\left(\omega \mid \int_0^t |a(s,\omega)|\,ds < \infty\right) = 1, \quad t > 0,$$
$$\mathbf{P}\left(\omega \mid \int_0^t b^2(s,\omega)\,ds < \infty\right) = 1, \quad t > 0.$$

Egy X Itô-folyamatot formálisan szokás a $dX = a \cdot dt + b \cdot dw$ módon jelölni. A dX kifejezést az X sztochasztikus differenciáljának mondjuk.

Tegyük fel, hogy a részvények ára kielégíti a

$$dS = S \cdot (\mu(t) \cdot dt + \sigma(t) \cdot dw)$$

sztochasztikus differenciálegyenletet, ahol $\mu(t,\omega)$ és $\sigma(t,\omega)$ előrejelezhető folyamatok. Heurisztikusan ez azt jelenti, hogy a dS/S hozam egy $\mu dt + \sigma dw$ Itô-folyamatot alkot. Az egyenlet természetesen azonos az

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \mu(s)\,S(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,S(s)\,dw(s)$$

integrálegyenlettel. Az integrálegyenletet kielégítő S az $S(0)$, illetve a μ és a σ ismeretében könnyen kiszámolható. Az Itô-formulát az $f(x) = \exp(x)$ függvényre alkalmazva azonnal ellenőrizhető, hogy az

$$S(t) = S(0)\exp\left(\int_0^t \mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}ds + \int_0^t \sigma(s)\,dw(s)\right)$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

kielégíti a fenti egyenletet: Ha

$$X(t) \triangleq \int_0^t \mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} ds + \int_0^t \sigma(s)\, dw(s),$$

akkor az $[X](t) = \int_0^t \sigma^2(s)\, ds$ polaritási szabály miatt

$$dS = SdX + \frac{1}{2} Sd[X] = S\mu dt + S\sigma dw.$$

Természetesen ebből még nem következik, hogy S az egyetlen ilyen folyamat. Ezt azonban hallgatólagosan mindig feltesszük. Vegyük észre, hogy implicite megköveteltük, hogy az integrálok létezzenek, vagyis hogy a $\int_0^t |\mu|\, ds$ és az $\int_0^t \sigma^2 ds$ integrálok majdnem minden kimenetelre végesek legyenek. Az S folytonos, így minden trajektóriája minden véges szakaszon korlátos, így ha a $\int_0^t |\mu|\, ds$ és az $\int_0^t \sigma^2 ds$ integrálok léteznek, akkor a μS és a σS integrálja is létezik.

Az Itô-diffúzió definíciójában explicite feltettük, hogy az S szemimartingál véges változású része abszolút folytonos a lokális martingál rész kvadratikus variációja által generált mértékre nézve. Tegyük fel, hogy $dS = SdX$, ahol $X = X(0) + V + L$ egy folytonos szemimartingál. Az Itô-formula miatt $S = S(0) \exp(X - [X]/2) = S(0) \exp(X - [L]/2)$. Mivel a feltétel szerint $R > 0$, ezért $R = \exp(\log(R))$, így

$$\overline{S} = S(0) \exp(X(0) + V - \log(R) + L - [L]/2).$$

Ha a $\log(R)$ folytonos és korlátos változású, akkor ebből ismételten az Itô-formula miatt

$$d\overline{S} = \overline{S} d(V - \log(R) + L) = \overline{S} d(X - \log(R)) \triangleq \overline{S} d(W + L).$$

Legyen $W \triangleq V - \log(R) \triangleq A + B$ a véges változású rész felbontása az $[L]$ szerint abszolút folytonos és szinguláris részre. Tekintsük a szinguláris részre a $\mathrm{Var}(B) = U \bullet B$ felbontást. Mivel

$$\int_0^T \frac{U}{\overline{S}} d\overline{S} = \int_0^T \frac{U}{\overline{S}} \overline{S} d(W + L) = \int_0^T U dW + \int_0^T U dL = \mathrm{Var}(B)(T) + 0,$$

amely ha a B nem nulla, akkor az $U/\overline{S}$ integrátor arbitrázst definiál. A gondolatmenet némiképpen pontatlan, ugyanis nem világos, hogy az $A+B$ felbontás, illetve az U választható előrejelezhető módon. (Vagyis például folytonos és adaptált módon.) Mivel nem akarunk feleslegesen általános megfontolásokat az állítást csak egy egyszerűbb alakban igazoljuk.

A kockázatmentes befektetést megvalósító kötvény R áráról, triviális közgazdasági megfontolások alapján feltesszük, hogy az időben monoton nő, és

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

mivel a kötvény árával diszkontálni akarunk, ezért feltesszük, hogy az R pozitív. A Lebesgue-féle felbontási tétel miatt

$$R(t,\omega) = \exp(\log R(t,\omega)) = R(0)\exp\left(\int_0^t r(s,\omega)\,ds + h(t,\omega)\right),$$

ahol a h a Lebesgue-mérték szerint szinguláris és r a $\log R$ deriváltja. Mivel $R > 0$ és az R monoton nő, $\log R$ kifejezés minden véges $[t,T]$, $t > 0$ szakaszon szintén nő, így a felbontás létezik. Az S részvényről feltesszük, hogy a megadott alakkal rendelkezik, vagyis hogy Itô-folyamatot alkot.

4.14. Lemma. *A nincsen arbitrázs feltétel teljesülése esetén $h = 0$.*

Bizonyítás. Ha tekintjük az $U(t,\omega) \triangleq R_0 \exp\left(\int_0^t r(s,\omega)\,ds\right)$ diszkontfaktort, akkor az Itô-formula miatt az $\overline{S}$ diszkontált folyamat szintén Itô-folyamat, de az $\overline{R} \triangleq R/U$ minden trajektóriája vagy konstans, vagy szinguláris és $\overline{R}(0) = 1$, vagyis $\overline{R} \geq 1$. Mivel elegendő a lemma állítását az $\overline{R}$-ra igazolni, feltehetjük, hogy $R \geq 1$, az R növekedő és az R trajektóriái által generált mértékek a Lebesgue-mérték szerint szingulárisak. Legyen

$$D(t,\omega) = \limsup_{n\to\infty} \frac{R(t,\omega) - R(t-1/n,\omega)}{1/n}$$

az R baloldali deriváltjaiból álló folyamat. Mivel az R folytonos a D előrejelezhető. Tekintsük az $X \triangleq \chi(\{D > 0\})$ előrejelezhető folyamatot. Az R által generált mérték tartója része a $\{D > 0\}$ halmaznak, így mivel az R vagy konstans, vagy szinguláris, ezért az X trajektóriái a Lebesgue-mérték szerint majdnem mindenhol nullák. Az S véges változású része, valamint az S kvadratikus variációja abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve. Következésképpen $\int_0^T RX\,dS = 0$. Mivel $S > 0$ és az R egy pozitív mértékű halmazon szigorúan nő, ezért

$$\int_0^T S\,dR \geq 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{E}\left(\int_0^T S\,dR\right) > 0.$$

Tekintsük az $((XS)(t), -(RX)(t))$ portfólió súlyokat. Mivel az X trajektóriái a Lebesgue-mérték szerint majdnem mindenhol nullák a befektetési stratégia által biztosított árfolyamnyereség nagysága

$$V(T) - V(0) = \int_0^T (XS)(t)\,dR(t) - \int_0^T (RX)(t)\,dS(t) =$$
$$= \int_0^T (XS)(t)\,dR(t) = \int_0^T S\,dR$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

miközben az összes t időpontban az eszközölt befektetések értéke

$$X(t) S(t) R(t) - X(t) R(t) S(t) = 0.$$

Ez közgazdasági értelemben egyértelmű arbitrázs, ugyanis nulla befektetéssel olyan nem negatív árfolyamnyereséghez jutottunk, amely egy pozitív valószínűségű halmazon pozitív.

Az érvelés azonban nem pontos, ugyanis nem a korábban rögzített nincsen arbitrázs feltételre épül. Ahhoz, hogy a nincsen arbitrázs definíciót alkalmazni tudjuk, meg kell mondani, hogy minden t időpontban mit csináljunk a már felhalmozott árfolyamnyereséggel. Nyilvánvaló módon a felhalmozott nyereségen kötvényt kell venni, így az árfolyamnyereség képlete

$$V(T) = \int_0^T \frac{V}{R} + (XS)\, dR - \int_0^T XR dS = \int_0^T \frac{V}{R} + XS dR. \tag{4.5}$$

Az így kapott stratégia önfinanszírozó, ugyanis

$$\left(\frac{V}{R} + XS\right) R - XRS = V.$$

Meg kell mutatni, hogy a fenti (4.5) sztochasztikus differenciálegyenletnek van $V \geq 0$ megoldása, ugyanis akkor

$$V(T) = \int_0^T \frac{V}{R} + XS dR \geq \int_0^T XS dR,$$

és így valóban arbitrázst kapunk. Vezessük be a τ

$$\tau \triangleq \inf\left\{t \mid R(t) - R(0) \geq \frac{1}{2}\right\} > 0$$

megállási időt. Mivel az R folytonos, ezért $R^\tau - R(0) \leq 1/2$. A differenciálegyenlet megoldását iterációval határozzuk meg. Legyen $V_0 \triangleq 0$ és

$$V_{n+1} \triangleq \left(\frac{V_n}{R} + XS\right) \bullet R.$$

A definícióból és az $R \geq 1$ egyenlőtlenségből világos, hogy a $[0, \tau]$ szakaszon

$$\begin{aligned}
V_{n+1} &\triangleq \left(\frac{V_n}{R} + XS\right) \bullet R \leq (V_n + XS) \bullet R = \\
&= \left(\left(\frac{V_{n-1}}{R} + XS\right) \bullet R + XS\right) \bullet R \leq \\
&\leq ((V_{n-1} + S) \bullet R + S) \bullet R \leq \ldots \leq ((S \bullet R + S) \bullet R + \ldots S) \bullet R \leq \\
&\leq ((\max S \cdot (R - R_0) + \max S) \bullet R + \ldots + \max S) \bullet R \leq \\
&\leq \max S \sum_{n=0}^{\infty} (R - R_0)^n \leq 2 \cdot \max S < \infty.
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ugyanakkor

$$V_1 - V_0 = V_1 = XS \bullet R \geq 0.$$

Ebből indukcióval

$$V_{n+1} - V_n \stackrel{\circ}{=} \left(\frac{V_n}{R} + XS\right) \bullet R - \left(\frac{V_{n-1}}{R} + XS\right) \bullet R = \left(\frac{V_n - V_{n-1}}{R}\right) \bullet R \geq 0,$$

vagyis $V_{n+1} \geq V_n$, amiből a (V_n) sorozat konvergens és a $V_n \to V$ a fenti (4.5) egyenlet a $[0, \tau]$ szakaszon való olyan megoldása, amely arbitrázs. □

A modell közgazdasági tartalma alapján az általánosság megszorítása nélkül a h szinguláris rész tekinthető nullának, így az egyszerűség kedvéért mindig feltesszük, hogy $h = 0$, vagyis az R alakulását az

$$R(t, \omega) = R(0) \exp\left(\int_0^t r(s, \omega)\, ds\right),$$

vagy ami azonos az $dR = rRdt$ egyenlettel írjuk le. Ha most $r \geq 0$, akkor $R \geq$ $\geq R(0)$, és így a korábbi tételek mind alkalmazhatóak. Ismételten implicite feltettük, hogy az $\int_0^t r(s)\, ds$ integrál majdnem minden kimenetelre véges.

4.15. Definíció. Az így kapott (R, S)

$$\begin{aligned} dR &= R \cdot r dt, & R(0) &= R_0, \\ dS &= S \cdot (\mu dt + \sigma dw), & S(0) &= S_0 \end{aligned}$$

modellt az eszközárazás diffúziós modelljének szokás mondani. A továbbiakban, hacsak másképpen nem mondjuk mindig feltesszük, hogy $R_0 = 1$.

4.5. A kockázat piaci ára

A részvény $\overline{S}$ diszkontált árfolyama triviálisan

$$\overline{S}(t) \stackrel{\circ}{=} \frac{S(t)}{R(t)} = \overline{S}(0) \exp\left(\int_0^t \mu(s) - r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} ds + \int_0^t \sigma(s)\, dw(s)\right),$$

így ismételten az Itô-formula miatt elemi számolással

$$d\overline{S} = \overline{S} \cdot ((\mu - r)\, dt + \sigma dw).$$

4.16. Definíció. Vezessük be a

$$\theta(t, \omega) \stackrel{\circ}{=} \frac{\mu(t, \omega) - r(t, \omega)}{\sigma(t, \omega)}$$

folyamatot, amit a kockázat piaci árának szokás mondani. Természetesen ahhoz, hogy a képletnek legyen értelme, fel kell tenni, hogy $\sigma(t, \omega) > 0$.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Tekintsük az $L \triangleq -\theta \bullet w$ lokális martingált és a

$$\Lambda(t) \triangleq \mathcal{E}(L)(t) \triangleq \mathcal{E}(-\theta \bullet w)(t) = \exp\left(-\int_0^t \theta(s,\omega)dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s,\omega)ds\right)$$

Girszanov-féle transzformációs függvényt, ahol értelemszerűen megköveteljük, hogy a formula értelmes, vagyis többek között feltesszük, hogy $\sigma > 0$ és az integrálok léteznek, vagyis feltesszük, hogy

$$\mathbf{P}\left(\omega \mid \int_0^t \theta^2(s,\omega)\, ds < \infty\right) = 1.$$

Feltesszük még, hogy a Girszanov-formula alkalmazásakor nem lép fel probléma, vagyis a Λ valódi martingál. A $\mathbf{Q}$ mértéket válasszuk a

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \triangleq \Lambda(T)$$

egyenlőséggel. Mivel a Λ martingál, ezért $\mathbf{E}(\Lambda(T)) = 1$, következésképpen a $\mathbf{Q}$ nem csak mérték, hanem valószínűségi mérték. Érdemes hangsúlyozni, hogy explicit módon nem tesszük fel a nincs arbitrázs feltételt. Burkoltan a Λ martingál volta helyettesíti ezt a feltételt. Mielőtt tovább megyünk érdemes hangsúlyozni, hogy a megadott feltételek, különösen az, hogy a Λ martingál legyen igen erős megkötés. Az egyik leggyakrabban használt eset az, amikor a μ és a σ konstans, ilyenkor a θ is konstans és a Λ egy

$$\Lambda(t) = \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

exponenciális martingál. Emlékeztetünk, hogy végtelen időhorizonton a Λ nem egyenletesen integrálható martingál, így a mértékcsere csak véges időhorizonton hajtható végre.

4.6. Lokális martingálmérték létezése, Girszanov-formula

A $\mathbf{P}$ mérték mellett az $\overline{S}$ folyamat folytonos szemimartingál, amely lokális martingál része

$$M(t) \triangleq \int_0^t \sigma(s)\,\overline{S}(s)\,dw(s).$$

A Λ által megvalósított $\mathbf{Q}$ mérték mellett a Girszanov-tétel miatt az $\widehat{M} \triangleq \widehat{\sigma\overline{S} \bullet w}$ szintén lokális martingál, de a $\mathbf{Q}$ alatt. Számoljuk ki az $\widehat{M}$ folyamatot!

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az M képlete, a θ definíciója és a Girszanov-tétel felhasználásával

$$\begin{aligned}\widehat{M} &\triangleq M - [-\theta \bullet w, M] = M + [\theta \bullet w, M] = \\ &= \sigma\overline{S} \bullet w + \theta \bullet \left[w, \sigma\overline{S} \bullet w\right] = \sigma\overline{S} \bullet w + (\sigma\theta)\,\overline{S} \bullet [w] = \\ &= \sigma\overline{S} \bullet w + (\mu - r)\,\overline{S} \bullet [w] = \overline{S} - \overline{S}\,(0)\,.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Következésképpen a $\mathbf{Q}$ az $\overline{S}$ lokális martingálmértéke. Természetesen, a korábban elmondottak alapján ilyenkor nincsen a modellben arbitrázs.

Ugyanakkor azt nem láttuk be, hogy az arbitrázs hiánya esetén a Girszanov-transzformáció használható-e vagy sem. Ha a $\sigma > 0$, akkor a θ és a Λ definiálható, feltéve, hogy az integrálok léteznek, de nem tudjuk, hogy a Λ valódi martingál lesz vagy sem. Vagyis szemben a diszkrét időhorizonttal, nem jellemeztük a nincsen arbitrázs megkötést.

A szituáció jobb megértése céljából érdemes egy kis kitérőt tenni, és egy másik módszerrel is belátni, hogy az $\overline{S}$ lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Miként már láttuk

$$\overline{S}\,(t) = \overline{S}\,(0) \exp\left(\int_0^t \left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma dw\,(s)\right).$$

A w Girszanov-transzformáltja

$$\widehat{w}\,(t) = w\,(t) - \int_0^t -\theta\,(s)\,ds = w\,(t) + \int_0^t \theta\,(s)\,ds.$$

Ebből

$$w\,(t) = \widehat{w}\,(t) - \int_0^t \theta\,(s)\,ds.$$

Ezt az $\overline{S}$ képletébe beírva, az asszociativitási szabály szerint

$$\overline{S}\,(t) = \overline{S}\,(0) \exp\left(\int_0^t \left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma d\widehat{w}\,(s) - \int_0^t \sigma\theta ds\right).$$

Az összevonások után, felhasználva, hogy $\sigma\theta = \mu - r$

$$\overline{S}\,(t) = \overline{S}\,(0) \exp\left(-\int_0^t \frac{\sigma^2}{2} ds + \int_0^t \sigma d\widehat{w}\,(s)\right).$$

A $\widehat{w}$ a $\mathbf{Q}$ alatt Wiener-folyamat, így ha $N \triangleq \sigma \bullet \widehat{w}$, akkor az N lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, hiszen egy $\mathbf{Q}$ alatti Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrál. Mivel

$$\overline{S} = \overline{S}\,(0) \exp\left(N - \frac{1}{2}\,[N]\right) = \overline{S}\,(0)\,\mathcal{E}\,(N)\,,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ezért a $\mathbf{Q}$ alatt az $\overline{S}$ valóban lokális martingál.

Vegyük észre, hogy

$$S(t) = R(t)\,\overline{S}(t) = S(0)\exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma d\widehat{w}(s)\right).$$

A kifejezéshez tartozó sztochasztikus differenciálegyenlet $dS = rSdt + \sigma S d\widehat{w}$. Vegyük észre, hogy az S alakulását leíró sztochasztikus differenciálegyenletben a μ helyébe r került, vagyis a μ „kiesett". Ugyanakkor persze a w helyébe pedig $\widehat{w}$ került. A kérdés csak az, hogy a $\widehat{w}$ milyen szempontból „helyettesíti" a w folyamatot. Egy szempontból biztosan: A $\widehat{w}$ a $\mathbf{Q}$ alatt szintén Wiener-folyamat, így az eloszlásaik megegyeznek!!! Vagyis az egyiknek a $\mathbf{P}$ alatt vett eloszlása megegyezik a másiknak a $\mathbf{Q}$ alatt vett eloszlásával. A mértékcsere hatására tehát az S folyamat nem változott, de a differenciálegyenletben szereplő „együtthatók" megváltoztak. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ filtráció az S definíciójában szereplő w Wiener-folyamat által generált, kiterjesztett filtráció. Érdemes hangsúlyozni, hogy a $\widehat{w}$ szintén Wiener-folyamat az $\mathcal{F}$ alatt, de mivel a „helyettesítés nem tökéletes", a generált filtrációja esetlegesen szűkebb lehet mint az $\mathcal{F}$.

4.7. A lokális martingálmérték egyértelmű

Legyen $\mathcal{F}$ a w által generált filtráció. Megmutatjuk, hogy ilyenkor a $\mathbf{Q}$ lokális martingálmérték egyértelmű. Legyen $\mathbf{R}$ az $\overline{S}$ egy másik lokális martingálmértéke. A

$$\Gamma(t) \triangleq \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

pozitív martingál, amely a filtrációra tett feltétel miatt folytonos. Tehát felírható $\mathcal{E}(L)$ módon. Az L az $\mathcal{F}$ szerint lokális martingál, az $\mathcal{F}$ pedig, miként feltételeztük, a w Wiener-folyamat filtrációja, így az integrálreprezentációs tétel miatt alkalmas φ folyamattal $L = \varphi \bullet w$. Megmutatjuk, hogy $\varphi \overset{m.m.}{=} -\theta$. Vegyük az $\overline{S}$ folytonos szemimartingál $\mathbf{P}$ alatti

$$\overline{S} \triangleq M + A \triangleq \left(\overline{S}(0) + \sigma\overline{S} \bullet w\right) + A$$

felbontását. Az ekvivalens mértékcsere során a folytonos szemimartingálok folytonos szemimartingálok lesznek. Az $\mathbf{R}$ ekvivalens lokális martingálmérték alatt tehát az $\overline{S}$ szintén folytonos szemimartingál, amely lokális martingál része az imént elmondottakkal analóg módon

$$M - [L, M] = M - \left[\varphi \bullet w, \sigma\overline{S} \bullet w\right] = M - (\varphi\sigma)\,\overline{S} \bullet [w].$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A folytonos szemimartingálok egyértelmű felbontása miatt, felhasználva, hogy az $\mathbf{R}$ az $\overline{S}$ lokális martingál mértéke az

$$\overline{S} = \left(M - (\varphi\sigma)\,\overline{S} \bullet [w]\right) + A + (\varphi\sigma)\,\overline{S} \bullet [w]\,,$$

felbontásban $A + (\varphi\sigma)\,\overline{S} \bullet [w] = 0$, vagyis

$$A \overset{m.m.}{=} -\sigma\varphi\overline{S} \bullet [w]\,.$$

Hagyományos integrál jelöléssel, majdnem minden ω esetén minden t-re

$$\int_0^t \theta\,(s,\omega)\,\sigma\,(s,\omega)\,\overline{S}\,(s,\omega)\,ds = -\int_0^t \sigma\,(s,\omega)\,\varphi\,(s,\omega)\,\overline{S}\,(s,\omega)\,ds.$$

Az θ, σ és φ folyamatok négyzetesen integrálhatóak, az $\overline{S}$ folytonos, így az integrandusok minden véges szakaszon integrálhatóak, következésképpen a két oldalt deriválva azonnal látható, hogy majdnem minden ω kimenetelre és majdnem minden s-re az integrandusok megegyeznek. A feltételek szerint $\overline{S} > 0$ és $\sigma > 0$, tehát

$$\theta\,(s,\omega) \overset{m.m.}{=} -\varphi\,(s,\omega)\,,$$

következésképpen $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$.

4.8. Integrálreprezentációs tétel és mértékcsere

4.17. Tétel. *Legyen M egy folytonos lokális martingál és tegyük fel, hogy az M rendelkezik az integrálreprezentációs tulajdonsággal a $\mathbf{P}$ mérték alatt, vagyis tegyük fel, hogy a $\mathbf{P}$ alatt minden folytonos lokális martingál felírható M szerinti sztochasztikus integrálként. Legyen $\mathbf{Q}$ egy ekvivalens valószínűségi mérték, és tegyük fel, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ közötti Radon–Nikodym-folyamat egy L folytonos lokális martingállal felírható $\mathcal{E}\,(L)$ módon. Legyen $\widehat{M}$ az M Girszanov-transzformáltja. Ha N tetszőleges folytonos lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, akkor alkalmas Y esetén érvényes az*

$$N\,(t) = N\,(0) + \left(Y \bullet \widehat{M}\right)(t)\,, \quad 0 \le t \le T$$

reprezentáció, vagyis az $\widehat{M}$ rendelkezik az integrálreprezentációs tulajdonsággal a $\mathbf{Q}$ alatt.

Bizonyítás. Az integrálreprezentációs tétel használatához vissza kell térni a $\mathbf{P}$ mértékre. Legyen

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \mathcal{E}\,(L)\,(T)\,,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ahol L lokális martingál a $\mathbf{P}$ mérték alatt. Ekkor

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} = \left(\mathcal{E}\left(L\right)\left(T\right)\right)^{-1} \overset{\circ}{=} \left(\exp\left(L - \frac{1}{2}\left[L\right]\right)\left(T\right)\right)^{-1} =$$
$$= \exp\left(-L + \frac{1}{2}\left[L\right]\right)\left(T\right) = \exp\left(\left[L\right] - L - \frac{1}{2}\left[L - \left[L\right]\right]\right)\left(T\right).$$

Vegyük észre, hogy az

$$\left[L\right] - L = \left(-L\right) - \left[-L, L\right]$$

éppen a $-L$ lokális martingál $\widehat{-L}$ Girszanov-transzformáltja, így lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Vagyis

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} = \exp\left(\widehat{-L} - \frac{1}{2}\left[\widehat{-L}\right]\right)\left(T\right) = \mathcal{E}\left(\widehat{-L}\right).$$

Így a $\mathbf{Q}$-ból $\mathbf{P}$-be felírt Girszanov-transzformáció miatt ha az N folytonos lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, akkor az

$$\widehat{N} \overset{\circ}{=} N - \left[N, \widehat{-L}\right] = N - \left[N, \left[L\right] - L\right] = N + \left[N, L\right]$$

lokális martingál a $\mathbf{P}$ alatt. Az M a feltétel szerint rendelkezik az integrálreprezentációs tulajdonsággal, így van olyan Y, hogy

$$N + \left[N, L\right] = N\left(0\right) + Y \bullet M.$$

A két oldal L-lel vett keresztvariációját véve

$$\left[N, L\right] = \left[Y \bullet M, L\right] = Y \bullet \left[M, L\right].$$

Tehát átrendezve

$$N = N\left(0\right) + Y \bullet M - \left[N, L\right] = N\left(0\right) + Y \bullet M - Y \bullet \left[M, L\right] =$$
$$= N\left(0\right) + Y \bullet \left(M - \left[M \bullet L\right]\right) \overset{\circ}{=} N\left(0\right) + Y \bullet \widehat{M},$$

ami éppen az állítás bizonyítása. □

Hasonlóan látható be a következő:

4.18. Tétel. *Girszanov-transzformációhoz tartozó ekvivalens valószínűségi mértékcsere esetén ha $N - N\left(0\right) = X \bullet M$, akkor $\widehat{N} - \widehat{N}\left(0\right) = X \bullet \widehat{M}$.*

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $N - N(0) = X \bullet M$. Legyen L a Girszanov-transzformációban szereplő „kitevő". Ekkor

$$[N, L] = [X \bullet M, L] = X \bullet [M, L].$$

Ezt a két oldalról kivonva

$$\widehat{N} - \widehat{N}(0) = N - N(0) - [N, L] = X \bullet M - X \bullet [M, L] =$$
$$= X \bullet (M - [M, L]) = X \bullet \widehat{M}. \quad \square$$

4.9. A piac teljessége

Rögzítsünk egy T időpontot. Miként korábban, legyen

$$\Lambda(t) \doteq \mathcal{E}(-\theta \bullet w)(t) = \exp\left(-\int_0^t \theta(s,\omega)\, dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s,\omega)\, ds\right),$$

és legyen $\mathbf{Q}$ a $\Lambda(T)$ által definiált ekvivalens lokális martingálmérték. Ügyeljünk θ előjelére! A gond abból származik, hogy a kockázat piaci árát pozitívnak szeretnénk definiálni. Legyen H_T a T időpontban esedékes pénzügyi tranzakció véletlen eredménye. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}$ filtráció a modellben szereplő w Wiener-folyamat filtrációja. A modellben tehát csak egy „véletlen forrás", a w szerepelhet. Ha például az r és a μ, vagy a σ meghatározásához további Wiener-folyamatokra van szükség és $\mathcal{F}$ az összes Wiener-folyamat által meghatározott filtráció, akkor a modell nem teljes, vagyis az összes $\mathcal{F}_T$-mérhető változó árát nem tudjuk az alábbi árazási képlettel megadni.

Vezessük be az $N(t) \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_t\right)$ $\mathbf{Q}$-martingált. Természetesen csak akkor kapunk martingált, ha az $\overline{H}_T$ integrálható a $\mathbf{Q}$ alatt. Vegyük észre, hogy az N adaptált folyamat replikálja a $\overline{H}_T$ változót, ugyanis mivel a $\overline{H}_T$ $\mathcal{F}_T$-mérhető triviálisan

$$N(T) \doteq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_T\right) = \overline{H}_T.$$

Ez azonban nem jelent semmit, ugyanis a replikálást önfinanszírozó, alulról korlátos portfólióval kell elvégezni. Az önfinanszírozás azt jelenti, hogy a diszkontált értékfolyamatot a diszkontált árak szerinti sztochasztikus integrálként állítjuk elő. Ehhez elegendő megmutatni, hogy az $N - N(0)$ előállítható $X \bullet \overline{S}$ módon. Az N-et a w integrálreprezentációs tulajdonsága miatt felírhatjuk a $\widehat{w}$ szerinti integrálként. Felhasználva, hogy $\sigma S \neq 0$ és hogy a Girszanov-transzformáció felcserélhető a sztochasztikus integrálással, illetve, a már igazolt (4.6) sor alapján

$$N - N(0) = Y \bullet \widehat{w} = \sigma\overline{S}\frac{Y}{\sigma\overline{S}} \bullet \widehat{w} \doteq \sigma\overline{S}X \bullet \widehat{w} =$$
$$= X \bullet \left(\sigma\overline{S} \bullet \widehat{w}\right) = X \bullet \left(\widehat{\sigma\overline{S} \bullet w}\right) = X \bullet \widehat{M} = X \bullet \overline{S}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Tehát igazoltuk a következőt:

4.19. Tétel. *Ha $\mathcal{F}$ a modellben szereplő w Wiener-folyamathoz tartozó filtráció és N tetszőleges $\mathbf{Q}$-martingál az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve, akkor az N előállítható az $\overline{S}$ sztochasztikus integráljaként:*

$$N = N(0) + X \bullet \overline{S}.$$

Ha most újra $N(T) = \overline{H}_T$, akkor

$$\overline{H}_T = N(T) = N(0) + \int_0^T X d\overline{S} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right) + \int_0^T X d\overline{S} =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right) + \int_0^T X d\overline{S}.$$

Bár a levezetésből evidens, de érdemes hangsúlyozni, hogy az $X \bullet \overline{S}$ integrál létezik. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az

$$\int_0^t X^2 d\left[\overline{S}\right] = \int_0^t \frac{Y^2}{\overline{S}^2\sigma^2}\overline{S}^2\sigma^2 ds = \int_0^t Y^2 ds$$

kifejezés majdnem minden kimenetelre véges legyen. Ami azonban az integrálreprezentációs tétel miatt triviálisan teljesül.

4.10. Árazási képlet és arbitrázs

Vegyük észre, hogy szemben a véges, diszkrét időhorizontos esettel nem hivatkozhatunk közvetlenül a nincs arbitrázs feltételre, mert az alulról való korlátosság feltétele miatt valamely megengedett portfólió mínusz egyszerese nem lesz feltétlenül alulról korlátos. Ezért a diszkrét esethez képest közgazdaságilag egy kicsi módosítani kell a gondolatmenetet:

4.20. Definíció. Ha valaki a H_T tranzakció eredményét „szintetikusan" kockázatmentes módon elő akarja állítani, akkor egy olyan x kezdeti összegre van szüksége, amelyből indított V értékfolyamatra $V_T(x) \geq H_T$. A reláció teljesülése esetén azt mondjuk, hogy az x kezdeti befektetésből kiinduló portfólió szuperreplikálja a H_T követelést. Valamely H_T követelés fair árán a

$$\pi(H_T) \triangleq \min\{x \mid V_T(X, x) \geq H_T\}$$

értéket értjük, feltéve ha létezik, ahol az X a lehetséges, szuperreplikáló, önfinanszírozó portfólió súlyok halmazán fut keresztül.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A szuperreplikálás feltételét diszkontálva $\overline{V}_T(x) \geq \overline{H}_T$. Az előállításban a $\overline{V}$-nak önfinanszírozónak és alulról korlátosnak kell lenni. Mivel a $\overline{V}$ az önfinanszírozás definíciója miatt éppen az $\overline{S}$ szerinti sztochasztikus integrál, és mivel az $\overline{S}$ a $\mathbf{Q}$ alatt lokális martingál, ezért a $\overline{V}$, mint sztochasztikus integrál, lokális martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. Ha feltesszük, hogy a $\overline{H}_T$ alulról korlátos, akkor a $\overline{V}$ egy alulról korlátos lokális martingál, ezért a $\overline{V}$ egy szupermartingál. Mivel a szupermartingálok nem növelik a várható értéket, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right) &\leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}_T(X,x) \mid \mathcal{F}_0\right) \leq \\ &\leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}_0(X,x) \mid \mathcal{F}_0\right) = \overline{V}_0(X,x) = \frac{x}{R(0)}.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a korábban elmondottak miatt egy alkalmas X lehetséges, önfinanszírozó portfólióra $V_T(x) = H_T$, és ilyenkor $x = R(0)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right)$. Ebből következően az $x = R(0)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right)$ az eladó szempontjából egy versenyképes ár.

A kérdés csak az, hogy kérhet-e ettől eltérő árat? Ha a tényleges $\pi(H_T)$ ár nagyobb, mint $R(0)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right)$, vagyis az alkalmas, önfinanszírozó, lehetséges portfólió induló költsége, akkor a H_T drága, így el kell adni, a reprezentáló portfólió pedig olcsó és ezért azt meg kell venni. Ha eladjuk a H_T tranzakciót és dinamikusan felépítjük az X portfóliót, akkor a költségeink, az értékfüggvény, alulról korlátos. A nettó eredmény a $t = T$ időpontban nulla, a $t = 0$ időpontban pedig a bevétel és a költség különbsége

$$\pi(H_T) - R(0)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T \mid \mathcal{F}_0\right) > 0,$$

ami arbitrázs. Mivel a modellben a feltételek szerint van ekvivalens lokális martingálmérték, az arbitrázs lehetősége ellentmondás. Ha az ár kisebb lenne, és a szereplők csak fedezett helyzetben hajlandók a terméket kínálni, akkor senki sem lenne hajlandó az üzletbe belemenni, vagyis nem lennének eladók a piacon, így az üzlet nem jönne létre. Másképpen fogalmazva az árazóképlet biztosításához szükséges közgazdasági modellben az eladó a H_T-ért kapott árból fedezett helyzetbe akar kerülni. Ha nem tudja a követelést lefedezni, akkor a terméket a modell feltételei szerint nem adja el, ugyanis nem akar valódi kockázatot vállalni. Szemben a szokványos közgazdasági helyzettel, az eladó nem feltétlenül akarja a terméket eladni, ugyanis az pusztán egy matematikai formula, így nem romlik, nincsen gyártási költsége stb. Vagyis a kereslet hiánya nem vezet az ár csökkenéséhez, illetve az alacsony ár nem feltétlenül vezet a kereslet növekedéséhez. Vegyük észre, hogy a gondolatmenet nem azonos a véges időhorizonton elmondottal. Véges időhorizonton mind a két oldalon az arbitrázs lehetősége határozza meg az árat a szereplők „hozzáállástól" függetlenül, vagyis véges időhorizonton az alacsony ár keresletet támaszt és emelni fogja az árat. Ha a származtatott termék ára alacsony,

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

akkor a terméket meg kéne venni, a fedező portfóliót el kéne adni. A fedező portfólió azonban csak alulról korlátos, így az eladásakor létrejött portfólió felülről és nem alulról korlátos, így nem egy megengedett portfólió. Folytonos időhorizonton a duplázási stratégiából eredő arbitrázs miatt a helyzet nem szimmetrikus. Természetesen korlátos kifizetések esetén, például a put opcióknál, van alulról és felülről is korlátos replikáló stratégia, így ilyenkor mind a két irányba lehet arbitrálni[5].

Ezidáig csak a $t = 0$ időpontra határoztuk meg az árakat. De milyen folyamatot követ a származtatott termék ára a $0 \leq t \leq T$ időszak alatt? Megmutatjuk, hogy

$$\pi_t(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{R(t)}{R(T)} \cdot H_T \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Valamely H_T követelés fair ára a t időpontban definíció szerint a $[0, T - t]$ időtartományon definiált árazási probléma megoldását értjük a $\mathcal{G}_s \triangleq \mathcal{F}_{t+s}$ filtráció mellett. Vegyük észre, hogy az S helyébe az $\widetilde{S}(s) \triangleq S(t+s)$ folyamatot kell írni az R helyébe pedig az $\widetilde{R}(s) \triangleq R(t+s)$ kerül. Így

$$\pi_t(H_T) = R(t)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{R(T)} \mid \mathcal{G}_0\right) = R(t)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right).$$

4.21. Tétel. *Legyen w egy Wiener-folyamat és legyen $\mathcal{F}$ a w által generált filtráció. Tegyük fel, hogy*

$$R(t) = R(0)\exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right) = \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right),$$
$$S(t) = S(0)\exp\left(\int_0^t \mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2}ds + \int_0^t \sigma(s)\,dw\right).$$

Tegyük fel továbbá, hogy a kockázat piaci árának nevezett

$$\theta(t) \triangleq \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma(t)}$$

folyamat esetén a

$$\Lambda(t) \triangleq \mathcal{E}(-\theta \bullet w)(t) = \exp\left(-\int_0^t \theta(s)\,dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)\,ds\right)$$

folyamat valódi martingál a $[0, T]$ szakaszon. Legyen

$$\mathbf{Q}(A) \triangleq \int_A \Lambda(T)\,d\mathbf{P}, \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

[5] Vegyük észre, hogy a gondolatmenet nehézsége abból ered, ahogyan a megengedett portfólió fogalmát definiáltuk.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ha H_T alulról korlátos és $\mathcal{F}_T$-mérhető, valamint

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right) = \mathbf{E}\left(\frac{H_T}{R(T)}\Lambda(T)\right) < \infty,$$

akkor a H_T fair ára a $0 \leq t \leq T$ időpontban éppen

$$\pi_t(H_T) = R(t) \cdot \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_T}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right). \tag{4.7}$$

4.11. A Black–Scholes-differenciálegyenlet

Tegyük fel, hogy $H_T = h(S(T))$ és hogy $R(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right)$ és az r determinisztikus. Ilyenkor

$$\begin{aligned}\pi_t(H_T) &= \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right) \cdot \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right) h(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right) h(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(h(S_T) \mid \mathcal{F}_t\right).\end{aligned}$$

Legyen

$$dS = b(t,S)\,dt + \sigma(t,S)\,dw$$

az S egyenlete a kockázatsemleges mérték alatt. Tegyük fel, hogy egy alkalmas $f(t,x)$ függvény kielégíti a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + b(t,x)\frac{\partial}{\partial x}f(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,x) &= r(t)f(t,x), \\ f(T,x) &= h(x)\end{aligned}$$

úgynevezett Black–Scholes-egyenletet. Legyen

$$g(t,x) \stackrel{\circ}{=} f(t,x)\exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right).$$

Az $S(t)$ folyamatra alkalmazva az Itô-formulát, kihasználva, hogy az r determinisztikus

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,S(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,S(t))\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right) - r(t)f(t,S(t))\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

elemi számolással

$$g\left(T,S\left(T\right)\right)-g\left(t,S\left(t\right)\right)=\int_{t}^{T}\sigma\left(s,S\left(s\right)\right)\frac{\partial g\left(s,S\left(s\right)\right)}{\partial x}dw\left(s\right),$$

amiből az

$$g\left(T,S\left(T\right)\right)-g\left(t,S\left(t\right)\right)=\exp\left(-\int_{0}^{T}r\left(s\right)ds\right)h\left(S\left(T\right)\right)-g\left(t,S\left(t\right)\right)$$

lokális martingál. Tegyük fel, hogy a g korlátos, vagy legalábbis a $g\left(t,S\left(t\right)\right)$ rendekezik integrálható majoránssal. Ilyenkor valódi martingál. Ebből

$$\begin{aligned}f\left(t,S\left(t\right)\right)\exp\left(-\int_{0}^{t}r(s)ds\right)&=g\left(t,S\left(t\right)\right)=\\&=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_{0}^{T}r(s)ds\right)h\left(S\left(T\right)\right)\mid\mathcal{F}_{t}\right)=\\&=\exp\left(-\int_{0}^{t}r\left(s\right)ds\right)\pi_{t}\left(H_{T}\right),\end{aligned}$$

amiből $f\left(t,S\left(t\right)\right)=\pi_{t}\left(H_{T}\right)$.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

© Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

5. fejezet

Black–Scholes-világ

A Black–Scholes-világon a klasszikus opcióárazás modellkörét értjük. Ilyenkor a modellben két termék van, egy kötvény és egy részvény. Ez a feltételezés a gondolatmenetet, főleg a jelölést, jelentősen leegyszerűsíti. A részvény árát általában S jelöli és mozgását a

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw, \quad S(0) = S_0$$

sztochasztikus differenciálegyenlet írja le, ahol μ és σ konstansok. A kötvény árát leíró folyamatot R jelöli és mozgását a

$$dR = rRdt, \quad R(0) = R_0 (= 1)$$

differenciálegyenlet írja le. A modellkör legfőbb célja, hogy a különböző származtatott termékek árára vonatkozó egyszerűen kezelhető, zárt alakban felírható formulákat vezessünk le. A hangsúly az egyszerűen kezelhető, zárt alakban megadható formulán van, ugyanis közismert, hogy a modell a valóságtól igen távol van. A modell segítségével származtatott formulák egyfajta első közelítésnek tekinthetők. A matematikai pénzügyek minden modellje a Black–Scholes-modell általánosítása.

5.1. Európai opciók árazása

Ahhoz, hogy konkrét számolásokat is be tudjunk mutatni, az általános diffúziós modellt tovább konkretizáljuk. Ha a μ, r és a σ paraméterek konstansok, akkor szokás Black–Scholes-modellről beszélni. Azonnal látható, hogy a Black–Scholes-modell esetén az általános árazási formula feltételei teljesülnek. Ilyenkor a $\theta \stackrel{\circ}{=} \frac{\mu - r}{\sigma}$ kockázat piaci ára konstans. A $\mathbf{Q}$ kockázatmentes

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

mértéket generáló

$$\Lambda(t) = \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right), \quad 0 \le t \le T$$

folyamat martingál, és az

$$\overline{S}(t) = S(0)\exp\left((\mu - r)t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma w(t)\right)$$

diszkontált árfolyam a $\mathbf{Q}(A) \triangleq \int_A \Lambda(T)\, d\mathbf{P}$ lokális martingálmérték mellett valódi martingál. Ennek igazolásához elegendő belátni, hogy az $\overline{S}$ várható értéke a $\mathbf{Q}$ mérték alatt konstans, ugyanis mivel a $\mathbf{Q}$ alatt nem negatív lokális martingál, ezért biztosan szupermartingál. Mivel $\mu - r = \theta\sigma$ ezért

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(t)\right) &= \mathbf{E}\left(\overline{S}(t)\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) = \mathbf{E}\left(\overline{S}(t)\exp\left(-\theta w(T) - \frac{1}{2}\theta^2 T\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\overline{S}(t)\exp\left(-\theta w(T) - \frac{1}{2}\theta^2 T\right) \mid \mathcal{F}_t\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\overline{S}(t)\,\mathbf{E}\left(\exp\left(-\theta w(T) - \frac{1}{2}\theta^2 T\right) \mid \mathcal{F}_t\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}\left(\overline{S}(t)\exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)\right) = \\
&= S(0)\,\mathbf{E}\left(\exp\left(\theta\sigma t - \frac{1}{2}\left(\theta^2 + \sigma^2\right)t + (\sigma - \theta)w(t)\right)\right) = \\
&= S(0)\,\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(\theta - \sigma)^2 t + (\sigma - \theta)w(t)\right)\right) = \\
&= S(0)\,\frac{\mathbf{E}\left(\exp\left((\sigma - \theta)w(t)\right)\right)}{\exp\left((\theta - \sigma)^2 t/2\right)} = S(0),
\end{aligned}$$

ahol az utolsó sorban kihasználtuk a lognormális eloszlás várható értékére vonatkozó képletet.

5.1.1. Határidős termékek árazása

5.1. Példa. Határidős ügyletek árazása.

Első példaként legyen $H_T \triangleq S(T) - K$, ahol K konstans. A kifejezés alulról korlátos, így az árazási formula használható. Ilyenkor

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$$\pi(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(\frac{S(0)\exp((\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma w(T))-K}{\exp(rT)}1\exp(-\theta w(T)-\frac{1}{2}\theta^2 T)\right) =$$
$$= S(0)\,\mathbf{E}\left(\exp\left((\sigma-\theta)w(T)-\frac{1}{2}(\sigma-\theta)^2 T\right)\right) -$$
$$- K\exp(-rT)\,\mathbf{E}\left(\exp\left(-\theta w(T)-\frac{1}{2}\theta^2 T\right)\right).$$

Miként az előző levezetésben az első kifejezés $S(0)$, a második kifejezés pedig a $\Lambda(t)$ martingál tulajdonsága miatt éppen $-K\exp(-rT)$. Másképpen

$$\pi(H_T) = S(0) - K\exp(-rT).$$

A határidős ügyleteknél a K értékét úgy kell meghatározni, hogy $\pi(H_T) = 0$ legyen. Ebből$K = S(0)\exp(rT)$. □

5.1.2. Vanilia call opciók árazása, Black–Scholes-formula kiszámolása Bayes-formulával

5.2. Példa. Az európai call opciók ára.

Térjünk rá az európai call opciók árát megadó nevezetes Black–Scholes-formula tárgyalására. Ilyenkor

$$H_T \triangleq \max(0, S_T - K) = (S_T - K)^+.$$

A konkrét formula több módon is kiszámolható. A kérdés csak az, hogy hogyan lehet „egyszerűen” kiszámolni. Az árazási formula alapján a Black–Scholes-formula kiszámolásakor a

$$\overline{H}_T \triangleq \frac{(S_T-K)^+}{\exp(rT)} = \frac{S_T}{\exp(rT)}\chi(S_T \geq K) - \frac{K}{\exp(rT)}\chi(S_T \geq K)$$

integrálját kell a $\mathbf{Q}$ mérték alatt kiszámolni. Világos, hogy a diszkontált kifizetés alulról korlátos és integrálható a $\mathbf{Q}$ alatt.

A második tag integrálja könnyű:

$$I_2 \triangleq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{K}{\exp(rT)}\chi(S_T \geq K)\right) = \frac{K}{\exp(rT)}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\chi(S_T \geq K)) =$$
$$= \frac{K}{\exp(rT)}\mathbf{Q}(S_T \geq K).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Mivel

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma \widehat{w}(T)\right),$$

ahol a $\widehat{w}$ Wiener-folyamat a $\mathbf{Q}$ alatt, így ha Φ jelöli a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét, akkor

$$\begin{aligned}
I_2 &\stackrel{\circ}{=} \frac{K}{\exp(rT)} \mathbf{Q}(S(T) \geq K) = \\
&= \frac{K}{\exp(rT)} \mathbf{Q}\left(S_0 \exp\left(\sigma \widehat{w}(T) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right) \geq K\right) = \\
&= \frac{K}{\exp(rT)} \mathbf{Q}\left(\sigma \widehat{w}(T) \geq \ln \frac{K}{S(0)} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) T\right) = \\
&= \frac{K}{\exp(rT)} \mathbf{Q}\left(\widehat{w}(T) \geq \frac{\ln(K/S(0)) + \left(\sigma^2/2 - r\right) T}{\sigma}\right) = \\
&= \frac{K}{\exp(rT)} \mathbf{Q}\left(-\frac{\widehat{w}_T}{\sqrt{T}} \leq -\frac{\ln(K/S(0)) + \left(\sigma^2/2 - r\right) T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \\
&= \frac{K}{\exp(rT)} \Phi\left(\frac{\ln(S(0)/K) + \left(r - \sigma^2/2\right) T}{\sigma\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

Az első integrálja némiképpen kínosabb, ugyanis az S_T nem emelhető ki az integrálból. Ugyanakkor válasszuk most az $\overline{S}$-ot diszkont tényezőnek. A korábban a Bayes-formula következményeként belátott (4.4) sort felhasználva

$$\begin{aligned}
I_1 &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(T) \chi(S(T) \geq K)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\overline{S}(T) \chi(S(T) \geq K) \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{R}}\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\overline{S}(T) \chi(S(T) \geq K) \frac{\overline{S}_0}{\overline{S}_T}\right) = S_0 \mathbf{R}(S(T) \geq K).
\end{aligned}$$

A formula előnye, hogy ismét csak egy valószínűséget kell kiszámolni. Persze gondot jelent, hogy nem tudjuk, pontosabban tudhatnánk, de nem akarjuk megtudni, hogy mi az $\mathbf{R}$ mérték. Ezért egy kerülőutat választunk:

$$\widehat{R}(t) = \frac{\overline{R}(t)}{\overline{S}(t)} = \frac{1}{\overline{S}(t)} = S_0^{-1} \exp\left(\left(r - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) t - \sigma w(t)\right).$$

Mivel az $\overline{R} = 1$ martingál a $\mathbf{Q}$ alatt, az $\mathbf{R}$ pedig az új ármércéhez tartozó martingálmérték, ezért az $\widehat{R}$ martingál az $\mathbf{R}$ alatt. A Girszanov-formula miatt a w-ből $\widetilde{w} + \alpha t$ lesz az $\mathbf{R}$ alatt, vagyis

$$\overline{S}^{-1}(t) = S(0)^{-1} \exp\left(-\sigma \widetilde{w}(t) - \delta t\right)$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

alakú lesz, ahol $\widetilde{w}$ Wiener-folyamat az $\mathbf{R}$ alatt, ami csak akkor lesz martingál, ha $\delta = \sigma^2/2$, vagyis

$$\overline{S}^{-1}(t) = S(0)^{-1} \exp\left(-\sigma\widetilde{w}(t) - \frac{\sigma^2}{2}t\right),$$

ahol a $\widetilde{w}$ Wiener-folyamat az $\mathbf{R}$ mérték mellett. Következésképpen

$$S(T) = S(0) \exp\left(\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\widetilde{w}(t)\right).$$

Ezt beírva és a már látott módon ebből elemi számolással

$$\begin{aligned}
I_1 &= S(0)\,\mathbf{R}(S(T) \geq K) = \\
&= S(0)\,\mathbf{R}\left(S(0)\exp\left(\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\widetilde{w}(T)\right) \geq K\right) = \\
&= S(0)\,\mathbf{R}(-\sigma\widetilde{w}(T) \leq \ln\frac{S(0)}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T) = \\
&= S(0)\,\mathbf{R}(-\frac{\widetilde{w}(T)}{\sqrt{T}} \leq \frac{\ln(S(0)/K) + \left(r + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}) = \\
&= S(0)\,\Phi\left(\frac{\ln(S(0)/K) + \left(r + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

Ebből következően

$$\begin{aligned}
\pi(H_T) = I_1 - I_2 = S(0)\,\Phi\left(\frac{\ln(S(0)/K) + \left(r + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \\
- \frac{K}{\exp(rT)}\Phi\left(\frac{\ln(S(0)/K) + \left(r - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

Ha

$$d_1 \triangleq \frac{\ln(S(0)/K) + \left(r + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 \triangleq \frac{\ln(S(0)/K) + \left(r - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

akkor

$$\pi(H_T) = S(0)\,\Phi(d_1) - \frac{K}{\exp(rT)}\Phi(d_2). \qquad \square$$

5.1.3. Néhány további egyszerű opció

5.3. Példa. Gallér opciók ára.

Gallér opciók esetén adottak a $0 < K_1 < K_2$ korlátok és

$$H_T \triangleq \min(\max(S(T), K_1), K_2),$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

vagyis a kifizetés $S(T)$ ha a T időpontban az ár a $K_1 < K_2$ sávban van, ellenkező esetben az éppen aktuális korlát, amelyet utoljára átlépett az ár. Könnyen látható, hogy

$$H_T = K_1 + (S(T) - K_1)^+ - (S(T) - K_2)^+ .$$

Ebből következően a gallér opció két azonos lejárati időponttal, de különböző kötési árral rendelkező call opció árának különbsége és a $K_1 \exp(-rT)$ összege. Az opció nem keverendő össze a korlátozott call opcióval, amely esetén a kifizetés

$$\begin{aligned} H_T &\triangleq \min(\max(S(T) - K_1, 0), K_2) = \\ &= \max(S(T) - K_1, 0) - \max(S(T) - (K_1 + K_2), 0) . \end{aligned}$$ □

5.4. Példa. Korlátozott határidős opció.

Jelölje F_T az S alaptermék T időpontban esedékes határidős árát, vagyis legyen

$$F_T \triangleq S(0) \exp(rT) .$$

Korlátozott határidős opció árán azt az X értéket értjük, amelyre a T időpontban esedékes

$$H_T \triangleq \max(S(T), F_T) - X$$

kifizetés $t = 0$ időpontban vett ára nulla. Könnyen látható, hogy

$$H_T \triangleq (S(T) - F_T)^+ + F_T - X.$$

Ebből

$$0 = \pi(H_T) = \exp(-rT) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} (S(T) - F_T)^+ + \exp(-rT)(F_T - X),$$

amiből

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} (S(T) - F_T)^+ + F_T = \\ &= \exp(rT) \left(\exp(-rT) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left((S(T) - F_T)^+ \right) + S(0) \right). \end{aligned}$$

Az $\exp(-rT) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} (S(T) - F_T)^+$ kifejezés éppen a $K = F_T \triangleq S(0) \exp(rT)$ kötési árhoz tartozó call opció ára, amely a Black–Scholes-formulával közvetlenül kiszámolható. □

5.5. Példa. Határidős kötési árfolyamos opció.

A határidős kötési árfolyamos opció esetén adott egy $T_0 < T$ időpont és

$$H_T \triangleq (S(T) - S(T_0))^+ .$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ilyenkor

$$\pi(H_T) = \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((S(T)-S(T_0))^+\right) =$$
$$= \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((S(T)-S(T_0))^+ \mid \mathcal{F}_{T_0}\right)\right) =$$
$$= \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S(T_0)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((S(T)/S(T_0)-1)^+ \mid \mathcal{F}_{T_0}\right)\right) =$$
$$= \exp(-rT_0)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big(S(T_0)\exp(-r(T-T_0))\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big((S(T)/S(T_0)-1)^+ \mid \mathcal{F}_{T_0}\Big)\Big).$$

Vegyük észre, hogy mivel

$$\frac{S(T)}{S(T_0)} = \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-T_0) + \sigma\left(\widehat{w}(T)-\widehat{w}(T_0)\right)\right),$$

és mivel a $\widehat{w}(T)-\widehat{w}(T_0)$ növekmény független az $\mathcal{F}_{T_0}$-tól, ezért a belső feltételes várható értékben a feltétel elhagyható, következésképpen a kifejezés éppen egy a $T-T_0$ időpontban lejáró $K=1$ kötési árhoz és $S(0)=1$ részvényárhoz tartozó call opció $C(1,T-T_0,1)$ módon jelölt ára. Mivel ez konstans, ezért

$$\pi(H_T) = \exp(-rT_0)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S(T_0)\right)\cdot C(1,T-T_0,1) =$$
$$= S(0)\cdot C(1,T-T_0,1) = C(S(0),T-T_0,S(0)),$$

amely érték a Black–Scholes-formulával már kiszámolható. □

5.6. Példa. A közönséges európai put opció ára.

Az európai put opció esetén a kifizetés

$$H_T = \max(0,K-S_T) = (K-S_T)^+,$$

ugyanis definíció szerint a put szerződés birtokosa eladhatja a terméket K áron a T időpontban.

$$(S_T-K)^+ - (K-S_T)^+ = S_T - K$$

ebből

$$\pi(H_T) = \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((K-S_T)^+\right) =$$
$$= \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((S_T-K)^+\right) - \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S_T-K) =$$
$$= \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((S_T-K)^+\right) - S(0) + K\exp(-rT).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

vagyis az árat visszavezettük két már kiszámított ár különbségére. Beírva a call opció árát

$$\begin{aligned}\pi(H_T) &= S(0)\,\Phi(d_1) - \frac{K}{\exp(rT)}\Phi(d_2) - S(0) + \frac{K}{\exp(rT)} = \\ &= S(0)\,(\Phi(d_1)-1) - \frac{K}{\exp(rT)}\,(\Phi(d_2)-1) = \\ &= \frac{K}{\exp(rT)}\Phi(-d_2) - S(0)\,\Phi(-d_1)\,. \end{aligned}$$

□

5.7. Példa. Black-formula, a Black-76 modell.

Legyenek adva a $T < T^0$ időpontok és legyen adva egy K kötési árfolyam, amelyre

$$H_T \triangleq (F(T) - K)^+\,,$$

ahol $F(T)$ az S-re vonatkozó a T^0 időpontban lejáró forward ügylet ára a T időpontban. Mivel $F(T) = S(T)\left(\exp\left(r\left(T^0 - T\right)\right)\right)$, ezért

$$H_T = \exp\left(r\left(T^0 - T\right)\right)\left(S(T) - K\exp\left(-r\left(T^0 - T\right)\right)\right)^+.$$

A közönséges call opcióra vonatkozó képlet alapján, felhasználva, hogy $F(0) = S(0)\exp\left(rT^0\right)$

$$\begin{aligned}\pi(H_T) &= \exp\left(r\left(T^0 - T\right)\right)\left(S(0)\,\Phi(d_1) - \frac{K\exp\left(-r\left(T^0 - T\right)\right)}{\exp(rT)}\Phi(d_2)\right) = \\ &= \exp(-rT)\,(F(0)\,\Phi(d_1) - K\Phi(d_2))\,,\end{aligned}$$

ahol d_1 és d_2 a call opcióknál megadott konstansok. Az előző példa alapján az analóg $H_T = (K - F(T))^+$ put opció ára

$$\pi(H_T) = \exp(-rT)\,(K\Phi(-d_2) - F(0)\,\Phi(-d_1))\,.$$

Vegyük észre, hogy a call és a put ára csak az $F(0)$-on keresztül függ a T^0 időponttól. □

5.8. Példa. Választható opció.

A választható opció esetén egy $T_0 < T$ időpontban az opció birtokosa választhat egy a közös T időpontban lejáró azonos K kötési árhoz tartozó put és call között. Ilyenkor

$$H_{T_0} = \exp(-r(T-T_0))\max\left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((S(T)-K)^+ \mid \mathcal{F}_{T_0}\right), \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((K-S(T))^+ \mid \mathcal{F}_{T_0}\right)\right).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az előző példa alapján

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left(K-S_T\right)^+ \mid \mathcal{F}_{T_0}\right) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left(S_T-K\right)^+ \mid \mathcal{F}_{T_0}\right) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(K - S\left(T\right) \mid \mathcal{F}_{T_0}\right) \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left(S_T-K\right)^+ \mid \mathcal{F}_{T_0}\right) + K - S\left(T_0\right)\exp\left(r\left(T-T_0\right)\right),\end{aligned}$$

ami behelyettesítve

$$\begin{aligned}H_{T_0} &= \exp\left(-r\left(T-T_0\right)\right)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left(S\left(T\right)-K\right)^+ \mid \mathcal{F}_{T_0}\right) + \\ &\quad + \left(K\exp\left(-r\left(T-T_0\right)\right) - S\left(T_0\right)\right)^+, \\ \pi\left(H_{T_0}\right) &= \exp\left(-rT\right)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left(S\left(T\right)-K\right)^+\right) + \\ &\quad + \exp\left(-rT_0\right)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left(K\exp\left(-r\left(T-T_0\right)\right) - S\left(T_0\right)\right)^+\right).\end{aligned}$$

vagyis a választható opció felírható egy alkalmas put és egy call opció árának összegeként. Az egyetlen dolog, amire ügyelni kell, hogy a call a T időszakra vonatkozik és a kötési ára K, a put a T_0 időszakra vonatkozik és a kötési ára $K\exp\left(-r\left(T-T_0\right)\right)$. A put és call árára vonatkozó már belátott képleteket beírva

$$\begin{aligned}\pi\left(H_{T_0}\right) &= S\left(0\right)\Phi\left(d_1\right) - \frac{K}{\exp\left(rT\right)}\Phi\left(d_2\right) + \\ &\quad + \frac{K\exp\left(-r\left(T-T_0\right)\right)}{\exp\left(rT_0\right)}\Phi\left(-\widetilde{d}_2\right) - S\left(0\right)\Phi\left(-\widetilde{d}_1\right) = \\ &= S\left(0\right)\left(\Phi\left(d_1\right) - \Phi\left(-\widetilde{d}_1\right)\right) - \frac{K}{\exp\left(rT\right)}\left(\Phi\left(d_2\right) - \Phi\left(-\widetilde{d}_2\right)\right),\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}\widetilde{d}_{12} &= \frac{\ln\left(S\left(0\right)/K\exp\left(-r\left(T-T_0\right)\right)\right) + \left(r \pm \sigma^2/2\right)T_0}{\sigma\sqrt{T_0}} = \\ &= \frac{\ln\left(S\left(0\right)/K\right) + r\left(T-T_0\right) + \left(r \pm \sigma^2/2\right)T_0}{\sigma\sqrt{T_0}} = \\ &= \frac{\ln\left(S\left(0\right)/K\right) + rT \pm \sigma^2 T_0/2}{\sigma\sqrt{T_0}}\end{aligned}$$

□

5.1.4. Összetett opciók árazása

5.9. Példa. Összetett opciók árazása.

Az összetett opciók olyan opciók, amelyek alapterméke maga is egy opció. Valójában négy alapeset lehetséges, attól függően, hogy call vagy put opciót

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

tekintünk egy call vagy put opcióra nézve. A négy eset kiszámolása nagyon hasonló, így példaként a call opciókra vonatkozó call opció árát számoljuk ki. Ilyenkor két $T_1 < T_2$ időpontunk van. A T_1 időpontban K_1 kötési áron megvehetjük a T_2 időpontban lejáró K_2 kötési árral rendelkező call opciót. Jelölje $c(S,T,K)$ az S árfolyam esetén a T idő múlva esedékes K kötési árfolyamhoz tartozó call opció árát. A Black–Scholes-formula éppen ezt az árat adja meg. Ekkor a keresett ár a T_1 időpontban esedékes

$$H_{T_1} \triangleq \max\left(0, c\left(S\left(T_1\right), T_2 - T_1, K_2\right) - K_1\right),$$

kifizetés $t = 0$ időpontban fizetendő értéke. Vagyis a T_1 időpontban az aktuális $S(T_1)$ ár alapján kiszámoljuk a K_2 kötési árhoz tartozó $T_2 - T_1$ idő múlva lejáró call opció árát, és ennek K_1 feletti értékét „lekaszáljuk". Mennyit kell ezért fizetni a $t = 0$ időpontban? Az ár kiszámolásához először ki kell számolni azt az S^0 szintet, ahol az összetett opció értékessé válik vagyis azt a S^0 értéket, amelyre

$$c\left(S^0, T_2 - T_1, K_2\right) = K_1.$$

A Black–Scholes-formula az S szigorúan növekedő függvénye, így az S^0 értéke numerikusan egyértelműen kiszámolható. Világos, hogy ha $S(T_1) > S^0$, akkor az összetett opció értéke pozitív, minden más esetben az opció értéke nulla. A T_2 időpontban esedékes call opció ára a T_1 időpontban a korábban látott (4.7) sor alapján

$$\exp\left(-r\left(T_2 - T_1\right)\right) \cdot \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left(S\left(T_2\right) - K_2\right)^+ \mid \mathcal{F}_{T_1}\right).$$

Ezt beírva a feltételes várható érték definíciójának felhasználásával

$$\begin{aligned}
&\pi\left(H_{T_1}\right) = \\
&= \exp\big(-rT_1\big)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big(\exp(-r(T_2-T_1))\big(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((S(T_2)-K_2)^+ \mid \mathcal{F}_{T_1}) - K_1\big)^+\big) = \\
&= \exp\left(-rT_1\right) \times \\
&\times \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big(\exp(-r(T_2-T_1))\big(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((S\left(T_2\right)-K_2)^+ \mid \mathcal{F}_{T_1}) - K_1\big)\chi(S(T_1) > S^0)\big) = \\
&= \exp\left(-rT_2\right)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S\left(T_2\right)\chi\left(S\left(T_2\right) > K_2, S\left(T_1\right) > S^0\right)\right) - \\
&\quad - \exp\left(-rT_2\right)K_2\mathbf{Q}\left(S\left(T_2\right) > K_2, S\left(T_1\right) > S^0\right) - \\
&\quad - \exp\left(-rT_1\right)K_1\mathbf{Q}\left(S\left(T_1\right) > S^0\right).
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ebből következően az összetett opció negatív lába, vagyis amit a T_1 időpontban fizetni kell az opció lehívásakor

$$\pi\left(H_{T_1}^1\right) = \exp\left(-rT_1\right) K_1 \mathbf{Q}\left(S\left(T_1\right) > S^0\right) =$$
$$= \exp\left(-rT_1\right) K_1 \mathbf{Q}\left(S\left(0\right) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_1 + \sigma \widehat{w}\left(T_1\right)\right) > S^0\right) =$$
$$= \exp\left(-rT_1\right) K_1 \mathbf{Q}\left(N\left(0{,}1\right) > \frac{\ln\left(S^0/S\left(0\right)\right) - \left(r - \sigma^2/2\right) T_1}{\sigma\sqrt{T}_1}\right) =$$
$$= \exp\left(-rT_1\right) K_1 \mathbf{Q}\left(-N\left(0{,}1\right) < \frac{\ln\left(S\left(0\right)/S^0\right) + \left(r - \sigma^2/2\right) T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}\right) =$$
$$= \exp\left(-rT_1\right) K_1 \Phi\left(\frac{\ln\left(S\left(0\right)/S^0\right) + \left(r - \sigma^2/2\right) T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}\right).$$

Mennyi lesz az ügylet pozitív lába? Ennek meghatározásához az S árfolyamot a T_1 és T_2 időpontokban kell figyelembe venni. A „belső" opció lehívásakor fizetendő összeg $K_2 \chi\left(S\left(T_2\right) > K_2\right)$, amit csak akkor kell megfizetni, ha a „külső" összetett opció is le lett hívva, vagyis ha egyúttal $S\left(T_2\right) > S^0$. Ebből következően a „külső" opció lehívásakor a „belső" opció negatív lába a T_1 időpontban

$$H_{T_1}^2 \triangleq \exp\left(-r\left(T_2 - T_1\right)\right) K_2 \chi\left(S\left(T_1\right) > S^0, S\left(T_2\right) > K_2\right),$$

amely $t = 0$ időpontban esedékes ára

$$\pi\left(H_{T_1}^2\right) = \exp\left(-rT_1\right) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_{T_1}^2\right) =$$
$$= \exp\left(-rT_2\right) K_2 \mathbf{Q}\left(S\left(T_1\right) > S^0, S\left(T_2\right) > K_2\right).$$

A valószínűség kiszámolásakor vegyük figyelembe, hogy a $\mathbf{Q}$ mérték alatt

$$S\left(t\right) = S\left(0\right) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma \widehat{w}\left(t\right)\right).$$

Így a valószínűség

$$\mathbf{Q}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_1 + \sigma\widehat{w}(T_1) > \ln\left(\frac{S^0}{S(0)}\right), \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T_2 + \sigma\widehat{w}(T_2) > \right.$$
$$\left. > \ln\left(\frac{K_2}{S(0)}\right)\right).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A $\widehat{w}(T_1)$ és a $\widehat{w}(T_2)$ együttes eloszlása normális a korrelációs együtthatója

$$\rho = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\widehat{w}(T_1)\,\widehat{w}(T_2)\right)}{\sqrt{T_1}\sqrt{T_2}} = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\widehat{w}(T_1)\left(\widehat{w}(T_1)+\widehat{w}(T_2)-\widehat{w}(T_1)\right)\right)}{\sqrt{T_1}\sqrt{T_2}} =$$
$$= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\widehat{w}(T_1)^2\right)}{\sqrt{T_1}\sqrt{T_2}} = \frac{T_1}{\sqrt{T_1}\sqrt{T_2}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

Ebből következően ha $\Phi_2(x,y,\rho)$ jelöli a kétdimenziós standard normális eloszlásfüggvényt, akkor

$$\pi\left(H^2_{T_1}\right) = \exp(-rT_2)\,K_2\times$$
$$\times\Phi_2\left(\frac{\ln\left(S(0)/S^0\right)+(r-\sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \frac{\ln\left(S(0)/K_2\right)+(r-\sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right).$$

Végezetül ki kell még számolni a

$$H^3_{T_1} \doteq \exp\left(-r\left(T_2-T_1\right)\right) S(T_2)\,\chi\left(S(T_1)>S^0, S(T_2)>K_2\right)$$

kifizetéshez tartozó

$$\pi\left(H^3_{T_1}\right) = \exp(-rT_1)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H^3_{T_1}\right) =$$
$$= \exp(-rT_2)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S(T_2)\,\chi\left(S(T_1)>S^0, S(T_2)>K_2\right)\right) =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}(T_2)\,\chi\left(S(T_1)>S^0, S(T_2)>K_2\right)\right)$$

várható értéket. A már bemutatott

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{R}} = \frac{S(0)}{\overline{S}(T_2)}$$

mértékcserével ez éppen

$$\pi\left(H^3_{T_1}\right) = S(0)\,\mathbf{R}\left(S(T_1)>S^0, S(T_2)>K_2\right).$$

ahol az $\mathbf{R}$ alatt

$$\overline{S}(t) = S(0)\exp\left(\sigma\widetilde{w}(t)+\frac{\sigma^2}{2}t\right),$$

ahol a $\widetilde{w}$ Wiener-folyamat az $\mathbf{R}$ mérték mellett. Ebből a már bemutatott módon

$$\pi\left(H^3_{T_1}\right) = S(0)\,\Phi_2\times$$
$$\times\left(\frac{\ln\left(S(0)/S^0\right)+(r+\sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \frac{\ln(S(0)/K_2)+(r+\sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right).$$

A call opcióra vonatkozó összetett call opció ára értelemszerűen a fenti három kifejezés összege. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

5.1.5. Csere opciók

5.10. Példa. Csere opciók, Magrabe-formula.

A csere opciók esetén adott két termék S_1 és S_2 és

$$H_T \triangleq (S_1(T) - S_2(T))^+.$$

Vagyis a csere opció olyan opció, ahol a kötési ár nem egy rögzített konstans, hanem maga is egy sztochasztikus folyamat. A csere opciók árazási formulájának felírásához tegyük fel, hogy a $\mathbf{Q}$ kockázatsemleges mérték alatt a két termék árfolyamának egyenlete

$$\frac{dS_1}{S_1} = (r - \delta_1)\,dt + \sigma_1 dw_1,$$
$$\frac{dS_2}{S_2} = (r - \delta_2)\,dt + \sigma_2 dw_2,$$

ahol a trend tagok felírásakor a két részvény δ_1 és δ_2 osztalékfolyamát is figyelembe vettük. Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy általában a részvényárfolyamok tárgyalásakor eltekintünk az osztalékoktól. Most azonban kockázatmentes áron az osztalékkal növelt diszkontált árfolyamhoz tartozó martingálmértékről van szó. Jelölje továbbá a két Wiener-folyamat korrelációs együtthatóját ρ. Az általános árazási elv alapján

$$\pi(H_T) = \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((S_1(T) - S_2(T))^+\right) =$$
$$= \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S_2(T)\left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} - 1\right)^+\right) \triangleq$$
$$\triangleq \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S_2(T)\,(X(T) - 1)^+\right),$$

ahol értelemszerűen X jelöli az S_1/S_2 hányados folyamatot. Az X valójában az S_1 értéke az S_2 ármércére nézve. Vezessük be a

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}} = \exp\left(\sigma_2 w_2(T) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 T\right) = \exp(-(r - \delta_2)\,T)\,\frac{S_2(T)}{S_2(0)}$$

új mértéket. Vegyük észre, hogy az S_2 nem martingál, ezért az új ármércére való áttérés előtt az $\exp(-(r - \delta_2)\,t)$ faktorral szorozva martingállá kell tenni. Ekkor

$$\pi(H_T) = \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(S_2(T)\,(X(T) - 1)^+\,\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{R}}\right) =$$
$$= S_2(0)\exp(-\delta_2 T)\,\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left((X(T) - 1)^+\right).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ez a képlet már emlékeztet a call opció árát megadó formulára.

Mi lesz az X egyenlete az $\mathbf{R}$ mérték alatt? A Girszanov-tétel alapján tetszőleges M lokális martingál esetén az $\widehat{M} \stackrel{\circ}{=} M - [M, L]$ lokális martingál az új mérték alatt. Ezt alkalmazva az $L \stackrel{\circ}{=} \sigma_2 w_2$, $M = w_2$ szereposztásban az $\mathbf{R}$ alatt a

$$\widehat{w}_2(t) = w_2(t) - \sigma_2 t$$

egy Wiener-folyamat. Ha $M = w_1$, akkor pedig a[1]

$$\widehat{w}_1(t) = w_1(t) - [w_1, \sigma_2 w_2] = w_1(t) - \sigma_2 [w_1, w_2] = w_1(t) - \sigma_2 \rho t$$

szintén Wiener-folyamat az $\mathbf{R}$ alatt. Nyilvánvaló módon a $\widehat{w}_1$ és a $\widehat{w}_2$ korrelációs együtthatója továbbra is ρ. Vezessük be a

$$\sigma \stackrel{\circ}{=} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho}$$

konstanst és legyen

$$w(t) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{\sigma}\left(\sigma_1 \widehat{w}_1(t) - \sigma_2 \widehat{w}_2(t)\right),$$

A w lokális martingál az $\mathbf{R}$ alatt, és a Lévy-féle karakterizációs tételből evidens, hogy a w Wiener-folyamat az $\mathbf{R}$ alatt.

$$\begin{aligned}
X(t) &= \frac{S_1(0)\exp\left(\left(r - \delta_1 - \sigma_1^2/2\right)t + \sigma_1 w_1(t)\right)}{S_2(0)\exp\left(\left(r - \delta_2 - \sigma_2^2/2\right)t + \sigma_2 w_2(t)\right)} = \\
&= \frac{S_1(0)}{S_2(0)}\exp\left(\left(\delta_2 - \delta_1 - \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right)\right)t + \sigma_1 w_1(t) - \sigma_2 w_2(t)\right) = \\
&= \frac{S_1(0)}{S_2(0)}\exp\left(\left(\delta_2 - \delta_1 - \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma^2 + \sigma^2\right)\right)t + \sigma_1 w_1(t) - \sigma_2 w_2(t)\right) = \\
&= \frac{S_1(0)}{S_2(0)}\exp\left(\left(\delta_2 - \delta_1 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma_1 w_1(t) - \sigma_2 w_2(t)\right) = \\
&= \frac{S_1(0)}{S_2(0)}\exp\left(\left(\delta_2 - \delta_1 - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma_1 \widehat{w}_1(t) - \sigma_2 \widehat{w}_2(t)\right) = \\
&= \frac{S_1(0)}{S_2(0)}\exp\left(\left(\delta_2 - \delta_1 - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma w(t)\right).
\end{aligned}$$

Következésképpen az Itô-formula már sokszor bemutatott alkalmazásával

$$\frac{dX}{X} = (\delta_2 - \delta_1)\,dt + \sigma dw.$$

[1] V.ö.: 3.34. példa, 93. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Mivel a w Wiener-folyamat az $\mathbf{R}$ alatt, ezért ha az X folyamatot diszkontáljuk a $\delta_2 - \delta_1$ kamatlábhoz tartozó kötvénnyel, akkor martingált kapunk az $\mathbf{R}$ alatt. Ezt a $\pi(H_T)$ korábbi képletébe beírva

$$\begin{aligned}\pi(H_T) &= S_2(0)\exp(-\delta_2 T)\,\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left((X(T)-1)^+\right) = \\ &= S_2(0)\exp(-\delta_1 T)\exp(-(\delta_2-\delta_1)T)\,\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left((X(T)-1)^+\right) = \\ &= S_2(0)\exp(-\delta_1 T)\cdot C(\delta_2-\delta_1,\sigma,1),\end{aligned}$$

ahol a C a megfelelő paraméterekkel rendelkező call opció ára. A Black–Scholes-formula alapján

$$C(\delta_2-\delta_1,\sigma,1) = \frac{S_1(0)}{S_2(0)}\Phi(d_1) - \exp((\delta_1-\delta_2)T)\,\Phi(d_2)$$

ahol

$$\begin{aligned}d_1 &\triangleq \frac{\ln S_1(0)/S_2(0) + \left(\delta_2-\delta_1+\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},\\ d_2 &\triangleq \frac{\ln S_1(0)/S_2(0) + \left(\delta_2-\delta_1-\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\end{aligned}$$

vagyis

$$\pi(H_T) = S_1(0)\exp(-\delta_1 T)\,\Phi(d_1) - S_2(0)\exp(-\delta_2 T)\,\Phi(d_2). \tag{5.1}$$

A formula egy szokásos elnevezése Magrabe-formula. □

5.1.6. Quanto termékek

5.11. Példa. Quanto opciók.

A quanto termékek esetén az alapterméket valamilyen fizetőeszközben tartják nyilván, de az elszámolást egy másik fizetőeszközben végzik oly módon, hogy csak a mennyiségeket veszik figyelembe. A quanto elnevezés a „quantity adjusting option" kifejezés rövidítése. Ebben az alpontban a

$$H_T \triangleq X(T)\cdot(S(T)-K)^+$$

kifizetéshez tartozó quanto termék árát fogjuk meghatározni, ahol $X(T)$ a megfelelő devizaárfolyam. Vagyis a T időpontban esedékes elszámoláskor a hazai fizetőeszközben esedékes $(S(T)-K)^+$ helyett ugyan ennyi mennyiségű külföldi fizetőeszközt adnak, amely értéke hazai fizetőeszközben nyilván éppen a H_T. Vegyük észre, hogy a quanto ára tekinthető egyszerű csere opciónak, ahol a felcserélendő termékek hazai fizetőeszközben kifejezett ára $X\cdot S$,

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

illetve $K \cdot X$. Az alapterméket leíró S folyamatra a $\mathbf{Q}$ mérték alatt érvényes a

$$\frac{dS}{S} = (r_1 - \delta)\, dt + \sigma_1 dw_1$$

egyenlet, ahol r_1 a kockázatmentes kamatláb, δ pedig a folytonosított osztalékfizetési ráta. Ugyanakkor legyen adott egy X hazai fizetőeszközben kifejezett devizaárfolyam, amely egyenlete a $\mathbf{Q}$ alatt legyen

$$\frac{dX}{X} = \mu dt + \sigma_2 dw_2, \quad X(t) = X(0) \exp\left(\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right) t + \sigma_2 w_2(t)\right)\right)$$

alakú. Legyen továbbá r_2 a külföldi kockázatmentes kamatláb. Egységnyi külföldi bankbetét értéke a t időpontban $\exp(r_2 t)$. Ez hazai fizetőeszközben kifejezve

$$X(t) \exp(r_2 t) = X(0) \exp\left(\left(\left(\mu + r_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right) t + \sigma_2 w(t)\right)\right).$$

Ha feltesszük, hogy ez a hazai piacon egy kereskedett termék, akkor az

$$\exp(-r_1 t)\, X(t) \exp(r_2 t) = X(0) \exp\left(\left(\left(\mu + r_2 - r_1 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right) t + \sigma_2 w(t)\right)\right)$$

diszkontált érték martingál a $\mathbf{Q}$ mérték alatt. De ez csak úgy lehetséges, ha $\mu = r_1 - r_2$, vagyis a $\mathbf{Q}$ alatt

$$\frac{dX}{X} = (r_1 - r_2)\, dt + \sigma_2 dw_2.$$

Az egyenlet szerint ha a hazai kockázatmentes kamatláb nagyobb, mint a külföldi, akkor a $\mathbf{Q}$ mérték alatt a hazai fizetőeszköz árfolyama átlagban emelkedik, mégpedig $(r_1 - r_2)\, dt$ ütemben, vagyis a hazai fizetőeszköz értéktelenedik, ugyanis a hazai befektetés kockázatosabb, mint a külföldi. A w_1 és a w_2 Wiener-folyamatok közötti korrelációs együtthatót jelölje ρ. Számoljuk ki az $Y \triangleq XS$ szorzatot.

$$\begin{aligned}
&Y(t) \triangleq (XS)(t) = \\
&= X(0)S(0) \exp\left(\left(r_1 - r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)t + \sigma_2 w_2(t) + \left(r_1 - \delta - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)t + \sigma_1 w_1(t)\right) = \\
&= X(0)\, S(0) \exp\left(\left(2r_1 - r_2 - \delta + \sigma_1\sigma_2\rho - \frac{\sigma_3^2}{2}\right) t + \sigma_3 w_3(t)\right),
\end{aligned}$$

ahol

$$\sigma_3 \triangleq \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2},$$
$$w_3(t) \triangleq \frac{\sigma_1 w_1(t) + \sigma_2 w_2(t)}{\sigma_3}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A w_3 és a w_2 korrelációs együtthatója

$$\widehat{\rho} \triangleq \frac{\sigma_1\rho + \sigma_2}{\sigma_3}.$$

Ennek megfelelően

$$\frac{dY}{Y} = (2r_1 - r_2 - \delta + \sigma_1\sigma_2\rho)\,dt + \sigma_3 dw_3.$$

Ha bevezetjük az $S_1 \triangleq Y$ és $S_2 \triangleq KX$ jelöléseket akkor az előző példában levezetett (5.1) árképlet

$$S_1(0) = X(0)\,S(0), \quad S_2(0) = X(0)\,K.$$
$$r = r_1, \quad \delta_1 = r_2 - r_1 + \delta - \rho\sigma_1\sigma_2, \quad \delta_2 = r_2,$$

illetve

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\sigma_3^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_3\sigma_2\widehat{\rho}} = \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_2(\sigma_1\rho + \sigma_2)} = \\ &= \sqrt{\sigma_1^2} = \sigma_1\end{aligned}$$

jelölésekkel közvetlenül alkalmazható. □

5.12. Példa. Határidős quanto ügylet.

A határidős quanto ügylet értéke az a K, amelyre a

$$H_T \triangleq X(T)\,(S(T) - K)$$

jelenlegi

$$\pi(H_T) = \exp(-r_1 T)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(X(T)\,(S(T) - K))$$

ára nulla. Mivel az exponenciális függvény sohasem lehet nulla, ezért

$$K = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(X(T)\,S(T))}{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(X(T))},$$

ahol a $\mathbf{Q}$ mérték alatt

$$\frac{dS}{S} = (r_1 - \delta)\,dt + \sigma_1 dw_1,$$
$$\frac{dX}{X} = (r_1 - r_2)\,dt + \sigma_2 dw_2$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

és a w_1 és a w_2 közötti korrelációs együttható ρ.

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(X\left(T\right)\right) = X\left(0\right)\exp\left(\left(r_1 - r_2\right)T\right).$$

Számoljuk ki az XS szorzatot.

$$\begin{aligned}
\left(XS\right)\left(T\right) &= X(0)S(0)\exp\left(\left(r_1 - \delta - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T + \sigma_1 w_1\left(T\right) + \right. \\
&\qquad \left. + \left(r_1 - r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T + \sigma_2 w_2\left(T\right)\right) = \\
&= X\left(0\right)S\left(0\right)\exp\left(\left(2r_1 - r_2 - \delta - \frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2}\right)T + \sigma_1 w_1\left(T\right) + \sigma_2 w_2\left(T\right)\right) \stackrel{\circ}{=} \\
&\stackrel{\circ}{=} X\left(0\right)S\left(0\right)\exp\left(\left(2r_1 - r_2 - \delta + \rho\sigma_1\sigma_2 - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma w\left(T\right)\right),
\end{aligned}$$

ahol ismételten

$$\sigma \stackrel{\circ}{=} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2},$$
$$w\left(T\right) \stackrel{\circ}{=} \frac{\sigma_1 w_1\left(T\right) + \sigma_2 w_2\left(T\right)}{\sigma}.$$

A Lévy-féle karakterizációs tétellel azonnal látható, hogy a w Wiener-folyamat, így

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left(XS\right)\left(T\right)\right) = X\left(0\right)S\left(0\right)\exp\left(\left(2r_1 - r_2 - \delta + \rho\sigma_1\sigma_2\right)T\right),$$

amiből

$$K = \frac{\exp\left(\left(2r_1 - r_2 - \delta + \rho\sigma_1\sigma_2\right)T\right)}{\exp\left(\left(r_1 - r_2\right)T\right)} = S\left(0\right)\exp\left(\left(r_1 - \delta + \rho\sigma_1\sigma_2\right)T\right). \quad \square$$

5.2. Útfüggő opciók

Az útfüggő opciók olyan származtatott termékek, amelyek ára nem csak az alaptermékek egy-egy pontban megfigyelt értékétől függ, hanem attól is, hogy miként jutottunk el a lehíváskor érvényes állapotba.

5.2.1. A tükrözési elv és a maximumfolyamatok eloszlása

A sztochasztikus folyamatok elméletében megjelenő objektumok eloszlása a legritkább esetben adható meg egyszerű zárt formulával. Éppen ezért rendkívül fontosak azok az eloszlások, amelyek konkrét alakját ismerjük. Az alábbi formulákat a barrier és a visszatekintő opciók árazási képleteinél fogjuk használni.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

5.13. Definíció. Legyen w Wiener-folyamat. A továbbiakban legyen

$$w^*(t) \triangleq \sup\{w(s) \mid 0 \le s \le t\} = \max\{w(s) \mid 0 \le s \le t\}.$$

A w^* folyamatot a w maximumfolyamatának mondjuk. Általában, ha X tetszőleges sztochasztikus folyamat, akkor

$$X^*(t) \triangleq \sup\{X(s) \mid 0 \le s \le t\}$$

jelöli az X maximumfolyamatát. Hasonlóan definiálható az

$$X_*(t) \triangleq \inf\{X(s) \mid 0 \le s \le t\}$$

minimumfolyamat.

5.14. Lemma. *Ha w^* jelöli a w Wiener-folyamat maximumfolyamatát, akkor a $(w(t), w^*(t))$ pár eloszlása az $y \ge 0, x \le y$ tartományon*

$$\mathbf{P}(w(t) \le x, w^*(t) \ge y) = 1 - \Phi\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right), \quad \textit{ha} \quad y \ge 0, x \le y.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(w(t) \le x, w^*(t) \le y) &= \mathbf{P}(w(t) \le x) - \mathbf{P}(w(t) \le x, w^*(t) \ge y) = \\ &= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right), \quad \textit{ha} \quad y \ge 0, x \le y.\end{aligned}$$

A (w, w^*) együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye az $y > 0, x < y$ tartományon

$$\begin{aligned}f_t(x,y) &\triangleq \frac{2(2y-x)}{t^{3/2}}\varphi\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2y-x}{t^{3/2}}\exp\left(-\frac{(2y-x)^2}{2t}\right), \quad \textit{ha } y > 0, x < y.\end{aligned}$$

Bizonyítás. Rögzítsük az $y \ge 0$ értéket és vezessük be a

$$\tau_y \triangleq \inf(t \mid w(t) = y)$$

időpontban „tükrözött”

$$\widehat{w}(t,\omega) \triangleq \begin{cases} w(t,\omega), & \text{ha } t \le \tau_y(\omega) \\ 2y - w(t,\omega), & \text{ha } t \ge \tau_y(\omega) \end{cases}$$

folyamatot. A tükrözési elv miatt miatt a $\widehat{w}$ szintén Wiener-folyamat. Ebből következően, ha $x \le y$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(w(t) \le x, w^*(t) \ge y) &= \mathbf{P}(w(t) \le x, \tau_y \le t) = \\ &= \mathbf{P}(2y - w(t) \ge 2y - x, \tau_y \le t) = \\ &= \mathbf{P}(\widehat{w}(t) \ge 2y - x, \tau_y \le t).\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A $\widehat{w}$ Wiener-folyamat, továbbá a τ_y evidens módon azonos a w és a $\widehat{w}$ folyamatokra, ugyanis a $\widehat{w}$ éppen a τ_y időpontban tükrözött Wiener-folyamat. Ezért, a τ_y helyébe is $\widehat{\tau}_y$ írható, ahol értelemszerűen a $\widehat{\tau}_y$ jelöli a $\widehat{w}$ y-hoz tartozó első elérési idejét. Mivel $y - x \geq 0$ ezért

$$\{\widehat{w}(t) \geq 2y - x\} \subseteq \{\widehat{w}(t) \geq y\} \subseteq \left\{(\widehat{w})^*(t) \geq y\right\} = \{\widehat{\tau}_y \leq t\},$$

következésképpen

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(w(t) \leq x, w^*(t) \geq y) &= \mathbf{P}(\widehat{w}(t) \geq 2y - x, \widehat{\tau}_y \leq t) = \\ &= \mathbf{P}(\widehat{w}(t) \geq 2y - x) = 1 - \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right).\end{aligned}$$

Számoljuk ki a sűrűségfüggvényt:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(w(t) \leq x, w^*(t) \leq y) &= \mathbf{P}(w(t) \leq x) - \mathbf{P}(w(t) \leq x, w^*(t) \geq y) = \\ &= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right).\end{aligned}$$

Ezt kell deriválni y majd x szerint. Az első két tag y deriváltja nulla

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(2y - x)^2}{2t}\right).$$

Most ezt deriváljuk x szerint

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(2y - x)^2}{2t}\right) &= \frac{2 \cdot 2 \cdot (2y - x)}{2t\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(2y - x)^2}{2t}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(2y - x)}{t^{3/2}}\exp\left(-\frac{(2y - x)^2}{2t}\right). \quad \square\end{aligned}$$

5.15. Példa. Számoljuk ki a $w^*(t)$ eloszlását és várható értékét.

Legyen $y \geq 0$, $x \leq y$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(w(t) \leq x, w^*(t) \leq y) &= \mathbf{P}(w(t) \leq x) - \mathbf{P}(w(t) \leq x, w^*(t) \geq y) \\ &= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2y - x}{\sqrt{t}}\right).\end{aligned} \tag{5.2}$$

$x = y$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(w^*(t) \leq y) &= \mathbf{P}(w(t) \leq y, w^*(t) \leq y) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - 1.\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A sűrűségfüggvény

$$f_t(y) = \frac{2}{\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right), \quad y \geq 0.$$

A várható érték

$$\frac{2}{\sqrt{t}}\int_0^\infty y\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty y\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)dy = \\ = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{y^2}{t}\right)\sqrt{t}\right]_0^\infty = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}.$$

A későbbiek szempontjából hasznos a következő:

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(w^*(t)\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty \exp(y)\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)dy = \\ = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2-2yt}{2t}\right)dy = \\ = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{(y-t)^2-t^2}{2t}\right)dy = \\ = 2\exp\left(\frac{t^2}{2t}\right)\mathbf{P}\left(N\left(t,\sqrt{t}\right)>0\right) = 2\exp\left(\frac{t}{2}\right)\Phi\left(\sqrt{t}\right). \tag{5.3}$$

□

Felmerül a kérdés, hogy mit lehet mondani az $x \geq y$ esetben. Mivel

$$\mathbf{P}\left(w(t) \leq x, w^*(t) \geq y\right) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}\left(B^c \cap C\right) \stackrel{\circ}{=} \\ \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}\left(w^*(t) \geq y\right) - \mathbf{P}\left(w(t) > x, w^*(t) \geq y\right) = \\ = \mathbf{P}\left(w^*(t) \geq y\right) - \mathbf{P}\left(w(t) > x\right),$$

ugyanis mivel $x \geq y$, ezért

$$\{w(t) > x\} \subseteq \{w^*(t) \geq x\} \subseteq \{w^*(t) \geq y\}.$$

Nyilvánvaló módon

$$\mathbf{P}\left(w(t) > x\right) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

és

$$\mathbf{P}\left(w^*(t) \geq y\right) = 1 - \mathbf{P}\left(w^*(t) \leq y\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\right).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

5.16. Lemma. *Ha $x \geq y$, akkor*

$$F_t(x,y) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}(w(t) \leq x, w^*(t) \geq y) =$$
$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right) =$$
$$= 1 - 2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_t(x,y) = 0,$$

így ilyenkor a kétváltozós eloszlásnak nincsen kétváltozós sűrűségfüggvénye.

Most térjünk rá a trenddel rendelkező Wiener-folyamatokra.

5.17. Lemma. *Legyen $X(t) \stackrel{\circ}{=} w(t) + \mu t$ egy μt alakú trenddel rendelkező Wiener-folyamat. Jelölje X^* az X maximumfolyamatát. Ha $y \geq 0, x \leq y$, akkor az $(X(t), X^*(t))$ együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye*

$$f_t(x,y) = \frac{2(2y-x)}{t\sqrt{t}} \varphi\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) \exp\left(\mu x - \frac{1}{2}\mu^2 t\right).$$

Az eloszlásfüggvény

$$\mathbf{P}(X(t) < x, X^*(t) < y) = \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - \exp(2\mu y)\,\Phi\left(\frac{x-2y-\mu t}{\sqrt{t}}\right).$$

Bizonyítás. Vezessük be a

$$\Lambda(t) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(-\mu w(t) - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)$$

martingált. Az

$$\mathbf{R}(A) \stackrel{\circ}{=} \int_A \Lambda(T)\, d\mathbf{P}$$

mérték – amely a $(-\mu)$-hez tartozó Girszanov-transzformált – mellett az X Wiener-folyamat. Ha $-\infty \leq x \leq y$, akkor legyen

$$A = \{X(t) < x, X^*(t) < y\}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ilyenkor az X képletét beírva

$$\begin{aligned} F(x,y) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}(A) = \mathbf{E}(\chi_A) = \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\chi_A \Lambda^{-1}(t)\right) = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\chi_A \exp\left(\mu w(t) + \frac{1}{2}\mu^2 t\right)\right) = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\chi_A \exp\left(\mu\left(X(t) - \mu t\right) + \frac{1}{2}\mu^2 t\right)\right) = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\chi_A \exp\left(\mu X(t) - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)\right). \end{aligned}$$

Ha g a Wiener-folyamat és a maximumának együttes eloszlásnak sűrűségfüggvénye, akkor felhasználva, hogy

$$\varphi(u) \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right),$$

az $\int u'(x) \exp(u(x))\, dx = \exp(u(x))$ integrálási szabálya alapján

$$\begin{aligned} \int_0^y g(x,u)\, du = \int_0^y \frac{2}{t}\frac{(2u-x)}{\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{2u-x}{\sqrt{t}}\right) du = \\ = \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Az $\mathbf{R}$ alatt az X Wiener-folyamat, így

$$\begin{aligned} F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_0^y \exp\left(\mu z - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) g(z,u)\, du dz = \\ = \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\mu z - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) \int_0^y g(z,u)\, du dz = \\ = \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\mu z - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\varphi\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) - \varphi\left(\frac{z-2y}{\sqrt{t}}\right)\right) dz = \\ = \int_{-\infty}^{0} \exp\left(\mu(z+x) - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\varphi\left(\frac{x+z}{\sqrt{t}}\right) - \varphi\left(\frac{x-2y+z}{\sqrt{t}}\right)\right) dz = \\ = \exp\left(\mu x - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)\left(\Psi(x) - \Psi(x-2y)\right), \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ahol

$$\begin{aligned}\Psi(u) &\stackrel{\circ}{=} \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{0}\exp(\mu z)\,\varphi\left(\frac{u+z}{\sqrt{t}}\right)dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left(\mu z-\frac{(u+z)^2}{2t}\right)dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\mu u)\int_{-\infty}^{0}\exp\left(\mu(z+u)-\frac{(u+z)^2}{2t}\right)dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\mu u)\int_{-\infty}^{0}\exp\left(-\frac{(u+z)^2-2t\mu(z+u)}{2t}\right)dz \\ &= \exp\left(-\mu u+\frac{1}{2}\mu^2 t\right)\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{u+z-\mu t}{\sqrt{t}}\right)dz = \\ &= \exp\left(-\mu u+\frac{1}{2}\mu^2 t\right)\Phi\left(\frac{u-\mu t}{\sqrt{t}}\right).\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve

$$F_t(x,y) = \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sqrt{t}}\right) - \exp(2\mu y)\,\Phi\left(\frac{x-2y-\mu t}{\sqrt{t}}\right).$$

Deriválva x és y szerint kapjuk az együttes sűrűségfüggvényt

$$f_t(x,y) = \frac{2(2y-x)}{t\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right)\exp\left(\mu x-\frac{1}{2}\mu^2 t\right). \qquad \square$$

5.18. Példa. Vizsgáljuk meg a $\mu = 0$ esetet.

Ha $\mu = 0$, akkor

$$\begin{aligned}P(X(t)<x, X^*(t)<y) &= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-2y}{\sqrt{t}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \mathbf{P}\left(N(0,1) < \frac{x-2y}{\sqrt{t}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \mathbf{P}\left(N(0,1) > \frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}\right),\end{aligned}$$

ami ugyanaz, mint a már belátott (5.2) képlet. $\square$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

5.19. Állítás. *Legyen* $X(t) \stackrel{\circ}{=} \mu t + \sigma w(t)$, *ahol* μ *tetszőleges* $\sigma > 0$. *Ilyenkor az* (X, X^*) *együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye*

$$f_t(x,y) = \frac{2(2y-x)}{\sigma t\sqrt{t}}\varphi\left(\frac{2y-x}{\sigma\sqrt{t}}\right)\exp\left(\left(\mu x - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)\sigma^{-2}\right).$$

Az eloszlásfüggvény

$$\mathbf{P}(X(t) < x, X^*(t) < y) = \tag{5.4}$$
$$= \Phi\left(\frac{x-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \exp\left(2\frac{\mu y}{\sigma^2}\right)\Phi\left(\frac{x-2y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

feltéve, hogy $y \geq 0, x \leq y$.

Bizonyítás. Elegendő az

$$\widetilde{X}(t) \stackrel{\circ}{=} \frac{\mu}{\sigma}t + w(t)$$

folyamatra alkalmazni az előző formulát és mindenhol az eloszlásfüggvényben a μ az x és az y helyébe μ/σ-át, x/σ-át és y/σ-át írni, ugyanis

$$\mathbf{P}(X(t) < x, X^*(t) < y) = \mathbf{P}\left(\widetilde{X}(t) < \frac{x}{\sigma}, \widetilde{X}^*(t) < \frac{y}{\sigma}\right). \qquad \square$$

5.20. Következmény. *Legyen* $X(t) \stackrel{\circ}{=} \mu t + \sigma w(t)$, *ahol* μ *tetszőleges és* $\sigma > 0$. *Ha* $y \leq 0$ *és* $y \leq x$, *akkor*

$$\mathbf{P}(X(t) \geq x, X_*(t) \geq y) = \tag{5.5}$$
$$= \Phi\left(\frac{-x+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \exp\left(2\frac{\mu y}{\sigma^2}\right)\Phi\left(\frac{-x+2y+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right).$$

Bizonyítás.

$$\mathbf{P}(X(t) \geq x, X_*(t) \geq y) = \mathbf{P}(-X(t) \leq -x, -X_*(t) \leq -y) =$$
$$= \mathbf{P}\left(-X(t) \leq -x, (-X)^*(t) \leq -y\right).$$

Vegyük észre, hogy a Wiener-folyamat szimmetriája miatt

$$-X(t) = -\mu t - \sigma w(t) = -\mu t + \sigma\widetilde{w}(t)$$

alakú, így az előző (5.4) formula használható. $\square$

5.21. Következmény. *Legyen* $X(t) \stackrel{\circ}{=} \mu t + \sigma w(t)$, *ahol* μ *tetszőleges és* $\sigma > 0$. *Ha* $y \geq 0$, *akkor*

$$\mathbf{P}(X^*(t) < y) = \Phi\left(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \exp\left(2\frac{\mu y}{\sigma^2}\right)\Phi\left(\frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right). \tag{5.6}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Elegendő a fenti (5.4) képletbe $x = y$ értéket tenni és felhasználni, hogy

$$\mathbf{P}\left(X^*(t) < y\right) = \mathbf{P}\left(X(t) < y, X^*(t) < y\right). \qquad \square$$

5.22. Következmény. *Legyen* $X(t) \stackrel{\circ}{=} \mu t + \sigma w(t)$, *ahol* μ *tetszőleges és* $\sigma > 0$. *Ha* $y \leq 0$, *akkor*

$$\mathbf{P}\left(X_*(t) \geq y\right) = \Phi\left(\frac{-y+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \exp\left(2\frac{\mu y}{\sigma^2}\right)\Phi\left(\frac{y+\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right). \tag{5.7}$$

Bizonyítás. Elegendő a fenti (5.5) képletbe $x = y$ értéket tenni és felhasználni, hogy

$$\mathbf{P}\left(X_*(t) \geq y\right) = \mathbf{P}\left(X(t) \geq y, X_*(t) \geq y\right). \qquad \square$$

5.2.2. Barrier opciók

A barrier opciók annyiban különböznek a közönséges opcióktól, hogy az értékük megváltozik, ha az alaptermék ára egy bizonyos szintet elér. A továbbiakban feltesszük, hogy az (S, R) egy Black–Scholes-modell, vagyis a modellben a μ, a σ és az r paraméterek konstansok.

5.23. Példa. Legyen H_T a K kötési árhoz tartozó olyan európai call opció, amely értékét veszti, ha az árfolyam a $[0,T]$ szakaszon a H szint alá esik. Ekkor

$$\begin{aligned}\pi(H_T) &= \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S(T)-K\right)^+\chi\left(S_*(T)\geq H\right) = \\ &= S(0)\left(\Phi(d_5) - \left(\frac{H}{S(0)}\right)^{1+2r/\sigma^2}\Phi(d_6)\right) - \\ &\quad - \exp(-rT)\,K\left(\Phi(d_3) - \left(\frac{H}{S(0)}\right)^{2r/\sigma^2-1}\Phi(d_4)\right),\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}d_3 &\stackrel{\circ}{=} \frac{\ln\frac{S(0)}{K} + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{-\ln\frac{K}{S(0)} + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},\\ d_4 &\stackrel{\circ}{=} \frac{\ln\frac{H^2}{S(0)K} + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},\\ d_5 &\stackrel{\circ}{=} \frac{\ln\frac{S(0)}{K} + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{-\ln\frac{K}{S(0)} + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},\\ d_6 &\stackrel{\circ}{=} \frac{\ln\frac{H^2}{KS(0)} + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A kifizetés

$$H_T = (S(T) - K)^+ \chi(S_*(T) \geq H)$$

ahol $S_*(T)$ jelöli az ár minimumát a $[0,T]$ szakaszon. Az általános árazási képlet ismételten alkalmazható, ugyanis egy alulról korlátos, $\mathcal{F}_T$-mérhető és $\mathbf{Q}$-integrálható kifizetésről van szó:

$$\pi(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}_T\right) = \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((S(T) - K)^+ \chi(S_*(T) \geq H)\right).$$

Ahhoz, hogy a várható értéket ki tudjuk számolni, szükségünk van az (S, S_*) pár együttes eloszlására.

5.24. Lemma. *Ha S_* jelöli az S minimum folyamatát, akkor*

$$\mathbf{Q}(S(T) \geq K, S_*(T) \geq H) = \Phi(d_3) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{2r/\sigma^2 - 1} \Phi(d_4).$$

Bizonyítás. A $\mathbf{Q}$ mérték alatt

$$\begin{aligned} S(T) &= S(0) \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\widetilde{w}(T)\right) \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} S(0) \exp(X(T)), \end{aligned}$$

ahol a $\widetilde{w}$ Wiener-folyamat a $\mathbf{Q}$ alatt. Ebből a keresett valószínűség

$$\mathbf{Q}\left(X(T) \geq \ln\frac{K}{S(0)}, X_*(T) \geq \ln\frac{H}{S(0)}\right).$$

Így elegendő a már belátott (5.5) képlet alkalmazni

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}, x = \ln\frac{K}{S(0)}, y = \ln\frac{H}{S(0)}$$

paraméterek mellett. Vegyük észre, hogy $H \leq S(0)$ értelemszerűen teljesül, ugyanis ellenkező esetben az opció ára mindig nulla. Ugyancsak érvényes a $K \geq H$, hiszen a $K < H$ eset értelmetlen. Így $y \leq 0, x \geq y$, tehát a formula használható. A kívánt képletet egyszerű behelyettesítéssel kapjuk. □

5.25. Lemma. *Legyen (S, R) egy Black–Scholes-modell. Ekkor*

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S(T)\chi(S(T) \geq K, S_*(T) \geq H)) = \\ &= S_0 \exp(rT)\left(\Phi(d_5) - \left(\frac{H}{S_0}\right)^{1+2r/\sigma^2} \Phi(d_6)\right). \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A $\mathbf{Q}$ mérték alatt

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\widetilde{w}(T)\right)$$

alakú, ahol $\widetilde{w}$ Wiener-folyamat. Vegyük észre, hogy

$$\frac{\overline{S}(T)}{S(0)} = \frac{S(T)}{S(0)\exp(rT)} = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\widetilde{w}(T)\right)$$

éppen az $\overline{S}$ ármércéhez tartozó derivált. Tekintsük a

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}} = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\widetilde{w}(T)\right)$$

deriválttal adott új mértéket. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S(T)\chi(S(T)\geq K, S_*(T)\geq H)) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(S(T)\chi(S(T)\geq K, S_*(T)\geq H)\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{R}}\right) = \\
&= S(0)\exp(rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{R}}(\chi(S(T)\geq K, S_*(T)\geq H)).
\end{aligned}$$

Az új ármércéhez tartozó $\mathbf{R}$ mérték alatt a $\widehat{w}(t) \triangleq \widetilde{w}(t) - \sigma t$ Wiener-folyamat, így

$$S(T) = S(0)\exp\left(\sigma\widehat{w}(t) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right).$$

Ebből a keresett

$$\mathbf{E}^{\mathbf{R}}(\chi(S(T)\geq K, S_*(T)\geq H))$$

valószínűség visszavezethető az előző lemmára, avval az eltéréssel, hogy most a $\mu = r - \sigma^2/2$ helyébe mindenhol a $\mu = r + \sigma^2/2$ kifejezést kell írni. Vegyük észre, hogy a kitevőben szereplő

$$\frac{2r}{\sigma^2} - 1 = 2\frac{r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}$$

helyébe

$$2\frac{r + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} = \frac{2r}{\sigma^2} + 1$$

kerül. □

5.26. Példa. Legyen H_T a K kötési árhoz tartozó olyan európai call opció, amely értékét veszti, ha az árfolyam a $[0,T]$ szakaszon a H szint fölé emelkedik.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ilyenkor a kifizetés

$$H_T = (S(T) - K)^+ \chi(S^*(T) \leq H) =$$
$$= S(T)\chi(S(T) \geq K, S^*(T) \leq H) - K \cdot \chi(S(T) \geq K, S^*(T) \leq H).$$

A kifizetés ismét alulról korlátos és integrálható, így alkalmazható az árazó képlet. Számoljuk ki először a második taghoz tartozó valószínűséget. A $\mathbf{Q}$ alatt

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\widetilde{w}(T)\right) \stackrel{\circ}{=}$$
$$\stackrel{\circ}{=} S(0)\exp(X(T)).$$

Ebből

$$\mathbf{Q}(S(T) \geq K, S^*(T) \leq H) = \mathbf{Q}\left(X(T) \geq \ln\frac{K}{S(0)}, X^*(T) \leq \ln\frac{H}{S(0)}\right) =$$
$$= \mathbf{Q}\left(X^*(T) \leq \ln\frac{H}{S(0)}\right) - \mathbf{Q}\left(X(T) \leq \ln\frac{K}{S(0)}, X^*(T) \leq \ln\frac{H}{S(0)}\right).$$

A második

$$\mathbf{Q}\left(X(T) \leq \ln\frac{K}{S(0)}, X^*(T) \leq \ln\frac{H}{S(0)}\right)$$

valószínűség a már belátott (5.4)

$$\Phi\left(\frac{x - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \exp\left(2\frac{\mu}{\sigma^2}y\right)\Phi\left(\frac{x - 2y - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

képletből

$$x = \ln\frac{K}{S(0)}, y = \ln\frac{H}{S(0)}, \mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

helyettesítéssel kapható. Értelemszerűen $H > K$ és $S(0) < H$, ugyanis ellenkező esetben az opció értelmetlen, így $y > 0$ és $y > x$. Az első valószínűség a fenti (5.6) képletből kapható. Az árban szereplő várható értékek kiszámolásakor vegyük figyelembe, hogy

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S(T)\chi(S(T) \geq K, S^*(T) \leq H)) =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S(T)\chi(S^*(T) \leq H)) - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S(T)\chi(S(T) \leq K, S^*(T) \leq H)).$$

Elegendő a második várható értéket kiszámolni, az első kiszámolásakor a már kiszámolt másodikban $K = H$ helyettesítéssel kell majd élni. A $\mathbf{Q}$ mérték alatt

$$S(T) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\widetilde{w}(T)\right)$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

alakú, ahol $\widetilde{w}$ Wiener-folyamat. Vegyük észre, hogy

$$\frac{\overline{S}(T)}{S(0)} = \frac{S(T)}{S(0)\exp(rT)} = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma\widetilde{w}(T)\right)$$

éppen az $\overline{S}$ ármércéhez tartozó derivált. Tekintsük a

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}} = \exp\left(\sigma\widetilde{w}(T) - \frac{\sigma^2}{2}T\right)$$

deriválttal adott új mértéket. Ekkor

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(S(T)\,\chi\left(S(T)\le K, S^*(T)\le H\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(S(T)\,\chi\left(S(T)\le K, S^*(T)\le H\right)\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{R}}\right) = \\
&= S(0)\exp(rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\chi\left(S(T)\le K, S^*(T)\le H\right)\right).
\end{aligned}$$

Új ármércét bevezetve az új ármércéhez tartozó $\mathbf{R}$ mérték alatt a

$$\widehat{w}(t) \triangleq \widetilde{w}(t) - \sigma t$$

Wiener-folyamat, így

$$\begin{aligned}
S(T) &= S(0)\exp\left(\sigma\widehat{w}(t) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \triangleq \\
&\triangleq S(0)\exp(X(T)).
\end{aligned}$$

Ebből a keresett

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\chi\left(S(T)\le K, S^*(T)\le H\right)\right) &= \mathbf{R}\left(S(T)\le K, S^*(T)\le H\right) = \\
&= \mathbf{R}\left(X(T)\le \ln\frac{K}{S(0)}, X^*(T)\le \ln\frac{H}{S(0)}\right)
\end{aligned}$$

visszavezethető a már többször használt (5.4) képletre

$$x = \ln\frac{K}{S(0)}, y = \ln\frac{H}{S(0)}, \mu = r + \frac{\sigma^2}{2}$$

paraméterekkel. □

5.27. Példa. Legyen H_T a K kötési árhoz tartozó olyan európai call opció, amely csak akkor hívható le, ha az árfolyam a $[0,T]$ szakaszon a H szint fölé emelkedik.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ilyenkor a kifizetés

$$H_T = (S(T) - K)^+ \chi(S^*(T) > H),$$

és az ár

$$\pi(H_T) = \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((S(T) - K)^+ \chi(S^*(T) > H)\right).$$

Világos, hogy

$$(S(T) - K)^+ \chi(S^*(T) > H) + (S(T) - K)^+ \chi(S^*(T) \leq H) = (S(T) - K)^+,$$

így az ár már korábban kiszámolt két ár különbségeként kapható. □

5.28. Példa. Legyen H_T a K kötési árhoz tartozó olyan európai call opció, amely csak akkor hívható le, ha az árfolyam a $[0, T]$ szakaszon a H szint alá csökken.

Ilyenkor a kifizetés

$$H_T = (S(T) - K)^+ \chi(S_*(T) < H),$$

és az ár

$$\pi(H_T) = \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((S(T) - K)^+ \chi(S_*(T) < H)\right).$$

Világos, hogy

$$(S(T) - K)^+ \chi(S_*(T) < H) + (S(T) - K)^+ \chi(S_*(T) \geq H) = (S(T) - K)^+,$$

így az ár már korábban kiszámolt két ár különbségeként kapható. □

5.2.3. Dupla barrier opciók

A dupla barrier opciók esetén az opció kifizetése két határ valamelyikének átlépésétől függ. Például ha a K kötési ár mellett adottak még a $0 < L < < K < U$ alsó és felső határok, akkor az opció értéktelen lesz, ha a $[0, T]$ időtartományban az S ár eléri az L vagy az U értékek bármelyikét. Vagyis az opció csak akkor fizet, ha az opció élettartama során az ár végig az L és az U által megadott sávban mozog. Legyen $\tau \stackrel{\circ}{=} \tau_L \wedge \tau_U$, ahol értelemszerűen τ_A az S árfolyam folyamat esetén az A szinthez tartozó elérési idő. Az alpontban vizsgált call opció kifizetése a T időpontban

$$H_T \stackrel{\circ}{=} (S_T - K)^+ \chi(\tau > T). \tag{5.8}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A dupla barrier opciók árazásának nehézsége abból ered, hogy a H_T eloszlásának kiszámolásához meg kell határozni az S árfolyam folyamat S_* minimumának, S^* maximumának és magának az S folyamatnak az együttes eloszlását, vagyis ismerni kell az (S_*, S, S^*) hármas együttes eloszlását.

Az irodalomban számos módszer ismert a fenti (5.8) opció $\pi(H_T)$ árának meghatározására. Mi most a Laplace-transzformációra épülő módszert fogjuk bemutatni.

1. Első lépésben az általános esetet egy egyszerűbb kanonikus esetre vezetjük vissza. Valamivel egyszerűbb kiszámolni a

$$\varphi \stackrel{\circ}{=} \pi\left((S_T - K)^+ \chi(\tau \le T)\right)$$

kifejezést. Mivel

$$(S_T - K)^+ \chi(\tau > T) = (S_T - K)^+ - (S_T - K)^+ \chi(\tau \le T),$$

ahol az első tag éppen a call opció T időpontban érvényes kifizetése, amely ára a Black–Scholes-formula szerint ismert, ezért a $\pi(H_T)$ kiszámolásához elegendő a második tag, a φ árnak a kiszámolására koncentrálni. A Laplace-transzformációs módszer lényege, hogy valamely származtatott termék árát a T lejárati idő függvényeként tekintjük, és az így kapott $g(T) \stackrel{\circ}{=} \pi(H_T)$ függvény

$$F(s) \stackrel{\circ}{=} \int_0^\infty \exp(-sT)\, g(T)\, dT = \int_0^\infty \exp(-sT)\, \pi(H_T)\, dT$$

Laplace-transzformáltját számoljuk ki. A Laplace-transzformált meghatározását követően a $\pi(H_T)$ értékét a Laplace-transzformáció numerikus invertálásával szokás megadni. Az $\exp(-rT)$ diszkont tényezőt és az $S(0)$ konstanst az invertálást követően az árban egyszerűen érvényesíthetjük, így az egyszerűség kedvéért ezeket a formulából eleve kiemeljük. Ennek megfelelően a kiszámolandó Laplace-transzformált éppen

$$F(s) \stackrel{\circ}{=} \int_0^\infty \exp(-sT)\, \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left((S(T) - H)^+ \chi(\tau \le T)\right) dT,$$

ahol most

$$S(T) = \exp\left(\left(r - \sigma^2/2\right)T + \sigma\widetilde{w}(T)\right)$$

és nem

$$S(0)\exp\left(\left(r - \sigma^2/2\right)T + \sigma\widetilde{w}(T)\right),$$

valamint $H \stackrel{\circ}{=} K/S(0)$. Az $S(0)$ kiemelésével természetesen az L és az U határok helyébe az $A \stackrel{\circ}{=} L/S(0)$ és a $B \stackrel{\circ}{=} U/S(0)$ kifejezéseket kell írni. Mivel ahhoz, hogy a feladat értelmes legyen teljesülni kell az $L < S(0) < U$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

megkötésnek az $S(0)$-lal való normálás után teljesülni kell az $A < 1 < B$ relációnak. Ha $T = u/\sigma^2$ helyettesítést végzünk, akkor

$$F(s) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{s}{\sigma^2}u\right) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\left(S\left(\frac{u}{\sigma^2}\right) - H \right)^+ \chi\left(\tau \leq \frac{u}{\sigma^2}\right) \right) \frac{du}{\sigma^2}.$$

A Wiener-folyamat elemi tulajdonságai miatt

$$S\left(\frac{u}{\sigma^2}\right) = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{u}{\sigma^2} + \sigma \widetilde{w}\left(\frac{u}{\sigma^2}\right) \right) \stackrel{\circ}{=} \stackrel{\circ}{=} \exp\left(\nu \cdot u + w(u)\right), \tag{5.9}$$

ahol w egy Wiener-folyamat és

$$\nu \stackrel{\circ}{=} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{1}{\sigma^2}.$$

egy konstans. A τ helyébe a $\sigma^2\tau$ változót írva azonnal látható, hogy a $\sigma^2\tau$ éppen annak az ideje, hogy az imént bevezetett (5.9) először éri el az A vagy a B határokat. Így tehát

$$F(s) = \frac{1}{\sigma^2} \mathcal{L}\left(\frac{s}{\sigma^2}\right),$$

ahol, ha most az egyszerűbb jelölés kedvéért újra τ jelöli az $\exp(\nu \cdot u + w(u))$ folyamat kilépési idejét az $[A, B]$ sávból

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(s) &\stackrel{\circ}{=} \int_0^\infty \exp(-su)\, \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\left(\exp(\nu \cdot u + w(u)) - H\right)^+ \chi(\tau \leq u) \right) du = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\int_\tau^\infty \exp(-su) \left(\exp(\nu \cdot u + w(u)) - H\right)^+ du \right) \stackrel{\circ}{=} \\
&\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\int_\tau^\infty \exp(-su)\, f(X(u))\, du \right),
\end{aligned}$$

ahol az egyszerűbb jelölés céljából $X(u) \stackrel{\circ}{=} \exp(\nu \cdot u + w(u))$ és $f(x) \stackrel{\circ}{=} (x - H)^+$. A továbbiakban tehát az $\mathcal{L}$ kiszámolására koncentrálunk.

2. Az $\mathcal{L}(s)$ képletében szereplő belső integrál tekinthető a trajektóriák terén értelmezett funkcionálnak.

$$\int_\tau^\infty \exp(-su)\, f(X(u))\, du = \int_0^\infty \exp(-s(u+\tau))\, f(X(u+\tau))\, du.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az erős Markov-tulajdonság miatt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_{\tau}^{\infty}\exp\left(-su\right)f\left(X\left(u\right)\right)du \mid \mathcal{F}_{\tau}\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_{0}^{\infty}\exp\left(-s\left(u+\tau\right)\right)f\left(X\left(u+\tau\right)\right)du \mid \mathcal{F}_{\tau}\right) = \\
&= \exp\left(-s\tau\right)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_{0}^{\infty}\exp\left(-su\right)f\left(X\left(u+\tau\right)\right)du \mid \mathcal{F}_{\tau}\right) = \\
&= \exp\left(-s\tau\right)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_{0}^{\infty}\exp\left(-su\right)f\left(\theta_{\tau}X\left(u\right)\right)du \mid \mathcal{F}_{\tau}\right) = \\
&= \exp\left(-s\tau\right)\mathbf{E}^{\mathbf{R}}_{X(\tau)}\left(\int_{0}^{\infty}\exp\left(-su\right)f\left(X\left(u\right)\right)du\right),
\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{R}_x$ jelöli az x pontból elindított geometriai Brown-mozgás eloszlását a $\mathbf{Q}$ mérték alatt. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(s\right) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-s\tau\right)\cdot\mathbf{E}^{\mathbf{R}}_{X(\tau)}\left(\int_{0}^{\infty}\exp\left(-su\right)f\left(X\left(u\right)\right)du\right)\right) \stackrel{\circ}{=} \\
&\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-s\tau\right)\cdot g\left(X\left(\tau\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

ahol értelemszerűen

$$g\left(x\right) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{R}}_{x}\left(\int_{0}^{\infty}\exp\left(-su\right)f\left(X\left(u\right)\right)du\right). \tag{5.10}$$

A Girszanov-tétellel cseréljük ki úgy a mértéket, hogy a $\nu u + w\left(u\right)$ folyamat trendje nulla legyen. Ha

$$\frac{d\mathbf{D}}{d\mathbf{Q}} = \exp\left(-\nu w\left(T\right) - \frac{1}{2}\nu^2 T\right)$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

akkor a $\widehat{w}(t) = w(t) - t(-\nu) = w(t) + t\nu$ Wiener-folyamat a $\mathbf{D}$ mérték alatt.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(s) &= \mathbf{E}^{\mathbf{D}}\left(\exp(-s\tau)\, g(X(\tau))\, \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{D}}\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{D}}\left(\exp(-s\tau)\, g(X(\tau))\, \mathbf{E}^{\mathbf{D}}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{D}} \mid \mathcal{F}_\tau\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{D}}\left(\exp(-s\tau)\, g(X(\tau)) \exp\left(\nu w(\tau) + \frac{\nu^2}{2}\tau\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{D}}\left(\exp(-s\tau)\, g(X(\tau)) \exp\left(\nu \widehat{w}(\tau) - \frac{\nu^2}{2}\tau\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{D}}\left(\exp\left(-\left(s + \frac{\nu^2}{2}\right)\tau\right) g(X(\tau)) \exp(\nu \widehat{w}(\tau))\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{D}}\left(\exp\left(-\left(s + \frac{\nu^2}{2}\right)\tau\right) g(X(\tau)) (X(\tau))^{\nu}\right).
\end{aligned}$$

Emlékeztetünk, hogy τ éppen annak az időpontja, hogy $\exp(\nu \cdot u + w(u))$ folyamat kilép az (A, B) nyílt intervallumból. Ennek megfelelően a τ felírható mint $\tau = \tau_A \wedge \tau_B$, így

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(s) = \mathbf{E}^{\mathbf{D}}&\left(\exp\left(-\left(s + \frac{\nu^2}{2}\right)\tau_A\right) g(A)\, A^{\nu} \chi(\tau_A < \tau_B)\right) + \\
&+\mathbf{E}^{\mathbf{D}}\left(\exp\left(-\left(s + \frac{\nu^2}{2}\right)\tau_B\right) g(B)\, B^{\nu} \chi(\tau_B < \tau_A)\right).
\end{aligned}$$

Vezessük be az $A \stackrel{\circ}{=} \exp(-a)$ és $B \stackrel{\circ}{=} \exp(b)$ értékeket. Mivel $A < 1 < B$ ezért, $a, b > 0$. Ekkor egyszerű helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(s) = \mathbf{E}^{\mathbf{D}}&\left(\exp\left(-\left(s + \frac{\nu^2}{2}\right)\tau_A\right) g(\exp(-a)) \exp(-\nu a)\, \chi(\tau_A < \tau_B)\right) + \\
&+\mathbf{E}^{\mathbf{D}}\left(\exp\left(-\left(s + \frac{\nu^2}{2}\right)\tau_B\right) g(\exp(b)) \exp(\nu b)\, \chi(\tau_B < \tau_A)\right).
\end{aligned}$$

Vezessük be a $\mu \stackrel{\circ}{=} \sqrt{2s + \nu^2}$ jelölést. Vegyük észre, hogy az exponenciális transzformáció monotonitása miatt a τ_A éppen az az időpont, amikor a $\widehat{w}$ Wiener-folyamat eléri a $-a$ értéket, illetve a τ_B, amikor a b értéket. Így

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(s) = g(\exp(-a)) \exp(-\nu a) \cdot \mathbf{E}^{\mathbf{D}}&\left(\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\tau_{-a}\right) \chi(\tau_{-a} < \tau_b)\right) + \\
&+g(\exp(b)) \exp(\nu b) \cdot \mathbf{E}^{\mathbf{D}}\left(\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\tau_b\right) \chi(\tau_b < \tau_{-a})\right),
\end{aligned} \tag{5.11}$$

ahol most értelemszerűen a τ_{-a}, illetve a τ_b jelölés a $\widehat{w}$ Wiener-folyamat megfelelő találati idejei.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

3. Harmadik lépésként számoljuk ki a fenti **D** szerinti várható értékeket. Legyen w egy tetszőleges Wiener-folyamat, és tekintsük az

$$M(t) \triangleq \exp\left(\mu w(t) - \frac{\mu^2}{2}t\right)$$

exponenciális martingált. Ha τ jelöli a w első kilépési idejét a $(-a, b)$ intervallumból, akkor az M^τ egy korlátos martingál. A korlátosság miatt az M^τ egyenletesen integrálható martingál, így a $\tau < \infty$ megállási időre érvényes az

$$\mathbf{E}(M(\tau)) = \mathbf{E}(M^\tau(\tau)) = \mathbf{E}(M^\tau(0)) = 1$$

egyenlőség. Vagy ami ugyanaz,

$$1 = \mathbf{E}\left(\exp\left(\mu w(\tau) - \frac{\mu^2}{2}\tau\right)\right) = \exp(-\mu a)\cdot\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\tau_{-a}\right)\chi(\tau_{-a} < \tau_b)\right) + \\ + \exp(\mu b)\cdot\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\tau_b\right)\chi(\tau_b < \tau_a)\right).$$

Ugyanez a $-w$ esetén

$$1 = \mathbf{E}\left(\exp\left(-\mu w(\tau) - \frac{\mu^2}{2}\tau\right)\right) = \exp(\mu a)\cdot\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\tau_{-a}\right)\chi(\tau_{-a} < \tau_b)\right) + \\ + \exp(-\mu b)\cdot\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\tau_b\right)\chi(\tau_b < \tau_a)\right).$$

Az egyenletrendszert Cramer-szabállyal megoldva

$$\begin{vmatrix} \exp(-\mu a) & \exp(\mu b) \\ \exp(\mu a) & \exp(-\mu b) \end{vmatrix} = \exp(-\mu(a+b)) - \exp(\mu(a+b)),$$
$$\begin{vmatrix} 1 & \exp(\mu b) \\ 1 & \exp(-\mu b) \end{vmatrix} = \exp(-\mu b) - \exp(\mu b),$$

vagyis

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\tau_{-a}\right)\chi(\tau_{-a} < \tau_b)\right) = \frac{\sinh(b)}{\sinh(a+b)},$$
$$\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\tau_b\right)\chi(\tau_{-a} < \tau_b)\right) = \frac{\sinh(a)}{\sinh(a+b)}.$$

4. Következő lépésként számoljuk ki a korábban a fenti (5.10) sorban bevezetett

$$g(x) \triangleq \mathbf{E}_x^{\mathbf{R}}\left(\int_0^\infty \exp(-su) f(X(u))\, du\right)$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

függvényt az $\exp(z)$ helyen. Emlékeztetünk, hogy $\mathbf{R}$ jelöli az exponenciális folyamat eloszlását, így

$$g(\exp(z)) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{R}}_{\exp(z)}\left(\int_0^\infty \exp(-su)\, f(\exp(\nu u + w(u)))\, du\right) = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}_z\left(\int_0^\infty \exp(-su)\, f(\exp(\nu u + w(u)))\, du\right).$$

A Markov-folyamatok tárgyalásakor bevezetett terminológia szerint ez éppen az $X(u) \stackrel{\circ}{=} \exp(\nu u + w(u))$ geometriai Brown-mozgás rezolvens operátora.

5. Ahhoz, hogy a Wiener-folyamat rezolvensét[2] használni tudjuk, mértékcserét kell végezni. Ha

$$\frac{d\mathbf{Z}}{d\mathbf{Q}} = \exp\left(-\int_0^T \nu dw - \frac{1}{2}\nu^2 T\right) = \exp\left(-\nu(w(T) - w(0)) - \frac{1}{2}\nu^2 T\right),$$

akkor a $\widehat{w}(t) = w(t) + \nu t$ Wiener-folyamat a $\mathbf{Z}$ mérték alatt. Tehát az integrálokat felcserélve és mértékcserét minden u-ra elvégezve, majd az integrálokat visszacserélve

$$g(\exp(z)) = \\ = \exp(-\nu z)\, \mathbf{E}^{\mathbf{Z}}_z\left(\int_0^\infty \exp(-su)\, f(\exp(\widehat{w}(u)))\exp\left(\frac{1}{2}\nu^2 u + \nu w(u)\right) du\right) = \\ = \exp(-\nu z)\, \mathbf{E}^{\mathbf{Z}}_z\left(\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\mu^2 u}{2}\right) f(\exp(\widehat{w}(u)))\exp(\nu\widehat{w}(u))\, du\right) = \\ = \exp(-\nu z)\, \frac{1}{\mu}\int_{-\infty}^\infty \exp(-\mu|z-y|)\, f(\exp(y))\exp(\nu y)\, dy = \\ = \exp(-\nu z)\, \frac{1}{\mu}\int_{\ln H}^\infty \exp(-\mu|z-y|)\,(\exp(y) - H)\exp(\nu y)\, dy \stackrel{\circ}{=} \\ \stackrel{\circ}{=} \exp(-\nu z)\, U(\mu, z).$$

Visszaírva a már levezetett (5.11) képletbe

$$\mathcal{L}(s) = \frac{\sinh(\mu b)}{\sinh(\mu(a+b))} U(\mu, -a) + \frac{\sinh(\mu a)}{\sinh(\mu(a+b))} U(\mu, b),$$

ahol az U jelöli az $1/\mu$-vel beszorzott integrál részt.

6. Számoljuk ki a két integrált. Kezdjük az egyszerűbb $z = -a$ esettel. Ekkor

$$U(\mu, -a) = \frac{1}{\mu}\int_{\ln H}^\infty \exp(-\mu|-a-y|)\,(\exp(y) - H)\exp(\nu y)\, dy.$$

[2] V.ö: 3.125. példa, 200. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az integrál kiszámolásához elegendő az

$$\frac{1}{\mu}\int_{\ln H}^{\infty}\exp\left(-\mu\left|-a-y\right|\right)\exp\left(cy\right)dy$$

típusú integrálokat meghatározni, ahol $c<\mu=\sqrt{2s+\nu^2}$. Mivel $-a<\ln H\leq$ $\leq y$, ezért $-a-y\leq 0$, így

$$\begin{aligned}\int_{\ln H}^{\infty}\exp\left(-\mu\left|-a-y\right|\right)\exp\left(cy\right)dy &= \int_{\ln H}^{\infty}\exp\left(\mu\left(-a-y\right)+cy\right)dy = \\ &= \exp\left(-a\mu\right)\left[\frac{\exp\left(\left(c-\mu\right)y\right)}{c-\mu}\right]_{\ln H}^{\infty} = \\ &= \exp\left(-a\mu\right)\frac{H^{c-\mu}}{\mu-c}.\end{aligned}$$

A képletbe a $c=\nu+1$ és $c=\nu$ értékeket betéve

$$\begin{aligned}U\left(\mu,-a\right) &= \exp\left(-a\mu\right)\frac{H^{\nu+1-\mu}}{\mu\left(\mu-\nu-1\right)}-H\exp\left(-a\mu\right)\frac{H^{\nu-\mu}}{\mu\left(\mu-\nu\right)} = \\ &= \exp\left(-a\mu\right)\frac{H^{\nu+1-\mu}}{\mu\left(\mu-\nu-1\right)\left(\mu-\nu\right)}.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a $\mu=\sqrt{2s+\nu^2}>\nu+1$ és a $\mu>\nu$ feltételek teljesüléséhez szükségünk van az $s>\max\left(0,\nu+1/2\right)$ megkötésre.

A $z=b$ eset annyiból bonyolultabb, hogy mivel $\ln H<b$, ezért a kitevőben az abszolút értéket két felé kell bontani. Ilyenkor az integrál egyszerű számolással

$$2\left(\frac{\exp\left(b\left(\nu+1\right)\right)}{\mu^2-\left(\nu+1\right)^2}-\frac{H\exp\left(b\nu\right)}{\mu^2-\nu^2}\right)+\exp\left(-\mu b\right)\frac{H^{\mu+\nu+1}}{\mu\left(\nu+1\right)\left(\mu+\nu+1\right)}.$$

5.2.4. Visszatekintő opciók

Visszatekintő opción olyan opciókat értünk, ahol a kifizetés az aktuális trajektória valamilyen nevezetes értékétől függ. Leggyakrabban a felvett maximális vagy minimális ártól.

5.29. Példa. A szabad végpontú visszatekintő európai put opció ára.

Szabad végpontú visszatekintő európai put opción a

$$H_T\doteq S^*\left(T\right)-S\left(T\right)$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

kifizetéshez tartozó származtatott terméket értjük. A kifizetés ismételten nem negatív, így alkalmazható az árazó képlet, ugyanis az $S^*(T)$ a Black–Scholes-modellben integrálható.

$$\begin{aligned}\pi(H_T) &= \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S^*(T) - S(T)) = \\ &= \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S^*(T)) - S(0).\end{aligned}$$

Számoljuk ki az $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(S^*(T))$ várható értéket. A $\mathbf{Q}$ mérték alatt

$$\begin{aligned}S(t) &= S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\widetilde{w}(t)\right) \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} S(0)\exp(X(t)),\end{aligned}$$

amiből $S^*(T) = S_0\exp(X^*(T))$. Miként már láttuk, (5.6) sor, az $X^*(T)$ eloszlásfüggvénye a $\mu \stackrel{\circ}{=} r - \sigma^2/2$ jelöléssel

$$F(x) \stackrel{\circ}{=} \Phi\left(\frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \exp\left(2\frac{\mu x}{\sigma^2}\right)\Phi\left(\frac{-x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right), x \geq 0.$$

Vegyük észre, hogy az F eloszlásfüggvény az $x < 0$ tartományon nulla, ugyanis az $X^*(T) \geq 0$ így alább mindig csak az $x \geq 0$ tartományon kell integrálni. Vegyük azt is észre, hogy a transzformált valószínűségi változó várható értékének képlete alapján a kiszámítandó várható érték éppen az

$$\mathbf{E}(\exp(X^*(T))) = \int_0^\infty \exp(x)\,dF(x)$$

integrál. Az $F(x)$ képletének megfelelően az integrál két részre bontható. Számoljuk ki az elsőt. Vegyük észre, hogy az első tag éppen az $N\left(\mu T, \sigma\sqrt{T}\right)$ eloszlásfüggvénye, így az integrál

$$\begin{aligned}I_1 &\stackrel{\circ}{=} \int_0^\infty \exp(x)\,dN\left(x, \mu T, \sigma\sqrt{T}\right) = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\int_0^\infty \exp(x)\exp\left(-\frac{(x-\mu T)^2}{2\sigma^2 T}\right)dx.\end{aligned}$$

Az egyszerűség kedvéért a

$$I \stackrel{\circ}{=} \frac{1}{D\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \exp(Ax)\exp\left(-\frac{(x-M)^2}{2D^2}\right)dx$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

jelölést használva számoljuk ki az integrált. A lognormális eloszlás várható értékének kiszámolásakor használt eljárást követve

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-M)^2 - 2AD^2x}{2D^2}\right) dx = \\
&= \frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\left(x-\left(M+AD^2\right)\right)^2 + M^2 - \left(M+AD^2\right)^2}{2D^2}\right) dx = \\
&= \frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{M^2-(M+AD^2)^2}{2D^2}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(x-(M+AD^2))^2}{2D^2}\right) dx = \\
&= \exp\left(-\frac{M^2 - \left(M^2 + A^2D^4 + 2AMD^2\right)}{2D^2}\right) \mathbf{P}\left(N\left(M+AD^2, D\right) > 0\right) = \\
&= \exp\left(AM + \frac{A^2D^2}{2}\right) \mathbf{P}\left(D \cdot N(0,1) + M + AD^2 > 0\right) = \\
&= \exp\left(AM + \frac{A^2D^2}{2}\right) \mathbf{P}\left(-N(0,1) < \frac{M+AD^2}{D}\right) = \\
&= \exp\left(AM + \frac{A^2D^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{M+AD^2}{D}\right).
\end{aligned}
$$

Az $A = 1$, $M = \left(r - \sigma^2/2\right)T$ és $D = \sigma\sqrt{T}$ értéket beírva

$$
I_1 = \exp(rT)\,\Phi\left(\frac{\left(r+\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = \exp(rT)\,\Phi\left(\frac{r+\sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{T}\right).
$$

A második integrál

$$
I_2 = \int_0^\infty \exp(x)\, d\Psi(x),
$$

ahol

$$
\Psi(x) \doteq \exp\left(2\frac{\mu x}{\sigma^2}\right) \Phi\left(\frac{-x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
$$

az $F(x)$ eloszlásfüggvény képletében szereplő második tag. A parciális integrálás formulája szerint

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \left[\exp(x)\,\Psi(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \Psi(x)\, d\exp(x) = \\
&= \left[\exp(x)\,\Psi(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \Psi(x)\exp(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A kiintegrált rész az $x=0$ helyen $\Psi(0)=\Phi\left(-\mu\sqrt{T}/\sigma\right)$. A felső határon az

$$\int_{-\infty}^{u}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_{-u}^{\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\le\int_{|u|}^{\infty}\frac{x}{|u|}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{|u|}\left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_u^{\infty}=\frac{1}{|u|}\exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

becslést használva a határérték nulla. Ebből következően tehát

$$I_2=-\Phi\left(-\left(\mu\sqrt{T}\right)/\sigma\right)-\int_0^{\infty}\Psi(x)\,d\exp(x).$$

Ismételten parciálisan integrálva

$$\int_0^{\infty}\Psi(x)\exp(x)\,dx=\int_0^{\infty}\exp\left(2\frac{\mu x}{\sigma^2}+x\right)\Phi\left(\frac{-x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx=$$
$$=\left[\frac{\exp\left(\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}+1\right)x\right)}{\frac{2\mu}{\sigma^2}+1}\Phi\left(\frac{-x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]_0^{\infty}+$$
$$+\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}+1\right)^{-1}\int_0^{\infty}\exp\left(2\frac{\mu x}{\sigma^2}+x\right)\varphi\left(\frac{-x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx.$$

A felső határ ismételten nulla, az alsó határ értéke $\Phi\left(-\mu\sqrt{T}/\sigma\right)\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}+1\right)^{-1}$. Ebből tehát

$$I_2=-\Phi\left(-\frac{\mu\sqrt{T}}{\sigma}\right)+\Phi\left(-\frac{\mu\sqrt{T}}{\sigma}\right)\frac{\sigma^2}{2\mu+\sigma^2}-$$
$$-\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}+1\right)^{-1}\int_0^{\infty}\exp\left(2\frac{\mu x}{\sigma^2}+x\right)\varphi\left(\frac{-x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx.$$

A kiintegrált részeket összevonva

$$\Phi\left(-\frac{\mu\sqrt{T}}{\sigma}\right)\left(\frac{\sigma^2}{2\mu+\sigma^2}-1\right)=-\Phi\left(-\frac{\mu\sqrt{T}}{\sigma}\right)\frac{2\mu}{2\mu+\sigma^2},$$

következésképpen

$$I_2=-\Phi\left(-\frac{\mu\sqrt{T}}{\sigma}\right)\frac{2\mu}{2\mu+\sigma^2}-\frac{\sigma^2}{2\mu+\sigma^2}I_3,$$

ahol a kiszámolandó integrál most

$$I_3\stackrel{\circ}{=}\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{2\mu+\sigma^2}{\sigma^2}x\right)\varphi\left(\frac{-x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx=$$
$$=\int_0^{\infty}\exp\left(\frac{2\mu+\sigma^2}{\sigma^2}x\right)\varphi\left(\frac{x+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A $\mu \stackrel{\circ}{=} r - \sigma^2/2$ jelölést visszaírva és bevezetve az

$$A \stackrel{\circ}{=} \frac{2\mu + \sigma^2}{\sigma^2} = \frac{2r}{\sigma^2},$$
$$M \stackrel{\circ}{=} -\mu T = \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) T,$$
$$D \stackrel{\circ}{=} \sigma\sqrt{T}$$

konstansokat az integrál az I már kiszámolt képlet alapján az

$$\frac{M + AD^2}{D} = \frac{\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) T + \frac{2r}{\sigma^2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right) T}{\sigma\sqrt{T}}.$$
$$AM + \frac{A^2 D^2}{2} = \frac{2r}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) T + \frac{1}{2}\frac{4r^2}{\sigma^4}\sigma^2 T =$$
$$= r - \frac{2r^2}{\sigma^2} T + \frac{1}{2}\frac{4r^2}{\sigma^2} T = r.$$

konstansokkal

$$I_3 = \exp\left(AM + \frac{A^2 D^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{M + AD^2}{D}\right) = \exp(rT)\, \Phi\left(\frac{\sigma^2/2 + r}{\sigma}\sqrt{T}\right).$$

Következésképpen

$$I_2 = -\Phi\left(-\frac{r - \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{T}\right) \frac{2r - \sigma^2}{2r} - \frac{\sigma^2}{2r} \exp(rT)\, \Phi\left(\frac{\sigma^2/2 + r}{\sigma}\sqrt{T}\right).$$

Az integrál tehát

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(X^*(T)\right)\right) = \int_0^\infty \exp(x)\, dF(x) = I_1 - I_2 =$$
$$= \exp(rT)\, \Phi\left(\frac{\left(r + \sigma^2/2\right) T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \Phi\left(-\frac{r - \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{T}\right) -$$
$$- \frac{\sigma^2}{2r}\Phi\left(-\frac{r - \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{T}\right) + \frac{\sigma^2}{2r} \exp(rT)\, \Phi\left(\frac{r + \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{T}\right).$$

Ha $r = 1/2$, $\sigma = 1$, akkor $\mu = 0$. Ilyenkor az integrál

$$2\exp\left(\frac{1}{2}T\right) \Phi\left(\sqrt{T}\right),$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ami azonos a korábban kiszámolt (5.3) képlettel. A szabad végpontú visszatekintő put opció ára tehát

$$\begin{aligned}\pi\left(H_T\right) &= \exp\left(-rT\right) S\left(0\right) \mathbf{E}\left(\exp\left(X^*\left(T\right)\right)\right) - S\left(0\right) = \\ &= S\left(0\right)\left(1+\frac{\sigma^2}{2r}\right)\Phi\left(\frac{r+\sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{T}\right) + \\ &\quad + S\left(0\right)\left(\exp\left(-rT\right)\left(1-\frac{\sigma^2}{2r}\right)\Phi\left(-\frac{r-\sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{T}\right)-1\right). \quad \square\end{aligned}$$

5.30. Példa. Szabad végpontú visszatekintő európai call opció.

Szabad végpontú visszatekintő európai call opción a

$$H_T \stackrel{\circ}{=} S\left(T\right) - S_*\left(T\right)$$

kifizetést értjük. A számolás erősen emlékeztet az előző példában bemutatottra, így némiképpen tovább bonyolítjuk a problémát és nem a $t=0$ időpontban érvényes árat mutatjuk be, hanem egy tetszőleges $0 \le t \le T$ időpontban esedékes árat. Ilyenkor figyelembe kell venni, hogy a $[0,t]$ szakaszon már a folyamat rendelkezik egy $S_*\left(t\right)$ minimummal.

$$S_*\left(T\right) = \min\left(S_*\left(t\right), S_*\left(t,T\right)\right),$$

ahol értelemszerűen

$$S_*\left(t,T\right) \stackrel{\circ}{=} \min\left\{S\left(u\right) \mid t \le u \le T\right\}$$

jelöli a $[t,T]$ szakaszon vett minimumot. A $\mathbf{Q}$ mérték alatt

$$\begin{aligned}S\left(u\right) &= S\left(0\right)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)u + \sigma\widetilde{w}\left(u\right)\right) = \\ &= S\left(t\right)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(u-t\right) + \sigma\left(\widetilde{w}\left(u\right)-\widetilde{w}\left(t\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}S_*\left(t,T\right) &= S\left(t\right)\exp\left(\min_{t\le u\le T}\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(u-t\right) + \sigma\left(\widetilde{w}\left(u\right)-\widetilde{w}\left(t\right)\right)\right\}\right) = \\ &= S\left(t\right)\exp\left(X_*\left(t,T\right)\right),\end{aligned}$$

ahol értelemszerűen

$$\begin{aligned}X_*\left(t,T\right) &= \min\left\{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(u-t\right) + \sigma\left(\widetilde{w}\left(u\right)-\widetilde{w}\left(t\right)\right) \mid t \le u \le T\right\} \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} \min\left\{\mu\cdot v + \sigma\overline{w}\left(v\right) \mid 0 \le v \le T-t\right\}.\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Vezessük be az $m \stackrel{\circ}{=} S_*(t)$, $s = S(t)$ jelöléseket. A t időpontban ezek az értékek már ismertek, így a T időszakban esedékes kifizetés

$$H_T \stackrel{\circ}{=} S(T) - \min\left(m, s\left(\exp\left(X_*(t,T)\right)\right)\right).$$

Így a t időpontban esedékes ár

$$\pi(H_T) = S(t) - \exp(-r(T-t))\,\mathbf{E}\left(\min\left(S_*(t), S(t)\left(\exp\left(X_*(t,T)\right)\right)\right)\right) \stackrel{\circ}{=}$$
$$\stackrel{\circ}{=} s - \exp(-r(T-t))\,\mathbf{E}\left(\min\left(m, s\exp\left(X_*(t,T)\right)\right)\right).$$

Ha átmenetileg $T-t$ helyébe a T szimbólumot írjuk, akkor az exponenciális függvény kitevőjében szereplő változó eloszlását már a fenti (5.7) sorból ismerjük: Ha $y \leq 0$, akkor

$$\Gamma(y) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}\left(X_*(T) \geq y\right) = \Phi\left(\frac{-y+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \exp\left(2\frac{\mu y}{\sigma^2}\right)\Phi\left(\frac{y+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Ebből

$$\mathbf{E}\left(\min\left(m, s\exp\left(X_*(t,T)\right)\right)\right) = \int_{-\infty}^{0} \min\left(m, s\exp(y)\right) d\left(1-\Gamma(y)\right) =$$
$$= -\int_{-\infty}^{0} \min\left(m, s\exp(y)\right) d\Gamma(y) =$$
$$= -\int_{\ln(m/s)}^{0} m\,d\Gamma(y) - s\int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \exp(y)\,d\Gamma(y).$$

Az első integrál könnyen kiszámolható, értéke

$$I_1 \stackrel{\circ}{=} m\left(\Gamma\left(\ln m/s\right) - \Gamma(0)\right) = m\cdot\Gamma\left(\ln\frac{m}{s}\right).$$

A második integrálban parciálisan integrálva

$$I_2 \stackrel{\circ}{=} -s\int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \exp(y)\,d\Gamma(y) =$$
$$= s\left[\exp(y)\,\Gamma(y)\right]_{\ln(m/s)}^{-\infty} + s\int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \Gamma(y)\,d\exp(y) =$$
$$= s\left[\exp(y)\,\Gamma(y)\right]_{\ln(m/s)}^{-\infty} + s\int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \Gamma(y)\exp(y)\,dy =$$
$$= -s\exp\left(\ln m/s\right)\Gamma\left(\ln\frac{m}{s}\right) + s\int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \Gamma(y)\exp(y)\,dy =$$
$$= -m\cdot\Gamma\left(\ln\frac{m}{s}\right) + s\int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \Gamma(y)\exp(y)\,dy.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az $I_1 + I_2$ összegből a kiintegrált rész kiesik, így a kiszámolandó integrál

$$I_3 \stackrel{\circ}{=} s \int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \Gamma(y) \exp(y)\, dy.$$

Az integrál két részre bontható:

$$I_{31} = s \int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \exp(y)\, \Phi\left(\frac{-y+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) dy,$$
$$I_{32} = -s \int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \exp\left(2\frac{\mu y}{\sigma^2} + y\right) \Phi\left(\frac{y+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) dy.$$

Számoljuk ki az elsőt:

$$I_{31} = s\left[\exp(y)\Phi\left(\frac{-y+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]_{-\infty}^{\ln(m/s)} + s\int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \exp(y)\,\varphi\left(\frac{-y+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) dy =$$
$$= m \cdot \Phi\left(\frac{-\ln(m/s)+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + s\int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \exp(y)\,\varphi\left(\frac{y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) dy.$$

Ismételten érdemes az általánosabb integrált kiszámolni.

$$\frac{1}{D\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \exp(Ax) \exp\left(-\frac{(x-M)^2}{2D^2}\right) dx =$$
$$= \exp\left(AM + \frac{A^2D^2}{2}\right) \mathbf{P}\left(N\left(M + AD^2, D\right) < \ln\frac{m}{s}\right) =$$
$$= \exp\left(AM + \frac{A^2D^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{\ln(m/s) - M - AD^2}{D}\right).$$

Ezt beírva

$$I_{31} = m \cdot \Phi\left(\frac{\ln(s/m) + \left(r - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) +$$
$$+ s\exp(rT)\,\Phi\left(\frac{\ln(m/s) - \left(r + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Hasonlóan

$$I_{32} = s\left[\frac{\sigma^2}{2\mu+\sigma^2}\exp\left(\frac{2\mu+\sigma^2}{\sigma^2}y\right)\Phi\left(\frac{y+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]_{\ln(m/s)}^{-\infty} +$$
$$+ s\frac{\sigma^2}{2\mu+\sigma^2}\int_{-\infty}^{\ln(m/s)} \exp\left(\frac{2\mu+\sigma^2}{\sigma^2}y\right)\varphi\left(\frac{y+\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) dy.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A kiintegrált rész

$$-s\frac{\sigma^2}{2r}\exp\left(\frac{2r}{\sigma^2}\ln(m/s)\right)\Phi\left(\frac{\ln(m/s)+\left(r-\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)=$$
$$=-s\frac{\sigma^2}{2r}\left(\frac{m}{s}\right)^{2r/\sigma^2}\Phi\left(\frac{\ln(m/s)+\left(r-\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Az integrál

$$s\frac{\sigma^2}{2r}\exp(rT)\,\Phi\left(\frac{\ln(m/s)-\left(r+\sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Így tehát a T időpontban lejáró szabad végpontú visszatekintő call opció ára a t időpontban

$$s-m\exp(-r(T-t))\,\Phi\left(\frac{\ln(s/m)+\left(r-\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-$$
$$-s\Phi\left(\frac{\ln(m/s)-\left(r+\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)+$$
$$+\exp(-r(T-t))\,s\frac{\sigma^2}{2r}\left(\frac{m}{s}\right)^{2r/\sigma^2}\Phi\left(\frac{\ln(m/s)+\left(r-\left(\sigma^2/2\right)\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-$$
$$-s\frac{\sigma^2}{2r}\Phi\left(\frac{\ln(m/s)-\left(r+\sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).\qquad\square$$

5.2.5. Ázsiai opciók

Az ázsiai opciók olyan opciók, amelyekben az alaptermék valamilyen termék átlagára. Például az ázsiai call opció esetén

$$H_T\doteq\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(t)\,dt-K\right)^+.$$

A Black–Scholes-modellben a kockázatmentes valószínűség alatt

$$S(t)=S(0)\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\widetilde{w}(t)\right).$$

A legfőbb probléma nyilvánvalóan abból ered, hogy a H_T képletében szereplő integrál lényegében lognormális eloszlások összege, így az eloszlása igen

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

nehezen számolható. Első lépésként megjegyezzük, hogy az általános eset visszavezethető egy kanonikus esetre: $t = 4u/\sigma^2$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\int_0^T S(t)\,dt &= S(0)\int_0^T \exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\widetilde{w}(t)\right)dt = \\ &= S(0)\,\frac{4}{\sigma^2}\int_0^{\sigma^2 T/4}\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{4}{\sigma^2}u+\frac{\sigma}{2}2\widetilde{w}\left(\frac{4}{\sigma^2}u\right)\right)du \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} S(0)\,\frac{4}{\sigma^2}\int_0^{\sigma^2 T/4}\exp\left(2\left(\nu\cdot u+\widehat{w}(u)\right)\right)du,\end{aligned}$$

ahol egyrészt a $\widehat{w}$ szintén Wiener-folyamat, másrészt

$$\nu \stackrel{\circ}{=} \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{2}{\sigma^2} = \frac{2r}{\sigma^2}-1.$$

Ha bevezetjük az[3]

$$\begin{aligned}A^{(\nu)}(T) &\stackrel{\circ}{=} \int_0^T \exp\left(2\left(\nu\cdot u+\widehat{w}(u)\right)\right)du, \\ \Psi(T,K,\nu) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left(\int_0^T \exp\left(2\left(\nu\cdot u+\widehat{w}(u)\right)\right)du-K\right)^+\right) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\left(A^{(\nu)}(T)-K\right)^+\right)\end{aligned}$$

jelöléseket, akkor

$$\begin{aligned}\pi(H_T) &= \exp(-rT)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S(0)}{T}\frac{4}{\sigma^2}\int_0^{\sigma^2 T/4}\exp\left(2\left(\nu\cdot u+\widehat{w}(u)\right)\right)du-K\right)^+ = \\ &= \exp(-rT)\,\frac{S(0)}{T}\frac{4}{\sigma^2}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^{\sigma^2 T/4}\exp\left(2\left(\nu\cdot u+\widehat{w}(u)\right)\right)du-\frac{KT\sigma^2}{4S(0)}\right)^+ = \\ &= \exp(-rT)\,\frac{S(0)}{T}\frac{4}{\sigma^2}\Psi\left(\frac{\sigma^2 T}{4},\frac{KT\sigma^2}{4S(0)},\nu\right).\end{aligned}$$

Így elegendő a $\Psi(T,K,\nu)$ értéket megadni. A $\Psi(T,K,\nu)$ értékét – nem túl meglepő módon – nem tudjuk explicite meghatározni, csak a kifejezés T szerinti Laplace-transzformáltját tudjuk kiszámolni. A Laplace-transzformációt megadó képlet a következő:

[3] A exponenciális függvény kitevőjében szereplő 2 szorzó szerepe később világos lesz.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

5.31. Tétel (Geman–Yor). *Tetszőleges* $\lambda > \max(0{,}2(\nu+1))$ *esetén*

$$L(\lambda,T,K,\nu) \triangleq \int_0^\infty \exp(-\lambda T)\,\Psi(T,K,\nu)\,dT = \tag{5.12}$$
$$= \frac{(2K)^{1-\beta}}{2\lambda(\alpha+1)\Gamma(\beta)} \int_0^1 u^{\beta-2}(1-u)^{\alpha+1}\exp\left(-\frac{u}{2K}\right)du,$$

ahol

$$\gamma \triangleq \sqrt{2\lambda+\nu^2}, \quad \alpha \triangleq \frac{\gamma+\nu}{2}, \quad \beta \triangleq \frac{\gamma-\nu}{2}.$$

A tétel bizonyítását több lemmára bontjuk és igazolásához szükségünk lesz többek között a Bessel-folyamatok és függvények tulajdonságaira és a Bessel-folyamatokra épülő igen elegáns Lamperti-féle formulára. Először emlékeztetünk a definícióra:

5.32. Definíció. Egy $Q(t)$ sztochasztikus folyamatot az $x \geq 0$ pontból indított $\delta \geq 0$ paraméterű négyzetes Bessel-folyamatnak mondjuk, ha alkalmas w Wiener-folyamattal kielégíti a

$$Q(t) = x + \delta \cdot t + 2\int_0^t \sqrt{Q(s)}dw(s) \tag{5.13}$$

sztochasztikus differenciálegyenletet. Egy R folyamatot Bessel-folyamatnak mondunk, ha $R = \sqrt{Q}$ alakú, ahol Q egy négyzetes Bessel-folyamat. $R^{(\nu)}$ alatt a $\delta = 2(\nu+1)$ paraméterű Bessel-folyamatot értjük. A ν paraméter bevezetését elsősorban az indokolja, hogy ha $\delta \geq 2$, vagy ami ugyanaz $\nu \geq \geq 0$, akkor megmutatható, hogy $Q > 0$, következésképpen a $\sqrt{Q}$ folyamat kiszámolására alkalmazható az Itô-formula. Ebből következően ha $\nu \geq 0$, akkor az $R^{(\nu)}$ definiálható az

$$R^{(\nu)}(t) = R^{(\nu)}(0) + w(t) + \left(\nu+\frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{1}{R^{(\nu)}(s)}ds$$

egyenletettel[4].

5.33. Példa. Bessel-folyamat átmenetvalószínűség függvénye $\delta = 2$, vagy ami ugyanaz a $\nu = 0$ esetben.

Miként korábban láttuk, ha $\mathbf{w}$ egy n-dimenziós Wiener–folyamat, akkor az $R \triangleq \|\mathbf{w}\|_2$ a $\delta = n$ paraméter mellett kielégíti a definícióban szereplő

[4] Bár a Bessel-folyamatokat definiáló egyenletekre nem alkalmazható a korábban belátott egzisztencia tétel, megmutatható, hogy a definiáló (5.13) egyenletnek létezik gyenge megoldása és a megoldás, amennyiben létezik, egyértelmű a trajektóriákra nézve, így a bevezetett folyamatosztályok eloszlása egyértelmű.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

sztochasztikus differenciálegyenletet. Az R nyilvánvalóan Markov folyamat. Ha $n = 2$, akkor

$$\mathbf{E}\left(f\left(\|w\left(t\right)\|_2\right) \mid w\left(s\right) = x\right) =$$
$$= \frac{1}{\left(2\pi\left(t-s\right)\right)} \int_{\mathbf{R}^2} \exp\left(-\frac{\|x-y\|_2^2}{2\left(t-s\right)}\right) f\left(\|y\|_2\right) d\lambda_n\left(y\right).$$

Az integrálban polárkoordinátákra áttérve, a koszinusz–tétel alapján az exponenciális függvény kitevőjében

$$\|x-y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2\left(x,y\right) =$$
$$\doteq r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\theta$$

elemi számolással, felhasználva, hogy az integráltranszformációban a Jacobmátrix determinánsa ρ

$$\frac{1}{\left(2\pi\left(t-s\right)\right)} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\theta}{2\left(t-s\right)}\right) f\left(\rho\right) \rho d\theta d\rho.$$

Ebből az $r \mapsto \rho$ átmenetvalószínűség sűrűségfüggvénye

$$p_{s,t}\left(r,\rho\right) = \frac{1}{\left(2\pi\left(t-s\right)\right)} \rho \exp\left(-\frac{r^2+\rho^2}{2\left(t-s\right)}\right) \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{r\rho}{t-s}\cos\theta\right) d\theta.$$

Az átmenetvalószínűség stacionárius, így

$$p_t\left(r,\rho\right) = \frac{\rho}{t} \exp\left(-\frac{r^2+\rho^2}{2t}\right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{r\rho}{t}\cos\theta\right) d\theta =$$
$$= \frac{\rho}{t} \exp\left(-\frac{r^2+\rho^2}{2t}\right) I_0\left(\frac{r\rho}{t}\right)$$

alakba írható, ahol I_0 az alább definiált módosított Bessel-függvény a $\nu = 0$ paraméter mellett. Éppen a Bessel-függvények megjelenése az átmenetvalószínűség képletében indokolja a folyamatok elnevezését. □

5.34. Definíció. Az I_ν módosított Bessel-függvényen az

$$x^2 y''\left(x\right) + xy'\left(x\right) - \left(x^2+\nu^2\right) y\left(x\right) = 0 \tag{5.14}$$

differenciálegyenlet „kanonikus” megoldását értjük. A „kanonikus” megoldás azt jelenti, hogy a megoldás alakja a lehető legegyszerűbb legyen, ami alatt az egyenletből levezethető, alternatív definícióként szolgáló,

$$I_\nu\left(x\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\left(x/2\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma\left(n+\nu+1\right)} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^\infty \frac{\left(x/2\right)^{2n}}{n!\,\Gamma\left(n+\nu+1\right)}$$

függvénysor együtthatóinak „egyszerűségét” értjük.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

5.35. Példa. Az $I_0(x) \stackrel{\circ}{=} 1/(2\pi)\int_0^{2\pi}\exp(x\cos\theta)\,d\theta$ megoldása a definícióban szereplő (5.14) módosított Bessel-egyenletnek.

A parametrikus integrál deriválási szabálya szerint

$$I_0'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\exp(x\cos\theta)\,d\theta,$$
$$I_0''(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^2\exp(x\cos\theta)\,d\theta.$$

Parciálisan integrálva

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\exp(x\cos\theta)\,d\theta = [\sin\theta\exp(x\cos\theta)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}x(\sin\theta)^2\exp(x\cos\theta)\,d\theta =$$
$$= x\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\exp(x\cos\theta)\,d\theta.$$

Ezt felhasználva azonnal látható, hogy $\nu = 0$ esetén a I_0 kielégíti a definiáló (5.14) egyenletet. Vegyük észre, hogy

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\exp(x\cos\theta)\,d\theta + \int_{\pi}^{2\pi}\exp(x\cos\theta)\,d\theta\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\exp(x\cos\theta)\,d\theta.$$

Ugyanakkor, vegyük észre, hogy $I_0(0) = 1$ és $I_0'(0) = 0$, amely értékek azonosak a függvénysor alapján kapható értékekkel. □

5.36. Lemma (Lamperti-azonosság)**.** *Tetszőleges $\nu \geq 0$ paraméter esetén*

$$\exp(w(t) + \nu\cdot t) = R^{(\nu)}\left(\int_0^t \exp(2(w(s) + \nu\cdot s))\,ds\right) \stackrel{\circ}{=} R^{(\nu)}(A^{\nu}(t)),$$

ahol $R^{(\nu)}$ egy alkalmas filtrációval és egy ezen a filtráción értelmezett alkalmas Wiener-folyamattal egy ν paraméterű Bessel-folyamat.

Bizonyítás. Az integrátor pozitivitása miatt az

$$A^{(\nu)}(t) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t \exp(2(w(s) + \nu\cdot s))\,ds$$

folyamat folytonosan deriválható és szigorúan monoton nő. A növekedés miatt a $\lim_{t\to\infty} A^{(\nu)}(t)$ határérték létezik és mivel a w majdnem minden trajektóriára egy végtelenbe tartó idősorozaton visszatér az origóba ezért a $\nu \geq 0$ feltétel miatt majdnem minden kimenetelre $A^{(\nu)}(t) \nearrow \infty$. Jelölje C az $A^{(\nu)}$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

inverzét. Az $A^{(\nu)}(t) \nearrow \infty$ miatt a $C(u)$ folyamat minden $u \geq 0$ esetén jól definiált. Vegyük észre, hogy

$$C(u) = \inf\left\{t \mid A^{(\nu)}(t) \geq u\right\} = \inf\left\{t \mid A^{(\nu)}(t) > u\right\}. \tag{5.15}$$

Az $A^{(\nu)}$ egy adaptált folytonos folyamat Riemann-integrálja, így könnyen látható, hogy maga is adaptált, így az $\omega \mapsto C(u,\omega)$ minden u-ra egy megállási idő. Ugyanakkor ha $t_1 \leq t_2$, akkor $C(t_1) \leq C(t_2)$, vagyis $\mathcal{F}_{C(t_1)} \subseteq \mathcal{F}_{C(t_2)}$. Ennek megfelelően a $\mathcal{G}_t \triangleq \mathcal{F}_{C(t)}$ filtráció értelmes. Az állítás igazolásához meg kell mutatni, hogy az

$$R(u) \triangleq \exp\left(w\left(C(u)\right) + \nu \cdot C(u)\right) \tag{5.16}$$

egy ν paraméterű Bessel-folyamat, ugyanis ilyenkor

$$\begin{aligned} R\left(A^{(\nu)}(t)\right) &= \exp\left(\left(w\left(C\left(A^{(\nu)}(t)\right)\right) + \nu \cdot C\left(A^{(\nu)}(t)\right)\right)\right) = \\ &= \exp\left(w(t) + \nu \cdot t\right), \end{aligned}$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.

Tekintsük a

$$B(t) \triangleq \int_0^{C(t)} \exp\left(w(s) + \nu \cdot s\right) dw(s) = I\left(C(t)\right)$$

folyamatot, ahol értelemszerűen $I(u) \triangleq \int_0^u \exp\left(w(s) + \nu s\right) dw(s)$. A B kvadratikus variációja

$$[B(t)] = [I]\left(C(t)\right) = \int_0^{C(t)} \exp\left(2\left(w(s) + \nu s\right)\right) ds = A^{(\nu)}\left(C(t)\right) = t.$$

Mivel az integrátor minden véges szakaszon eleme az $\mathcal{L}^2(w)$ térnek, ezért az I martingál. A megállási opciókról szóló tétel miatt, ha $s < t$ akkor

$$\mathbf{E}\left(I\left(C(t) \wedge T\right) \mid \mathcal{F}_{C(s)\wedge T}\right) = I\left(C(s) \wedge T\right)$$

így az $I\left(C(t) \wedge T\right)$ martingál a $\mathcal{G}$ filtrációra nézve. Ha τ_T jelöli azt az időpontot, ahol a C eléri a T szintet, akkor az $I\left(C(t) \wedge T\right) = I\left(C\left(t \wedge \tau_T\right)\right) = B\left(t \wedge \tau_T\right)$ egy $\mathcal{G}$-martingál, következésképpen a B lokális martingál a $\mathcal{G}$-re nézve. Így a Lévy-féle karakterizációs tétel miatt a B Wiener-folyamat a

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$\mathcal{G}_t \triangleq \mathcal{F}_{C(t)}$ filtrációra nézve. Az Itô-formula szerint

$$\begin{aligned}
&\exp\left(w\left(t\right)+\nu t\right)-1=\\
&=\int_0^t \exp\left(w\left(s\right)+\nu s\right) d\left(w\left(s\right)+\nu s\right)+\frac{1}{2}\int_0^t \exp\left(w\left(s\right)+\nu s\right) ds=\\
&=\int_0^t \exp\left(w\left(s\right)+\nu s\right) dw\left(s\right)+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\int_0^t \exp\left(w\left(s\right)+\nu s\right) ds=\\
&=\int_0^t \exp\left(w\left(s\right)+\nu s\right) dw\left(s\right)+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{\exp\left(2\left(w\left(s\right)+\nu s\right)\right)}{\exp\left(w\left(s\right)+\nu s\right)} ds=\\
&=\int_0^t \exp\left(w\left(s\right)+\nu s\right) dw\left(s\right)+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{dA^{(\nu)}\left(s\right)}{\exp\left(w\left(s\right)+\nu s\right)}.
\end{aligned}$$

Ebből $t = C\left(u\right)$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}
R\left(u\right) &\triangleq \exp\left(w\left(C\left(u\right)\right)+\nu C\left(u\right)\right)= \qquad (5.17)\\
&= 1+B\left(u\right)+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\int_0^{C(u)} \frac{dA^{(\nu)}\left(s\right)}{\exp\left(w\left(s\right)+\nu s\right)}=\\
&= 1+B\left(u\right)+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\int_0^{u} \frac{dA^{(\nu)}\left(C\left(s\right)\right)}{\exp\left(w\left(C\left(s\right)\right)+\nu C\left(s\right)\right)}=\\
&= 1+B\left(u\right)+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\int_0^{u} \frac{ds}{R\left(s\right)},
\end{aligned}$$

vagyis az R éppen a kívánt folyamat, ugyanis az Itô-formula miatt

$$\begin{aligned}
R^2\left(u\right)-R^2\left(0\right) &= 2\int_0^u R\left(s\right) d\left(R\left(s\right)\right)+\left[R\right]\left(u\right)=\\
&= 2\int_0^u R\left(s\right) dB\left(s\right)+2\left(\nu+\frac{1}{2}\right)u+u\\
&= 2\int_0^u R\left(s\right) dB\left(s\right)+2\left(\nu+1\right)u,
\end{aligned}$$

ami éppen a $\delta = 2\left(\nu+1\right)$ paraméterű négyzetes Bessel-folyamat (5.13) sztochasztikus differenciálegyenlete. □

5.37. Lemma. *Ha $\nu \geq 0$, akkor tetszőleges K esetén*

$$\begin{aligned}
\tau_K &\triangleq \inf\left\{t \mid A^{(\nu)}\left(t\right) \geq K\right\} \triangleq C\left(K\right)= \qquad (5.18)\\
&= \int_0^K \frac{1}{\left(R^{(\nu)}\left(u\right)\right)^2} du.
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. $C(K) = \left(A^{(\nu)}\right)^{-1}(K)$. Az inverz függvény deriválási szabálya és az R folyamat (5.17) definíciója miatt

$$\tau_K = C(K) = C(K) - C(0) = \int_0^K C'(u)\,du =$$
$$= \int_0^K \frac{1}{\left(A^{(\nu)}\right)'(C(u))}du = \int_0^K \frac{1}{\exp\left(2\left(\nu C(u) + w\left(C(u)\right)\right)\right)}du =$$
$$= \int_0^K \frac{1}{\left(R^{(\nu)}(u)\right)^2}du. \quad \square$$

5.38. Lemma. *Ha $\nu \geq 0$, akkor az $R^{(\nu)}$ Markov-folyamat átmenetvalószínűségének sűrűségfüggvénye*

$$p_t(x,y) = \frac{y}{t}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right), \tag{5.19}$$

ahol $x, y, t > 0$.

Bizonyítás. A bizonyítást több lépésben végezhetjük el.

1. Első lépésként megmutatjuk, hogy ha X_1 egy x_1 pontból elindított δ_1 paraméterű, X_2 az X_1-től független, az x_2 pontból elindított, δ_2 paraméterű négyzetes Bessel-folyamat, akkor az X_1+X_2 egy az x_1+x_2 pontból elindított, $\delta_1+\delta_2$ paraméterű négyzetes Bessel-folyamat, legalábbis ha az alapul vett valószínűségi mező elég bő. Nyilván az $X \stackrel{\circ}{=} X_1 + X_2$ kielégíti a

$$X(t) = x_1 + x_2 + (\delta_1+\delta_2)\,t + 2\left(\int_0^t \sqrt{X_1(s)}dw_1(s) + \int_0^t \sqrt{X_2(s)}dw_2(s)\right)$$

egyenletet. Legyen w_3 egy a w_1 és w_2 folyamatoktól független folyamat[5]. Vezessük be a

$$w_4(t) \stackrel{\circ}{=} \int_0^t \chi(X(s)>0)\,\frac{\sqrt{X_1(s)}dw_1(s) + \sqrt{X_2(s)}dw_2(s)}{\sqrt{X(s)}},$$
$$w(t) \stackrel{\circ}{=} w_4(t) + \int_0^t \chi(X(s)=0)\,dw_3(s)$$

folyamatokat. A Bessel-folyamatok definíció szerint nem negatív-folyamatok, így

$$\chi(X(s)>0)\sqrt{X_k/X} \leq 1,$$

[5] Ha $\delta_1, \delta_2 > 0$, akkor a megfelelő Bessel-folyamat zérus helyeinek Lebesgue-mértéke nulla, így ilyenkor a w_3 bevezetése szükségtelen.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

így a w definíciójában szereplő sztochasztikus integrálok léteznek és nyilvánvalóan lokális martingált alkotnak. Mivel a X_1 és a X_2 független folyamatok, ezért a $\int_0^t \sqrt{X_1} dw_1$ és $\int_0^t \sqrt{X_2} dw_2$ lokális martingálok is függetlenek, így a kereszetvariációjuk nulla. Mivel

$$\frac{\sqrt{X_k}}{\sqrt{X}} \bullet w_k = \frac{1}{\sqrt{X}} \bullet \left(\sqrt{X_k} \bullet w_k \right)$$

a polaritási szabály alapján

$$\begin{aligned}
[w_4](t) &= \int_0^t \chi(X(s) > 0) \frac{X_1(s)}{X(s)} ds + \int_0^t \chi(X(s) > 0) \frac{X_2(s)}{X(s)} ds + \\
&\quad + 2 \int_0^t \chi(X(s) > 0) \frac{1}{X(s)} d\left[\sqrt{X_1} \bullet w_1, \sqrt{X_2} \bullet w_2 \right] = \\
&= \int_0^t \chi(X(s) > 0) ds.
\end{aligned}$$

Ebből következően a w Wiener-folyamat és az X kielégíti a definiáló (5.13) egyenletet.

2. Második lépésként megmutatjuk, hogy az (x, δ) paraméterű négyzetes Bessel-folyamat Laplace-transzformáltja a t időpontban

$$L(x, \delta, \lambda, t) = \frac{1}{(1 + \lambda t)^{\delta/2}} \exp\left(-\frac{\lambda x}{1 + 2\lambda t} \right).$$

Független valószínűségi változók összegének Laplace-transzformáltja éppen a Laplace-transzformáltak szorzata. Ebből következően, felhasználva az (x, δ) szerinti additivitási tulajdonságot, valamint, hogy az $f(x + y) = f(x) f(y)$ Cauchy-egyenlet egyetlen folytonos megoldása az exponenciális függvény

$$\begin{aligned}
L(x, \delta, \lambda, t) &= L(x,0, \lambda, t) \cdot L(0, \delta, \lambda, t) = \\
&= L^x(1,0, \lambda, t) \cdot L^\delta(0,1, \lambda, t).
\end{aligned}$$

A (0,1) pár esetén az egyenlet

$$X^2(t) = t + 2 \int_0^t X(s) dw.$$

Ugyanakkor az $(x,0)$ pár esetén az egyenlet

$$X^2(t) = x + 2 \int_0^t X dw,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

amely éppen az $(x,1)$ és a $(0,1)$ párhoz tartozó egyenletek különbsége. Elegendő tehát kiszámolni tetszőleges $x \geq 0$ esetén az $(x,1)$ párhoz tartozó megoldást, vagyis az

$$X^2(t) = x + t + 2\int_0^t X dw, \quad x \geq 0$$

egyenlet megoldását. Vegyük észre, hogy X éppen az x pontból indított Wiener-folyamat. Ilyenkor a $Q(t) = X^2(t)$ eloszlása $N^2\left(\sqrt{x}, \sqrt{t}\right)$. Ez utóbbi eloszlás Laplace-transzformáltja

$$L(x,1,t,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda t}} \exp\left(-\frac{\lambda x}{1+2\lambda t}\right).$$

Ennek belátása a következő: A kiszámolandó integrál

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty \exp(-\lambda u)\exp\left(-\frac{\left(\sqrt{u}-\sqrt{x}\right)^2}{2t}\right)\frac{1}{2\sqrt{u}}du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u(1+2t\lambda)+x-2\sqrt{ux}}{2t}\right)\frac{1}{2\sqrt{u}}du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u(1+2t\lambda)+\frac{x}{1+2t\lambda}-2\sqrt{ux}}{2t}\right)\frac{1}{2\sqrt{u}}\exp\left(\frac{\frac{x}{1+2t\lambda}-x}{2t}\right)du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{\lambda x}{1+2\lambda t}\right)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\left(\sqrt{u(1+2t\lambda)}-\sqrt{\frac{x}{1+2t\lambda}}\right)^2}{2t}\right)\frac{1}{2\sqrt{u}}du =$$

$$= \exp\left(-\frac{\lambda x}{1+2\lambda t}\right)\frac{1}{\sqrt{1+2t\lambda}}.$$

Következésképpen

$$L(x,\delta,t,\lambda) = \frac{1}{(1+2\lambda t)^{\delta/2}}\exp\left(-\frac{\lambda x}{1+2\lambda t}\right).$$

3. Harmadik lépésként vegyük észre, hogy a Laplace-transzformációban az első

$$\frac{1}{(1+2\lambda t)^{\delta/2}}$$

tényező éppen egy $\Gamma(\delta/2,1/(2t))$ gamma eloszlású változó Laplace-transzformáltja[6], a második

$$\exp\left(-\frac{\lambda x}{1+2\lambda t}\right) = \exp\left(\frac{x}{2t}\left(\frac{1}{1+2\lambda t}-1\right)\right)$$

[6] Mivel csak a $\nu \geq 0$ esettel foglalkozunk, feltehetjük, hogy $\delta > 0$.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

tag egy olyan összetett Poisson-eloszlás, ahol a keverő Poisson-eloszlás paramétere $x/(2t)$ a keveredő exponenciális paramétere pedig $1/(2t)$. Ebből a keresett eloszlás éppen $x/(2t)$ paraméterű Poisson-eloszlás szerinti keverése $\Gamma(\delta/2+n,1/(2t))$ eloszlásoknak. A sűrűségfüggvényeket beírva a Bessel-függvény függvénysora alapján a négyzetes Bessel-folyamat átmenetvalószínűség függvénye

$$\begin{aligned} q_t(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2t)^{n+\delta/2}\, y^{n+\delta/2-1}}{\Gamma(n+\delta/2)} \exp\left(-\frac{y}{2t}\right) \frac{(x/(2t))^n}{n!} \exp\left(-\frac{x}{2t}\right) = \\ &= y^{\delta/2-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{xy}\right)^{2n}}{(2t)^{2n+\delta/2}\,\Gamma(n+\delta/2)\,n!} \exp\left(-\frac{x+y}{2t}\right) = \\ &= \frac{1}{2t}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu/2} \exp\left(-\frac{x+y}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{\sqrt{xy}}{t}\right). \end{aligned}$$

4. Utolsó lépésként a sűrűségfüggvényben mindenhol az x helyébe x^2-et teszünk az y szerint pedig érvényesítjük a gyökvonás transzformációt

$$p_t(x,y) = \frac{1}{2t}\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) 2y. \qquad \square$$

5.39. Lemma. *Ha $\lambda \geq 0$, akkor az $x>0$ pontból elindított $R^{(0)}$ Bessel-folyamat esetén*

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(-\lambda \int_0^t \frac{1}{\left(R^{(0)}(u)\right)^2} du\right) \mid R^{(0)}(t) = y\right) = \frac{I_{\sqrt{2\lambda}}}{I_0}\left(\frac{xy}{t}\right). \qquad (5.20)$$

Bizonyítás. A bizonyítás ismételten több lépésből áll.

1. Első lépésként megmutatjuk, hogy minden véges időszakaszon a tetszőleges $x>0$ pontból elindított $\nu \geq 0$ paraméterű $R^{(\nu)}$ Bessel-folyamat eloszlása ekvivalens az ugyancsak az x pontból elindított $R^{(0)}$ eloszlásával és a Radon-Nikodym derivált folyamat

$$\Lambda(t) = \left(\frac{R^{(0)}(t)}{x}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{1}{\left(R^{(0)}(u)\right)^2} du\right).$$

Emlékeztetünk, hogy sztochasztikus folyamatok esetén eloszláson a trajektóriák terén értelmezett olyan mértéket értünk, amelyre nézve a koordinátaleképezés éppen a megfelelő típusú folyamat. Ennek megfelelően az $R^{(0)}$ éppen a folytonos függvények terén értelmezett koordinátaleképezés. Az $R^{(0)}$ folyamat éppen a kétdimenziós Wiener-folyamat hosszát megadó folyamat,

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

és mint ilyen, majdnem minden trajektóriára pozitív, és alkalmas Wiener-folyamattal kielégíti az

$$R^{(0)}(t) = x + w(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{R^{(0)}(s)} ds \tag{5.21}$$

egyenletet. A parciális integrálás formulája szerint

$$\Lambda(t) - \Lambda(0) = \int_0^t \left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{\nu} d \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^u \frac{1}{\left(R^{(0)}(s)\right)^2} ds\right) + \\ + \int_0^t \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{1}{\left(R^{(0)}(u)\right)^2} du\right) d\left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{\nu}.$$

Az első integrálban az integrátor folytonosan deriválható, így az értéke

$$-\nu^2 \int_0^t \left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{1}{\left(R^{(0)}(u)\right)^2} du\right) \frac{1}{2\left(R^{(0)}(u)\right)^2} du.$$

Az Itô-formula szerint

$$d\left(R^{(0)}\right)^{\nu} = \nu\left(R^{(0)}\right)^{\nu-1} dR^{(0)} + \frac{1}{2}\nu(\nu-1)\left(R^{(0)}\right)^{\nu-2} d\left[R^0\right].$$

Felhasználva, hogy a bemutatott (5.21) sor miatt $\left[R^{(0)}\right](t) = t$

$$\begin{aligned}
&\Lambda(t) - \Lambda(0) = \\
&= -\nu^2 \int_0^t \left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{\nu} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{1}{\left(R^{(0)}(u)\right)^2} du\right) \frac{1}{2\left(R^{(0)}(u)\right)^2} du + \\
&\quad + \nu \int_0^t \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{1}{R^{(0)}(u)} du\right) \left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{\nu} \frac{1}{R^{(0)}(u)} dR^{(0)}(u) + \\
&\quad + \nu(\nu-1)\int_0^t \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{1}{R^{(0)}(u)} du\right) \left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{\nu} \frac{1}{2\left(R^{(0)}(u)\right)^2} du = \\
&= -\nu^2 \int_0^t \Lambda(u) \frac{1}{2\left(R^{(0)}(u)\right)^2} du + \nu \int_0^t \Lambda(u) \frac{1}{R^{(0)}(u)} dR^{(0)}(u) + \\
&\quad + \nu(\nu-1)\int_0^t \Lambda(u) \frac{1}{2\left(R^{(0)}(u)\right)^2}(u)\, du,
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ami az asszociativitási szabály és a már használt (5.21) sor alapján éppen

$$\begin{aligned}\Lambda(t)-\Lambda(0) &= \nu\int_0^t \Lambda(u)\,\frac{1}{R^{(0)}(u)}dR^{(0)}(u)-\nu\int_0^t \Lambda(u)\,\frac{1}{2\left(R^{(0)}(u)\right)^2}(u)\,du= \\ &= \nu\int_0^t \Lambda(u)\,\frac{1}{R^{(0)}(u)}d\left(R^0(u)-\frac{1}{2}\int_0^u \frac{1}{R^{(0)}(s)}ds\right)= \\ &= \nu\int_0^t \Lambda(u)\,\frac{1}{R^{(0)}(u)}dw(u)\,.\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy az integrandus minden t-re eleme az $\mathcal{L}^2(w)$ térnek, vagyis a Λ valódi martingál.

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left(\nu\Lambda(u)\,\frac{1}{R^{(0)}(u)}\right)^2 du= \\ &= \int_0^t \left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{2\nu}\frac{d}{du}\left(-\exp\left(-\nu^2\int_0^u \frac{1}{\left(R^{(0)}(s)\right)^2}ds\right)\right)du\le \\ &\le \max_{0\le u\le t}\left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{2\nu}\int_0^t\left|\frac{d}{du}\left(-\exp\left(-\nu^2\int_0^u \frac{1}{\left(R^{(0)}(s)\right)^2}ds\right)\right)\right|du\le \\ &\le \max_{0\le u\le t}\left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{2\nu}\exp\left(-\nu^2\int_0^u \frac{1}{\left(R^{(0)}(s)\right)^2}ds\right)\le \max_{0\le u\le t}\left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{2\nu}.\end{aligned}$$

A Hölder-egyenlőtlenség alapján tetszőleges $r>1$ esetén

$$\mathbf{E}\left(\max_{0\le u\le t}\left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{2\nu}\right)\le\sqrt[r]{\mathbf{E}\left(\max_{0\le u\le t}\left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{2\nu r}\right)},$$

így elég megmutatni, hogy egy alkalmas $p>1$ esetén

$$\mathbf{E}\left(\max_{0\le u\le t}\left(\frac{R^{(0)}(u)}{x}\right)^{2p}\right)<\infty.$$

Az $\left(R^{(0)}\right)^2$ éppen két független Wiener-folyamat négyzetének összege, ezért szubmartingál, így az állítás a Doob-egyenlőtlenség, illetve a normális eloszlás momentumainak végességének közvetlen következménye. A Λ tehát pozitív martingál. Ugyanakkor ha a Λ-val mértékcserét végzünk, akkor Girszanov tétele alapján a

$$\begin{aligned}\widehat{w} &= w-\Lambda^{-1}\bullet[\Lambda,w]=w-\Lambda^{-1}\bullet\left[\nu\Lambda\frac{1}{R^{(0)}}\bullet w,w\right]= \\ &= w-\Lambda^{-1}\bullet\left(\nu\Lambda\frac{1}{R^{(0)}}\bullet[w,w]\right)=w-\frac{\nu}{R^{(0)}}\bullet[w]\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Wiener-folyamat az új mérték alatt. De a koordinátaleképezés az eredeti mérték alatt kielégíti a fenti (5.21) azonosságot, tehát

$$\begin{aligned} R^{(0)}(t) &= x + w(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{R^{(0)}(u)}du = \\ &= x + \widehat{w}(t) + \int_0^t \frac{\nu}{R^{(0)}(u)}du + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{R^{(0)}(u)}du = \\ &= x + \widehat{w}(t) + \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{1}{R^{(0)}(u)}du, \end{aligned}$$

vagyis a koordinátaleképezés az új mérték alatt $R^{(\nu)}$ eloszlású folyamat.

2. Legyen $\nu \triangleq \sqrt{2\lambda}$, vagyis $\lambda = \nu^2/2$. Az átmenetvalószínűség képlete alapján tetszőleges f Borel-mérhető függvény esetén

$$\mathbf{E}\left(f\left(R^{(0)}(t)\right)\exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{1}{\left(R^{(0)}(s)\right)^2}ds\right)\right) =$$

$$= \int_0^\infty f(y)\,\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{1}{\left(R^{(0)}(s)\right)^2}ds\right) \mid R^{(0)}(t) = y\right) p_t^{(0)}(x,y)\,dy.$$

De ez egyúttal

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left(f\left(R^{(0)}(t)\right)\left(\frac{x}{R^{(0)}(t)}\right)^\nu\left(\frac{R^{(0)}(t)}{x}\right)^\nu \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{1}{\left(R^{(0)}(s)\right)^2}ds\right)\right) = \\ &\quad = \mathbf{E}^{(\nu)}\left(f\left(R^{(0)}(t)\right)\left(\frac{x}{R^{(0)}(t)}\right)^\nu\right) = \int_0^\infty f(y)\left(\frac{x}{y}\right)^\nu p_t^{(y)}(x,y)\,dy = \\ &\quad = \int_0^\infty f(y)\,\frac{I_\nu(xy/t)}{I_0(xy/t)}p_t^{(0)}(x,y)\,dy, \end{aligned}$$

amiből, mivel az f tetszőleges,

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\int_0^t \frac{1}{\left(R^{(0)}(s)\right)^2}ds\right) \mid R^{(0)}(t) = y\right) = \frac{I_\nu(xy/t)}{I_0(xy/t)}. \qquad \square$$

5.40. Lemma. *Legyen σ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Tetszőleges ν esetén az $A^{(\nu)}(\sigma)$ eloszlása $\xi/2\eta$ alakú, ahol a ξ egy $(1,\alpha)$ paraméterű béta és az η egy tőle független $(\beta,1)$ paraméterű gamma eloszlású valószínűségi változó, és ahol*

$$\alpha \triangleq \frac{\gamma+\nu}{2}, \quad \beta \triangleq \frac{\gamma-\nu}{2},$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

illetve

$$\gamma \stackrel{\circ}{=} \sqrt{2\lambda + \nu^2}.$$

Az $A^{(\nu)}(\sigma)$ *sűrűségfüggvénye*

$$h(y) = \frac{\lambda}{(2y)^{\beta+1}\,\Gamma(\beta+1)} \int_0^1 \exp\left(-\frac{u}{2y}\right) u^{\beta} (1-u)^{\alpha-1}\, du. \tag{5.22}$$

Bizonyítás. A bizonyítást több lépésre bontjuk.

1. Először számoljuk ki az $\left(\exp(\nu\cdot\sigma + w(\sigma)), A^{(\nu)}(\sigma)\right)$ pár eloszlásának sűrűségfüggvényét. Ehhez elegendő meghatározni azt a $h(x,y)$ függvényt, amelyre tetszőleges $f, g \geq 0$ Borel-mérhető függvényekre

$$\mathbf{E}\left(f\left(\exp(\nu\cdot\sigma + w(\sigma))\right) g\left(A^{(\nu)}(\sigma)\right)\right) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\, g(y)\, h(x,y)\, dxdy.$$

A Girszanov-tétel alapján ha

$$\Lambda(t) = \exp\left(-\nu w(t) - \frac{\nu^2}{2}t\right),$$

akkor az új mérték alatt

$$\widehat{w}(t) \stackrel{\circ}{=} w(t) + \nu\cdot t$$

Wiener-folyamat az új mérték mellett. Ebből

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(f\left(\exp(\nu\cdot t + w(t))\right)\cdot g\left(A^{(\nu)}(t)\right)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(f\left(\exp(\nu\cdot t + w(t))\right)\cdot g\left(A^{(\nu)}(t)\right)\cdot \Lambda^{-1}(t)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(f\left(\exp(\widehat{w}(t))\right)\cdot g\left(\int_0^t \exp(2\widehat{w}(t))\right)\cdot \Lambda^{-1}(t)\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(f\left(\exp(\widehat{w}(t))\right)\cdot g\left(\int_0^t \exp(2\widehat{w}(t))\right)\cdot \exp\left(\nu\left(w(t) + \frac{\nu}{2}t\right)\right)\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}t\right)\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(f\left(\exp(\widehat{w}(t))\right)\cdot g\left(A^{(0)}(t)\right)\cdot \exp(\nu\widehat{w}(t))\right).
\end{aligned}$$

A teljes valószínűség tétele alapján, felhasználva, hogy a σ független a w Wiener-folyamattól

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left(f\left(\exp(\nu\cdot\sigma + w(\sigma))\right)\cdot g\left(A^{(\nu)}(\sigma)\right)\right) = \\
&= \int_0^{\infty} \mathbf{E}\left(f\left(\exp(\nu\cdot\sigma + w(\sigma))\right)\cdot g\left(A^{(\nu)}(\sigma)\right) \mid \sigma = t\right)\lambda\exp(-\lambda t)\, dt = \\
&= \lambda\int_0^{\infty} \mathbf{E}\left(f\left(\exp(\nu\cdot t + w(t))\right)\cdot g\left(A^{(\nu)}(t)\right)\right)\exp(-\lambda t)\, dt.
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A $\gamma \triangleq \sqrt{2\lambda+\nu^2}$ definíciót beírva és az integrálokat felcserélve a keresett várható érték

$$\lambda \mathbf{E}^{\mathbf{R}} \left(\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma^2 t}{2}\right) f\left(\exp\left(\widehat{w}\left(t\right)\right)\right) g\left(A^{(0)}\left(t\right)\right) \exp\left(\nu \widehat{w}\left(t\right)\right) dt \right).$$

Kimenetelenként $t = C^{(0)}(u)$ helyettesítést végezve

$$\lambda \mathbf{E}^{\mathbf{R}} \left(\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma^2 C^{(0)}}{2}\right) f\big(\exp(\widehat{w}(C^{(0)}))\big) g\big(A^{(0)}(C^{(0)})\big) \exp\big(\nu \widehat{w}(C^{(0)})\big) dC^0 \right).$$

Kihasználva, hogy $\exp\left(\widehat{w}\left(C^{(0)}\left(u\right)\right)\right) = R^0\left(u\right)$ és $A^{(0)}\left(C^{(0)}\left(u\right)\right) = u$

$$\lambda \mathbf{E}^{\mathbf{R}} \left(\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma^2 C^{(0)}\left(u\right)}{2}\right) f\left(R^{(0)}\left(u\right)\right) g\left(u\right) \left(R^{(0)}\left(u\right)\right)^{\nu} dC^{(0)}\left(u\right) \right).$$

A korábban belátott (5.18) sor szerint

$$C^{(0)}\left(u\right) = \int_0^u \frac{1}{\left(R^{(0)}\left(u\right)\right)^2} du,$$

amit beírva

$$\lambda \mathbf{E}^{\mathbf{R}} \left(\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\gamma}{2}^2 \int_0^u \frac{1}{\left(R^{(0)}\left(u\right)\right)^2} du \right) f\big(R^{(0)}(u)\big) g(u) \big(R^{(0)}(u)\big)^{\nu-2} du \right).$$

Az integrálokat felcserélve

$$\lambda \int_0^\infty g\left(u\right) \mathbf{E}^{\mathbf{R}} \left(\exp\left(-\frac{\gamma}{2}^2 \int_0^u \frac{1}{\left(R^{(0)}\left(u\right)\right)^2} du \right) f\big(R^{(0)}(u)\big) \big(R^{(0)}(u)\big)^{\nu-2} \right) du.$$

Az $R^{(0)}$ szerint feltételes várható értéket számolva és az integrálos tényező helyébe a kiszámolt (5.20) feltételes várható értéket beírva és felhasználva, hogy a konstrukció szerint $R^{(0)}\left(0\right) = 1$

$$\lambda \int_0^\infty g\left(u\right) \int_0^\infty \frac{I_\gamma\left(1 \cdot r/u\right)}{I_0\left(1 \cdot r/u\right)} f\left(r\right) r^{\nu-2} p_u^{(0)}\left(1, r\right) dr du.$$

A $p_u^{(0)}$ (5.19) képletét beírva

$$\lambda \int_0^\infty g\left(u\right) \int_0^\infty \frac{I_\gamma\left(r/u\right)}{I_0\left(r/u\right)} f\left(r\right) r^{\nu-2} \frac{r}{u} \exp\left(-\frac{r^2+1}{2u}\right) I_0\left(\frac{r}{t}\right) dr du =$$
$$= \lambda \int_0^\infty \frac{g\left(u\right)}{u} \int_0^\infty I_\gamma\left(\frac{r}{u}\right) f\left(r\right) r^{\nu-1} \exp\left(-\frac{r^2+1}{2u}\right) dr du.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Amiből az együttes sűrűségfüggvény

$$h(x,y)=\frac{\lambda}{y}I_{\gamma}\left(\frac{x}{y}\right)x^{\nu-1}\exp\left(-\frac{x^2+1}{2y}\right).$$

2. Vezessük be az

$$M(a,b,z)\stackrel{\circ}{=}{}_1F_1(a,b,z)\stackrel{\circ}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(b)_n\,n!}z^n$$

úgynevezett konfluens hipergeometrikus függvényeket, ahol tetszőleges c esetén

$$(c)_n\stackrel{\circ}{=}c(c+1)\ldots(c+n-1).$$

Ha $b>a>0$, akkor érvényes az úgynevezett integrálreprezentációs tétel:

$$M(a,b,x)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1\exp(xu)\,u^{a-1}(1-u)^{b-a-1}\,du.$$

Ezt igazolandó írjuk be az exponenciális függvény hatványsorát és cseréljük fel az összegzést és az integrálást

$$\begin{aligned}I(a,b,x)&\stackrel{\circ}{=}\int_0^1\exp(xu)\,u^{a-1}(1-u)^{b-a-1}\,du=\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\int_0^1u^{a+n-1}(1-u)^{b-a-1}\,du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}B(a+n,b-a),\end{aligned}$$

ahol B a béta függvény. A béta függvényt a gamma függvénnyel kifejezve és használva a $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ azonosságot

$$\begin{aligned}I(a,b,x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b+n)}=\Gamma(b-a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{(a_n)\Gamma(a)}{(b)_n\Gamma(b)}=\\&=\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}{\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\frac{(a_n)}{(b)_n}=\frac{\Gamma(b-a)\Gamma(a)}{\Gamma(b)}M(a,b,x).\end{aligned}$$

Ebből az összefüggés már evidens. Az alábbi számolás során szükségünk lesz a $b>a>0$ esetben érvényes

$$\exp(-z)\,M(a,b,z)=M(b-a,b,-z)$$

úgynevezett Kummer-transzformációra. $v=1-u$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}I(a,b,x)&=\int_0^1\exp(x(1-v))(1-v)^{a-1}v^{b-a-1}dv=\\&=\exp(x)\int_0^1\exp(-xv)(1-v)^{a-1}v^{b-a-1}dv=\\&=\exp(x)\,I(b-a,b,-x),\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

amiből az azonosság evidens.

3. Következő lépésként számoljuk ki az $A^{(\nu)}(\sigma)$ sűrűségfüggvényét. Ennek értéke $\int_0^\infty h(x,y)\,dx$. Írjuk be a Bessel-függvény

$$I_\gamma\left(\frac{x}{y}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2y)^{\gamma+2n}}{n!\,\Gamma(n+\gamma+1)}$$

függvénysorát, majd a Fubini-tétellel cseréljük fel az összegzést és az integrálást

$$\int_0^\infty h(x,y)\,dx=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty\frac{x^{\nu-1}}{y}\frac{(x/2y)^{\gamma+2n}}{n!\,\Gamma(n+\gamma+1)}\exp\left(-\frac{x^2+1}{2y}\right)dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda\exp(-1/(2y))}{n!\,\Gamma(n+\gamma+1)(2y)^{2n+\gamma+1}}\int_0^\infty x^{2n+\gamma+\nu-1}\exp\left(-\frac{x^2}{2y}\right)dx=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda\exp(-1/(2y))}{n!\,\Gamma(n+\gamma+1)(2y)^{2n+\gamma+1}}\frac{1}{2}\int_0^\infty u^{n+(\gamma+\nu)/2-1}\exp\left(-\frac{u}{2y}\right)du=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda\exp(-1/2y)}{n!\,\Gamma(n+\gamma+1)(2y)^{2n+\gamma+1}}\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{\gamma+\nu}{2}\right)(2y)^{n+\frac{\gamma+\nu}{2}}=$$

$$=\lambda\exp(-1/2y)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+(\gamma+\nu)/2)}{n!\,\Gamma(n+1+\gamma)}\frac{1}{(2y)^{n+(\gamma-\nu)/2+1}}.$$

A $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ azonosságot használva

$$\Gamma\left(n+\frac{\gamma+\nu}{2}\right)=\left(\frac{\gamma+\nu}{2}\right)_n\cdot\Gamma\left(\frac{\gamma+\nu}{2}\right),$$
$$\Gamma(n+1+\gamma)=(\gamma+1)_n\cdot\Gamma(\gamma+1).$$

Következésképpen az M jelöléssel a sűrűségfüggvény

$$\frac{\lambda\exp(-1/(2y))}{(2y)^{(\gamma-\nu)/2+1}}\frac{\Gamma((\gamma+\nu)/2)}{\Gamma(1+\gamma)}M\left(\frac{\gamma+\nu}{2},\gamma+1,\frac{1}{2y}\right).$$

A Kummer-transzformáció szerint a sűrűségfüggvény

$$\frac{\lambda}{(2y)^{(\gamma-\nu)/2+1}}\frac{\Gamma((\gamma+\nu)/2)}{\Gamma(1+\gamma)}M\left(\frac{\gamma-\nu}{2}+1,\gamma+1,-\frac{1}{2y}\right).$$

Az integrálreprezentációs tétel miatt a sűrűségfüggvény

$$\frac{\lambda}{(2y)^{(\gamma-\nu)/2+1}}\frac{\Gamma((\gamma+\nu)/2)}{\Gamma(1+\gamma)}\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma((\gamma-\nu)/2+1)\,\Gamma((\gamma+\nu)/2)}\times$$
$$\times\int_0^1\exp\left(-\frac{u}{2y}\right)u^{\frac{\gamma-\nu}{2}}(1-u)^{\frac{\gamma+\nu}{2}-1}\,du$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ami éppen

$$\frac{\lambda}{(2y)^{(\gamma-\nu)/2+1}\,\Gamma\left((\gamma-\nu)/2+1\right)}\int_0^1 \exp\left(-\frac{u}{2y}\right) u^{\frac{\gamma-\nu}{2}}\,(1-u)^{\frac{\gamma+\nu}{2}-1}\,du.$$

Vezessük be az

$$\alpha \triangleq \frac{\gamma+\nu}{2}, \quad \beta \triangleq \frac{\gamma-\nu}{2}$$

jelöléseket. Ekkor a sűrűségfüggvény

$$\frac{\lambda}{(2y)^{\beta+1}\,\Gamma(\beta+1)}\int_0^1 \exp\left(-\frac{u}{2y}\right) u^{\beta}\,(1-u)^{\alpha-1}\,du \tag{5.23}$$

alakra egyszerűsödik. Ez éppen a lemmában szereplő (5.22) függvény.

4. Legyen végül ξ béta eloszlású $(1,\alpha)$ paraméterekkel és legyen η gamma eloszlású $(\beta,1)$ paraméterekkel. A 2η sűrűségfüggvénye

$$g(y) = \frac{(y/2)^{\beta-1}}{2\cdot\Gamma(\beta)}\exp\left(-\frac{y}{2}\right), \quad y>0.$$

A ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}(1-x)^{\alpha-1} = \alpha(1-x)^{\alpha-1} \quad ,0<x<1.$$

A hányados sűrűségfüggvényének képlete alapján

$$\begin{aligned}
h(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(uz)\,g(u)\,|u|\,du = \\
&= \frac{\alpha}{2\Gamma(\beta)}\int_0^{1/z}(1-zu)^{\alpha-1}\left(\frac{u}{2}\right)^{\beta-1}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)u du = \\
&= \frac{\alpha}{2^{\beta}\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}\left(\frac{v}{z}\right)^{\beta}\exp\left(-\frac{v}{2z}\right)\frac{1}{z}dv = \\
&= \frac{\alpha}{2^{\beta}z^{\beta+1}\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}v^{\beta}\exp\left(-\frac{v}{2z}\right)dv.
\end{aligned}$$

Mivel $\gamma \triangleq \sqrt{2\lambda+\nu^2}$, vagyis $\dfrac{\gamma^2-\nu^2}{2} = 2\alpha\beta = \lambda$, ezért

$$\begin{aligned}
h(z) &= \frac{2\alpha\beta}{2^{\beta+1}z^{\beta+1}\beta\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}v^{\beta}\exp\left(-\frac{v}{2z}\right)dv = \\
&= \frac{\lambda}{(2z)^{\beta+1}\,\Gamma(\beta+1)}\int_0^1(1-y)^{\alpha-1}y^{\beta}\exp\left(-\frac{y}{2z}\right)dy,
\end{aligned}$$

ami éppen megegyezik a levezetett (5.23) sűrűségfüggvénnyel. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A tétel bizonyítása. A kiszámolandó Laplace-transzformáció képlete

$$\int_0^\infty \exp(-\lambda T)\,\mathbf{E}\left(\left(A^{(\nu)}(T)-K\right)^+\right)dT=\frac{1}{\lambda}\mathbf{E}\left(A^{(\nu)}(\sigma)-K\right)^+,$$

ahol σ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású változó. Az $A^{(\nu)}(\sigma)$ korábban kiszámolt (5.22) sűrűségfüggvényét beírva

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^\infty (z-K)^+\frac{1}{(2z)^{\beta+1}}\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}v^\beta\exp\left(-\frac{v}{2z}\right)dvdz.$$

Egyszerűsítve és a $\lambda=2\alpha\beta$ kifejezést beírva

$$\frac{2\alpha\beta 2^{-\beta-1}}{\lambda\Gamma(\beta+1)}\int_0^1\int_K^\infty (z-K)\frac{1}{z^{\beta+1}}(1-v)^{\alpha-1}v^\beta\exp\left(-\frac{v}{2z}\right)dzdv.$$

$z=vK/u$ helyettesítéssel

$$\frac{\alpha 2^{1-\beta}}{2\lambda\Gamma(\beta)}\int_0^1(1-v)^{\alpha-1}v^\beta\int_0^v\left(\frac{Kv}{u}-K\right)\left(\frac{vK}{u}\right)^{-(\beta+1)}\exp\left(-\frac{u}{2K}\right)\frac{Kv}{u^2}dudv=$$

$$=\frac{\alpha(2K)^{1-\beta}}{2\lambda\Gamma(\beta)}\int_0^1\int_u^1(1-v)^{\alpha-1}\left(\frac{v}{u}-1\right)u^{\beta-1}\exp\left(-\frac{u}{2K}\right)dvdu=$$

$$=\frac{\alpha(2K)^{1-\beta}}{2\lambda\Gamma(\beta)}\int_0^1 u^{\beta-1}\exp\left(-\frac{u}{2K}\right)\int_u^1(1-v)^{\alpha-1}\left(\frac{v}{u}-1\right)dvdu=$$

$$=\frac{\alpha(2K)^{1-\beta}}{2\lambda\Gamma(\beta)}\int_0^1\exp\left(-\frac{u}{2K}\right)u^{\beta-1}\left(\left[\frac{(1-v)^\alpha}{\alpha}\left(\frac{v}{u}-1\right)\right]_u^1-\int_u^1\frac{(1-v)^\alpha}{\alpha u}dv\right)du=$$

$$=\frac{(2K)^{1-\beta}}{2\lambda\Gamma(\beta)}\int_0^1\exp\left(-\frac{u}{2K}\right)u^{\beta-2}\left(-\left[\frac{(1-v)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_u^1dv\right)du=$$

$$=\frac{(2K)^{1-\beta}}{2\lambda\Gamma(\beta)(\alpha+1)}\int_0^1\exp\left(-\frac{u}{2K}\right)u^{\beta-2}(1-u)^{\alpha+1}du,$$

ami éppen a bizonyítandó (5.12) összefüggés.

Végül érdemes megjegyezni, hogy az integrál konvergenciájához és a számolás korrektségéhez szükséges, hogy $\beta-2>-1$, vagyis $\beta>1$ legyen. Ez azonban a tétel feltételeiben szereplő $\lambda>2(\nu+1)$ megkötés miatt teljesül. □

5.41. Következmény. *A már bevezetett jelölésekkel a Laplace-transzformáció felírható*

$$L(\lambda,T,K,\nu)\mathrel{\overset{\circ}{=}}\frac{(2K)^{1-\beta}\Gamma(\alpha+1)}{2\lambda(\beta-1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}M\left(\beta-1,\alpha+\beta+1,-\frac{1}{2K}\right)$$

alakban.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Az integrálreprezentációs tétel szerint

$$M(a,b,x)=\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1 \exp(xu)\,u^{a-1}(1-u)^{b-a-1}\,du.$$

Ezt beírva

$$\begin{aligned}
&L(\lambda,T,K,\nu)=\\
&=\frac{(2K)^{1-\beta}}{2\lambda\Gamma(\beta)(\alpha+1)}\int_0^1 \exp\left(-\frac{u}{2K}\right)u^{\beta-2}(1-u)^{\alpha+1}\,du=\\
&=\frac{(2K)^{1-\beta}}{2\lambda\Gamma(\beta)(\alpha+1)}\frac{\Gamma(\beta-1)\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(a+\beta+1)}M\left(\beta-1,\alpha+\beta+1,-\frac{1}{2K}\right)=\\
&=\frac{(2K)^{1-\beta}}{2\lambda(\beta-1)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(a+\beta+1)}M\left(\beta-1,\alpha+\beta+1,-\frac{1}{2K}\right).
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a $\lambda>2(\nu+1)$ feltétel miatt $\beta>1$, így a formulák értelmesek. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

6. fejezet

Amerikai opciók folytonos időhorizonton

A folytonos és a véges számú pontból álló időhorizont nagyon sok szempontból azonosan kezelhető. A teljesség kedvéért először röviden összefoglaljuk a két modell közös közgazdasági hátterét: Az amerikai származtatott termékek olyan termékek, amelyek tetszőleges időpontban lehívhatóak. Mivel az alapfeltevés az, hogy a jövő nem látható előre, a lehívás csak megállási idő mentén történhet. Legyen tehát adott egy H, a modell alaptermékei által generált filtrációra adaptált folyamat. A folyamat tulajdonosának joga van egy τ megállási idő kiválasztásához, és az ω kimenetel esetén a

$$H\left(\tau\left(\omega\right),\omega\right) \stackrel{\circ}{=} H_{\tau(\omega)}\left(\omega\right) \stackrel{\circ}{=} \left(H\left(\tau\right)\right)\left(\omega\right)$$

értéket „lekaszálni". Az európai származtatott termékek esetén csak a $\tau = T$ megengedett, ahol $T < \infty$ a származtatott termék lejárati ideje. Feltesszük hogy az alaptermékek által definiált piac teljes, valamint, hogy a piacon nincsen arbitrázs. Pontosabban ennél többet követelünk meg, feltesszük, hogy az $(\Omega, \mathcal{A})$ mérhető struktúrán van, mégpedig egyetlen $\mathbf{Q}$ martingál mérték, amelyre nézve az $\overline{S}$ diszkontált árfolyam valódi martingál.

A kérdés a következő: Mennyi a H ára?

Az alapfeltétel, hogy a H származtatott terméket eladó személy a H lehívásának időpontjában fedezett állapotban akar lenni. Ehhez az szükséges, hogy a származtatott termék x árából egy olyan önfinanszírozó portfóliót tudjon építeni, amely $V\left(x\right)$ értékfolyamatára tetszőleges τ megállási idő esetén $V_\tau\left(x\right) \geq H_\tau$ legyen. Természetesen ehhez szükséges és elegendő, ha minden $0 \leq t \leq T$ időpontra $V_t\left(x\right) \geq H_t$.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

6.1. Definíció. Valamely x kezdőértékből kiinduló önfinanszírozó stratégia szuperreplikálja a H származtatott terméket, ha a $V(x)$ értékfolyamatra minden t időpontra $V_t(x) \geq H_t$.

Természetesen a vevő sem akar az üzleten veszíteni, ezért csak akkor hajlandó az x áron az üzletbe belemenni, ha van olyan τ megállási idő, amelyre $H_\tau = V_\tau$. Ugyanis ha ez nem teljesülne, akkor a szuperreplikáló tulajdonság miatt az eladó, mindig szisztematikusan keresne rajta, így ő is inkább eladná mint megvenné a H származtatott terméket. Másképpen fogalmazva, ha van olyan x, amelyhez tartozik önfinanszírozó, szuperreplikáló portfólió és τ megállási idő, amelyre a $H_\tau = V_\tau$ egyenlőség teljesül, akkor az x éppen a H származtatott termék ára. Megint másképpen fogalmazva, ha $\pi(H) > x$, akkor a származtatott termék drága, így eladva és az x-ből felépítve a szuperreplikáló portfóliót biztos nyereséghez jutunk. Ha pedig $\pi(H) < x$, akkor a szuperreplikáló portfóliót dinamikusan eladva és a származtatott terméket megvéve majd a τ időpontban lehívva $x - \pi(x)$ biztos nyereséghez juthatunk. Érdemes azonban megjegyezni, hogy a $H \geq 0$ miatt a szuperreplikáló portfólió biztosan nem negatív, így megengedett, de a portfólió nem feltétlenül lesz felülről korlátos, így az eladása nem lesz feltétlenül megengedett stratégia. Ezt az európai opciókhoz hasonló gondolatmenettel korrigálhatjuk.

Az amerikai opciók árazási problémájának megoldásához két kérdést kell tisztázni:

- Létezik-e a megadott tulajdonságú (τ, x) pár, és
- hogyan számolható ki a (τ, x) pár a modellben szereplő paraméterekből?

Emlékeztetünk, hogy ha a V önfinanszírozó, akkor a kockázatsemleges mérték mellett a $\overline{V}$ diszkontált értékfolyamat lokális martingál. A H nem negatív, így a szuperreplikáló $\overline{V}$ alulról korlátos. Az alulról korlátos lokális martingálok szupermartingálok. Így a $\overline{V}$ egy szupermartingál. A szupermartingálok csökkentik a várható értéket. Következésképpen minden $0 \leq \tau \leq T$ megállási időre

$$x = V_0(x) = \overline{V}_0(x) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}_0(x)\right) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}_\tau(x)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{V_\tau(x)}{R_\tau}\right) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_\tau}{R_\tau}\right).$$

Vagyis

$$\pi(H) \doteq x = V_0(x) \geq \sup_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_\tau}{R_\tau}\right).$$

Tegyük fel, hogy alkalmasan választott τ^* esetén a szuprémum felvevődik, vagyis

$$\sup_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_\tau}{R_\tau}\right) = \max_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_\tau}{R_\tau}\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_{\tau^*}}{R_{\tau^*}}\right).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Tegyük fel továbbá, hogy az így kapott $x \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(H_{\tau^*}/R_{\tau^*}\right)$ értékből kiindulva felépíthető egy önfinanszírozó, szuperreplikáló portfólió. Ekkor a szupermartingál és a szuperreplikáló tulajdonság miatt

$$x = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_{\tau^*}}{R_{\tau^*}}\right) = V_0(x) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{V}(\tau^*)\right) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H_{\tau^*}}{R_{\tau^*}}\right) = x.$$

Ez azonban csak akkor teljesülhet, ha egyenlőség van, ami a szuperreplikáló tulajdonság miatt csak akkor teljesülhet, ha majdnem mindenhol $\overline{V}(\tau^*) = \overline{H}(\tau^*)$, amiből a diszkont faktorral való átszorzás után

$$V(\tau^*) = H(\tau^*).$$

Következésképpen a már elmondott közgazdasági megfontolások miatt ilyenkor $x = \pi(H)$. (Feltéve, hogy nincsen gond a „visszafelé járatott" portfóliókkal.)

A kérdés tehát a következő:

1. Miként számolható ki a

$$\sup_{\tau<\infty} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{H(\tau)}{R(\tau)}\right) \stackrel{\circ}{=} \sup_{\tau<\infty} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{H}(\tau)\right) \tag{6.1}$$

   érték?
2. Mikor van olyan τ^* megállási idő amikor az egyenlőség felvevődik? Miként határozható meg egy olyan τ^*, ahol a szuprémum felvevődik?
3. Van-e olyan önfinanszírozó, szuperreplikáló portfólió, amely a bevezetett (6.1) optimális megállítás feladat optimális megoldásának értékéből indul ki?

6.1. Az optimális megállítás problémája

Először az első két problémával foglalkozunk: Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ egy sztochasztikus alaptér, és legyen H egy az $\mathbb{R}_+$ időtengelyen értelmezett sztochasztikus folyamat. Legyen T a H kifizetés lejáratának időpontja. Elvileg a $T = \infty$ is megengedett. A következő, meglehetősen enyhe feltételezésekkel élünk:

1. Az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ kielégíti a szokásos feltételeket, vagyis a filtráció jobbról folytonos és tartalmazza a nulla halmazokat és az $\mathcal{A}$ teljes[1].

[1] Az amerikai opciók árazási problémájának megoldásában kulcs szerepe van a Doob–Meyer-felbontásnak, amihez a sztochasztikus analízis általános elméletének összes feltevésére szükség van.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

2. Az $\mathcal{F}_0$ csak a triviális σ-algebra, vagyis ha $A \in \mathcal{F}_0$, akkor $\mathbf{P}(A) = 0$, vagy $\mathbf{P}(A) = 1$.
3. A H folyamat folytonos.
4. A H nem negatív.
5. Feltételezük, hogy a $\sup_t H(t)$ változó integrálható, vagyis a H folyamatnak van a t értéktől független integrálható majoránsa.

Definíció szerint az optimális megállítás feladata a $g^* \stackrel{\circ}{=} \sup_{\tau<\infty} \mathbf{E}(H(\tau))$ érték meghatározása, ahol a τ az összes olyan megállási időn fut végig, amelyekre $\tau \leq T$. A definícióval kapcsolatban érdemes hangsúlyozni, hogy nem teljességgel egyértelmű, hogy mi történjen azokkal a kimenetelekkel, amelyekre a megállási idő értéke esetlegesen végtelen. Előfordul, hogy az optimális megállítás problémáját a $\sup_\tau \mathbf{E}(H(\tau)\chi(\tau<\infty))$ módon definiálják. Elvileg az az eset is előfordulhat, hogy a H kiterjeszthető a $T=\infty$ végtelen időpontra és ilyenkor a $\sup_\tau \mathbf{E}(H(\tau))$ kifejezés is értelmes. Ugyanakkor a végtelen értékű megállási idők szokásos interpretációja, hogy ilyenkor a megállítási szabály által előírt feltétel sohasem teljesül, így bár matematikailag esetleg a feladat értelmezhető lenne, az alkalmazások szempontjából a végtelen időpontban való megállítás interpretálhatatlan[2].

Az egyszerűség kedvéért feltehetjük, hogy $T=\infty$, ugyanis ha $T<\infty$, akkor a $[T,\infty)$ szakaszon a H értéke legyen mindenhol $H(T)$. Ugyancsak az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $0<g^*$, amivel a $H=0$ trivialitást akarjuk kizárni. Az utolsó feltétel fontos következménye, hogy $g^*<\infty$. Az integrálható majoránssal kapcsolatos feltétel nem igazán szigorú megkötés. Például a put opciók kifizetőfüggvényének korlátossága miatt a put opciók esetén, véges vagy végtelen időhorizonton az utolsó megkötés mindig teljesül. Ha az S a Black–Scholes-modellnek megfelelően valamilyen $dS = \alpha S dt + \beta S dw$ alakú egyenletnek tesz eleget, akkor

$$S(t) = \exp\left(\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)t + \beta w(t)\right) \leq \exp\left(\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)t + \beta \max_{s\leq t} w(t)\right) \stackrel{\circ}{=}$$
$$\stackrel{\circ}{=} \exp\left(\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)t + \beta w^*(t)\right).$$

Mivel a korábban belátott (5.3) összefüggés miatt az $\exp(\beta w^*(t))$ várható értéke véges, véges időhorizonton a call opciókra az integrálható majoráns létezésére tett feltétel teljesül.

Természetesen az optimális megállítás feladatának megoldásán a következőket értjük:

[2] Az irodalom egy részében az általunk megállási időnek nevezett függvényeket szokás Markov-időknek nevezni és csak a véges értékű Markov-időket szokás megállási időnek mondani.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

1. Hogyan számolható ki a g^* értéke?
2. Van-e olyan $\tau^* < \infty$, amely mellett az optimum eléretik?
3. Miként karakterizálhatóak az optimális megállási idők?

6.2. Példa. A feladatnak lehet véges szuprémuma, de a szuprémum helyébe nem mindig írható maximum.

Legyen

$$H(t) \stackrel{\circ}{=} \frac{t}{1+t}.$$

Tetszőleges $\tau < \infty$ megállási idő esetén $\mathbf{E}(H(\tau)) < 1$, ugyanakkor

$$\sup_{\tau} \mathbf{E}(H(\tau)) = 1.$$

Ha valamely ω kimenetelre $\tau(\omega) \stackrel{\circ}{=} \infty$, akkor ott a megállított változó szokásos interpretációja szerint a $(H(\tau))(\omega)$ kifizetés értéke nulla, így nincsen optimális megállítási idő. A példa némiképpen problémás, ugyanis a megállított változó definíciójára épül. Emlékeztetünk, hogy a megállított változó definíciója nem feltétlenül egyértelmű. Időnként a megállított változót a határértékkel szokás (persze ha létezik) definiálni, és ilyenkor az ellenpélda nem jó. Ugyanakkor az optimális megállítás problémájában, hasonlóan az amerikai opciók árazásakor a $\tau(\omega) = \infty$ kimenetelekre a feladat tartalma alapján célszerű a határérték létezésekor is a megállított változót nullának definiálni. Ha H-t a $H(\infty) = 1$ definícióval kiterjesztjük, akkor a $\sup_\tau \mathbf{E}(H(\tau))$ feladatnak van optimális megoldása, a $\tau = \infty$, de a $\sup_{\tau<\infty} \mathbf{E}(H(\tau))$, vagy a $\sup_\tau \mathbf{E}(H(\tau)\chi(\tau < \infty))$ feladatoknak ilyenkor sincs optimális megoldása. □

6.1.1. A megállási opciókról szóló tétel nem negatív szupermartingálokra

A diszkrét és véges időhorizonton bemutatott tárgyalás alapján sejthető, hogy a főszerepet a megállási opciókról szóló tétel fogja játszani. A megállási opciókról szóló tételben hangsúlyozni szokás, hogy csak korlátos megállási időkre érvényes. Általában megállási időkre csak akkor érvényes az állítás, ha a folyamat kiterjeszthető a $[0, \infty]$ időtartományra. Ez például teljesül, ha a folyamat, amelyre az állítást alkalmazni akarjuk, egyenletesen integrálható martingál. Ilyenkor persze az $X(\infty)$ értékét a kiterjesztéskor kapott változóval kell definiálni[3], vagyis

$$X(\infty) \stackrel{\circ}{=} \lim_{t\to\infty} X(t).$$

[3] Egyébként például a $\tau \equiv \infty$ megállási idővel nem lenne érvényes az $\mathbf{E}(X(\sigma)) = \mathbf{E}(X(\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma)$ egyenlőség. Ha ragaszkodunk az $X(\tau) \stackrel{\circ}{=} \chi(\tau < \infty) X(\tau)$ definícióhoz, akkor egyenletesen integrálható martingálokra csak a $\tau < \infty$ esetben alkalmazható a megállási opciókról szóló tétel.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A dologban a trükk az, hogy a $[0,\infty]$-nen értelmezett kiterjesztett folyamat egy determinisztikus időtranszformációval teljesen megfeleltethető, mondjuk a [0,1]-en értelmezett folyamatnak és ez utóbbira már alkalmazható a korlátos megállási időkről szóló eset.

Legyen X nem negatív szupermartingál. A nem negatív szupermartingáloknak van határértéke a $+\infty$-ben. A határérték általában majdnem mindenhol értelemben létezik, de nem létezik $L^1(\Omega)$-ban. Ugyanakkor a Fatoulemma miatt

$$\mathbf{E}(X(\infty) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbf{E}\left(\lim_{t\to\infty} X(t) \mid \mathcal{F}_s\right) \leq \\ \leq \liminf_{t\to\infty} \mathbf{E}(X(t) \mid \mathcal{F}_s) \leq X(s),$$

vagyis a kiterjesztett folyamat is szupermartingál marad, így egyszerű monoton transzformációval véges időhorizontra transzformálható, így nem negatív szupermartingálokra alkalmazható a megállási opciókról szóló tétel tetszőleges megállási időkkel. Ugyanakkor ha X nem negatív szupermartingál, akkor az X szupermartingál marad akkor is, ha az $X(\infty) \stackrel{\circ}{=} 0$ definícióval élünk. Vegyük észre, hogy az eredeti X végtelenben vett határértékének létezése miatt a transzformált X-nek a transzformáció során használt véges időpontban van bal oldali határértéke. Korlátos megállási időkkel alkalmazva a megállási opciókról szóló tételt a következő állítást kapjuk:

6.3. Tétel (Megállási opciókról szóló tétel)**.** *Ha X egy nem negatív szupermartingál és $\sigma \leq \tau$ tetszőleges megállási idők és az $X(\infty) \stackrel{\circ}{=} 0$ konvencióval élünk, akkor*

$$\mathbf{E}(X(\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) \leq X(\sigma).$$

6.1.2. A Snell-burkoló konstruálása

Az optimális megállítás problémáját folytonos időhorizonton teljesen hasonlóan kell megoldani mint a diszkrét, véges időhorizontos esetben. Az egyetlen lényegi eltérés az, hogy a Snell-burkoló definiálása távolról sem evidens. Ennek oka, hogy folytonos időhorizonton a burkolót csak a lényeges szuprémummal tudjuk definiálni, és a lényeges szuprémumot csak nulla valószínűségű események erejéig tudjuk meghatározni, így a nullmértékű halmazok bosszúja miatt a Snell-burkoló mint folyamat esetlegesen nem is létezik. Ebből következően az erőfeszítések egy jelentős részének célja a Snell-burkoló, mint folyamat, létezésének igazolása.

6.4. Lemma. *Legyen $\mathcal{H} \geq 0$ valószínűségi változók egy halmaza. Ha a $\mathcal{H}$ háló, akkor a lényeges szuprémum létezik, egyértelmű és alkalmas $\xi_n \in \mathcal{H}$ sorozatra $\xi_n \nearrow \operatorname{ess\,sup} \mathcal{H}$.*

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Mivel a lényeges szuprémum csak a rendezéstől függ, feltehető, hogy $0 \leq \mathcal{H} \leq 1$. Legyen $\lambda \stackrel{\circ}{=} \sup\{\mathbf{E}(\xi) \mid \xi \in \mathcal{H}\} < \infty$. A szuprémum definíciója miatt alkalmas $\xi_n \in \mathcal{H}$ sorozatra $\mathbf{E}(\xi_n) \nearrow \lambda$. Legyen $\widetilde{\xi}_n \stackrel{\circ}{=} \vee_{i=1}^n \xi_i$. A háló tulajdonság miatt $\widetilde{\xi}_n \in \mathcal{H}$. Nyilván $\mathbf{E}\left(\widetilde{\xi}_n\right) \nearrow \lambda$. Ha $\xi_\infty \stackrel{\circ}{=} \lim_n \widetilde{\xi}_n$, akkor $\mathbf{E}(\xi_\infty) = \lambda$. Ha $\xi \in \mathcal{H}$ tetszőleges, akkor $\xi \overset{m.m.}{\leq} \xi_\infty$, ugyanis ellenkező esetben $\mathbf{E}(\xi \vee \xi_\infty) \geq \mathbf{E}\left(\xi \vee \widetilde{\xi}_n\right) > \lambda$ lenne. Ha $\mathcal{H} \leq \xi$, akkor a $\widetilde{\xi}_n \leq \xi$ és így a $\xi_\infty \leq \xi$ is teljesül, vagyis $\xi_\infty = \operatorname{ess\,sup} \mathcal{H}$. □

6.5. Definíció. Tetszőleges ρ megállási idő esetén

$$\begin{aligned} \Delta_\rho &\stackrel{\circ}{=} \{\tau \mid \tau \geq \rho, \quad \tau \text{ megállási idő}\}, \\ X(\rho) &\stackrel{\circ}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Delta_\rho} \mathbf{E}(H(\tau) \mid \mathcal{F}_\rho). \end{aligned}$$

6.6. Példa. $X(\rho)$ call opciók esetén.

Legyen $\mathbf{Q}$ a kockázatsemleges mérték. Az $\overline{S}$ a $\mathbf{Q}$ alatt martingál, így a

$$H(t) \stackrel{\circ}{=} \frac{\max(S(t) - K, 0)}{R(t)} = \left(\overline{S}(t) - \frac{K}{R(t)}\right)^+$$

egy szubmartingál, ugyanis a $K/R(t)$ egy csökkenő folyamat, az x^+ pedig konvex és növekedő. Következésképpen a megállási opciókról szóló tétel miatt tetszőleges véges $[0, T]$ időhorizonton ha $\tau \geq \rho$, akkor

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H(T) \mid \mathcal{F}_\rho) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H(\tau) \mid \mathcal{F}_\rho)$$

így

$$X(\rho) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H(T) \mid \mathcal{F}_\rho).$$

Így a Snell-burkoló egy logikai martingál, amelyhez, a szokásos feltételek teljesülése miatt létezik ekvivalens módosítás, amelyik martingál. □

Fontos hangsúlyozni, hogy az $X(\rho)$ nem tekinthető valamilyen X folyamat ρ időpontban való megállításának, ugyanis minden ρ-ra az $X(\rho)$ csak egy nulla mértékű halmaz erejéig van meghatározva. Így mivel a lehetséges t időpontok halmaza kontinum számosságú az $t \mapsto X(t)$ trajektóriái nem értelmezhetőek. A továbbiakban első lépésként az ebből eredő technikai problémákat kell legyűrni. Vegyük észre, hogy $X(0)$ éppen a feladat megoldása, ugyanis az $\mathcal{F}_0$, az előzetes feltételek miatt, a triviális σ-algebra, így

$$\mathbf{E}(H(\tau) \mid \mathcal{F}_0) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}(H(\tau)).$$

A későbbiekben az egyszerűség kedvéért a konstansok és a majdnem mindenhol konstans valószínűségi változók között nem teszünk különbséget.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

6.7. Lemma. *Az $X(\tau)$ alakú változók formailag kielégítik a szupermartingálokra vonatkozó megállási opciókról szóló tételt.*

Bizonyítás. A konstrukciót több lépésre bontjuk:

1. Első lépésként megjegyezzük, hogy a lényeges szuprémum mögött álló

$$\mathcal{G} \stackrel{\circ}{=} \{\mathbf{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_\rho) \mid \tau \in \Delta_\rho\}$$

halmaz háló, vagyis ha $H_{\tau_1}, H_{\tau_2} \in \mathcal{G}$, akkor a

$$H_{\tau_1} \vee H_{\tau_2} \stackrel{\circ}{=} \max(H_{\tau_1}, H_{\tau_2}) \in \mathcal{G}$$

is teljesül. Legyen ugyanis

$$R \stackrel{\circ}{=} \{\mathbf{E}(H_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_\rho) < \mathbf{E}(H_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_\rho)\} \in \mathcal{F}_\rho,$$

és legyen

$$\tau \stackrel{\circ}{=} \chi_{R^c}\tau_1 + \chi_R\tau_2.$$

Megjegyezzük, hogy a R azért eleme az $\mathcal{F}_\rho$-nak, mivel egy $\mathcal{F}_\rho$-mérhető függvény nívóhalmaza. Felhasználva, hogy ha $i = 1{,}2$, akkor $\tau_i \geq \rho$ következésképpen $\mathcal{F}_\rho \subseteq \mathcal{F}_{\tau_i}$, tehát

$$\{\tau \leq t\} = (\{\tau_1 \leq t\} \cap R^c) \cup (\{\tau_2 \leq t\} \cap R) \in \mathcal{F}_t,$$

így a τ megállási idő. Következésképpen $\tau \in \Delta_\rho$. Ugyanakkor a $R \in \mathcal{F}_\rho$ felhasználásával

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(H_\tau \mid \mathcal{F}_\rho) &= \mathbf{E}(\chi_{R^c}H_{\tau_1} + \chi_R H_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_\rho) = \\ &= \chi_{R^c}\mathbf{E}(H_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_\rho) + \chi_R\mathbf{E}(H_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_\rho) = \\ &= \max(\mathbf{E}(H_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_\rho), \mathbf{E}(H_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_\rho)).\end{aligned}$$

2. Tetszőleges σ és τ megállási idők esetén

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\tau} \mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma\right) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(X(\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) = \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\tau} \mathbf{E}(\mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma).\end{aligned}$$

A háló tulajdonság miatt van olyan megállási időkből álló $(\rho_k) \subseteq \Delta_\tau$ sorozat, hogy $\mathbf{E}(H(\rho_k) \mid \mathcal{F}_\tau) \nearrow X(\tau)$. Így a feltételes várható értékre vonatkozó monoton konvergencia tétel miatt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X(\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) &= \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}(\mathbf{E}(H(\rho_k) \mid \mathcal{F}_\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) \leq \\ &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\tau} \mathbf{E}(\mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma).\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Másrészt tetszőleges $\rho \in \Delta_\tau$ esetén definíció szerint $X(\tau) \geq \mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau)$ így a fordított irányú egyenlőtlenség a feltételes várható érték monotonitása miatt evidens.

3. Ha $\tau \geq \sigma$, akkor

$$\mathbf{E}(X(\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) \leq X(\sigma).$$

Mivel $\tau \geq \sigma$, ezért $\Delta_\tau \subseteq \Delta_\sigma$. Ebből következően, a 2. pont alapján

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X(\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\tau} \mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma\right) = \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\tau} \mathbf{E}(\mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\tau} \mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\sigma) \leq \\ &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\sigma} \mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\sigma) \stackrel{\circ}{=} X(\sigma).\end{aligned}$$

4. Ha $\sigma = 0$, akkor az előző egyenlőtlenségben várható értéket véve

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X(\tau)) \leq \mathbf{E}(X(0)) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{\tau} \mathbf{E}(H(\tau) \mid \mathcal{F}_0)\right) = \\ = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau} \mathbf{E}(\mathbf{E}(H(\tau) \mid \mathcal{F}_0)) &= \sup_{\tau} \mathbf{E}(H(\tau)) = g^* < \infty.\end{aligned}$$

5. Bár ennek nincsen a későbbiek szempontjából nagy jelentősége érdemes az $X(\tau)$ értékét megvizsgálni a $\{\tau = \infty\}$ halmazon. Ha az $X(\tau)$ egy sztochasztikus folyamatból származó megállított változó lenne, akkor a $\{\tau = \infty\}$ halmazon az értéke, definíció szerint, nulla kellene legyen. Ha $\rho \geq \tau$, akkor az összes $H(\rho)$ értéke, most persze definíció szerint, nulla a $\{\tau = \infty\}$ halmazon. Mivel $\{\tau = \infty\} \in \mathcal{F}_\tau$, ezért

$$\mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathbf{E}(\chi(\tau < \infty) H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau) = \chi(\tau < \infty) \mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau),$$

így az $\mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau)$ is nulla a $\{\tau = \infty\}$ halmazon. Ebből következően a lényeges szuprémum is nulla az $\{\tau = \infty\}$ halmazon, vagyis az $X(\tau)$ nulla az $\{\tau = \infty\}$ halmazon. □

Miként említettük a nyilvánvaló gondot az jelenti, hogy az $X(\tau)$ változók nem egy X folyamat megállításából származnak. A következő lépésben megkonstrálunk egy olyan $\widehat{X}$ szupermartingált, amelynek az X egy verziója abban az értelemben, hogy minden τ megállási idő esetén a $\widehat{X}(\tau)$ majdnem mindenhol megegyezik az $X(\tau)$-val. Ehhez a következő tételt fogjuk, bizonyítás nélkül, felhasználni:

6.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a szokásos feltételek. Legyen X egy integrálható logikai szubmartingál. Az X-nek pontosan akkor létezik olyan*

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

módosítása, amely szubmartingál, ha a $t \mapsto \mathbf{E}(X(t))$ *függvény jobbról folytonos*[4].

A diszkrét és a folytonos idejű modellek összehasonlítása miatt nem érdektelen a következő konstrukció: Megállási idők esetén definiáljuk a $\prec$ relációt. A $\rho \succ \tau$ relación azt értjük, hogy a τ minden véges értéke esetén a ρ nagyobb mint a τ, illetve ha a τ végtelen, akkor a ρ is végtelen. A ρ tehát szigorúan később következik be mint a τ, feltéve, hogy ennek van értelme. A Δ_τ halmazok és $X(\tau)$ változók mellett definiáljuk a

$$\Delta_\tau^* \triangleq \{\rho \mid \rho \succ \tau, \quad \rho \text{ megállási idő}\},$$
$$X^*(\tau) \triangleq \operatorname{ess\,sup}\{\mathbf{E}(H_\rho \mid \mathcal{F}_\tau) \mid \rho \in \Delta_\tau^*\}$$

halmazokat és változókat. Vizsgáljuk meg az X^* folyamatot. Egy általános érvényű elemi megjegyzéssel kezdjük:

6.9. Lemma. *Tetszőleges* τ *és* σ *megállási idők esetén a* $\{\tau = \sigma\}$ *és* $\{\tau \le \sigma\}$ *stb. halmazok elemei az* $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ σ*-algebrának.*

Bizonyítás. Valóban tetszőleges t-re

$$\{\tau < \sigma\}^c \cap \{\tau \le t\} = \{\sigma \le \tau\} \cap \{\tau \le t\} = \\ = \{\sigma \wedge t \le \tau \wedge t\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$$

és

$$\{\tau > \sigma\} \cap \{\tau \le t\} = \cup_{r \le t}\{\tau > r > \sigma\} \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t,$$

ahol az r értelemszerűen racionális. Így $\{\tau > \sigma\}$ és $\{\tau < \sigma\}$ eleme az $\mathcal{F}_\tau$ -nak. Így

$$\{\tau \le \sigma\} = \{\tau > \sigma\}^c \in \mathcal{F}_\tau,$$
$$\{\tau = \sigma\} = \{\tau \le \sigma\} \setminus \{\tau < \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau.$$

A szimmetria miatt a $\{\tau = \sigma\}, \{\tau \le \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma$ tartalmazások indoklása analóg. □

6.10. Lemma. $X(\tau) = X^*(\tau) \vee H(\tau) = \max\{H(\tau), X^*(\tau)\}$.

[4] Érdemes hangsúlyozni, hogy a jobbról folytonosság nélkül az állítás biztosan nem lehet igaz. Tekintsünk egy balról folytonos, de azért nem folytonos, növekedő függvényt. A függvény által definiált determinisztikus sztochasztikus folyamat növekedő trajektóriákkal rendelekezik és ezért logikai szubmartingál, de nem módosítható úgy, hogy szubmartingál legyen, ugyanis a szubmartingálok definíció szerint jobbról folytonosak.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az egyenlőség a diszkrét esetben belátott iteráció folytonos esetre való átvitele. Az indoklása a következő: Egyrészt nyilván $X(\tau) \geq X^*(\tau)$, illetve $X(\tau) \geq H(\tau)$. Így $X(\tau) \geq X^*(\tau) \vee H(\tau)$. Más oldalról legyen $\rho \in \Delta_\tau$. Miként láttuk, $\{\tau = \rho\}, \{\tau > \rho\} \in \mathcal{F}_\rho$. Ebből következően a

$$\rho^* \triangleq \begin{cases} \rho, & \text{ha } \{\tau < \rho\} \\ \infty, & \text{ha } \{\tau \geq \rho\} \end{cases}$$

megállási idő ugyanis $\{\rho^* \leq t\} = \{\tau < \rho\} \cap \{\rho \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Nyilván $\rho^* \in \Delta_\tau^*$.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau) &= \mathbf{E}(H(\rho)\chi(\tau = \rho) + H(\rho)\chi(\rho > \tau) \mid \mathcal{F}_\tau) = \\ &= \mathbf{E}(H(\tau)\chi(\tau = \rho) + H(\rho)\chi(\rho > \tau) \mid \mathcal{F}_\tau) = \\ &= \mathbf{E}(H(\tau)\chi(\tau = \rho) \mid \mathcal{F}_\tau) + \mathbf{E}(H(\rho)\chi(\rho > \tau) \mid \mathcal{F}_\tau) = \\ &= H(\tau)\chi(\tau = \rho) + \chi(\rho > \tau)\mathbf{E}(\chi(\rho > \tau)H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau) = \\ &= H(\tau)\chi(\tau = \rho) + \chi(\rho > \tau)\mathbf{E}(H(\rho^*) \mid \mathcal{F}_\tau) \leq \\ &\leq H(\tau)\chi(\tau = \rho) + \chi(\rho > \tau)X^*(\tau) \leq H(\tau) \vee X^*(\tau). \end{aligned}$$

Ebből $X(\tau) \leq H(\tau) \vee X^*(\tau)$. □

6.11. Lemma. *Majdnem minden kimenetelre* $X^*(\tau) = X(\tau)$.

Bizonyítás. Az egyenlőség csak a $\{\tau < \infty\}$ halmazon kétséges, ugyanis miként megjegyeztük, a $\{\tau = \infty\}$ halmazon az $X(\tau)$ nulla és a bemutatott indoklás miatt az $X^*(\tau)$ is nyilván nulla. Legyen $\tau_n \searrow \tau$, $\tau_n \succ \tau$. A H feltételezett jobbról való folytonossága és a Fatou-lemma miatt majdnem mindenhol

$$\begin{aligned} X^*(\tau) &\geq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}(H(\tau_n) \mid \mathcal{F}_\tau) \geq \mathbf{E}\left(\liminf_{n\to\infty} H(\tau_n) \mid \mathcal{F}_\tau\right) = \\ &= \mathbf{E}(H(\tau) \mid \mathcal{F}_\tau) = H(\tau). \end{aligned}$$

Így majdnem mindenhol

$$X(\tau) = X^*(\tau) \vee H(\tau) = X^*(\tau). \qquad \square$$

6.12. Lemma. *Tetszőleges* $\tau_n \searrow \tau$, $\tau_n \geq \tau$ *sorozat esetén ha* $A \in \mathcal{F}_\tau$, *akkor*

$$\int_A X(\tau)\, d\mathbf{P} = \lim_{n\to\infty} \int_A X(\tau_n)\, d\mathbf{P}.$$

Speciálisan a

$$t \mapsto \mathbf{E}(X(t))$$

függvény jobbról folytonos.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Az „álszubmartingál" egyenlőtlenség miatt ha $\sigma \geq \rho$, akkor

$$\mathbf{E}\left(X\left(\sigma\right) \mid \mathcal{F}_{\rho}\right) \leq X\left(\rho\right).$$

Ebből a $\tau_n \searrow \tau$ miatt

$$\mathbf{E}\left(X\left(\tau_n\right) \mid \mathcal{F}_{\tau}\right) \leq \mathbf{E}\left(X\left(\tau_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_{\tau}\right) \leq X\left(\tau\right),$$

így majdnem mindenhol

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(X\left(\tau_n\right) \mid \mathcal{F}_{\tau}\right) \leq X\left(\tau\right).$$

Ha $A \in \mathcal{F}_{\tau}$, akkor a két oldalt integrálva

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X\left(\tau_n\right) d\mathbf{P} = \lim_{n\to\infty} \int_A \mathbf{E}\left(X\left(\tau_n\right) \mid \mathcal{F}_{\tau}\right) d\mathbf{P} \leq \int_A X\left(\tau\right) d\mathbf{P}.$$

A másik irányú egyenlőtlenség igazolása a következő: A Fatou-lemma miatt

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X\left(\tau_n\right) d\mathbf{P} \geq \int_A \lim_{n\to\infty} X\left(\tau_n\right) d\mathbf{P}.$$

Legyen $\sigma \in \Delta_{\tau}$ tetszőleges, vagyis legyen $\sigma \geq \tau$. Vezessük be a $\sigma_n \triangleq \tau_n \vee \sigma$ megállási időket. Triviálisan $\sigma_n \geq \tau_n$, ezért $\sigma_n \in \Delta_{\tau_n}$, így

$$X\left(\tau_n\right) \geq \mathbf{E}\left(H\left(\sigma_n\right) \mid \mathcal{F}_{\tau_n}\right).$$

Ezért az előző becslést folytatva és kihasználva, hogy $\tau_n \geq \tau$, így $A \in \mathcal{F}_{\tau} \subseteq$ $\subseteq \mathcal{F}_{\tau_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X\left(\tau_n\right) d\mathbf{P} \geq \lim_{n\to\infty} \int_A H\left(\sigma_n\right) d\mathbf{P} \geq \int_A \liminf_{n\to\infty} H\left(\sigma_n\right) d\mathbf{P}.$$

Ha $n \nearrow \infty$, akkor $\tau_n \searrow \tau$, és mivel $\sigma \geq \tau$ ezért $\sigma_n \searrow \sigma$, így a H jobbról való folytonossága miatt

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X\left(\tau_n\right) d\mathbf{P} \geq \int_A H\left(\sigma\right) d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E}\left(H\left(\sigma\right) \mid \mathcal{F}_{\tau}\right) d\mathbf{P}.$$

Ahol az egyenlőtlenség minden $\sigma \in \Delta_{\tau}$ esetén teljesül. A háló tulajdonság miatt alkalmas $(\sigma_k) \subseteq \Delta_{\tau}$ sorozatra

$$\mathbf{E}\left(H\left(\sigma_k\right) \mid \mathcal{F}_{\tau}\right) \nearrow X\left(\tau\right).$$

Ezt az éppen belátott sorban alkalmazva, a monoton konvergencia tétel miatt:

$$\int_A X\left(\tau\right) d\mathbf{P} = \lim_{k\to\infty} \int_A \mathbf{E}\left(H\left(\sigma_k\right) \mid \mathcal{F}_{\tau}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \int_A X\left(\tau_n\right) d\mathbf{P},$$

ami éppen a kívánt egyenlőtlenség másik iránya. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A lemma szerint, ha veszük a $t \mapsto X(t)$ leképezést, akkor olyan integrálható logikai szupermartingált kapunk, amelyeknek a várható érték függvénye jobbról reguláris. Ilyenkor az idézett tétel miatt van a $t \mapsto X(t)$-nek olyan $\widehat{X}$ verziója, amelyik jobbról reguláris, vagyis amelyik szupermartingál. A reguláris verzió létezése azt jelenti, hogy minden t-re az $X(t)$ és az $\widehat{X}(t)$ majdnem mindenhol megegyeznek. Sajnos ez azonban nem jelenti feltétlenül azt, hogy az $\widehat{X}(\rho)$ és az $X(\rho)$ is majdnem mindenhol megegyezik. Vegyük észre, hogy az $\widehat{X}(\rho)$ az $\widehat{X}$ folyamat megállítását jelenti, az $X(\rho)$ pedig a korábban definiált változót.

6.13. Állítás. *A szenvedések befejezéseként mutassuk meg, hogy tetszőleges τ megállási idő esetén $\widehat{X}(\tau) \overset{m.m.}{=} X(\tau)$.*

A bizonyítást több lemmára bontjuk.

6.14. Lemma. *Ha $\widehat{X}$ egy nem negatív szupermartingál és $\tau_n \searrow \tau$, akkor minden $A \in \mathcal{F}_\tau$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \widehat{X}(\tau_n)\, d\mathbf{P} = \int_A \widehat{X}(\tau)\, d\mathbf{P}.$$

Bizonyítás. Legyen $\tau_n \searrow \tau$. A megállási opciókról szóló tétel alapján ha $m > n$, akkor

$$\mathbf{E}\left(\widehat{X}(\tau_n) \mid \mathcal{F}_\tau\right) \le \mathbf{E}\left(\widehat{X}(\tau_m) \mid \mathcal{F}_\tau\right) \le \widehat{X}(\tau).$$

Így tetszőleges $A \in \mathcal{F}_\tau$ esetén az $\left(\int_A \widehat{X}(\tau_n)\, d\mathbf{P}\right)$ sorozat monoton nő és

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \widehat{X}(\tau_n)\, d\mathbf{P} \le \int_A \widehat{X}(\tau)\, d\mathbf{P}.$$

A fordított egyenlőtlenség indoklása a következő: Az $\widehat{X}$ jobbról való folytonossága miatt, felhasználva, hogy $\tau_n \searrow \tau$,

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{X}(\tau_n) = \widehat{X}(\tau).$$

Így a Fatou-lemma miatt, felhasználva, hogy a $H \ge 0$ miatt $X \ge 0$, így $\widehat{X} \ge 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \widehat{X}(\tau_n)\, d\mathbf{P} \ge \int_A \lim_{n\to\infty} \widehat{X}(\tau_n)\, d\mathbf{P} = \int_A \widehat{X}(\tau)\, d\mathbf{P}.$$

Következésképpen a két egyenlőtlenséget összevetve

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \widehat{X}(\tau_n)\, d\mathbf{P} = \int_A \widehat{X}(\tau)\, d\mathbf{P}. \qquad \square$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

6.15. Lemma. *Tetszőleges τ megállási időhöz létezik olyan $\tau_n \searrow \tau$ sorozat, amelyek $\tau_n \geq \tau$ és minden n-re a τ_n véges számú elemből álló értékkészletű megállási idő.*

A lemma bizonyítása közismert, így az olvasóra bízzuk.

6.16. Lemma. *Ha $\tau = \sum t_i \chi_{A_i}$ alakú, akkor $X(\tau) = \sum X(t_i)\,\chi_{A_i}$.*

Bizonyítás. Legyen ρ tetszőleges megállási idő, $A \in \mathcal{F}_\rho$. A

$$\rho_A(\omega) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} \rho(\omega), & \text{ha } \omega \in A \\ \infty, & \text{ha } \omega \notin A \end{cases}$$

egy megállási idő ugyanis az $A \in \mathcal{F}_\rho$ miatt

$$\{\rho_A \leq t\} = \{\rho \leq t\} \cap A \in \mathcal{F}_t.$$

Ha $\rho \in \Delta_\tau$, akkor mivel $H(\infty) \stackrel{\circ}{=} 0$

$$H(\rho) = \sum_i H(\rho_{A_i}) = \sum_i H(\rho_{A_i})\,\chi_{A_i}.$$

Másrészt akárhogyan veszünk ρ_i megállási időket, amelyekre ρ_i az A_i-n nem kisebb, mint a t_i $\rho \stackrel{\circ}{=} \sum (\rho_i)_{A_i} \in \Delta_\tau$ és megfordítva nyilván minden $\rho \in \Delta_\tau$ előállítható így.

$$X(\tau) \stackrel{\circ}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\tau} \mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\tau) = \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\tau} \mathbf{E}\left(\sum_i H(\rho_{A_i}) \mid \mathcal{F}_\tau\right) =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\tau} \sum_i \mathbf{E}(H(\rho_{A_i})\chi_{A_i} \mid \mathcal{F}_\tau) = \sum_i \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\tau} \mathbf{E}\left(H(\rho_{A_i})\chi_{A_i} \mid \mathcal{F}_{\tau_{A_i}}\right) =$$

$$= \sum_i X(\tau_{A_i}) = \sum_i X(t_i)\,\chi_{A_i}. \qquad \square$$

Az állítás bizonyítása. A már belátott

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X(\tau_n)\,d\mathbf{P} = \int_A X(\tau)\,d\mathbf{P}$$

egyenlőség alapján, felhasználva, hogy a (τ_n) sorozat tagjainak értékkészlete legfeljebb megszámlálható, ezért $\widehat{X}(\tau_n) \stackrel{m.m.}{=} X(\tau_n)$

$$\int_A X(\tau)\,d\mathbf{P} = \lim_{n\to\infty} \int_A X(\tau_n)\,d\mathbf{P} = \lim_{n\to\infty} \int_A \widehat{X}(\tau_n)\,d\mathbf{P} = \int_A \widehat{X}(\tau)\,d\mathbf{P}.$$

Mivel az $X(\tau)$ és az $\widehat{X}(\tau)$ integrálható és $\mathcal{F}_\tau$-mérhetőek, valamint mivel az egyenlőség minden $A \in \mathcal{F}_\tau$ esetén teljesül, ezért majdnem mindenhol $X(\tau) = \widehat{X}(\tau)$. $\square$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

6.17. Definíció. Az $\widehat{X}$ folyamatot a továbbiakban egyszerűen X-szel fogjuk jelölni, és a H folyamat Snell-burkolójának fogjuk mondani.

6.18. Definíció. Az mondjuk, hogy valamely Y folyamat dominálja a Z folyamatot, ha egy valószínűséggel az Y trajektóriái minden időpontban nem kisebb, mint a Z megfelelő trajektóriája.

6.19. Tétel (Snell-burkoló létezése)**.** *A megadott feltételek mellett a Snell-burkoló létezik és a Snell-burkoló a legkisebb szupermartingál, amely dominálja a H kifizetést.*

Bizonyítás. Ha a folyamatok trajektóriái jobbról folytonosak, akkor a dominánláshoz elegendő, hogy egy megszámlálható az időtengelyen sűrű halmaz minden pontjában az $Y(t) \geq Z(t)$ egyenlőtlenség teljesüljön majdnem mindenhol. Ugyanis ha egyesítjük a kivételes kimenetelek halmazát, akkor a sűrű halmaz megszámlálhatósága miatt a kivételes pontok egyesített halmaza is csak nulla mértékű. A nem kivételes pontok mindegyikére $Y(t) \geq Z(t)$ a sűrű halmaz minden pontjára. A jobbról való folytonosság miatt az egyenlőtlenség az összes időpontra kiterjeszthető. Triviálisan $X(t) \geq H(t)$ majdnem mindenhol. Mivel mind a két folyamat jobbról folytonos, ezért az X dominálja a H kifizetést.

Legyen Y egy másik szupermartingál, amely dominálja a H kifizetést, és legyen t tetszőleges. A megállási opciókról szóló tétel miatt ha $\tau \in \Delta_t$, akkor

$$\mathbf{E}(H(\tau) \mid \mathcal{F}_t) \leq \mathbf{E}(Y(\tau) \mid \mathcal{F}_t) \leq Y(t).$$

Az X definíciója alapján majdnem mindenhol

$$X(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Delta_t} \mathbf{E}(H(\tau) \mid \mathcal{F}_t) \leq Y(t). \qquad \square$$

Érdemes hangsúlyozni, az állítás igazolásához a H-ról a jobbról regularitást, a nem negativitást, illetve a g^* végességét használtuk ki. Ez utóbbira azért volt szükség, ugyanis csak integrálható logikai szupermartingálokhoz tudunk, reguláris verziót készíteni. A logikai szubmartingálok vesztik a várható értéket, így a folyamat integrálható, ha a $t = 0$ pontban integrálható, ami a jelen helyzetben pontosan azt jelenti, hogy a feladat optimális megoldása véges.

6.1.3. Az optimalitási kritérium

Térjünk rá az optimalitás kritériumának igazolására.

6.20. Tétel (Optimalitási kritérium)**.** *Valamely $\tau^* < \infty$ megállási idő optimalitásának szükséges és elegendő feltétele, hogy*

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

1. $H(\tau^*) = X(\tau^*)$ *majdnem mindenhol,*
2. *az* X^{τ^*} *megállított folyamat (egyenletesen integrálható) martingál.*

Bizonyítás. Az egyik irány indoklása egyszerű. Tegyük fel, hogy teljesülnek a megadott kritériumok. Az X^{τ^*} martingál. Vegyük észre, hogy az X^{τ^*} rendelkezik a ∞ időpontra való kiterjesztéssel. Ennek oka, hogy mivel a modell feltételei szerint a H rendelkezik egy integrálható majoránssal, ezért az integrálható majoránsból álló konstans sorozat a H-t majoráló szupermartingál, így mivel az X a minimális domináló szupermartingál, ezért az H-t majoráló változó az X-nek is majoránsa, tehát az X^{τ^*} nem pusztán martingál, hanem egyenletesen integrálható martingál. Felhasználva, hogy az $\mathcal{F}_0$ csak a nulla és egy valószínűségű halmazokat tartalmazza valamint hogy az X^{τ^*} egyenletesen integrálható martingál

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(H(\tau^*)) = \mathbf{E}(X(\tau^*)) = \mathbf{E}\left(X^{\tau^*}(\infty)\right) = \\ = \mathbf{E}\left(X^{\tau^*}(0)\right) = \mathbf{E}(X(0)) = \\ = \mathbf{E}(X(0) \mid \mathcal{F}_0) = X(0) = g^*,\end{aligned}$$

vagyis a τ^* optimális. Vegyük észre, hogy kihasználtuk, hogy $\tau^* < \infty$. Ugyanis az $\mathbf{E}(X(\tau^*)) = \mathbf{E}\left(X^{\tau^*}(\infty)\right)$ egyenlőségben a végtelen távoli pontra való kiterjesztést az egyenlet két oldalán két különböző módon értjük[5].

Megfordítva, tegyük fel, hogy a τ^* optimális. Az optimális megoldás minden olyan részhalmazon optimális, amelynek megengedett eleme, így a

$$\mathbf{E}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\tau} H(\rho) \mid \mathcal{F}_\sigma\right) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(X(\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_\tau} \mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_\sigma).$$

egyenlőség alapján a $\sigma = 0$, $\tau = \tau^*$ szereposztással

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(H(\tau^*)) = \sup_{\rho\in\Delta_{\tau^*}} \mathbf{E}(H(\rho)) = \mathbf{E}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_{\tau^*}} H(\rho)\right) = \\ = \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_{\tau^*}} H(\rho) \mid \mathcal{F}_{\tau^*}\right)\right) = \\ = \mathbf{E}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{\rho\in\Delta_{\tau^*}} \mathbf{E}(H(\rho) \mid \mathcal{F}_{\tau^*})\right) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(X(\tau^*)).\end{aligned}$$

Ugyanakkor $H(\tau^*) \le X(\tau^*)$, így az 1. teljesül. Másrészt tetszőleges σ korlátos megállási időre a már említett részhalmazon való optimalitás miatt

$$\mathbf{E}(H(\tau^*)) = \sup_{\tau\in\Delta_{\tau^*\wedge\sigma}} \mathbf{E}(H(\tau)) = \mathbf{E}(X(\tau^*\wedge\sigma)) = \mathbf{E}\left(X^{\tau^*}(\sigma)\right).$$

[5] Gondoljunk csak a már bemutatott $H(t) \stackrel{\circ}{=} t/(1+t)$ példára. $H(\infty) = X(\infty) = 0$ definícióval élve a két feltétel teljesül, de mégsem lesz a $\tau = \infty$ optimális megállítási idő.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Így az X^{τ^*} folyamat, adaptált és jobbról reguláris, és korlátos megállási idők esetén a megállított változó várható értéke független a korlátos megállítási időtől, így az X^{τ^*} martingál. □

Az optimalitási kritérium fontos következménye, hogy amennyiben a feladatnak van $\tau^* < \infty$ optimális megoldása, akkor az $\{X = H\}$ halmaz

$$\tau_* \triangleq \inf \{t \mid X(t) = H(t)\}$$

találati ideje majdnem minden kimenetelre véges, ugyanis az első kritériumból nyilvánvalóan $\tau_* \leq \tau^* < \infty$. Mivel $X^{\tau_*} = \left(X^{\tau^*}\right)^{\tau_*}$, ezért az X^{τ_*} szintén martingál, így a τ_* találati idő egyúttal optimális megállítás is. Ebből következően ha van optimális megoldás, akkor a τ_* a legkisebb optimális megoldás. A további erőfeszítések célja annak igazolása, hogy ha a τ_* találati idő véges, akkor van optimális megállítás. Ha a $\{H = X\}$ halmaz τ_* találati ideje véges, akkor a H és az X jobbról való folytonossága miatt $H(\tau_*) = X(\tau_*)$. A τ_* optimailtásához csak azt kell megmutatni, hogy az X^{τ_*} martingál. Ennek közvetlen igazolása nem is olyan egyszerű, és miként látni fogjuk, kerülőutat kell választanuk.

6.1.4. Az optimális megállítási idő létezése

Először nézzünk még egy példát.

6.21. Példa. Nem létezik optimális megállítás.

Felvethető, hogy miért van szükség ellenpéldára, ugyanis egyet már láttunk. Természetesen azért, mert a korábbi ellenpélda nem volt teljesen fair, abban az értelemben, hogy erősen arra játszott rá, hogy a $t = \infty$ időpontban a megállított változót mindenképpen nullának definiáljuk. Tekintsük a

$$H(t) \triangleq \exp\left(w(t) - \frac{t}{2} + \frac{1}{t+1}\right)$$

folyamatot. Az

$$M(t) \triangleq \exp\left(w(t) - \frac{t}{2}\right)$$

exponenciális martingál. Az M exponenciális martingál kanonikus példája a nem egyenletesen integrálható martingálnak. Az M azért nem egyenletesen integrálható, mert ha $t \to \infty$, akkor $M(t) \to 0$. Ez azért igaz, mert az M egy nem negatív martingál, így van határértéke a végtelenben, de mivel a w bármilyen időpont után visszatér az origóba, ezért alkalmas $\tau_n \nearrow \infty$ sorozatra

$$M(\tau_n) = \exp\left(w(\tau_n) - \frac{\tau_n}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\tau_n}{2}\right) \to 0.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ebből következően az M az $M(\infty) \stackrel{\circ}{=} 0$ definícóval kiterjeszthető a $t = \infty$ időpontra. Ekkor az M a $[0, \infty]$ időszakon folytonos szupermartingál lesz. Természetesen a $H(\infty) \stackrel{\circ}{=} 0$ definícióval a H is folytonosan kiterjeszthető a $t = \infty$ időpontra. Nyilván $M \geq H$, tehát a H Snell-burkolója nem lehet nagyobb mint az M. A konstrukció szerint

$$X(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Delta_t} \mathbf{E}(H(\tau) \mid \mathcal{F}_t) \geq \operatorname*{ess\,sup}_{s \geq t} \mathbf{E}(H(s) \mid \mathcal{F}_t) =$$
$$= M(t) \sup_{s \geq t} \exp\left(-\frac{1}{s+1}\right) = M(t).$$

Ebből következően az M éppen a H Snell-burkolója. Világos, hogy az egyetlen olyan τ^*, amelyre $H(\tau^*) = M(\tau^*)$ a $\tau^* = \infty$. Ilyenkor azonban a $H(\tau^*) \stackrel{\circ}{=} 0$, amely érték nem lehet optimális. Vegyük észre, hogy az M^{τ^*} megállított folyamat nem martingál a $[0, \infty]$ halmazon. Csak szupermartingál, így a második kritérium nem teljesül! Vegyük azt is észre, hogy determinisztikus időtranszformációval a példát áttranszformálhatjuk véges időhorizontra. Hangsúlyozni kell, hogy a H folyamat nem rendelkezik integrálható majoránssal, mert akkor az M is rendelkezne integrálható majoránssal, és akkor az M egyenletesen integrálható lenne, tehát folytonos martingálként kiterjeszthető lenne a $[0, \infty]$ halmazra. □

6.22. Definíció. Tetszőleges $0 < \lambda < 1$ skalár és tetszőleges σ megállási idő esetén

$$\tau^\lambda(\sigma) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t > \sigma \mid \lambda X(t) \leq H(t)\},$$
$$\tau^*(\sigma) \stackrel{\circ}{=} \lim_{\lambda \nearrow 1} \tau^\lambda(\sigma).$$

6.23. Tétel. *Ha a H folytonos és létezik a H-nak integrálható majoránsa, és a $\tau^* \stackrel{\circ}{=} \lim_{\lambda \nearrow 1} \tau^\lambda(0)$ véges, akkor a τ^* optimális megállítási idő.*

Bizonyítás. Mivel az X jobbról reguláris, ezért a

$$\tau^\lambda(0) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t > 0 \mid \lambda X(t) \leq H(t)\}$$

megállási idő. A τ^λ a λ növekvő függvénye. Ha $\lambda_n \nearrow 1$, akkor

$$\{\tau^* \leq t\} = \cap_n \left\{\tau^{\lambda_n} \leq t\right\} \in \mathcal{F}_t,$$

vagyis a τ^* megállási idő. (Megállási idők növekedő sorozatának határértéke megállási idő.) Kérdés persze, hogy optimális-e? A H és az X jobbról való folytonossága miatt triviálisan

$$\lambda X\left(\tau^\lambda(\sigma)\right) \leq H\left(\tau^\lambda(\sigma)\right). \tag{6.2}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

(Ha $\tau^\lambda(\sigma)$ valamely kimenetelre végtelen, akkor mind a két oldal értéke definíció szerint nulla.) Az optimális megállítás létezésének igazolása a következő egyenlőségen múlik:

6.24. Lemma. *A definícióban megadott feltételek teljesülése esetén*

$$X(\sigma) \overset{m.m.}{=} \mathbf{E}\left(X\left(\tau^\lambda(\sigma)\right) \mid \mathcal{F}_\sigma\right). \tag{6.3}$$

Mielőtt a lemmát belátnánk, mutassuk meg, hogy a lemmában szereplő egyenlőségből folytonos H esetén következik a $\tau^* \triangleq \tau^*(0)$ optimalitása. A jobbról folytonosság miatti korábban említett (6.2) egyenlőtlenség alapján, felhasználva, hogy a H rendelkezik integrálható majoránssal, ezért ha $\lambda \nearrow 1$, akkor a határérték és a feltételes várható érték képzése felcserélhető. (Mivel a $\tau^\lambda(0)$ a λ-ban triviálisan nő, ezért a következő számolásban a H balról való folytonosságára van szükség.)

$$\begin{aligned} X(0) &= \lim_{\lambda\nearrow 1} X(0) = \lim_{\lambda\nearrow 1} \mathbf{E}\left(X\left(\tau^\lambda(0)\right) \mid \mathcal{F}_0\right) = \lim_{\lambda\nearrow 1} \mathbf{E}\left(X\left(\tau^\lambda(0)\right)\right) \leq \\ &\leq \lim_{\lambda\nearrow 1} \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}\left(H\left(\tau^\lambda(0)\right)\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\lim_{\lambda\nearrow 1} H\left(\tau^\lambda(0)\right)\right) = \mathbf{E}\left(H\left(\lim_{\lambda\nearrow 1} \tau^\lambda(0)\right)\right) \triangleq \mathbf{E}\left(H\left(\tau^*(0)\right)\right). \end{aligned}$$

Más oldalról triviálisan $\tau^*(0) \in \Delta_0$, ugyanis $\tau^*(0) \geq \tau^\lambda(0) \geq 0$. Ezért a Snell-burkoló definíciója miatt

$$X(0) \geq \mathbf{E}\left(H\left(\tau^*(0)\right) \mid \mathcal{F}_0\right),$$

amit az előző becsléssel összevetve

$$X(0) = \mathbf{E}\left(H\left(\tau^*(0)\right) \mid \mathcal{F}_\sigma\right).$$

Következésképpen a $\tau^*(0)$ valóban optimális megállítás. □

A lemma bizonyítása. Térjünk rá a lemmában szereplő (6.3) egyenlőség indoklására. A bizonyítást több lépésre bontjuk.

1. Triviálisan $\tau^\lambda(\sigma) \geq \sigma$. Az X nem negatív szupermartingál, így a megállási opciókról szóló tétel miatt $X(\sigma) \geq \mathbf{E}\left(X\left(\tau^\lambda(\sigma)\right) \mid \mathcal{F}_\sigma\right)$, így csak az ellenkező irányú $X(\sigma) \leq \mathbf{E}\left(X\left(\tau^\lambda(\sigma)\right) \mid \mathcal{F}_\sigma\right)$ egyenlőtlenséget kell igazolni. Tekintsük az

$$Y(t) \triangleq \mathbf{E}\left(X\left(\tau^\lambda(t)\right) \mid \mathcal{F}_t\right), \quad Y(\sigma) \triangleq \mathbf{E}\left(X\left(\tau^\lambda(\sigma)\right) \mid \mathcal{F}_\sigma\right)$$

változókat. Mivel az

$$X(\sigma) \leq \mathbf{E}\left(X\left(\tau^\lambda(\sigma)\right) \mid \mathcal{F}_\sigma\right) \triangleq Y(\sigma)$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

egyenlőtlenséget kell igazolni, ezért elegendő mutatni, hogy az Y is tekinthető szupermartingálnak, az $Y(\sigma)$ is „származtatható" a megállási opciókból szóló tételből, illetve hogy $X(t) \leq Y(t)$.

2. Ha $s < t$, akkor az $s \leq \tau^{\lambda}(s)$ miatt a torony szabály többszöri alkalmazásával – kihasználva, hogy az X szupermartingál – a megállási opciókról szóló tétel miatt

$$\mathbf{E}(Y(t) \mid \mathcal{F}_s) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X\left(\tau^{\lambda}(t)\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \mid \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(X\left(\tau^{\lambda}(t)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X\left(\tau^{\lambda}(t)\right) \mid \mathcal{F}_{\tau^{\lambda}(s)}\right) \mid \mathcal{F}_s\right) \leq \mathbf{E}\left(X\left(\tau^{\lambda}(s)\right) \mid \mathcal{F}_s\right) \stackrel{\circ}{=} Y(s).$$

Következésképpen az Y egy integrálható logikai szupermartingál. Megmutatjuk, hogy az Y-nak van jobbról reguláris verziója. Ehhez a már idézett tétel miatt meg kell mutatni, hogy az $\mathbf{E}(Y(t))$ függvény jobbról folytonos.

3. Alább megmutatjuk, hogy a $\tau^{\lambda}(t)$ jobbról folytonos. Ez, és az X jobbról való folytonossága miatt a Fatou-lemma felhasználásával

$$\lim_{s \searrow t} \mathbf{E}(Y(s)) \stackrel{\circ}{=} \lim_{s \searrow t} \mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X\left(\tau^{\lambda}(s)\right) \mid \mathcal{F}_s\right)\right) = \lim_{s \searrow t} \mathbf{E}\left(X\left(\tau^{\lambda}(s)\right)\right) \geq$$
$$\geq \mathbf{E}\left(\liminf_{s \searrow t} X\left(\tau^{\lambda}(s)\right)\right) = \mathbf{E}\left(X\left(\tau^{\lambda}(t)\right)\right) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}(Y(t)).$$

A logikai szupermartingál tulajdonság miatt az $\mathbf{E}(Y(t))$ nem növekedő, így

$$\mathbf{E}(Y(t)) \leq \lim_{s \searrow t} \mathbf{E}(Y(s)) \leq \mathbf{E}(Y(t)),$$

vagyis az $\mathbf{E}(Y(t))$ jobbról folytonos. Jelölje az Y szupermartingál módosítását $\widehat{Y}$.

4. Miként igértük, megmutatjuk, hogy a $t \mapsto \tau^{\lambda}(t)$ folyamat trajektóriái minden kimenetelre valóban jobbról folytonosak. Világos, hogy ha $s_1 > s_2$, és

$$S_i \stackrel{\circ}{=} \{t > s_i \mid \lambda X(t) \leq H(t)\},$$

akkor $S_1 \subseteq S_2$.következésképpen $\tau^{\lambda}(s_1) \geq \tau^{\lambda}(s_2)$, így a τ^{λ} trajektóriái növekedőek. Ha $s_n \searrow s$, akkor van olyan (t_n) sorozat, amelyre

$$\{t_n > s_n \mid \lambda X(t_n) \leq H(t_n)\} \quad \text{és} \quad t_n - \tau^{\lambda}(s_n) < 2^{-n}.$$

A $t_n > s_n > s$ és a konstrukció miatt feltehető, hogy

$$t_n \searrow t^* \stackrel{\circ}{=} \lim_{n \to \infty} \tau^{\lambda}(s_n).$$

Tegyük fel, hogy a τ^{λ} nem jobbról folytonos. A trajektóriák növekedése miatt ilyenkor $\tau^{\lambda}(s) < t^*$. Triviálisan $s \leq \tau^{\lambda}(s)$, így $s < t^*$. Az X és a H jobbról

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

való folytonossága és a $\lambda X(t_n) \le H(t_n)$ miatt $\lambda X(t^*) \le H(t^*)$. A $\tau^\lambda(s) < t^*$ csak akkor lehetséges, ha van olyan $s < t^{**} < t^*$, amelyre[6]

$$\lambda X(t^{**}) \le H(t^{**}).$$

De ekkor mivel $s_n \searrow s$, elég nagy n-re az $s_n < t^{**}$ is teljesül, tehát a $\tau^\lambda(s_n)$ definíciója miatt

$$\tau^\lambda(s_n) \le t^{**} < t^* \stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \tau^\lambda(s_n),$$

ami lehetetlen.

5. Megmutatjuk, hogy tetszőleges σ megállási idő esetén is $Y(\sigma) \stackrel{m.m.}{=} \widehat{Y}(\sigma)$. Ennek indoklása igen hasonló a korábban a Snell-burkoló konstruálása során bemutatottal. Most is tekintsünk egy megszámlálható értékkészletű megállási időkből álló sorozatot, amelyre $\sigma_n \searrow \sigma$. Az $\widehat{Y}$ szupermartingál, így

$$\lim_{n\nearrow\infty} \int_A \widehat{Y}(\sigma_n)\, d\mathbf{P} = \int_A \widehat{Y}(\sigma)\, d\mathbf{P}.$$

Ez az egyenlőség minden nem negatív szupermartingál esetén érvényes, és miként láttuk, elsősorban arra épül, hogy a szupermartingálok jobbról folytonosak. Nézzük, most az analóg egyenlőséget az Y-ra. Először is megjegyezzük, hogy ha $\tau \ge \sigma$, akkor

$$\mathbf{E}(Y(\tau) \mid \mathcal{F}_\sigma) \le Y(\sigma),$$

Ezt azonos módon kell belátni, mint ahogyan az analóg egyenlőtlenséget igazoltuk fix időpontok esetén a 2. pontban. Így az $Y(\sigma)$ formailag kielégíti a megállási opciókról szóló tételt. Legyen $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Miként szintén már láttuk, a szupermartingál egyenlőtlenség miatt

$$\int_A Y(\sigma_n)\, d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E}(Y(\sigma_n) \mid \mathcal{F}_\sigma)\, d\mathbf{P} \le \int_A Y(\sigma)\, d\mathbf{P}.$$

Következésképpen

$$\limsup_{n\to\infty} \int_A Y(\sigma_n)\, d\mathbf{P} \le \int_A Y(\sigma)\, d\mathbf{P}.$$

Eddig a jelen bizonyítás és az X Snell-burkoló esetén tárgyalt bizonyítás szó szerint megegyezik. Ettől a lépéstől azonban a két bizonyítás már más. Miként megjegyeztük, a gond értelemszerűen abból ered, hogy az Y nem feltétlenül jobbról folytonos. (Hát persze, ez volt az eredeti probléma, ezért kellett áttérni a reguláris verzióra!) Most azonban a bizonyítás jóval egyszerűbb, ugyanis

[6] Itt kihasználtuk a $\tau^\lambda(\sigma)$ definíciójában megjelenő szigorú egyenlőtlenséget. Általában, ha egy monoton függvény „inverze" a konstans szakaszok miatt lehet jobbról vagy balról folytonos attól függően, hogy konstans szakaszokon melyik végpontot vesszük figyelembe.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

az Y a speciális konstrukció miatt majdnem jobbról folytonos, ugyanis az Y definíciójában szereplő $X\left(\tau^{\lambda}\right)$ folyamat jobbról folytonos.

A Fatou-lemma miatt, valamint felhasználva, hogy $\tau^{\lambda}(\sigma_n) \searrow \tau^{\lambda}(\sigma)$ és hogy az X jobbról folytonos

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\int_A Y(\sigma_n)\,d\mathbf{P} &\overset{\circ}{=} \liminf_{n\to\infty}\int_A \mathbf{E}\left(X\left(\tau^{\lambda}(\sigma_n)\right)\mid \mathcal{F}_{\sigma_n}\right)d\mathbf{P} = \\ &= \liminf_{n\to\infty}\int_A \mathbf{E}\left(X\left(\tau^{\lambda}(\sigma_n)\right)\mid \mathcal{F}_{\sigma}\right)d\mathbf{P} \geq \\ &\geq \int_A \mathbf{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X\left(\tau^{\lambda}(\sigma_n)\right)\mid \mathcal{F}_{\sigma}\right)d\mathbf{P} = \\ &= \int_A \mathbf{E}\left(X\left(\tau^{\lambda}(\sigma)\right)\mid \mathcal{F}_{\sigma}\right) \overset{\circ}{=} \int_A Y(\sigma)\,d\mathbf{P}.\end{aligned}$$

Így a már belátott iránnyal összevetve

$$\lim_{n\to\infty}\int_A Y(\sigma_n)\,d\mathbf{P} = \int_A Y(\sigma)\,d\mathbf{P}.$$

Ettől a lépéstől kezdve a két bizonyítás újra azonos. A σ_n megszámlálható értékkészletű, így

$$\int_A \widehat{Y}(\sigma_n)\,d\mathbf{P} = \int_A Y(\sigma_n)\,d\mathbf{P},$$

következésképpen a két oldalon határértéket véve

$$\int_A \widehat{Y}(\sigma)\,d\mathbf{P} = \int_A Y(\sigma)\,d\mathbf{P}.$$

Mivel ez minden $A \in \mathcal{F}_{\sigma}$ esetén teljesül és a két oldalon az integrandusok $\mathcal{F}_{\sigma}$-mérhetőek és integrálhatóak, ezért

$$\widehat{Y}(\sigma) \overset{m.m.}{=} Y(\sigma).$$

A továbbiakban a $\widehat{Y}$ helyett az egyszerűbb Y jelölést használjuk.

6. Meg kell mutatni, hogy $X \leq Y$. Tekintsük a $Z \overset{\circ}{=} \lambda X + (1-\lambda)Y$ folyamatot. Mivel $0 < \lambda < 1$ a folyamat szupermartingálok konvex kombinációja így szupermartingál. Az $X \leq Y$ igazolásához meg kell mutatni, hogy $Z \geq H$, ugyanis mivel X a legkisebb majoráló szupermartingál, ezért

$$\lambda X + (1-\lambda)Y \overset{\circ}{=} Z \geq X,$$

amiből az $X \leq Y$ evidens.

Ha $\tau^{\lambda}(t) > t$, akkor a $\tau^{\lambda}(t)$ definíciója miatt a $\lambda X(t) \leq H(t)$ nem teljesül, így

$$Z(t) \overset{\circ}{=} \lambda X(t) + (1-\lambda)Y(t) \geq \lambda X(t) \geq H(t).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Hátravan még a $\tau^\lambda(t) = t$ eset.

$$\begin{aligned}
&\chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right) Z(t) \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right)\left(\lambda X(t) + (1-\lambda) Y(t)\right) \overset{\circ}{=} \\
&\overset{\circ}{=} \chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right)\lambda X(t) + (1-\lambda)\,\chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right)\mathbf{E}\left(X\left(\tau^\lambda(t)\right) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= \chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right)\lambda X(t) + (1-\lambda)\,\mathbf{E}\left(\chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right) X\left(\tau^\lambda(t)\right) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= \chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right)\lambda X(t) + (1-\lambda)\,\mathbf{E}\left(\chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right) X(t) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= \chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right)\lambda X(t) + (1-\lambda)\,\chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right)\mathbf{E}\left(X(t) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= \chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right)\left(\lambda X(t) + (1-\lambda)\,\mathbf{E}\left(X(t) \mid \mathcal{F}_t\right)\right) = \\
&= \chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right)\left(\lambda X(t) + (1-\lambda) X(t)\right) = \\
&= \chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right) X(t) \geq \chi\left(\tau^\lambda(t) = t\right) H(t).
\end{aligned}$$

Vagyis a Z valóban olyan szupermartingál, amely majorálja a H-t, így a Snell-burkoló definíciója miatt $Z \geq X$, így $Y \geq X$ következésképpen majdnem mindenhol

$$X(\sigma) \leq Y(\sigma) = \mathbf{E}\left(X\left(\tau^\lambda(\sigma)\right) \mid \mathcal{F}_\sigma\right).$$

Ezt az első pontban kapott egyenlőtlenséggel összevetve éppen az igazolandó egyenlőséget kapjuk. □

6.1.5. Az optimális megállási idő és a találati idő

6.25. Tétel. *Tegyük fel, hogy a H folytonos és rendelkezik integrálható majoránssal. Tegyük fel továbbá, hogy a $\{H = X\}$ halmaz találati ideje véges. Ilyenkor az imént bevezetett τ^* is véges és a τ^* éppen a $\{H = X\}$ halmaz találati ideje, vagyis majdnem mindenhol*

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \mid H(t) = X(t)\}.$$

Következésképpen a $\{H = X\}$ halmaz találati ideje optimális megállítás.

Bizonyítás. Jelölje $\tau_* < \infty$ a $\{H = X\}$ halmaz kezdőidejét. Vegyük észre, hogy ha valamely kimenetelre $\tau_* > 0$, akkor van olyan $t \geq \tau_* > 0$, amelyre a $\{H(t) = X(t)\}$. Minden ilyen t-re $H(t) \geq \lambda X(t)$ és $H(0) \neq X(0)$, így az olyan kimenetelekre, amelyekre $\tau_* > 0$

$$\begin{aligned}
\tau^\lambda(0) &\overset{\circ}{=} \inf\{t > 0 \mid \lambda X(t) \leq H(t)\} \leq \\
&\leq \inf\{t > 0 \mid X(t) = H(t)\} = \tau_*.
\end{aligned}$$

Következésképpen ilyenkor

$$\tau^* \overset{\circ}{=} \lim_{\lambda \nearrow 1} \tau^\lambda(0) \leq \tau_*.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Vizsgáljuk meg a $\{\tau_* = 0\}$kimeneteleket. Az X és a H jobbról való folytonossága miatt a $\{\tau_* = 0\}$ halmazon $X(0) = H(0)$. Ha valamely kimenetelre $X(0) = H(0) > 0$, akkor a jobbról való folytonosság miatt minden $\lambda < 1$-re $H(t) \geq \lambda X(t)$ minden elegendően kicsi pozitv t-re, így ilyenkor $\tau^{\lambda}(0) = 0$, következésképpen $\tau^* = 0$, vagyis ilyenkor $\tau_* = \tau^*$. Ha valamely kimenetelre $X(0) = H(0) = 0$, akkor a megállási opciókról szóló tétel szerint tetszőleges t-re

$$\mathbf{E}(\chi(X(0) = 0) X(t)) = \int_{\{X(0)=0\}} X(t)\, d\mathbf{P} \leq \int_{\{X(0)=0\}} X(0)\, d\mathbf{P} = 0,$$

tehát ilyenkor az $\{X(0) = 0\}$ halmazon $X(t) \overset{m.m.}{=} 0$, vagyis triviálisan $\lambda X(t) = 0 \leq H(t)$, így $\tau^{\lambda} \overset{m.m.}{=} 0$, vagyis $\tau^* \overset{m.m.}{=} 0$. Ebből következően majdnem mindenhol $\tau^* \leq \tau_*$. Így a τ_* feltételezett végessége miatt a τ^* egy véges megállási idő. Következésképpen az előző állítás miatt a τ^* optimális. Ebből következően az optimalitási kritérium miatt $H(\tau^*) = X(\tau^*)$, vagyis a $\tau_* \leq \tau^*$ is teljesül. □

6.26. Példa. Vizsgáljuk meg a $H(t) = t/(1+t)$ folyamatot.

Könnyen látható, hogy most $X(t) = 1$. A $\{H = X\}$ halmaz üres, így a találati ideje $\tau_* = +\infty$, amely nem optimális megoldás. Ha $0 < \lambda < 1$ és $\lambda = t/(1+t)$, akkor $t = \lambda/(1-\lambda)$, így $\tau^* = \infty$. □

6.2. Homogén Itô-diffúziók és az erős Markov-tulajdonság

A továbbiakban ismét áttekintjük az optimális megállítás problémáját, de az absztrakt nyelvezet helyett a modell fogalmait némiképpen specifikáljuk.

1. A problémát Itô-diffúziókra tárgyaljuk.
2. A $H(t)$ kifizetés $g(X(t))$ alakú, ahol X egy Itô-diffúzió, g pedig folytonos függvény.

6.27. Definíció. Homogén Itô-diffúzión sztochasztikus folyamatot olyan családját értünk, amely kielégíti a

$$dX_t^{s,x} = b(X_t^{s,x})\, dt + \sigma(X_t^{s,x})\, dw_t,$$
$$t \geq s, X^{s,x}(s) = x$$

sztochasztikus differenciálegyenletet, ahol $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$. Feltesszük továbbá, hogy a modellben szereplő paraméterek elég „jók”, vagyis

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

teljesítik azokat a feltételeket, amelyek biztosítják, hogy az egyenlet gyenge megoldása minden (s,x) pár esetén létezik és egyértelmű. Filtráción a

$$(w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

Wiener-folyamatok által generált kiterjesztett filtrációt érjük.

Az Itô-diffúziók a dinamikus rendszerek fogalmának általánosításai. Minden $\mathbf{x}$ kezdeti feltétel esetén más és más folyamatot kapunk. Jelölje X a megoldás által definiált sztochasztikus dinamikus rendszert. Az X valójában egy $X(s,\mathbf{x},t,\omega)$ négyváltozós függvény. A felírásból ugyancsak látható, hogy az X értékkészletének dimenziója n, és a modellben szereplő független Wiener-folyamatok száma m. Tetszőleges s és $\mathbf{x}$ valamint t esetén az $X(s,\mathbf{x},t)$ egy valószínűségi változó. Az $X^{\mathbf{x}}$ jelölésen az $s=0$ időponthoz tartozó, az $\mathbf{x}$ kezdeti pontból elindított megoldást értjük. Az Itô-diffúziókat a továbbiakban a kanonikus reprezentációban fogjuk tekinteni. Az $\mathbf{x}$ pontból elindított folyamat eloszlását jelölje $P^{\mathbf{x}}$. Emlékeztetünk az erős Markov-tulajdonságra:

6.28. Tétel. *Legyen Φ a $C([0,\infty))$ téren értelmezett nem negatív Borel-mérhető függvény és legyen τ tetszőleges véges megállási idő. Ekkor minden x-re a P^x mérték szerint majdnem mindenhol*

$$E^x\left(\Phi(\theta_\tau X) \mid \mathcal{F}_\tau^0\right) = E^x(\Phi(\theta_\tau X) \mid X(\tau)) = E^{X(\tau)}(\Phi(X)).$$

A Φ mérhetősége kapcsán valójában nem a Borel-mérhetőség a lényeg, hanem az, hogy a Φ, hasonlóan a $\mathcal{F}^0$ filtráció generálásához, a koordinátafüggvények által generált σ-algebrára nézve mérhető. A $C([0,\infty))$ speciális tulajdonságai miatt ez egybeesik a Borel-mérhetőséggel. A későbbiek szempontjából döntő a következő példa:

6.29. Példa. Nyílt halmazokból való kilépés időpontjában felvett érték Borel-mérhetősége.

Legyen $G \subseteq \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges nyílt halmaz és tekintsük a

$$\tau_G \triangleq \inf\{t \mid X(t) \notin G\} = \inf\{t \mid X(t) \in G^c\}$$

véletlen időpontot. A τ_G éppen a G^c zárt halmaz találati ideje. Érdemes hangsúlyozni, hogy tetszőleges Borel-mérhető halmazokból való kilépési idők, vagyis a Borel-mérhető halmazok találati idejei csak a szokásos feltételek teljesülése esetén lesznek biztosan megállási idők. Ahhoz, hogy megállási idők kapjunk a filtrációt teljessé kell tenni. A teljessé tett σ-algebra szerint mérhető függvényekre az erős Markov-tulajdonságot azonban nem igazoltuk. Ha R egy zárt halmaz, X folytonos trajektóriájú, adaptált folyamat, akkor a R találati ideje a filtrációra tett minden további feltétel megkövetelése nélkül is megállási idő. A kilépés helyét megadó $X(\tau_G) \in \mathbb{R}^n$ megállított változó,

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

mint minden megállított változó, mérhető, vagyis a folytonos függvények $\Omega \triangleq C([0,\infty))$ terén Borel-mérhető. Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges Borel-mérhető függvény, akkor a $\Phi(X(\omega)) \triangleq \varphi(X(\tau_G))$ módon definiált funkcionál szintén Borel-mérhető függvény a lehetséges trajektóriák $\Omega \triangleq C([0,\infty))$ terén. □

A később bevezetett elnevezések motiválása céljából röviden emlékeztetünk a harmonikus függvényekre. Megmutatható a következő:

6.30. Állítás. *Egy f függvény pontosan akkor harmonikus egy G nyílt halmazon, vagyis pontosan akkor*

$$\Delta f(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad ha \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda_{\partial R}(\partial R)} \int_{\partial R} f(\mathbf{y})\, d\lambda_{\partial R}(\mathbf{y})$$

minden $R \subseteq G$ gömb esetén, ahol $\lambda_{\partial R}$ jelöli a R gömb felszínén értelmezett felszínmértéket.

Bizonyítás. Az egyik irány, nevezetesen, hogy ha az f harmonikus, akkor teljesül az átlag tulajdonság, az Itô-formula miatt triviális: Elegendő a formulát a gömből való kilépés időpontjára alkalmazni és a formulában szereplő két tag várható értékét kiszámolni. A másik irány valamivel bonyolultabb és az indoklást elhagyjuk. □

6.31. Példa. Wiener-folyamat nyílt halmazból való kilépése és a harmonikus függvények.

Legyen $\mathbf{w}$ egy n dimenziós Wiener-folyamat és legyen $G \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz és legyen φ a G halmaz ∂G határán értelmezett, korlátos, „hasznossági" függvény. Legyen τ_G a korábban definiált kilépési időpont és $f(\mathbf{x}) \triangleq E^{\mathbf{x}}(\varphi(\mathbf{w}(\tau_G)))$, vagyis $f(\mathbf{x})$ legyen az $\mathbf{x}$ időpontból elindított Wiener-folyamat kilépéskor való átlagos φ-értéke. Legyen $R(\mathbf{x}, r) \subseteq G$ és $S \triangleq \{\|\mathbf{y}\| = r\}$ a $R(\mathbf{x}, r)$ felszíne. Mivel a $\mathbf{w}$ Wiener-folyamat forgatásinvariáns, ezért a $\mathbf{w}(\tau_S)$ változó

$$\mu(C) \triangleq P^{\mathbf{x}}(\mathbf{w}(\tau_S) \in C) = E^{\mathbf{x}}(\chi_C(\mathbf{w}(\tau_S))), \quad C \in \mathcal{R}(S)$$

eloszlása is forgatásinvariáns. Könnyen megmutatható, hogy a gömbfelszínen a forgatásinvariáns valószínűségi mérték egyértelmű, és bármely azonos szögtartomány μ mértéke azonos. A μ tekinthető az S gömbfelszínen való egyenletes eloszlásnak. Mivel ahhoz, hogy $\mathbf{w}$ a G-ből kilépjen ki kell előbb lépnie a $R(\mathbf{x}, r)$-ből is, vagyis bele kell metszenie az S-be, ezért az erős Markov-tulajdonság és a transzformált valószínűségi változók várható értékének képlete miatt

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{\circ}{=} E^{\mathbf{x}}(\varphi(\mathbf{w}(\tau_G))) \stackrel{\circ}{=} E^{\mathbf{x}}(\Phi(\mathbf{w})) = E^{\mathbf{x}}(\Phi(\theta_{\tau_S}\mathbf{w})) =$$
$$= E^{x}(E^{\mathbf{x}}(\Phi(\theta_{\tau_S}\mathbf{w}) \mid \mathcal{F}_{\tau_S})) = E^{\mathbf{x}}\left(E^{\mathbf{w}(\tau_S)}(\Phi(\mathbf{w}))\right) =$$
$$= E^{\mathbf{x}}\left(E^{\mathbf{w}(\tau_S)}(\varphi(\mathbf{w}(\tau_G)))\right) \stackrel{\circ}{=} E^{\mathbf{x}}(f(\mathbf{w}(\tau_S))) = \int_S f(\mathbf{y})\, d\mu(\mathbf{y}).$$

Következésképpen az f függvény harmonikus. □

6.2.1. Az optimális megállítás problémája Itô-diffúziókra

Legyen X egy homogén Itô-diffúzió és legyen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$. Az optimális megállítás feladata a

$$g^*(\mathbf{x}) \stackrel{\circ}{=} \sup_{\tau} E^{\mathbf{x}}(g(X)(\tau)) = \sup_{\tau} \mathbf{E}(g(X^{\mathbf{x}})(\tau)) =$$
$$= \sup_{\tau} \mathbf{E}(g(X^{\mathbf{x}})(\tau)\,\chi(\tau < \infty))$$

érték meghatározása. Vegyük észre, hogy a feladat szempontjából elvileg nem közömbös, hogy a kanonikus megfogalmazásban, vagy az eredeti megfogalmazásban írjuk-e fel a feladatot, ugyanis a két különböző megfogalmazásban semmi sem biztosítja a megállási idők halmazának kölcsönös megfeleltethetőségét. Az optimális megállási idők halmaza tartalmazza bizonyos halmazokból való első kilépések időpontját. A kilépések időpontjai csak a trajektóriáktól függnek, így az optimum szempontjából mind a két megfogalmazás esetén rendelkezésre állnak. A feladatban előfordulhat, hogy valamely ω kimenetelre $\tau(\omega) = \infty$. Ilyenkor a megállított változó definíciójával összhangban a $g(X)(\tau)$ kifizetés értékét az ω kimenetel esetén nullának definiáljuk.

6.2.2. Szuperharmonikus függvények

6.32. Definíció. Emlékeztetünk, hogy definíció szerint egy f függvényt alulról félig folytonosnak mondunk, ha tetszőleges $x_k \to x$ sorozatra

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \geq f(x).$$

Ez a definíció ekvivalens avval, hogy tetszőleges λ szint esetén az $\{f > \lambda\}$ halmaz nyílt, illetve az $\{f \leq \lambda\}$ halmaz zárt.

6.33. Definíció. Valamely $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ Borel-mérhető függvényt szuperközepesnek mondunk, ha tetszőleges $\mathbf{x}$ és tetszőleges τ megállási idő esetén

$$f(\mathbf{x}) \geq E^{\mathbf{x}}(f(X(\tau))) = \mathbf{E}(f(X^{\mathbf{x}}(\tau))).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az alulról félig folytonos és szuperközepes függvényeket szuperharmonikusnak mondjuk. Természetesen a szuperközepesség és így a szuperharmonikus tulajdonság az alapul vett X diffúzió szerint értendő.

A definícióból világos, hogy a szuperközepesség a konkáv függvényeknek, a szuperharmonikusság az alulról félig folytonos konkáv függvények általánosításának felel meg. Ha (f_α) alulról félig folytonos és $f \stackrel{\circ}{=} \sup f_\alpha$, akkor az f is alulról félig folytonos ugyanis $\{f \leq \lambda\} = \cap_\alpha \{f_\alpha \leq \lambda\}$. A szuperharmonikusság megadott definíciójában nem túl szerencsés, hogy az egyenlőtlenségnek minden τ megállási idő esetén teljesülni kell. A feltétel teljesülésének ellenőrizhetősége nem tűnik egyszerűnek. Éppen ezt próbálja megkerülni a következő definíció:

6.34. Definíció. Az alulról félig folytonos $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ függvényt excesszívnek, vagy túlzó mondjuk, ha minden $s \geq 0$ időpont esetén

$$f(\mathbf{x}) = E^{\mathbf{x}}(f(X(0))) \geq E^{\mathbf{x}}(f(X(s))).$$

6.35. Állítás. *Ha X egy Itô-diffúzió, akkor valamely $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ pontosan akkor túlzó, ha szuperharmonikus.*

Bizonyítás. Az egyik irány, nevezetesen hogy minden szuperharmonikus függvény túlzó, triviális. Mivel mind a két fogalom definíciójában szerepel az alulról félig folytonosság, a fordított irány bizonyításához elegendő belátni, hogy az f szuperközepes. Ennek igazolását több lemmára bontjuk.

6.36. Lemma. *A következő tulajdonságok teljesülnek:*

1. *Ha α,$\beta \geq 0$ és az f és a g szuperharmonikus, akkor az $\alpha f + \beta g$ is szuperharmonikus. Hasonló tulajdonság teljesül a szuperközepes és a túlzó függvényekre.*
2. *Ha (f_γ) szuperközepes függvények egy halmaza és az $f(x) \stackrel{\circ}{=} \inf_\gamma f_\gamma(x)$ Borel-mérhető, akkor az f szuperközepes. Ha az függvény alulról félig folytonos, akkor ez a szuperharmonikus és a túlzó függvényekre is teljesül. Speciálisan az f említett tulajdonságait megöröklik az $f \wedge n$ függvények.*
3. *Ha $0 \leq f_n \nearrow f$ és mindegyik f_n szuperharmonikus, akkor az f is szuperharmonikus. Hasonló tulajdonság érvényes a szuperközepes és a túlzó függvényekre.*

A lemma bizonyítása. Az egyes tulajdonságok indoklása a következő:

1. Az első tulajdonság bizonyítása nyilvánvaló.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

2. A szuperközepesség definíciója szerint tetszőleges γ indexre és minden τ megállási idő esetén, feltéve, hogy az f Borel-mérhető és így az utolsó várható érték értelmes

$$f_\gamma(\mathbf{x}) \geq E^{\mathbf{x}}(f_\gamma(X(\tau))) \geq E^{\mathbf{x}}(f(X(\tau))).$$

A γ szerint infimumot véve az állítás evidens módon következik.

3. Ha az (f_n) függvények szuperközepesek, akkor a monoton konvergencia tétel miatt

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}) \geq \lim_{n\to\infty} E^{\mathbf{x}}(f_n(X(\tau))) =$$
$$= E^{\mathbf{x}}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(X(\tau))\right) \stackrel{\circ}{=} E^{\mathbf{x}}(f(X(\tau))),$$

vagyis az f szuperközepes. Ha az (f_n) függvények alulról félig folytonosak, akkor az $f = \sup_n f_n$ is alulról félig folytonos, így a szuperharmonikusság is megőrződik. □

Mivel a konstans függvények túlzóak és szuperharmonikusak, ezért a lemmában szereplő tulajdonságok alapján az állítás bizonyítása során feltehető, hogy az f korlátos.

6.37. Lemma. *Ha az f túlzó, akkor minden $\mathbf{x}$ esetén az $E^{\mathbf{x}}$ mérték mellett az $f(X)$ olyan logikai szupermartingál, amelynek van szupermartingál módosítása.*

A lemma bizonyítása. A Markov-tulajdonság és a túlzó függvények definíciója miatt

$$E^{\mathbf{x}}(f(X(t+h)) \mid \mathcal{F}_t) = E^{X(t)}(f(X(h))) \leq f(X(t)),$$

vagyis az $f(X)$ logikai szupermartingál. Mivel az f korlátos, ezért az $f(X(t))$ integrálható. Az ekvivalens módosítás létezéséhez elég megmutatni, hogy az $E^{\mathbf{x}}(f(X(t)))$ jobbról folytonos. Érdemes emlékeztetni, hogy a filtráció a Wiener-folyamat által generált filtráció, amely nem jobbról folytonos, így a szokásos feltételek nem teljesülnek. Ha azonban a filtrációt kiegészítjük a nullmértékű halmazokkal, akkor a szokásos feltételek teljesülni fognak, és akkor az ekvivalens módosítás erejéig a módosítás meghatározható. A logikai szupermartingál tulajdonság miatt az $E^{\mathbf{x}}(f(X(s)))$ nem növekszik, tehát ha $s > t$, akkor $E^{\mathbf{x}}(f(X(s))) \leq E^{\mathbf{x}}(f(X(t)))$. Az f alulról való félig folytonossága az X jobbról való folytonossága és a Fatou-lemma miatt

$$E^{\mathbf{x}}(f(X(t))) \geq \lim_{s\searrow t} E^{\mathbf{x}}(f(X(s))) \geq E^{\mathbf{x}}\left(\liminf_{s\searrow t} f(X(s))\right) \geq E^{\mathbf{x}}(f(X(t))),$$

amiből az $E^{\mathbf{x}}(f(X(s)))$ jobbról folytonossága már adódik. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A tétel bizonyítására visszatérve jelölje $\widehat{f}(X)$ a második lemmában szereplő szupermartingál módosítást. Ekkor a szupermartingál tulajdonság miatt tetszőleges τ megállási időre

$$E^{\mathbf{x}}\left(\widehat{f}(X(\tau))\right) \leq E^{\mathbf{x}}\left(\widehat{f}(X(0))\right) = E^{\mathbf{x}}(f(X(0))) = f(\mathbf{x}).$$

Az egyetlen gond csak az, hogy az egyenlőtlenségben az $\widehat{f}(X)$ és nem az $f(X)$ szerepel. Ezt ismételten a véges értékkészletű megállási időkkel való közelítéssel fogjuk orvosolni. Legyen $\tau_n \searrow \tau$ és τ_n véges értékkészletű. Az X folytonossága és az f alulról félig folytonossága miatt, felhasználva a Fatou-lemmát

$$\begin{aligned} E^{\mathbf{x}}(f(X(\tau))) &= E^{\mathbf{x}}\left(f\left(X\left(\lim_{n\to\infty}\tau_n\right)\right)\right) = E^{\mathbf{x}}\left(f\left(\lim_{n\to\infty}X(\tau_n)\right)\right) \leq \\ &\leq E^{\mathbf{x}}\left(\liminf_{n\to\infty} f(X(\tau_n))\right) \leq \liminf_{n\to\infty} E^{\mathbf{x}}(f(X(\tau_n))) = \\ &= \liminf_{n\to\infty} E^{\mathbf{x}}\left(\widehat{f}(X(\tau_n))\right) \leq f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

vagyis az f szuperközepes, amiből a tétel már evidens. □

6.38. Következmény. *Legyen X egy Itô-diffúzió. A következő állítások teljesülnek:*

1. *Ha f szuperharmonikus és $\sigma \leq \tau$ tetszőleges megállási idők, akkor tetszőleges $\mathbf{x}$-re $E^{\mathbf{x}}(f(X(\sigma))) \geq E^{\mathbf{x}}(f(X(\tau)))$.*
2. *Legyen f szuperharmonikus függvény, és G legyen egy tetszőleges nyílt halmaz. Jelölje $\tau_G \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid X(t) \notin G\}$ a G-ból való első kilépés időpontját. Ha $\widetilde{f}(\mathbf{x}) \stackrel{\circ}{=} E^{\mathbf{x}}(f(X(\tau_G)))$, akkor az $\widetilde{f}$ szuperközepes.*

Bizonyítás. A már elmondottak alapján az indoklás egyszerű:

1. Az előző tétel bizonyítása során használt második lemma miatt a $t \mapsto f(X(t))$ rendelkezik olyan nem negatív szupermartingál módosítással, amelyet az egyenlőtlenség igazolásához alkalmazhatunk. Az egyenlőtlenség a megállási opciókról szóló tétel közvetlen folyománya.

2. Legyen τ tetszőleges megállási idő. Vegyük észre, hogy

$$\widetilde{f}(X(\tau)) \stackrel{\circ}{=} \widetilde{f}(\mathbf{x}) \mid_{\mathbf{x}=X(\tau)} \stackrel{\circ}{=} E^{\mathbf{x}}(f(X(\tau_G))) \mid_{\mathbf{x}=X(\tau)} = E^{X(\tau)}(f(X(\tau_G))).$$

Az $\omega \mapsto \Phi(\omega) \stackrel{\circ}{=} f(X(\tau_G(\omega), \omega))$ függvény a következőt jelenti: Adott ω esetén megnézzük, hogy hol hagyja el a G nyílt halmazt az $X(\omega)$ trajektória, majd ebben a kilépési ponban kiértékeljük az f függvényt. Miként láttuk az így kapott $\Phi : C([0,\infty)) \to [0,\infty]$ függvény Borel-mérhető. Az $\widetilde{f}(X(\tau)) = E^{X(\tau)}(\Phi(X))$ valószínűségi változó az erős Markov-tulajdonság alapján

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

a $P^{\mathbf{x}}$ mérték szerint majdnem mindenhol megegyezik az $E^{\mathbf{x}}\left(\Phi\left(\theta_\tau X\right) \mid \mathcal{F}_\tau\right)$ változóval. Tekintsük a

$$E^{\mathbf{x}}\left(\widetilde{f}\left(X\left(\tau\right)\right)\right) \stackrel{\circ}{=} E^{\mathbf{x}}\left(E^{X(\tau)}\left(f\left(X\left(\tau_G\right)\right)\right)\right) = \\ = E^{\mathbf{x}}\left(E^{\mathbf{x}}\left(\Phi\left(\theta_\tau X\right) \mid \mathcal{F}_\tau\right)\right) = E^{x}\left(\Phi\left(\theta_\tau X\right)\right)$$

várható értéket. Az utolsó képlet szerint a trajektóriákat el kell tolni a τ időpontba, majd az eltolt trajektóriák esetén meg kell keresni az első kilépési pontot és ott alkalmazni kell az f függvényt. Legyen

$$\rho \stackrel{\circ}{=} \inf\left\{t \geq \tau \mid X\left(t\right) \notin G\right\} \geq \tau_G \stackrel{\circ}{=} \inf\left\{t \geq 0 \mid X\left(t\right) \notin G\right\}.$$

Nyilván $\Phi\left(\theta_\tau X\right) = f\left(X\left(\rho\right)\right)$. Az első pont alapján

$$E^{\mathbf{x}}\left(\widetilde{f}\left(X\left(\tau\right)\right)\right) = E^{\mathbf{x}}\left(f\left(X\left(\rho\right)\right)\right) \leq E^{\mathbf{x}}\left(f\left(X\left(\tau_G\right)\right)\right) = \widetilde{f}\left(\mathbf{x}\right),$$

így az $\widetilde{f}$ szuperközepes. □

6.2.3. Szuperharmonikus burkoló és az értékfüggvény

A konvex analízisben fontos szerepet játszik a konvex burkoló fogalma. Hasonló szerepet játszik a szupeharmonikus burkoló.

6.39. Definíció. Legyen h tetszőleges az $\mathbb{R}^n$ téren értelmezett függvény.

1. Azt mondjuk, hogy az f függvény a h függvény egy szuperközepes majoránsa, ha az f szuperközepes és $f \geq h$. A h összes szuperközepes majoránsának infimumát a h szuperközepes burkolójának mondjuk. A h szuperközepes burkolóját $\overline{h}$ módon fogjuk jelölni.
2. Hasonlóan a $\widehat{h}$ jelöli a h legkisebb szuperharmonikus majoránsát, vagy másképpen szuperharmonikus burkolóját. Definíció szerint a $\widehat{h}$ szuperharmonikus és $\widehat{h} \geq h$, valamint minden olyan g szuperharmonikus függvényre, amelyre $g \geq h$ teljesül a $\widehat{h} \leq g$ egyenlőtlenség.

Az alább következő gondolatmenet célja a $\widehat{g} = \overline{g} = g^*$ egyenlőség igazolása folytonos $g \geq 0$ függvények esetén. Legyen $g \geq 0$ és legyen f a g egy szuperközepes majoránsa. Ha τ egy tetszőleges megállási idő, akkor az f szuperközepessége szerint

$$f\left(\mathbf{x}\right) \geq E^{\mathbf{x}}\left(f\left(X\left(\tau\right)\right)\right) \geq E^{\mathbf{x}}\left(g\left(X\left(\tau\right)\right)\right),$$

így

$$f\left(\mathbf{x}\right) \geq \sup_{\tau} E^{x}\left(g\left(X\left(\tau\right)\right)\right) \stackrel{\circ}{=} g^*\left(\mathbf{x}\right).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Mivel az egyenlőség minden f szuperközepes majoráns esetén teljesül, ezért az infimumukra is teljesül, ezért

$$\overline{g}(\mathbf{x}) \stackrel{\circ}{=} \inf_f f(\mathbf{x}) \geq g^*(\mathbf{x}). \tag{6.4}$$

A definíció kapcsán érdemes hangsúlyozni, hogy a $\widehat{h}$ szuperharmonikus burkoló esetén feltettük, hogy a $\widehat{h}$ szuperharmonikus. A $\overline{h}$ szuperközepes burkoló esetén azonban nem biztos, hogy a $\overline{h}$ szuperközepes. Ha a $\overline{h}$ Borel-mérhető, akkor persze szuperközepes[7] és egyetlen szuperközepes majoráló függvénynél sem nagyobb. A szuperközepes burkoló mindig létezik, bár esetleg nem lesz mérhető. A szuperharmonikus burkoló létezését a szuperközepes burkoló segítségével fogjuk igazolni. Gyakran fogunk hivatkozni a következőre:

6.40. Lemma. *Ha $g_n \nearrow g$, akkor $\widehat{g}_n \nearrow \widehat{g}$, feltéve, hogy a burkolók léteznek.*

Bizonyítás. Legyen $h \stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \widehat{g}_n$. A h szuperharmonikus. Mivel $g_n \leq g$ ezért triviálisan $\widehat{g}_n \leq \widehat{g}$, következésképpen $h \stackrel{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} \widehat{g}_n \leq \widehat{g}$. Másrészt azonban $g_n \leq \widehat{g}_n \leq h$, így n szerint határértéket véve $g \leq h$. Mivel $\widehat{g}$ a legkisebb szuperharmonikus majoráns, ezért $\widehat{g} \leq h$. Ebből következően $h = \widehat{g}$. □

6.41. Lemma. *Ha g folytonos, korlátos, nem negatív függvény, akkor $\widehat{g} = \overline{g}$. Legyen továbbá*

$$S_n \stackrel{\circ}{=} \left\{k2^{-n} \mid 0 \leq k \leq 4^n\right\}.$$

Definiáljuk a

$$g_0 \stackrel{\circ}{=} g,$$
$$g_{n+1}(\mathbf{x}) \stackrel{\circ}{=} \max_{t\in S_n} E^{\mathbf{x}}\left(g_n\left(X(t)\right)\right)$$

iterációt. Ilyenkor $g_n \nearrow \widehat{g}$.

Bizonyítás. Első lépésben indukcióval megmutatjuk, hogy a g_n függvények mindegyike folytonos. Tetszőleges n-re a g_n véges számú függvény maximuma, így elegendő belátni, hogy minden t esetén az $\mathbf{x} \mapsto E^{\mathbf{x}}\left(g_n\left(X(t)\right)\right)$ függvények mindegyike folytonos. Ehhez elég megmutatni, hogy tetszőleges $r \geq 0$ folytonos, korlátos függvény esetén az $u(\mathbf{x}) \stackrel{\circ}{=} E^{\mathbf{x}}\left(r\left(X(t)\right)\right)$ függvény folytonos. Miként a sztochasztikus differenciálegyenletek tárgyalásakor jeleztük a kezdeti érték függvényében a megoldás $L^2(\Omega)$-ban folytonos. Ebből következően ha $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, akkor $L^2(\Omega)$-ban $X^{\mathbf{x}_n}(t) \to X^{\mathbf{x}}(t)$. Részsorozatra áttérve

[7] V.ö.: 6.36. lemma, 366. oldal.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

a konvergencia majdnem mindenhol is teljesül. A majorált konvergencia tétel alapján kihasználva, hogy az r folytonos

$$u(\mathbf{x}) \overset{\circ}{=} E^{\mathbf{x}}(r(X(t))) = \mathbf{E}(r(X^{\mathbf{x}}(t))) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} r(X^{x_n}(t))\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(r(X^{\mathbf{x}_n}(t))) \overset{\circ}{=} \lim_{n\to\infty} u(\mathbf{x}_n).$$

Mivel ez tetszőleges sorozatra igaz, ezért az u folytonos.

Nyilvánvalóan a (g_n) sorozat nő, ugyanis mivel $0 \in S_n$ ezért

$$g_{n+1}(\mathbf{x}) \overset{\circ}{=} \max_{t\in S_n} E^{\mathbf{x}}(g_n(X(t))) \geq E^{\mathbf{x}}(g_n(X(0))) = g_n(\mathbf{x}).$$

Jelölje a (g_n) sorozat határértékét g_∞. Meg kell mutatni, hogy a g_∞ szuperharmonikus. Ehhez elegendő belátni, hogy túlzó. Mivel az összes g_n folytonos és a konvergencia monoton növekedő ezért a $g_\infty = \sup g_n$ alulról félig folytonos. Ha $t \in \cup_k S_k$, akkor alkalmas n-re $t \in S_n \subseteq S_{n+1} \subseteq \ldots$, amiből

$$g_\infty(\mathbf{x}) \geq g_{n+1}(\mathbf{x}) \geq E^{\mathbf{x}}(g_n(X(t))).$$

Ebből ha $t \in \cup_k S_k$ tetszőleges, akkor

$$g_\infty(\mathbf{x}) \geq \lim_{n\to\infty} E^{\mathbf{x}}(g_n(X(t))) = E^{\mathbf{x}}\left(\lim_{n\to\infty} g_n(X(t))\right) = E^{\mathbf{x}}(g_\infty(X(t))).$$

Legyen most t tetszőleges. Az S_k halmazok konstrukciója alapján van olyan $(t_k) \subseteq \cup_k S_k$, amelyre $t_k \to t$. Az imént belátott

$$g_\infty(\mathbf{x}) \geq E^{\mathbf{x}}(g_\infty(X(t_k)))$$

egyenlőtlenség, a Fatou-lemma és a g_∞ alulról félig folytonossága alapján

$$g_\infty(\mathbf{x}) \geq \liminf_{k\to\infty} E^{\mathbf{x}}(g_\infty(X(t_k))) \geq E^{\mathbf{x}}\left(\liminf_{k\to\infty} g_\infty(X(t_k))\right) \geq E^{\mathbf{x}}(g_\infty(X(t))).$$

Következésképpen a g_∞ túlzó, így szuperharmonikus. Mivel $g \overset{\circ}{=} g_0 \leq g_\infty$, ezért a g_∞ a g egy szuperharmonikus majoránsa. Ha f a g egy tetszőleges szuperközepes majoránsa, akkor $f \geq g \overset{\circ}{=} g_0$ és indukcióval

$$f(\mathbf{x}) \geq \sup_{t\in S_n} E^{\mathbf{x}}(f(X(t))) \geq \sup_{t\in S_n} E^{\mathbf{x}}(g_n(X(t))) \overset{\circ}{=} g_{n+1}(\mathbf{x}),$$

így $f \geq g_\infty$. Ebből következően $\overline{g} \geq g_\infty \geq \widehat{g} \geq \overline{g}$ így $g_\infty = \widehat{g} = \overline{g}$. □

6.42. Következmény. *Ha g folytonos, nem negatív, korlátos függvény és $h_0 \overset{\circ}{=} g$ és $h_{n+1}(\mathbf{x}) \overset{\circ}{=} \sup_{t\geq 0} E^{\mathbf{x}}(h_n(X(t)))$, akkor $h_n \nearrow \widehat{g}$.*

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Mivel

$$h_{n+1}(\mathbf{x}) \geq E^{\mathbf{x}}(h_n(X(0))) = E^{\mathbf{x}}(h_n(\mathbf{x})) = h_n(\mathbf{x}),$$

ezért a (h_n) sorozat nő. Legyen $h_n \nearrow h_\infty$. Mivel $h_n \geq g_n$, ezért világos, hogy $h_\infty \geq \lim_{n\to\infty} g_n = \widehat{g}$. A $\widehat{g}$ túlzó, így a $\widehat{g} \geq g \stackrel{\circ}{=} h_0$ összefüggésből kiindulva, indukcióval

$$\widehat{g}(\mathbf{x}) \geq \sup_{t\geq 0} E^{\mathbf{x}}(\widehat{g}(X(t))) \geq \sup_{t\geq 0} E^{\mathbf{x}}(h_n(X(t))) \stackrel{\circ}{=} h_{n+1}(\mathbf{x}),$$

következésképpen $\widehat{g} \geq h_\infty$, így $\widehat{g} = h_\infty$. □

6.43. Következmény. *Ha g folytonos, nem negatív függvény, akkor $\widehat{g} = \overline{g}$.*

Bizonyítás. Legyen $g_n \stackrel{\circ}{=} g \wedge n$. Miként beláttuk $\widehat{g} = \lim_{n\to\infty} \widehat{g}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{g}_n$. Ha f a g egy szuperközepes majoránsa, akkor $f \geq g \geq g_n$, következésképpen $f \geq \overline{g}_n$, így $\inf f \stackrel{\circ}{=} \overline{g} \geq \lim_{n\to\infty} \overline{g}_n$. Ugyanakkor mivel a $\widehat{g}_n$ alulról félig folytonos, ezért Borel-mérhető, így a $\overline{g}_n$ is Borel-mérhető, következésképpen a $\lim_{n\to\infty} \overline{g}_n$ is az, így a $\lim_{n\to\infty} \overline{g}_n$ egy szuperközepes függvény, amelyre $\lim_{n\to\infty} \overline{g}_n \geq \lim_{n\to\infty} g_n = g$, tehát $\overline{g} \leq \lim_{n\to\infty} \overline{g}_n$, tehát $\lim_{n\to\infty} \overline{g}_n = \overline{g}$. Következésképpen $\widehat{g} = \overline{g}$. □

6.44. Tétel. *Jelölje g^* az optimális megállítás problémájában szereplő értékfüggvényt, és legyen $\widehat{g}$ a $0 \leq g < \infty$ folytonos kifizető függvény szuperharmonikus burkolója. Ekkor $g^* = \widehat{g}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, először, hogy a g korlátos. Legyen

$$D_\varepsilon \stackrel{\circ}{=} \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) < \widehat{g}(\mathbf{x}) - \varepsilon\} \quad \text{és legyen} \quad \tau_\varepsilon \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid X(t) \notin D_\varepsilon\},$$

valamint legyen

$$\widetilde{g}_\varepsilon(\mathbf{x}) \stackrel{\circ}{=} E^{\mathbf{x}}(\widehat{g}(X(\tau_\varepsilon))) \stackrel{\circ}{=} E^{\mathbf{x}}(\widehat{g}(X(\tau_\varepsilon))\chi(\tau_\varepsilon < \infty)).$$

A g feltételezett korlátossága miatt a $\widetilde{g}_\varepsilon$ és a $\widehat{g}$ is korlátos, így az alábbi számolásokban az egyenlőtlenségekben a végtelen érték nem fordul elő.

A $\widehat{g}$ alulról félig folytonos, a g folytonos, így a D_ε halmaz nyílt. Ebből következően, miként láttuk, a $\widetilde{g}_\varepsilon$ szuperközepes. Megmutatjuk, hogy minden $\mathbf{x}$-re $g(\mathbf{x}) \leq \widetilde{g}_\varepsilon(\mathbf{x}) + \varepsilon$. Tegyük fel, hogy nem és legyen

$$R \stackrel{\circ}{=} \sup_{\mathbf{x}} (g(\mathbf{x}) - \widetilde{g}_\varepsilon(\mathbf{x})) > \varepsilon.$$

A szuprémum definíciója miatt tetszőleges $\eta > 0$ számhoz van olyan $\mathbf{x}_0$, hogy $g(\mathbf{x}_0) - \widetilde{g}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \geq R - \eta$. Vagyis

$$\widetilde{g}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) + R \leq g(\mathbf{x}_0) + \eta.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ugyanakkor $\widetilde{g}_\varepsilon + R$ a g egy szuperközepes majoránsa, ezért $\widehat{g} \leq \widetilde{g}_\varepsilon + R$, amiből

$$\widehat{g}(\mathbf{x}_0) \leq \widetilde{g}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) + R \leq g(\mathbf{x}_0) + \eta.$$

1. Tegyük fel, hogy a $P^{\mathbf{x}_0}$ szerint $\tau_\varepsilon > 0$. Ekkor, felhasználva, hogy a $\widehat{g}$ szuperközepes tetszőleges t-re

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}_0) + \eta \geq \widehat{g}(\mathbf{x}_0) &\geq E^{\mathbf{x}_0}\left(\widehat{g}(X(t \wedge \tau_\varepsilon))\right) \geq \\ &\geq E^{\mathbf{x}_0}\left(\widehat{g}(X(t))\,\chi(t < \tau_\varepsilon)\right) \geq \\ &\geq E^{\mathbf{x}_0}\left((g(X(t)) + \varepsilon)\,\chi(t < \tau_\varepsilon)\right) \end{aligned}$$

ugyanis ha $t < \tau_\varepsilon$, akkor $X(t) \in D_\varepsilon$ és ezért a D_ε definíciója miatt $g(X(t)) < \widehat{g}(X(t)) - \varepsilon$. A Fatou-lemma és a g és az X folytonossága szerint, illetve felhasználva, hogy $\tau_\varepsilon > 0$ majdnem mindenhol a P^{x_0} mérték szerint

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}_0) + \eta \geq &\liminf_{t \to 0} E^{\mathbf{x}_0}\left((g(X(t)) + \varepsilon)\,\chi(t < \tau_\varepsilon)\right) \geq \\ &\geq E^{\mathbf{x}_0}\left(\liminf_{t \to 0}\left(g(X(t)) + \varepsilon\right)\chi(t < \tau_\varepsilon)\right) = \\ &= E^{\mathbf{x}_0}\left(g(X(0) + \varepsilon)\,\chi(0 < \tau_\varepsilon)\right) = g(\mathbf{x}_0) + \varepsilon, \end{aligned}$$

ami lehetelen, ha $\eta < \varepsilon$.

2. Tegyük fel, hogy a P^{x_0} mérték szerint majdnem mindenhol $\tau_\varepsilon = 0$. Ilyenkor

$$\widetilde{g}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \stackrel{\circ}{=} E^{\mathbf{x}_0}\left(\widehat{g}(X(\tau_\varepsilon))\right) = E^{\mathbf{x}_0}\left(\widehat{g}(X(0))\right) = \widehat{g}(\mathbf{x}_0) \geq g(x_0),$$

amiből

$$\widetilde{g}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \geq g(\mathbf{x}_0) \geq \widetilde{g}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) + R - \eta,$$

ellenmondás, ha $\eta < R$.

3. A D_ε halmaz nyílt. Ennek következtében, ha $\mathbf{x}_0 \in D_\varepsilon^c$, akkor $\tau_\varepsilon = 0$, ha pedig $\mathbf{x}_0 \in D_\varepsilon$, akkor az X folytonossága miatt $\tau_\varepsilon > 0$. Ebből következően tehát, miként állítottuk tetszőleges $\mathbf{x}$-re

$$g(\mathbf{x}) \leq \widetilde{g}_\varepsilon(x) + \varepsilon$$

így a $\widetilde{g}_\varepsilon + \varepsilon$ a g egy szuperközepes majoránsa.

A τ_ε definíciója alapján, felhasználva, hogy mivel a g és az X folytonos, ezért ha valamely kimenetelre $\tau_\varepsilon < \infty$, akkor

$$X(\tau_\varepsilon) \in D_\varepsilon^c = \left\{\mathbf{x} \mid \widehat{g}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \leq \varepsilon\right\},$$

vagyis

$$g(X(\tau_\varepsilon)) + \varepsilon \geq \widehat{g}(X(\tau_\varepsilon)).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Mivel a $\widehat{g}$ a legkisebb szuperközepes majoránsa ezért

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\mathbf{x}) \leq \widetilde{g}_{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \varepsilon \stackrel{\circ}{=} E^{\mathbf{x}}\left(\widehat{g}\left(X\left(\tau_{\varepsilon}\right)\right)\chi\left(\tau_{\varepsilon} < t\right)\right) + \varepsilon \leq \\ \leq E^{\mathbf{x}}\left(\left(g+\varepsilon\right)\left(X\left(\tau_{\varepsilon}\right)\right)\chi\left(\tau_{\varepsilon} < t\right)\right) + \varepsilon \leq \\ \leq E^{\mathbf{x}}\left(g\left(X\left(\tau_{\varepsilon}\right)\chi\left(\tau_{\varepsilon} < t\right)\right)\right) + 2\varepsilon \leq g^{*}(\mathbf{x}) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Mivel az ε tetszőleges, ezért $\widehat{g} \leq g^{*}$. Ezt a korábban belátott (6.4) $\widehat{g} = \overline{g} \geq g^{*}$ egyenlőtlenséggel összevetve korlátos g esetén

$$\widehat{g} = g^{*}.$$

Ha a g nem korlátos, akkor legyen $g_N \stackrel{\circ}{=} N \wedge g$. Jelölje $\widehat{g}_N$ a g_N szuperharmonikus majoránsát. $g^{*} \geq \left(g_N\right)^{*} = \widehat{g}_N \nearrow \widehat{g} = \overline{g}$. Vagyis $g^{*} \geq \widehat{g}$. Mivel a fordított irány a már említett (6.4) sor miatt mindig teljesül a $g^{*} = \widehat{g}$ egyenlőség tetszőleges folytonos $g \geq 0$ esetén teljesül. □

6.45. Következmény. *Legyen $\varepsilon > 0$ és legyen $D_{\varepsilon} \stackrel{\circ}{=} \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) < \widehat{g}(\mathbf{x}) - \varepsilon\}$. Ha a g korlátos és folytonos és $\tau_{\varepsilon} \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid X(t) \notin D_{\varepsilon}\}$ a D_{ε} halmazból való első kilépés időpontja, akkor tetszőleges $\mathbf{x}$-re*

$$\left|g^{*}(\mathbf{x}) - \mathbf{E}^{x}\left(g\left(X\left(\tau_{\varepsilon}\right)\right)\right)\right| \leq 2\varepsilon. \tag{6.5}$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk, hogy valamely kimenetelre definíció szerint a megállított változó értéke nulla, ha a megállási idő értéke végtelen. Ezt a konvenciót felhasználva a már belátott

$$\widehat{g}(\mathbf{x}) \leq E^{\mathbf{x}}\left(g\left(X\left(\tau_{\varepsilon}\right)\right)\right) + 2\varepsilon$$

egyenlőtlenség alapján

$$g^{*}(x) - 2\varepsilon = \widehat{g}(x) - 2\varepsilon \leq E^{\mathbf{x}}\left(g\left(X\left(\tau_{\varepsilon}\right)\right)\right) \leq g^{*}(x),$$

amiből az összefüggés nyilvánvaló. □

6.2.4. A kilépési idő mint legkisebb optimális megállítás

6.46. Tétel. *Tegyük fel, hogy a g folytonos és tegyük fel, hogy létezik $\tau^{*} < \infty$ optimális megállási idő. Ha*

$$\mathcal{C} \stackrel{\circ}{=} \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) < g^{*}(\mathbf{x})\},$$

jelöli az úgynevezett folytatási tartományt, akkor a

$$\tau_{\mathcal{C}} \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid X(t) \notin \mathcal{C}\} = \inf\{t \mid g(X(t)) = g^{*}(X(t))\} \tag{6.6}$$

megállási idő optimális, vagyis $g^{*}(\mathbf{x}) = E^{\mathbf{x}}\left(X\left(\tau_{\mathcal{C}}\right)\right)$ valamint $\tau_{\mathcal{C}}$ minden $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ kezdőpont esetén az első optimális megállási idő, vagyis ha $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, akkor $P^{\mathbf{x}}$ majdnem minden kimenetelre $\tau^{*} \geq \tau_{\mathcal{C}}$.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ és tegyük fel, hogy valamely τ megállási időre $P^{\mathbf{x}}(\tau < \tau_{\mathcal{C}}) > 0$. Ha valamely kimenetelre $\tau < \tau_{\mathcal{C}}$, akkor az $X(\tau) \in \mathcal{C}$, vagyis ilyenkor $g(X(\tau)) < g^*(X(\tau))$. Mivel nyilván a $\tau = 0$ egy lehetséges megállási idő, ezért minden $\mathbf{y}$-ra $g(\mathbf{y}) = E^{\mathbf{y}}(g(X(0))) \leq g^*(\mathbf{y})$, következésképpen

$$\begin{aligned} E^{\mathbf{x}}(g(X(\tau))) &= \int_{\{\tau<\tau_{\mathcal{C}}\}} g(X(\tau))\, dP^{\mathbf{x}} + \int_{\{\tau\geq\tau_{\mathcal{C}}\}} g(X(\tau))\, dP^{\mathbf{x}} < \\ &< \int_{\{\tau<\tau_{\mathcal{C}}\}} g^*(X(\tau))\, dP^{x} + \int_{\{\tau\geq\tau_{\mathcal{C}}\}} g^*(X(\tau))\, dP^{\mathbf{x}} = \\ &= E^{\mathbf{x}}(g^*(X(\tau))) \leq g^*(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

ugyanis a $g^* = \widehat{g}$ szuperközép tulajdonságú. Ebből következően a τ nem lehet optimális. Így ha a τ optimális, akkor $\tau \geq \tau_{\mathcal{C}}$.

Tegyük fel, hogy létezik $\tau^* < \infty$ optimális megoldás. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$. Ilyenkor, ha τ^* a feltétel szerint létező optimális megállási idő, akkor az imént belátott egyenlőtlenség miatt $\tau^* \geq \tau_{\mathcal{C}}$ majdnem mindenhol a $P^{\mathbf{x}}$ szerint. Így mivel a $\widehat{g}$ szuperhamonikus, ezért a „megállási opciók miatt csökkenti a várható értéket". Kihasználva, hogy a $g^* = \widehat{g}$ alulról félig folytonosság miatt a D^c zárt, ezért $g(X(\tau_{\mathcal{C}})) = g^*(X(\tau_{\mathcal{C}}))$, ahol kihasználtuk, hogy $\tau_{\mathcal{C}} < \infty$.

$$\begin{aligned} g^*(\mathbf{x}) &= E^{\mathbf{x}}(g(X(\tau^*))) \leq E^{\mathbf{x}}(\widehat{g}(X(\tau^*))) \leq E^{\mathbf{x}}(\widehat{g}(X(\tau_{\mathcal{C}}))) = \\ &= E^{\mathbf{x}}(g(X(\tau_{\mathcal{C}}))) \leq g^*(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

így egyenlőség van, tehát az $\tau_{\mathcal{C}}$ is optimális.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{x} \notin \mathcal{C}$, vagyis $g(\mathbf{x}) = g^*(\mathbf{x})$. Ilyenkor triviálisan $\tau_{\mathcal{C}} = 0$, így

$$g^*(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = E^{\mathbf{x}}(g(X(\tau_{\mathcal{C}}))),$$

tehát a $\tau_{\mathcal{C}}$ optimális. □

6.2.5. Az optimális megállítás létezése

6.47. Definíció. Jelölje

$$\mathcal{C} \triangleq \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) < g^*(\mathbf{x})\}$$

az úgynevezett folytatási halmazt. Tetszőleges N esetén legyen

$$\begin{aligned} &g_N \triangleq g \wedge N, \\ &\mathcal{C}_N \triangleq \{\mathbf{x} \mid g_N(\mathbf{x}) < \widehat{g}_N(\mathbf{x})\} = \{\mathbf{x} \mid g_N(\mathbf{x}) < g_N^*(\mathbf{x})\}, \end{aligned}$$

valamint az egyszerűbb jelölés céljából legyen $\sigma_N \triangleq \tau_{\mathcal{C}_N}$ a $\mathcal{C}_N$ halmazból való kilépés időpontja.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

6.48. Tétel. *Tegyük fel, hogy a g célfüggvény folytonos.*

1. *Ekkor*
$$\mathcal{C}_N \subseteq \mathcal{C}_{N+1}, \quad \mathcal{C}_N \subseteq \mathcal{C} \cap \{g < N\}, \quad \mathcal{C} = \cup_N \mathcal{C}_N.$$
Ha $P^{\mathbf{x}}$ majdnem mindenhol $\sigma_N < \infty$ minden N-re, akkor
$$g^*(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} E^{\mathbf{x}}(g(X(\sigma_N))).$$

2. *Ha a $P^{\mathbf{x}}$ szerint majdnem mindenhol*
$$\tau_{\mathcal{C}} \triangleq \inf\{t \mid X(t) \notin \mathcal{C}\} < \infty$$
és a $(g(X(\sigma_N)))$ család egyenletesen integrálható a $P^{\mathbf{x}}$ szerint[8]*, akkor*
$$g^*(\mathbf{x}) = E^{\mathbf{x}}(g(X(\tau_{\mathcal{C}})))$$
és így ilyenkor $\tau_{\mathcal{C}}$ a feladat egy optimális megoldása.

Bizonyítás. Az állítás igazolását több lépcsőben végezhetjük el.

1. Tekintsük a következő általános megjegyzést: Legyen $A_n \nearrow A_\infty$ és jelölje τ_n az A_n halmazból való első kilépés idejét. Tegyük fel, hogy az A_n halmazok nyíltak. Megmutatjuk, hogy $\tau_n \nearrow \tau_\infty$. Mivel $A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq A_\infty$, ezért $\tau_n \leq \tau_{n+1} \leq \tau_\infty$. Ha $\sup_n \tau_n < t_0 < \tau_\infty$, akkor az X a t_0-ig már legalább egyszer kilépett mindegyik A_n-ból, de a $[0,t_0]$ szakaszon az X végig az $A_\infty \triangleq \cup A_n$ halmazban van, vagyis $X([0,t_0]) \in \cup_n A_n$. Az A_k halmazokból való kilépés miatt alkalmas (t_k) sorozatra $X(t_k) \notin A_k$, ahol $t_k \nearrow t_\infty \leq$ $\leq t_0$. Mivel $X(t_\infty, \omega) \in A_\infty = \cup_n A_n$, ezért alkalmas n-re $X(t_\infty) \in A_n$. De akkor az A_n nyíltsága miatt $X(t_k) \in A_n$ minden elég nagy k-ra, ami lehetetlen ugyanis ekkor $X(t_k) \in A_n \subseteq A_k$, minden elég nagy k-ra. Így valóban $\tau_n \nearrow \tau_\infty$.
2. Tegyük fel először, hogy a g korlátos. Ha $\varepsilon \searrow 0$ és
$$\mathcal{C}_\varepsilon \triangleq \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) < \widehat{g}(\mathbf{x}) - \varepsilon\},$$
akkor $\mathcal{C}_\varepsilon \nearrow \mathcal{C}$, így az imént tett megjegyzés miatt $\tau_\varepsilon \triangleq \tau_{\mathcal{C}_\varepsilon} \nearrow \tau_{\mathcal{C}}$. Tegyük fel, hogy $\tau_{\mathcal{C}} < \infty$. Mivel a g folytonos és korlátos a domináns konvergencia tétel miatt
$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} E^{\mathbf{x}}(g(X(\tau_\varepsilon))) = E^{\mathbf{x}}(g(X(\tau_{\mathcal{C}}))).$$
Így ha a g korlátos, akkor a már belátott (6.5) sor alapján.
$$|g^*(\mathbf{x}) - E^{\mathbf{x}}((g)(X(\tau_{\mathcal{C}})))| \leq 3\varepsilon.$$

[8] Vegyük észre, hogy ez teljesül, ha a $H(t) \triangleq g(X(t))$ folyamatnak létezik t-től független integrálható majoránsa.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Mivel ez tetszőleges ε esetén teljesül, ezért

$$g^*(\mathbf{x}) = E^{\mathbf{x}}(g(X(\tau_{\mathcal{C}}))) = E^{\mathbf{x}}(g(X(\tau_{\mathcal{C}}))\chi(\tau_{\mathcal{C}} < \infty))).$$

Vegyük észre, hogy egyúttal azt is igazoltuk, hogy ha a g korlátos és a $\tau_{\mathcal{C}}$ véges, akkor a $\tau_{\mathcal{C}}$ egy optimális megállási idő. Nyilvánvalóan ha a g korlátos, akkor a $(g(X(\sigma_N)))$ sorozat egyenletesen korlátos, vagyis a belátott eredmény a második állítás speciális része.

3. Így a már a korlátosokra belátott rész szerint, felhasználva, hogy a feltétel szerint $\sigma_N < \infty$ minden N-re, illetve a szuperharmonikus burkoló monotonitását

$$g^*(\mathbf{x}) = \widehat{g}(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \widehat{g}_N(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} E^{\mathbf{x}}(g_N(X(\sigma_N))) \leq$$
$$\leq \lim_{N\to\infty} E^{\mathbf{x}}(g(X(\sigma_N))) \leq g^*(x),$$

vagyis az első állítás második fele teljesül.

4. Vegyük észre, hogy mivel a konstansok szuperharmonikusok, ezért $\widehat{g}_N \leq N$, így ha

$$\mathbf{x} \in \mathcal{C}_N \stackrel{\circ}{=} \{\mathbf{x} \mid g_N(\mathbf{x}) < \widehat{g}_N(\mathbf{x})\},$$

akkor $g_N(\mathbf{x}) < N$, így ha $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_N$, akkor

$$g(\mathbf{x}) = g_N(\mathbf{x}) < \widehat{g}_N(\mathbf{x}) \leq \widehat{g}(\mathbf{x}),$$

vagyis $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ és

$$g(\mathbf{x}) = g_N(\mathbf{x}) < \widehat{g}_N(\mathbf{x}) \leq N,$$

következésképpen miként állítottuk,

$$\mathcal{C}_N \stackrel{\circ}{=} \{\mathbf{x} \mid g_N(\mathbf{x}) < \widehat{g}_N(\mathbf{x})\} \subseteq \mathcal{C} \cap \{g < N\}.$$

Ugyanakkor ha $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_N$, akkor

$$g_{N+1}(\mathbf{x}) = g_N(\mathbf{x}) < \widehat{g}_N(\mathbf{x}) \leq \widehat{g}_{N+1}(\mathbf{x}),$$

vagyis $\mathcal{C}_N \subseteq \mathcal{C}_{N+1}$. Ugyanakkor mivel a g véges, ezért nyilvánvaló módon, ha $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, akkor van olyan N, hogy $g(\mathbf{x}) = g_N(\mathbf{x})$, amiből következően $\mathcal{C}_N \nearrow \mathcal{C}$. Így az első állításban a halmazokra vonatkozó összefüggéseket igazoltuk.

5. Az összes $\mathcal{C}_N$ halmaz nyílt, következésképpen $\tau_{\mathcal{C}} = \lim_{N\to\infty} \sigma_N$. Így ha $\tau_{\mathcal{C}} < \infty$ és a $(g(X(\sigma_N)))$ sorozat egyenletes integrálható, akkor a

$$0 \leq g_N(X(\sigma_N)) \leq g(X(\sigma_N))$$

miatt a $(g_N(X(\sigma_N)))$ is egyenletesen integrálható, így alább a határérték és az integrál felcserélhető.

$$g^*(\mathbf{x}) = \widehat{g}(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \widehat{g}_N(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} E^{\mathbf{x}}(g_N(X(\sigma_N))) =$$
$$= E^{\mathbf{x}}\left(\lim_{N\to\infty} g_N(X(\sigma_N))\right) = E^{\mathbf{x}}(g(X(\tau_{\mathcal{C}}))). \qquad \square$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

6.49. Példa. Az amerikai put opció és a folytatási halmaz találati ideje.

Ha az amerikai opciók árazásakor az Itô-diffúziókra vonatkozó modellt akarjuk használni, akkor az alapul vett diffúziónak az $X(s) \triangleq (s \wedge T, S(s \wedge \wedge T))$ folyamatot és a $g(s,x) = \exp(-rs)(K-x)^+$ kifizető függvényt kell választani.

$$g^*(t,x) = \sup_\tau E^{(t,x)}\left(\frac{(K-S(\tau))^+}{\exp(\tau)}\right),$$

ahol $E^{(t,x)}$ a

$$\begin{aligned} &dS = (r-\delta)Sds + \sigma S dw, \quad S(t) = x, \\ &ds = 1, \quad s(t) = t \end{aligned}$$

egyenlet megoldásának eloszlása. $E^{(t,x)}$ mérték alatt ha $s < t$, akkor az $\mathcal{F}_s$ minden halmaza nullmértékű. Ebből következően minden τ megállási idő esetén a $\{\tau < t\}$ halmaz mértéke nulla, vagyis egy valószínűséggel $\tau \geq t$.

$$g^*(t,x) = \sup_{t\leq\tau} E^{(t,x)}\left(\frac{(K-S(\tau))^+}{\exp(\tau)}\right) = \sup_{t\leq\tau\leq T} E^{(t,x)}\left(\frac{(K-S(\tau))^+}{\exp(\tau)}\right).$$

Az erős Markov-tulajdonság miatt ez utóbbi

$$\sup_{\tau\leq T-t} E^{(0,x)}\left(\frac{(K-S(\tau))^+}{\exp(\tau+t)}\right)$$

módon írható. Ez utóbbi kifejezés azonban éppen $P(t,x)\exp(-rt)$. Ebből

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{C}} \triangleq \inf\{t \mid X(t) \notin \mathcal{C}\} = \inf\left\{t \mid \frac{P(t,x)}{\exp(rt)} = \frac{(K-S(t))^+}{\exp(t)}\right\} = \\ = \inf\left\{t \mid P(t,x) = (K-S(t))^+\right\} \end{aligned}$$

módon írható. □

6.3. Amerikai put opciók árazása és a Doob–Meyer-dekompozíció

Folytonos időhorizonton az amerikai opciók árazása szinte szó szerint azonos módon történik mind a diszkrét esetben. Szükségünk lesz a Doob–Meyer-dekompozíció folytonos időhorizontra való általánosítására:

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

6.50. Definíció. Valamely X folyamatot $\mathcal{D}$ osztályba esőnek mondunk, ha az

$$\{X(\tau) \mid \tau \text{ véges megállási idő}\}$$

halmaz egyenletesen integrálható.

6.51. Tétel (Doob–Meyer)**.** *Ha az X egy $\mathcal{D}$ osztályba eső szubmartingál, akkor van olyan M martingál és A előrejelezehető, növekedő folyamat, hogy*

$$X = M + A, \quad A_0 = 0.$$

A Doob–Meyer-felbontás létezése a sztochasztikus analízis egyik legnehezebb tétele, így az általános esetben az igazolását elhagyjuk.

Tekintsünk egy teljes és arbitrázsmentes piacot. Jelölje $\mathbf{Q}$ a kockázatsemleges mértéket. Tekintsünk egy amerikai put opciót. Tekintsük a

$$H \triangleq \frac{(K-S)^+}{R}$$

diszkontált kifizetési folyamatot. A számláló korlátos. A nevező folytonos, pozitív és növekedő, így a $[0,T]$ szakaszon a H korlátos. Érdemes megjegyezni, hogy ha a call opciókat tekintjük, akkor a

$$H \triangleq \frac{(S-K)^+}{R}$$

kifizetés nem lesz korlátos, de a H azért rendelkezik integrálható majoránssal. Az egyszerűség kedvéért a két feladatott egyidejűleg tárgyalva

$$H \triangleq \frac{\psi(S)}{R}.$$

Mivel az időhorizont is korlátos, ezért az optimális megállítás problémájának van véges optimális megállási ideje, amit jelöljön τ^*. A definíció alapján

$$\frac{\psi(S(\tau^*))}{R(\tau^*)} = \sup_{\tau \le T} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\frac{\psi(S(\tau))}{R(\tau)} \right).$$

Jelölje X a H Snell-burkolóját. Mivel az idő szerint konstans folyamatok szupermartingálok és X a legkisebb majoráló szupermartingál, így az X olyan szupermartingál, amelynek van integrálható majoránsa, így $\mathcal{D}$ osztályba eső szupermartingál, így rendelkezik Doob–Meyer-felbontással: $X = M - A$, ahol az M martingál és $A \ge 0$, $A(0) = 0$ és az A növekedő. Tekintsük azt az európai követelést, amely diszkontált kifizetésére $\overline{H}_T \triangleq M(T)$. (A $\overline{H}_T$-nek nincsen köze a H-hoz.) A $H \ge 0$ miatt $X \ge 0$, így az $A \ge 0$ miatt $M = X + A \ge$ ≥ 0. Így az európai opció kifizetése alulról korlátos. Az optimális megállítás

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

problémáját a $\mathbf{Q}$ alatt definiáltuk, így az M a $\mathbf{Q}$ alatt lesz martingál, következésképpen a $\overline{H}_T \triangleq M(T)$ integrálható a $\mathbf{Q}$ szerint. Emlékeztetünk, hogy ilyen feltételek mellett az európai opciónak van ára. Jelölje ezt x^*. Emlékeztetünk, hogy létezik az x^* árból kiinduló önfinanszírozó, korlátos portfólió, amely diszkontált értékfolyamatára egyrészt $\overline{V}_T(x^*) = \overline{H}_T \triangleq M(T)$, másrészt a replikáló $\overline{V}$ mindig martingál. Megmutatjuk, hogy az x^* éppen az amerikai opció ára és ha

$$p^* \triangleq \sup_{\tau \le T} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\frac{\psi(S(\tau))}{R(\tau)} \right) = \sup_{\tau \le T} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} (H(\tau)),$$

akkor $x^* = p^*$. A diszkrét esetben már bemutatott módon számolva, a $\overline{V}$ martingál tulajdonsága miatt

$$\overline{V}_t(x^*) = \mathbf{E}\left(\overline{V}_T(x^*) \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E}(M(T) \mid \mathcal{F}_t) = M(t).$$

Mivel $A(0) = 0$, ezért

$$x^* = V_0(x^*) = \overline{V}_0(x^*) = M(0) = M(0) - A(0) = X(0) = p^*.$$

Továbbá mivel $A \ge 0$,

$$V_t(x^*) = R(t) M(t) = R(t)(X(t) + A(t)) \ge R(t) X(t) \ge$$
$$\ge R(t) H(t) \triangleq R(t) \frac{\psi(S(t))}{R(t)} = \psi(S(t)),$$

vagyis a $V(x^*)$ egy szuperreplikáló, önfinanszírozó portfólió.

Ugyanakkor létezik $\tau^* \le T$ optimális megállítás, amelyre

$$x^* = p^* = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\frac{\psi(S(\tau^*))}{R(\tau^*)} \right).$$

Mivel a szuperreplikálás miatt

$$\frac{V_{\tau^*}(x^*)}{R(\tau^*)} \ge \frac{\psi(S(\tau^*))}{R(\tau^*)},$$

ezért $\mathbf{Q}$ majdnem mindenhol

$$\frac{V_{\tau^*}(x^*)}{R(\tau^*)} = \frac{\psi(S(\tau^*))}{R(\tau^*)},$$

vagyis $\mathbf{Q}$ majdnem mindenhol

$$V_{\tau^*}(x^*) = \psi(S(\tau^*)).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A **P** és a **Q** ekvivalens, ezért az egyenlőség **P** majdnem mindenhol is teljesül. Ebből következően az x^*-ból kiindulva építhető egy olyan önfinanszírozó, szuperreplikáló portfólió, amely egy alkalmas τ^* esetén „egyenlegezhető". Következésképpen az x^* éppen az amerikai opció ára. Érdemes hangsúlyozni, hogy az $M \geq 0$, de az $X = M - A$ felbontásból az X korlátossága nem implikálja az M felülről való korlátosságát, így a replikáló portfólió felülről való korlátosságát nem tudjuk garantálni.

6.3.1. Amerikai call opciók árazása

Egy rövid megjegyzés erejéig térjünk rá az amerikai call opciókra. Tegyük fel, hogy nincs osztalékfizetés. Emlékeztetünk, hogy ez egy viszonylagosan szigorú megkötés, ugyanis a devizaárfolyamok egyenlete az osztalékfizető részvényárfolyamokkal analóg folyamatot követ. Ilyenkor a **Q** alatt az $\overline{S}$ martingál, a K/R csökkenő, így az

$$\overline{S} - \frac{K}{R} = \frac{S-K}{R}$$

szubmartingál, következésképpen a

$$H \triangleq \frac{(S-K)^+}{R},$$

egy szubmartingál konvex növekvő függvénye, így szintén szubmartingál. A szubmartingálok növelik a várható értéket, így az optimális megállítás feladatának optimális megoldása a $\tau^* = T$. Jelölje x^* az optimális megállítás feladatának értékét. Triviálisan az x^* éppen az európai call opció ára. Ugyancsak triviálisan

$$\frac{(S-K)^+}{R} \leq \frac{S}{R} \overset{\circ}{=} \overline{S}.$$

A **Q** alatt az $\overline{S}$ majoráló martingál, így majoráló szupermartingál, vagyis a **Q** alatt $X \leq \overline{S}$. Az $\overline{S}$ martingál a véges időhorizont miatt egyenletesen integrálható martingál, így eleme a $\mathcal{D}$ osztálynak. Ebből következően az X rendelkezik Doob–Meyer-felbontással. Ettől a lépéstől kezdve a már belátott módon indokolható, hogy az amerikai call ára éppen az optimális megállítás értéke, vagyis az európai és az amerikai call opciók értéke véges időhorizonton azonos. Vegyük észre, hogy ha van osztalékfizetés, akkor az $\overline{S}$ nem martingál a **Q** alatt, így a gondolatmenet érvényét veszti. Ugyanakkor ilyenkor is érvényben marad a put opciók kapcsán elmondott gondolatmenet.

Black–Scholes-modell esetén az amerikai call opció értéke mindig visszavezethető egy alkalmas amerikai put opció árazási problémájára.

6.52. Állítás. *Tegyük fel, hogy a (R,S) folyamatok a Black–Scholes-modell szerint alakulnak. Ha $C(t,x,K,r,\delta)$ jelöli az $S(t) = x$ és δ osztalékfizetés*

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

esetén érvényes amerikai call opció árát és $P(t,x,K,r,\delta)$ a megfelelő put opció árát, akkor

$$C(t,x,K,r,\delta) = P(t,K,x,\delta,r).$$

Bizonyítás. δ osztalékfizetési ráta esetén a $\mathbf{Q}$ mérték alatt

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma w(t)\right).$$

A T időpontban lejáró amerikai call opció ára a $t \le T$ időpontban

$$C(t,x,K,r,\delta) = \sup_{t\le\tau\le T}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(S(\tau)-K)^+}{R(\tau)}\right) =$$

$$= \sup_{\tau\le T-t}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp(-r\tau)\left(x\exp\left(\left(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\sigma w(\tau)\right)-K\right)^+\right) =$$

$$= \sup_{\tau\le T-t}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp(-\delta\tau)\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\tau+\sigma w(\tau)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(x-K\exp\left(\left(\delta-r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\sigma w(\tau)\right)\right)^+\right).$$

Ha

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}} \stackrel{\circ}{=} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma w(T)\right),$$

akkor a $\widehat{w}(t) = w(t)-\sigma t$ Wiener-folyamat az $\mathbf{R}$ alatt. Ebből felhasználva, hogy a $-\widehat{w}$ is Wiener-folyamat

$$C(t,x,K,r,\delta) =$$

$$= \sup_{\tau\le T-t}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp(-\delta\tau)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}}\mid\mathcal{F}_\tau\right)\left(x-K\exp\left(\left(\delta-r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\sigma w(\tau)\right)\right)^+\right) =$$

$$= \sup_{\tau\le T-t}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp(-\delta\tau)\left(x-K\exp\left(\left(\delta-r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\sigma\widehat{w}(\tau)\right)\right)^+\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{Q}}\mid\mathcal{F}_\tau\right)\right) =$$

$$= \sup_{\tau\le T-t}\mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\exp(-\delta\tau)\left(x-K\exp\left(\left(\delta-r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\sigma\widehat{w}(\tau)\right)\right)^+\right) =$$

$$= P(t,K,x,\delta,r). \qquad \square$$

6.3.2. Az amerikai put opció árazó függvényének tulajdonságai

Az amerikai put opció ára nem adható meg zárt formulával, ezért csak az árazó függvény kvalitatív vizsgálatára szoritkozhatunk. Rögzítsük a T lejárati

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

időpontot, a K kötési árat, az r kamatlábat és a δ osztalékfizetési rátát. A továbbiakban jelölje $P(t,x)$ az $S(t)=x$ értékhez tartozó amerikai put opció árát a t időpontban[9]. Az árazó képlet alapján, felhasználva, hogy a t időpontban még $T-t$ idő van hátra

$$P(t,x)=\sup_{\tau\le T-t}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K-x\exp\left(\left(r-\delta-\sigma^2/2\right)\tau+\sigma w(\tau)\right)\right)^+}{R(\tau)}\right)\stackrel{\circ}{=}$$
$$\stackrel{\circ}{=}\sup_{\tau\le T-t}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K-S^x(\tau)\right)^+}{R(\tau)}\right).$$

Vegyük észre, hogy a definícióban implicite kihasználtuk a Wiener-folyamatok azon tulajdonságát, hogy ha w egy Wiener-folyamat, akkor tetszőleges t esetén az $\widetilde{w}(s)\stackrel{\circ}{=}w(t+s)-w(s)$ újraindított Wiener-folyamat szintén Wiener-folyamat. Mielőtt tovább megyünk érdemes tisztázni a $P(t,x)$-hez tartozó X Snell-burkoló alakját. A erős Markov-tulajdonság alapján

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K-\theta_s S(\tau)\right)^+}{R(\tau+s)}\mid\mathcal{F}_s\right)=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K-\theta_s S(\tau)\right)^+}{R(\tau+s)}\mid S(s)\right)=$$
$$=E^{S(s)}\left(\frac{\left(K-S(\tau)\right)^+}{R(\tau+s)}\right).$$

Ezt felhasználva

$$X(s)=\sup_{s\le\tau\le T-t}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K-S(\tau)\right)^+}{R(\tau)}\mid\mathcal{F}_s\right)=$$
$$=\sup_{s\le\tau\le T-t}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K-S(\tau)\right)^+}{R(\tau)}\mid S(s)\right)=$$
$$=\sup_{0\le\tau\le T-(t+s)}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K-S(\tau+s)\right)^+}{R(\tau+s)}\mid S(s)\right)=$$
$$=\sup_{0\le\tau\le T-(t+s)}E^{S(s)}\left(\frac{\left(K-S(\tau)\right)^+}{R(\tau+s)}\right)=$$
$$=\frac{1}{R(s)}\sup_{0\le\tau\le T-(t+s)}E^{S(s)}\left(\frac{\left(K-S(\tau)\right)^+}{R(\tau)}\right)=\frac{P(t+s,S(s))}{R(s)}.$$

[9] Az irodalomban gyakran a $P(t,x)$ függvény másképpen van értelmezve. Gyakran a t paraméter a lehívásig hátralevő időt jelöli. Vagyis a mi jelölésünkben a $T-t$ időtartamot. Ennek előnye, és egyben a hátránya is, hogy ilyenkor a T paraméter nem szerepel a modellben. A $P(t,x)$ ezen értelmezésekor a T szerepét a nulla időpont veszi át és a függvény „fordítva" változik. Például az alább bevezetett $S^*(t)$ lehívási határ ilyenkor csökkenő és nem pedig növekedő lesz.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ennek megfelően az optimalitási kritérium szerinti

$$\frac{P\left(t+\tau^*, S\left(\tau^*\right)\right)}{R\left(\tau^*\right)} = X\left(\tau^*\right) = H\left(\tau^*\right) = \frac{\left(K - S\left(\tau^*\right)\right)^+}{R\left(\tau^*\right)}$$

feltétel a

$$P\left(t+\tau^*, S\left(\tau^*\right)\right) = \left(K - S\left(\tau^*\right)\right)^+,$$

illetve az első optimális megállítás feltétele

$$\tau^* = \inf\left\{s \mid P\left(s+t, S\left(s\right)\right) = \left(K - S\left(s\right)\right)^+\right\} \wedge \left(T-t\right)$$

módon egyszerűsödik. Ha csak azokat a trajektóriákat nézzük, amelyekre $S\left(0\right) = x$, vagyis a relációt a P^x mérték szerint tekintjük, akkor az egyenlőség

$$\tau^* = \inf\left\{s \mid P\left(t+s, S^x\left(s\right)\right) = \left(K - S^x\left(s\right)\right)^+\right\} \wedge \left(T-t\right)$$

alakot ölti, ahol mint mindig a majdnem mindenhol való egyezőség helyébe közönséges egyenlőséget írtunk.

Ebben a megfogalmazásban kihasználtuk, hogy a $P\left(t,x\right)$ definíció szerint az x pontból elindított $T-t$ hosszú időszakra vonatkozó amerikai opció ára. Ezt azért tehettük meg, mert a modell stacionér, vagyis időben eltolható. Nem stacionér modell esetén az a $P^{t,x}$ mérték alatt az optimalitási kritérium a

$$\tau_t^* = \inf\left\{s \geq t \mid P\left(t+s, S^{t,x}\left(s+t\right)\right) = \left(K - S^{t,x}\left(s\right)\right)^+\right\} \wedge T$$

alakba írható. Stacionér modell esetén a két megállási idő közötti kapcsolatot a $\tau^* = \tau_t^* - t$ összefüggés adja. A modell tárgyalását nagyban legyszerűsíthetjük, ha kiküszöböljük a feltételes valószínűségek használatát. A továbbiakban rögzítjük a $\mathbf{Q}$ mértéket és S^x alatt az

$$S^x\left(t\right) \triangleq x \exp\left(\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}t\right)\tau + \sigma w\left(t\right)\right) = S^x\left(0\right) S^1\left(t\right)$$

folyamatot fogjuk érteni.

6.53. Lemma. *A $P\left(t,x\right)$ függvényre teljesülnek a következőek:*

1. *A $P\left(t,x\right)$ függvény folytonos a $\left[0,T\right] \times \mathbb{R}_+$ halmazon.*
2. *Tetszőleges $t \in \left[0,T\right]$ esetén a $P\left(t,x\right)$ konvex és nem növekedő az x változóban.*
3. *Tetszőleges $x \geq 0$ esetén a $P\left(t,x\right)$ nem növekedő a t változóban.*
4. *Tetszőleges $x \geq 0$ esetén $P\left(T,x\right) = \left(x-K\right)^+$. Ha $t \in \left[0,T\right)$ és $x \geq 0$, akkor $P\left(t,x\right) > 0$.*

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

5. *A* $[0,T]\times\mathbb{R}_+$ *halmazon* $P(t,x)\geq(K-x)^+$.

Bizonyítás. A harmadik állítás nyilvánvaló ugyanis a t növelésével a szóbajöhető megállási idők halmaza csökken. Hasonlóan az x növelésével a célfüggvény nem nő. Ugyanakkor a szuprémum mögött álló kifejezés x-ben konvex, és konvex függvények szuprémuma is konvex. A folytonosság igazolása a következő: Tegyük fel, hogy $t_1\leq t_2$.

$$|P(t_2,x_2)-P(t_1,x_1)|\leq|P(t_2,x_2)-P(t_2,x_1)|+|P(t_2,x_1)-P(t_1,x_1)|,$$

ahol természetesen

$$P(t_2,x_1)=\sup_{\tau\leq T-t_2}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K-S_\tau^{x_1})^+}{R(\tau)}\right).$$

Az első a $\sup(f+g)\leq\sup f+\sup g$ felhasználásával, felhasználva, hogy a szuprémum egy közös halmazon van véve,

$$\begin{aligned}
&|P(t_2,x_2)-P(t_2,x_1)|=\\
&=\left|\sup_{\tau\leq T-t_2}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K-S_\tau^{x_2})^+}{R(\tau)}\right)-\sup_{\tau\leq T-t_2}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K-S_\tau^{x_1})^+}{R(\tau)}\right)\right|\leq\\
&\leq\sup_{\tau\leq T-t_2}\left|\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K-S_\tau^{x_2})^+-(K-S_\tau^{x_1})^+}{R(\tau)}\right)\right|\leq\\
&\leq\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sup_{s\leq T-t_2}\left|\frac{(K-S_s^{x_2})^+-(K-S_s^{x_1})^+}{R(s)}\right|\right).
\end{aligned}$$

A másik tagban, felhasználva, hogy $t_1\leq t_2$

$$\begin{aligned}
&|P(t_2,x_1)-P(t_1,x_1)|=\\
&=\left|\sup_{\tau\leq T-t_2}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K-S_\tau^{x_1})^+}{R(\tau)}\right)-\sup_{\tau\leq T-t_1}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K-S_\tau^{x_1})^+}{R(\tau)}\right)\right|\leq\\
&\leq\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\sup_{T-t_2\leq s\leq T-t_1}\left|\frac{\left(K-S_{T-t_2}^{x_1}\right)^+}{R(T-t_2)}-\frac{(K-S_s^{x_1})^+}{R(s)}\right|\right).
\end{aligned}$$

Az $S^{t,x}$ folytonosságából és a várható érték mögötti függvény korlátosságából a P folytonossága már következik.

Az utolsó állítás indoklása a következő: Ha $x<K$, akkor $(K-x)^+>0$ és ilyenkor a $P(t,x)>0$ evidens minden $t\leq T$ esetén. Ha $x\geq K$, akkor

$$\tau\doteq\inf\left\{s\mid S^x(s)\leq\frac{K}{2}\right\}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ha $t < T$, akkor egy pozitív valószínűségű halmazon $\tau \leq T - t$. Az árazási képletből

$$P(t,x) \geq \frac{K}{2}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\chi(\tau \leq T-t)}{R(\tau)}\right) > 0,$$

vagyis a negyedik összefüggés teljesül. Vegyük észre, hogy mivel a $\tau = 0$ egy lehetséges megállítás, ezért mindig $P(t,x) \geq (K-x)^+$. □

6.54. Definíció. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathcal{C} \triangleq \left\{(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,T) \mid (K-x)^+ < P(t,x)\right\},$$
$$\mathcal{S} \triangleq \left\{(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,T) \mid (K-x)^+ = P(t,x)\right\}.$$

A $\mathcal{C}$ halmaz neve folytatási régió, az $\mathcal{S}$ halmaz neve megállási vagy esetenként lehívási régió.

Vegyük észre, hogy az $\mathcal{S}$ és $\mathcal{C}$ halmazok definíció szerint nem tartalmazzák a $\mathbb{R}_+ \times \{T\}$ félegyenest.

6.55. Lemma. *A $\mathcal{C}$ folytatási régió x szerinti metszete, vagyis a*

$$\mathcal{C}_t \triangleq \{x \mid (t,x) \in \mathcal{C}\}$$

halmaz egy pozitív számokból álló, felülről nem korlátos nyílt félegyenes. Ha S_t^* jelöli a félegyenes bal végpontját, akkor az S_t^* nem csökkenő, jobbról folytonos függvénye a t-nek, és $S_t^* < K$.

Bizonyítás. Meg kell mutatni, hogy ha $x < y$ és $x \in \mathcal{C}_t$, akkor $y \in \mathcal{C}_t$. Jelölje τ a $P(t,x)$-hez tartozó egyik optimális megállítást. A τ nyilván egy lehetséges megállítás a $P(t,y)$-hoz tartozó optimalizációs feladatban.

$$P(t,y) - P(t,x) = P(t,y) - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K-S^x(\tau))^+}{R(\tau)}\right) \geq$$
$$\geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K-S^y(\tau))^+}{R(\tau)} - \frac{(K-S^x(\tau))^+}{R(\tau)}\right) =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{K-S^y(\tau)}{R(\tau)} - \frac{K-S^x(\tau)}{R(\tau)}\right) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K-S^y(\tau))^-}{R(\tau)} - \frac{(K-S^x(\tau))^-}{R(\tau)}\right).$$

Mivel $y > x$, ezért $S^y(\tau) > S^x(\tau)$ és ezért ugyanez az egyenlőtlenség igaz a fenti egyenlőtlenségben szereplő negatív részekre is, így az utolsó összegben

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

a második tag nem lehet negatív, következésképpen

$$P(t,y) - P(t,x) \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{K - S^y(\tau)}{R(\tau)} - \frac{K - S^x(\tau)}{R(\tau)}\right) =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S^x(\tau) - S^y(\tau)}{R(\tau)}\right) = (x-y)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S^1(\tau)}{R(\tau)}\right) \geq x - y,$$

ugyanis az S^1/R egy szupermartingál és $S^1(0) = 1$ és $x - y < 0$. Ebből következően, felhasználva, hogy $x \in \mathcal{C}_t$

$$P(t,y) \geq x - y + P(t,x) > x - y + (K-x)^+ \geq K - y.$$

Mivel $P(t,y) > 0$, ezért $P(t,y) > (K-y)^+$, így $y \in \mathcal{C}_t$.

Ha $x = K$, akkor $(K-x)^+ = 0$, de $P(t,x) > 0$ ugyanis definíció szerint $t < T$, így $K \in \mathcal{C}_t$. De $\mathcal{C}_t$ egy félegyenes és a P folytonossága miatt egy nyílt félegyenes, ezért $S_t^* < K$. Evidens módon $0 \notin \mathcal{C}_t$, ugyanis a $K = (K-0)^+ <$ $< P(t,0) = K$ lehetetlen. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a $P(t,x)$ idő szerinti csökkenése miatt

$$\left(K - \left(S_{t+s}^* + \varepsilon\right)\right)^+ < P\left(t+s, S_{t+s}^* + \varepsilon\right) \leq P\left(t, S_{t+s}^* + \varepsilon\right),$$

vagyis $S_{t+s}^* + \varepsilon \in \mathcal{C}_t$, vagyis $S_t^* \leq S_{t+s}^* + \varepsilon$. Mivel ez minden $\varepsilon > 0$ esetén érvényes, ezért $S_t^* \leq S_{t+s}^*$. Tekintsünk egy $t_n \to t$ sorozatot. A $(t_n, S^*(t_n))$ sorozat a $\mathcal{C}$ komplementerében van. Mivel a $\mathcal{C}$ nyílt, ezért az $(S^*(t_n))$ minden torlódási pontja szintén a $\mathcal{C}$ komplementerében van, ezért $S^*(t) \geq$ $\geq \limsup_{n\to\infty} S^*(t_n)$, vagyis az S^* felülről félig folytonos. De mivel az S^* nem csökken, ezért $S^*(t) \leq S^*(t+) \leq S^*(t)$, vagyis az S^* jobbról folytonos. □

A következő gondolatmenet célja, hogy belássuk, hogy alkalmas S^*-gal valójában $S_t^* \geq S^* > 0$. Ehhez szükségünk lesz az úgynevezett végtelen lejárati idővel rendelkező put opciókra.

6.56. Lemma. *Az $x \geq 0$ tartományon tekintsük a*

$$P(x) \triangleq \sup_{\tau<\infty} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K - S^x(\tau))^+}{R(\tau)}\right)$$

végtelen lejárattal rendelkező put opciót. Ha

$$\nu \triangleq \frac{r-\delta}{\sigma} - \frac{\sigma}{2},$$
$$\gamma \triangleq \frac{1}{\sigma}\left(\nu + \sqrt{\nu^2 + 2r}\right),$$
$$S^* \triangleq K\gamma/(1+\gamma),$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

akkor

$$P(x) = \begin{cases} K - x, & ha \;\; x \leq S^* \\ (K - S^*)\left(\frac{S^*}{x}\right)^{\gamma}, & ha \;\; x > S^* \end{cases}.$$

Mielőtt a lemmát belátnánk mutassuk meg, hogy érvényes a következő:

6.57. Következmény. *A lemmában szereplő $S^* > 0$ értékkel minden t-re teljesül az $S_t^* \geq S^* > 0$ egyenlőtlenség.*

Bizonyítás. Valóban, evidens módon

$$(K - S^*)^+ \leq P(t, S^*) \leq P(S^*) = K - S^* = (K - S^*)^+,$$

így $S^* \notin \mathcal{C}_t$, vagyis $S^* \leq S_t^*$. □

A lemma bizonyítása. A közönséges put opcióhoz hasonlóan $P(x) \geq (K-x)^+$, a P konvex, nem növekedő és ezért folytonos és $P(x) \geq P(t,x) > 0$. Legyen

$$x^* \triangleq \sup\left\{x \mid P(x) = (K - x)^+\right\}.$$

Ha

$$\tau_x \triangleq \inf\left\{t \mid P(S^x(t)) = (K - S^x(t))^+\right\},$$

akkor a τ_x optimális és így

$$P(x) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K - S^x(\tau_x))^+}{R(\tau_x)}\chi(\tau_x < \infty)\right).$$

A $P(x)$ folytonossága miatt világos, hogy

$$\tau_x = \inf\{t \mid S^x(t) \leq x^*\} = \inf\left\{t \mid \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w(t) \leq \log\left(\frac{x^*}{x}\right)\right\}.$$

Vezessük be a $\tau_{x,z} \triangleq \inf\{t \mid S^x(t) \leq z\}$ megállási időket és legyen

$$u(z) \triangleq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K - S^x(\tau_{x,z}))^+}{R(\tau_{x,z})}\chi(\tau_{x,z} < \infty)\right).$$

Mivel a τ_x egy optimális megállítás a $z = x^*$ pontban az $u(z)$ függvénynek maximuma van. A maximum értéke éppen a $P(x)$. Világos, hogy ha $z \geq x$, akkor $\tau_{x,z} = 0$ és ilyenkor $u(z) = (K - x)^+$. Ha pedig $z < x$, akkor az S^x folytonossága miatt a $\tau_{x,z}$ definíciójában egyenlőség van, vagyis $S^x(\tau_{x,z}) = z$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

és ezért $\left(K - S^x\left(\tau_{x,z}\right)\right)^+ \equiv (K-z)^+$, ami, determinisztikus és ezért kiemelhető a várható értékből. A nevezőhöz tartozó várható érték kiszámolásához

$$\tau_{x,z} = \inf\left\{t \mid S^x(t) = z\right\} = \inf\left\{t \mid \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w(t) = \log\left(\frac{z}{x}\right)\right\} =$$
$$= \inf\left\{t \mid \left(\frac{r-\delta}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)t + w(t) = \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{z}{x}\right)\right\} \stackrel{\circ}{=}$$
$$\stackrel{\circ}{=} \inf\left\{t \mid \nu t + w(t) = \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{z}{x}\right)\right\}.$$

Vezessük be a $\rho(R) \stackrel{\circ}{=} \inf\{t \mid \nu t + w(t) = R\}$ megállási időket. Az elmondottakból következően

$$u(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad z \geq K \\ (K-x)^+, & \text{ha} \quad K \geq z \geq x \\ (K-z)^+ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-r \cdot \rho\left(\frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{z}{x}\right)\right)\right)\right), & \text{ha} \quad z < x \end{cases}.$$

ahol az utolsó egyenlőség a $\exp(-r\infty) = 0$ egyenlőségből következik. A ρ Laplace-transzformáltja explicite kiszámolható és értéke

$$\mathcal{L}(s) = \exp\left(\nu R - |R|\sqrt{\nu^2 + 2s}\right), \quad s > 0.$$

Mivel $R = 1/\sigma \log(z/x) < 0$, ezért

$$\mathcal{L}(r) = \exp\left(\nu R + R\sqrt{\nu^2 + 2r}\right) = \exp\left(\gamma \cdot \log\left(\frac{z}{x}\right)\right) = \left(\frac{z}{x}\right)^{\gamma},$$

ahol γ a lemma kimondásakor bevezetett pozitív konstans. Legyen

$$g(z) = (K-z)\left(\frac{z}{x}\right)^{\gamma}.$$

Ez a függvény a $z = 0$ és a $z = K$ pontokban nulla, és

$$g'(z) = \frac{z^{\gamma-1}}{x^{\gamma}}\left(\gamma K - (\gamma+1)z\right),$$

így a g stacionárius pontja

$$S^* = K\frac{\gamma}{1+\gamma},$$

amely maximum pont. Mivel az u függvény folytonos, ezért két eset lehetséges, attól függően, hogy az x pont a g emelkedő, vagy csökkenő szárára esik. Az első esetben a maximum az x pontban vevődik fel, a második esetben pedig a az S^* pontban. Ebből következően

$$P(x) = \max_z u(z) = \begin{cases} u(x) = K - x, & \text{ha} \quad x \leq S^* \\ u(S^*), & \text{ha} \quad x > S^* \end{cases}.$$

Amiből a lemma már evidens. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

6.58. Definíció. Vezessük be az

$$(\mathcal{A}f)(t,x) \triangleq \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(t,x) + (r-\delta)\, x \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) - r f(t,x)$$

Black–Scholes-differenciáloperátort.

6.59. Állítás. *A $\mathcal{C}$ nyílt halmazon a $P(t,x)$ kielégíti az $\mathcal{A}P = 0$ egyenletet. Továbbá*

$$P(T,x) = (K-x)^+, \qquad \text{ha} \quad x \geq 0,$$
$$P(t,S^*(t)) = K - S^*(t) = (K - S^*(t))^+, \quad \text{ha} \quad 0 \leq t < T,$$
$$\lim_{x\to\infty} \max_{0\leq t\leq T} |P(t,x)| = 0.$$

A P a megadott feltételek teljesülése esetén az egyetlen megoldása az $\mathrm{A}f = 0$ egyenletnek. Speciálisan a $\mathcal{C}$ halmazon a P megfelelő deriváltjai léteznek és folytonosak.

Bizonyítás. Az első két feltétel teljesülése a P esetén nyilvánvaló. A P $\mathcal{C}$ halmazon való deriválhatóságának és az $\mathcal{A}P = 0$ egyenlet teljesülésének igazolásához fel kell használni a klasszikus parabolikus egyenletek egzisztenciatételét. A klasszikus elméletben keresett függvényeket a $t = 0$ pontban szokás megadni és nem a $t = T$ végpontban, ezért gyakran a $p(t,x) \triangleq P(T-t,x)$ függvényt szokás használni. A p az amerikai opció árát a még hátralevő idő függvényében adja meg. Ilyenkor az $\mathcal{A}f$ operátor definíciójában az idő szerinti derivált előjelét negatívra kell változtatni. A parabolikus egyenletek legegyszerűbb interpretációja a hővezetéssel kapcsolatos. Hővezetés legegyszerűbb problémája esetén egy vékony fémszálat a két végén melegítünk. A hőmérséklet időben való alakulásának meghatározása során meg kell adni a hőmérséklet eloszlását a vizsgálat kezdetén, illetve meg kell adni, hogy milyen hőmérsékleten tartjuk a vékony szál két végpontját. Vagyis ha egy $R \triangleq [t_1,t_2]\times[x_1,x_2]$ téglalapon keressük az egyenlet megoldását, akkor a függvény értékét meg kell adni a $\{t_1\}\times[x_1,x_2]$ és a $[t_1,t_2]\times\{x_1\}$ és $[t_1,t_2]\times\{x_2\}$ határpontokban. Vegyük észre, hogy ez a három részből álló úgynevezett parabolikus határnak éppen az állításban szereplő három feltétel felel meg. Az első feltétel a „kezdeti” eloszlást adja meg, a második feltétel a alsó határon, a harmadik pedig a függvény felső határon való rögzítésének adja meg. Mi azonban a $P(t,x)$ függvényt vizsgáljuk, így parabolikus határon az egyszerűség kedvéért a t_2 végidőpontban való rögzítést értjük. A két feladat egyértelműen egymásba transzformálható az $\partial f/\partial t$ előjelének megváltoztatásával.

Tekintsük tehát az $\mathcal{A}f = 0$ egyenlet azon megoldását, amelyet egy $R \subseteq \mathcal{C}$ téglalapon tekintünk és amelyet a parabolikus határon a P-vel rögzítünk. Mivel a $\mathcal{C}$ halmazon az x koordináta alulról egy pozitív értékkel korlátos és

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

mivel a P folytonos, ezért létezik a feladatnak megoldása. Rögzítsük az R egy (t,x) belső pontját és jelölje R_0 az R parabolikus határát. Vezessük be a

$$\tau \triangleq \inf\{s \geq 0 \mid (t+s, S^x(s)) \in R_0\}$$

megállási időt és az

$$N(s) \triangleq \frac{f(s+t, S^x(s))}{R(s)}$$

folyamatot. Az N^τ megállított folyamat korlátos és mivel az f kielégíti az $\mathcal{A}f = 0$ egyenletet az idő szerinti Itô-formula közvetlen alkalmazásából evidens, hogy az N Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrálként írható fel. Ebből következően az N^τ egy korlátos lokális martingál, vagyis egy martingál. A martingál tulajdonság miatt

$$f(t,x) = N(0) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(N(\tau)) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{P(\tau+t, S^x(\tau))}{R(\tau)}\right).$$

De mivel a $(\tau+t, S^x(\tau)) \in R_0 \subseteq \mathcal{C}$, ezért

$$\begin{aligned}\tau \leq \rho &\triangleq \inf\{s \geq 0 \mid (t+s, S^x(s)) \notin \mathcal{C}\} \wedge (T-t) = \\ &= \inf\left\{s \geq 0 \mid \left(t+s, S^{t,x}(s+t)\right) \notin \mathcal{C}\right\} \wedge (T-t) = \\ &= \inf\left\{s \mid P\left(s+t, S^{t,x}(s+t)\right) = \left(K - S^{t,x}(s+t)\right)^+\right\} \wedge (T-t).\end{aligned}$$

A ρ nyilvánvalóan a $P(t,x)$-hez tartozó optimális megállási idő. A $P(t,x)$-hez tartozó Snell-burkoló

$$\begin{aligned}X(s) &= \sup_{s \leq \tau \leq T-t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K-S(\tau))^+}{R(\tau)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \\ &= \sup_{s \leq \tau \leq T-t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K-S(\tau))^+}{R(\tau)} \mid S(s)\right) = \\ &= \sup_{0 \leq \tau \leq T-(t+s)} E^{S(s)}\left(\frac{(K-S(\tau))^+}{R(\tau+s)}\right) = \\ &= \frac{1}{R(s)} \sup_{0 \leq \tau \leq T-(t+s)} E^{S(s)}\left(\frac{(K-S(\tau))^+}{R(\tau)}\right) = \frac{P(t+s, S(s))}{R(s)}.\end{aligned}$$

Az optimalitási kritérium szerint az X^ρ megállított Snell-burkoló martingál. A megállási opciókról szóló tétel miatt

$$f(t,x) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{P(\tau+t, S^x(\tau))}{R(\tau)}\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(X(\tau)) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(X(\rho)) = X(0) = P(t,x).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ebből következően a P a $\mathcal{C}$ halmazon kielégíti az egyenletet és a szükséges deriváltak léteznek.

Térjünk rá a harmadik feltételre. Tetszőleges $(t,x) \in [0,T] \times (0,\infty)$ esetén legyen most

$$\tau \triangleq \inf \left\{ s \mid P\left(s, S^x(s)\right) = \left(K - S^x(s)\right)^+ \right\} \wedge (T-t).$$

Természetesen

$$P(t,x) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\frac{\left(K - S^x(\tau)\right)^+}{R(\tau)} \right).$$

Legyen

$$\rho_x \triangleq \inf \left\{ s \mid S^x(s) \leq K \right\}.$$

A ρ_x és a τ definíciójából világos, hogy $\tau = T - t$ a $\{\rho_x > T-t\}$ halmazon. A fenti várható értéket felbontva

$$0 < P(t,x) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\frac{K\chi(\rho_x \leq T-t)}{R(\tau)} \right) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\frac{\left(K - S^x(T-t)\right)^+}{R(T-t)} \chi(\rho_x > T-t) \right) =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\frac{K\chi(\rho_x \leq T-t)}{R(\tau)} \right) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left(\frac{0}{R(T-t)} \chi(\rho_x > T-t) \right) \leq$$
$$\leq K \cdot \mathbf{Q}(\rho_x \leq T-t).$$

Nyilvánvalóan $\max\limits_{0 \leq t \leq T} P(t,x) \leq \lim\limits_{x \to \infty} \mathbf{Q}(\rho_x \leq T) = 0$.

Térjünk rá az egyértelműség igazolására. Az imént belátott határérték-feltétel miatt ha az f megoldása az állításban szereplő problémának, akkor az f korlátos. Definiáljuk az

$$M(t) \triangleq \frac{f\left(t, S^x(t)\right)}{R(t)}$$

folyamatot és legyen

$$\tau_x \triangleq \inf \left\{ s \mid S^x(s) = S^*(t) \right\} \wedge T.$$

Az S^x folytonos az S^* jobbról folytonos, ezért ha $\tau_x < T$, akkor $S^x(\tau_x) = S^*(\tau_x)$. Mivel az f kielégíti az egyenletet az Itô-formula miatt az M egy korlátos lokális martingál, vagyis az M egy martingál. A τ_x éppen az optimális

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

megállítás, ezért a megállási opciókról szóló tétel és a két peremfeltétel miatt

$$\begin{aligned} f(t,x) = M(0) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(M(\tau_x)) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{f\left(\tau_x, S^x\left(\tau_x\right)\right)}{R\left(\tau_x\right)}\right) = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{f\left(\tau_x, S^*(\tau_x)\right)}{R\left(\tau_x\right)}\chi(\tau_x < T)\right) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{f\left(\tau_x, S^x\left(\tau_x\right)\right)}{R\left(\tau_x\right)}\chi\left(\tau_x = T\right)\right) = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K - S^x\left(\tau_x\right)\right)^+}{R\left(\tau_x\right)}\chi\left(\tau_x < T\right)\right) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K - S^x(T)\right)^+}{R\left(T\right)}\chi(\tau_x = T)\right) = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K - S^x\left(\tau_x\right)\right)^+}{R\left(\tau_x\right)}\right) = P\left(t,x\right). \qquad \square \end{aligned}$$

A folytatási régióban a $P\left(t,x\right)$ deriválható. Ha $(t,x) \in \mathcal{S}$ és $x \leq S^*\left(t\right)$ és $t < T$, akkor $\left(K-x\right)^+ = P\left(t,x\right) > 0$, ami csak akkor lehetséges, ha $P\left(t,x\right) = K - x$. Ez a függvény az $x \leq S^*\left(t\right)$ tartományon deriválható[10] és a deriváltja -1. Mit lehet mondani az $S^*\left(t\right)$ pontban?

6.60. Állítás. *Tetszőleges $t < T$ esetén a $g\left(x\right) \triangleq P\left(t,x\right)$ függvény deriválható. Speciálisan*

$$\frac{\partial P}{\partial x}\left(t, S^*\left(t\right)\right) = -1.$$

Bizonyítás. Mivel **a** $P\left(t,x\right)$ függvény az x koordináta szerint konvex, ezért minden pontban mind a két oldali deriváltja létezik az x szerint. Mivel konvex függvény esetén a deriváltszámok nőnek és mivel

$$\frac{\partial P}{\partial x}\left(t, S^*\left(t\right)-\right) = \frac{d}{dx}\left(K - x\right) = -1,$$

ezért

$$\frac{\partial P}{\partial x}\left(t, S^*\left(t\right)+\right) \geq -1,$$

és meg kell mutatni, hogy az ellenkező irányú egyenlőtlenség is teljesül. Legyen $x \triangleq S^*\left(t\right)$ és definiáljuk a

$$\tau_\varepsilon \triangleq \inf\left\{s \geq t \mid S^{t,x+\varepsilon}\left(s\right) \leq S^*\left(s\right)\right\} \wedge T,$$

megállási időket. Természetesen $\tau_0 \equiv t$. Az S^* nem csökkenő, ezért ha $t \leq s$, akkor $S^*\left(t\right) \leq S^*\left(s\right)$, következésképpen

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon \leq \inf\left\{s \geq t \mid S^{t,x+\varepsilon}\left(s\right) \leq S^*\left(t\right)\right\} \wedge T \triangleq \inf\left\{s \geq t \mid S^{t,x+\varepsilon}\left(s\right) \leq x\right\} \wedge T = \\ = \inf\left\{s \geq t \mid \left(x+\varepsilon\right) S^{t,1}\left(s\right) \leq x\right\} \wedge T = \\ = \inf\left\{s \geq t \mid S^{t,1}\left(s\right) \leq \frac{x}{x+\varepsilon} < 1\right\} \wedge T. \end{aligned}$$

[10] Zárt intervallum végpontjában a deriválhatóság értelemszerűen csak az egyik oldalról való deriválhatóságot jelenti. Az $\mathcal{S}$ halmazon az $\mathcal{A}P$ értelmes és $\mathcal{A}P = \delta x - rK$.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Vegyük észre, hogy

$$S^{t,1}(s) = \exp\left(\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s-t) + \sigma w(s-t)\right) =$$
$$= \exp\left(\nu(s-t) + \sigma w(s-t)\right) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(\nu u + \sigma w(u)\right).$$

A trenddel rendelkező Wiener-folyamatok minimumára vonatkozó (5.7) képlet szerint tetszőleges $a > 0$ esetén

$$\mathbf{Q}\left(\min_{0\le u\le a}\left\{\nu u + \sigma w(u)\right\} \ge 0\right) = 0,$$

vagyis tetszőleges $a > t$ esetén

$$\mathbf{Q}\left(\min_{t\le s\le a} S^{t,1}(s) < 1\right) = 1.$$

Ebből következően ha $\varepsilon \searrow 0$, akkor majdnem mindenhol $\tau_\varepsilon \searrow \tau_0$. Azonnal látható, hogy a τ_ε az első olyan időpont, ahol a t után elindított folyamat belép a megállítási tartományba, vagyis

$$\tau_\varepsilon = \inf\left\{s \ge t \mid S^{t,x+\varepsilon}(s) \le S^*(s)\right\} \wedge T =$$
$$= \inf\left\{s \ge t \mid p\left(s, S^{t,x+\varepsilon}(s)\right) = \left(K - S^{t,x+\varepsilon}(s)\right)^+\right\} \wedge T =$$
$$= t + \inf\left\{s \mid p\left(s, S^{x+\varepsilon}(s)\right) = \left(K - S^{x+\varepsilon}(s)\right)^+\right\} \wedge (T-t).$$

Vagyis $\tau_\varepsilon - t$ éppen a $P(t, x+\varepsilon)$-hoz tartozó egyik optimális megállítás

$$P(t,x+\varepsilon) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K - S^{x+\varepsilon}(\tau_\varepsilon - t)\right)^+}{R(\tau_\varepsilon - t)}\right) =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K - S^{x}(\tau_\varepsilon - t)\right)^+}{R(\tau_\varepsilon - t)}\right) - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K - S^{x}(\tau_\varepsilon - t)\right)^+}{R(\tau_\varepsilon - t)}\right) +$$
$$+ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K - S^{x+\varepsilon}(\tau_\varepsilon - t)\right)^+}{R(\tau_\varepsilon - t)}\right).$$

Az első kifejezés éppen a $P(t,x)$. Ha $\tau_\varepsilon < T$, akkor, felhasználva, hogy az S^* jobbról folytonos

$$S^{t,x+\varepsilon}(\tau_\varepsilon) \le S^*(\tau_\varepsilon+) = S^*(\tau_\varepsilon),$$

vagyis az $S^{t,x+\varepsilon}(\tau_\varepsilon)$ a megállási tartományban van, tehát ilyenkor a kifizető függvényben a pozitív rész jel elhagyható. Ezt felhasználva a becslés folytat-

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ható

$$P(t,x) - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{K - S^x(\tau_\varepsilon - t)}{R(\tau_\varepsilon - t)}\chi(\tau_\varepsilon < T)\right) -$$
$$- \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K - S^x(\tau_\varepsilon - t))^+}{R(\tau_\varepsilon - t)}\chi(\tau_\varepsilon = T)\right) +$$
$$+ \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{K - S^{x+\varepsilon}(\tau_\varepsilon - t)}{R(\tau_\varepsilon - t)}\chi(\tau_\varepsilon < T)\right) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K - S^{x+\varepsilon}(\tau_\varepsilon - t))^+}{R(\tau_\varepsilon - t)}\chi(\tau_\varepsilon = T)\right) =$$
$$= P(t,x) - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S^{x+\varepsilon}(\tau_\varepsilon - t) - S^x(\tau_\varepsilon - t)}{R(\tau_\varepsilon - t)}\chi(\tau_\varepsilon < T)\right) -$$
$$- \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K - S^x(T-t))^+ - (K - S^{x+\varepsilon}(T-t))^+}{R(T-t)}\right).$$

Az utolsó előjeles kifejezés az S^x x szerinti növekedése miatt nem negatív, így elhagyva a becslés

$$P(t,x+\varepsilon) \le P(t,x) - \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S^{x+\varepsilon}(\tau_\varepsilon - t) - S^x(\tau_\varepsilon - t)}{R(\tau_\varepsilon - t)}\chi(\tau_\varepsilon < T)\right) =$$
$$= P(t,x) - \varepsilon \cdot \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S^1(\tau_\varepsilon - t)}{R(\tau_\varepsilon - t)}\chi(\tau_\varepsilon < T)\right).$$

Átrendezve

$$\frac{P(t,x+\varepsilon) - P(t,x)}{\varepsilon} \le -\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S^1(\tau_\varepsilon - t)}{R(\tau_\varepsilon - t)}\chi(\tau_\varepsilon < T)\right).$$

Ha most $\varepsilon \searrow 0$, akkor $\tau_\varepsilon \to t < T$. Az S^1/R a $[0,T]$ szakaszon rendelkezik integrálható majoránssal, így a határérték bevihető az integrál mögé és

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S^1(\tau_\varepsilon - t)}{R(\tau_\varepsilon - t)}\chi(\tau_\varepsilon < T)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\lim_{\varepsilon \searrow 0}\frac{S^1(\tau_\varepsilon - t)}{R(\tau_\varepsilon - t)}\chi(\tau_\varepsilon < T)\right) =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{S^1(0)}{R(0)}\right) = 1.$$

Következésképpen

$$\frac{\partial P(t,x+)}{\partial x} = \frac{\partial P(t,S^*(t)+)}{\partial x} \le -1. \qquad \square$$

6.61. Példa. A $g(x) \triangleq P(T,x) = (K-x)^+$ függvény nem deriválható. Ugyanakkor persze az $S^*(T)$ sem értelmezett.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

6.62. Állítás (Explicit Doob–Meyer-felbontás)**.** *Tetszőleges $0 \leq t \leq T$ esetén az amerikai opció $t = 0$ pontban vett árához tartozó optimális megállítás Snell-burkolója felírható*

$$X(t) = \frac{P(t, S(t))}{R(t)} = P(0, S(0)) + \sigma \int_0^t \frac{S(u)}{R(u)} P_x(u, S(u))\, dw(u) + \\ + \int_0^t \frac{\delta S(u) - rK}{R(u)} \chi(S(u) < S^*(u))\, du$$

alakban, ahol a sztochasztikus integrál egy valódi martingál, a trajektóriánként vett integrál pedig nem növekedő.

Bizonyítás. Az állításban szereplő felbontás lényegében az Itô-formula által adott felbontás. A probléma csak az, hogy a $P(t, x)$ nem differenciálható, ezért kisimítjuk. Legyen $f(u, v)$ egy végtelen sokszor deriválható, kompakt tartójú tesztfüggvény. Ha $t < T$ és $x \geq 0$ és ε elég kicsi, akkor legyen

$$P_\varepsilon(t, x) = \int_0^\infty \int_0^\infty P(t + \varepsilon u, x + \varepsilon v) f(u, v)\, du dv.$$

Mivel a $t < T$ miatt a P'_x létezik és folytonos, ezért az x szerint deriválhatunk az integráljel alatt

$$\frac{\partial P_\varepsilon(t, x)}{\partial x} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial P(t + \varepsilon u, x + \varepsilon v)}{\partial x} f(u, v)\, du dv.$$

Mivel a második derivált $\partial^2 P(t, x)/\partial x^2$ az $S^*(t)$ pontban esetleg nem létezik, illetve nem folytonos, ezért az integrál alatti deriválás kiszámolásakor óvatosan kell eljárni.

$$\frac{\partial^2 P_\varepsilon(t, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial P(t + \varepsilon u, x + \varepsilon v)}{\partial x} f(u, v)\, du dv = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial P(u, v)}{\partial x} f\left(\frac{u - t}{\varepsilon}, \frac{v - x}{\varepsilon}\right) du dv = \\ = -\frac{1}{\varepsilon^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial P(u, u)}{\partial x} f_2'\left(\frac{u - t}{\varepsilon}, \frac{v - x}{\varepsilon}\right) du dv,$$

ahol értelemszerűen f'_2 jelöli az f második változója szerinti deriváltat. A belső integrált az $S^*(v)$ pontban kétfelé választva, az egyes integrálokon parciálisan integrálva, és kihasználva, hogy a P első deriváltja folytonos. így a kiintegrált rész kiesik

$$\frac{\partial^2 P_\varepsilon(t, x)}{\partial x^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial^2 P(t + \varepsilon u, x + \varepsilon v)}{\partial x^2} f(u, v)\, du dv,$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ahol az $\partial^2 P/\partial x^2$ integrandus az $(s, S^*(s))$ halmazon nincsen értelmezve. Hasonlóan

$$\frac{\partial P_\varepsilon(t,x)}{\partial t} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial P(t+\varepsilon u, x+\varepsilon v)}{\partial t} f(u,v)\, du dv.$$

Mivel a P'_x folytonos, ezért ha $\varepsilon \searrow 0$, akkor

$$\frac{\partial P_\varepsilon(t,x)}{\partial x} \to \frac{\partial P(t,x)}{\partial x},$$

illetve a $(t, S^*(t))$ halmazon kívül a kompakt halmazon egyenletesen

$$\mathcal{A}P_\varepsilon(t,x) \to \mathcal{A}P(t,x).$$

Az Itô-formula szerint

$$\frac{P_\varepsilon(t,S(t))}{R(t)} - \frac{P_\varepsilon(0,S(0))}{R(0)} = \int_0^t \frac{\mathcal{A}P_\varepsilon(u,S(u))}{R(u)} du + \\ + \sigma \int_0^t \frac{S(u)}{R(u)} \frac{\partial P_\varepsilon(u,S(u))}{\partial x} dw(u).$$

Mivel az x szerinti parciális derivált a 0 és -1 között van ezért a sztochasztikus integrálban alkalmazható a majorált konvergencia tétele. Következésképpen ha $\varepsilon \searrow 0$, akkor a sztochasztikus integrál határértéke éppen az állításban szereplő sztochasztikus integrál. Az $\mathcal{A}P$ értéke a folytatási tartományon nulla, a megállási tartomány belsejében $\delta x - rK$. A két halmazt elválasztó pontok

$$\{(u,\omega) \mid S^*(u) = S(u,\omega)\}$$

halmaza nullmértékű, így

$$\frac{\mathcal{A}P(u,S(u))}{R(u)} \overset{m.m.}{=} (\delta S(u) - rK)\, \chi(S(u) < S^*(u)),$$

ami éppen a második integrál integrandusa. A sztochasztikus integrál egy valódi martingál, ugyanis az integrál $\mathcal{L}^2$-be esik. $X(t) = P(t,S(t))/R(t)$ felbontása egy folytonos martingálra és egy folytonos, korlátos változású függvényre egyértelmű. A Doob–Meyer-dekompozíció miatt az $X(t)$ felbontható egy martingál és egy előrejelezhető, korlátos változású folyamatra. Mivel az X folytonos, ezért előrejelezhető. Ebből következően a Doob–Meyer-felbontásban szereplő martingál előrejelezhető, tehát folytonos. Így az igazolt felbontásban szereplő korlátos változású tag éppen a Doob–Meyer-felbontásban szereplő tag, következésképpen nem növekedő. Az állítást a $t = T$ esetre a $t \nearrow T$ határértékkel kapjuk. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

6.63. Következmény (A korai lehívás prémiuma)**.** *Tetszőleges* $0 \leq t \leq T$ *esetén az*

$$X(t) = \frac{P(t, S(t))}{R(t)}$$

Snell-burkoló felírható

$$X(t) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K - S(T))^{+}}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) + \\ + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_t^T \frac{rK - \delta S(u)}{R(u)} \chi(S(u) < S^*(u))\, du \mid \mathcal{F}_t\right)$$

alakban. Az első tag éppen az európai put opció ára, a második monoton nem növekedő tag szokásos elnevezése korai lehívási prémium.

Bizonyítás. Jelölje M és V az állításban szereplő martingált és korlátos változású tagot.

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{(K - S(T))^{+}}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(X(T) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(M(T) \mid \mathcal{F}_t) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(V(T) \mid \mathcal{F}_t) = \\ = M(t) + V(t) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(V(T) - V(t) \mid \mathcal{F}_t) = \\ = X(t) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_t^T \frac{\delta S(u) - rK}{R(u)} \chi(S(u) < S^*(u))\, du \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Átrendezve éppen az említett felbontást kapjuk. □

A korai lehívás prémiumának integrandusának interpetációja a következő: Az európai put és az amerikai put közötti értékbeli különbség a lehívási tartományban du időszak alatt keletkezett értéknövekedések összegéből ered. A nyereségeket egyrészt diszkontálni kell, ezért szerepel a képletben a $R(u)$ a nevezőben. A számlálóban a lehívásakor kapott K összeg értéknövekedése van. Ebből le kell vonni az ugyanazon időszakban a részvény árának az osztalékfizetés miatti $\delta S(u)$ csökkenését, amely összeggel az opció értéke, ha nem hívtuk volna le, természetesen nőne. A lehívási prémium növekedése azt mutatja, hogy a két hatás eredője nem lehet negatív.

6.64. Következmény. *Minden* $t < T$ *esetén* $\delta S^*(t) \leq rK$*. Következésképpen* $\delta S^*(T-) \leq rK$*.*

Bizonyítás. Legyen $0 \leq t < T$. Az $S^*(t) > 0$ miatt $\mathbf{Q}(S(t) < S^*(t)) > 0$. Vagyis alkalmas ω kimenetelre $S(t, \omega) < S^*(t)$. Az $S^*(t)$ jobbról folytonos,

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

az $S(t,\omega)$ folytonos, így alkalmas $\varepsilon>0$ és $\mathbf{Q}(R)>0$ esetén ha $t\le u\le t+\varepsilon$ és $\omega\in R$, akkor $S(u,\omega)<S^*(u)$. Ha az intervallum egy pozitív Lebesgue-mértékű N halmazán $\delta\cdot S(u,\omega)>rK$ lenne, akkor ezen az intervallumon pozitív valószínűséggel a trajektória nem lenne nem csökkenő. Vagyis majdnem minden $t\le u\le t+\varepsilon$ időpontra $\delta\cdot S(u,\omega)\le rK$. Az S folytonossága miatt $\delta S(t,\omega)\le rK$. Vagyis ha $\{S(t)<S^*(t)\}$, akkor $\delta S(t,\omega)\le rK$. Ebből kihasználva, hogy az $S(t)$ eloszlása lognormális, így az eloszlás értékkészlete az $\mathbb{R}_+$, határértékként $\delta\cdot S^*(t)\le rK$, amiből a $\delta\cdot S^*(T-)\le rK$ már evidens. □

6.65. Állítás. *A $0\le t<T$ szakaszon értelmezett $S^*(t)$ függvény folytonos és*

$$S^*(T-)=\begin{cases}K, & ha\ \ \delta\le r\\ \delta K/r, & ha\ \ \delta>r\end{cases}.$$

Bizonyítás. Terjesszük ki az S^* függvényt a T pontra a megadott definícióval. A kiterjesztett $S^*(t)$ monoton nő és jobbról folytonos. Meg kell mutatni, hogy balról is folytonos. Tekintsünk egy tetszőleges $0<t_0\le T$ pontot, amelyre $S(t_0-)<S^*(t_0)$. Legyen

$$S^*(t_0-)<c^*\doteq\frac{S^*(t_0)+S^*(t_0-)}{2}<S^*(t_0).$$

Ha $0\le t<t_0$, akkor $S^*(t)\le S^*(t_0-)$, így $S^*(t)<c^*$. Legyen $S^*(t)<<x<c^*$. Nyilvánvalóan $(t,x)\in\mathcal{C}$. Mivel a $P(t,x)$ a t szerint csökken, ezért $\partial P/\partial t\le 0$, így felhasználva, hogy a $\mathcal{C}$ tartományon $\mathcal{A}P=0$

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2P}{\partial x^2}(t,x)+(r-\delta)\,x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-rP(t,x)\ge 0,$$

vagyis

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2P}{\partial x^2}(t,x)\ge(\delta-r)\,x\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)+rP(t,x).$$

Ha $r\ge\delta$, akkor felhasználva, hogy $0\ge\partial P(t,x)/\partial x$ és ilyenkor a definícióban $c^*<K=S^*(T)$,

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2P}{\partial x^2}(t,x)\ge rP(t,x)\ge r(K-x)^+\ge r(K-x)\ge r(K-c^*)>0.$$

Ha $\delta>r\ge 0$, akkor felhasználva, hogy $\partial P(t,x)/\partial x\ge -1$,

$$\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2P}{\partial x^2}(t,x)\ge-(\delta-r)\,x+r(K-x)=rK-\delta x>$$
$$>rK-\delta c^*\ge rK-\delta S^*(t_0)\ge rK-\delta S^*(T-)\ge 0.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ebből következően egy alkalmas $H > 0$ konstassal

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x) \geq \frac{2H}{\sigma^2 x^2} \geq \frac{2H}{\left(\sigma c^*\right)^2} \triangleq D > 0.$$

Felhasználva, hogy a P'_x folytonos minden $S^*(t) < u < c^*$ esetén,

$$\begin{aligned}
\int_{S^*(t)}^{u} \int_{S^*(t)}^{y} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,s)\, ds dy &= \int_{S^*(t)}^{u} \left[\frac{\partial P}{\partial x}(t,s)\right]_{S^*(t)}^{y} dy = \\
&= \int_{S^*(t)}^{u} \frac{\partial P}{\partial x}(t,y) - 1 dy = \left[P(t,y) - y\right]_{S^*(t)}^{u} = \\
&= P(t,u) - P(t,S^*(t)) + S^*(t) - u = \\
&= P(t,u) - \left(K - S^*(t)\right)^+ + S^*(t) - u = \\
&= P(t,u) - \left(K - S^*(t)\right) + S^*(t) - u = \\
&= P(t,u) - K - u.
\end{aligned}$$

Ugyanakkor mivel az integrandus egy pozitív D konstanssal alulról korlátos,

$$P(t,u) - K - u \geq \frac{1}{2} D \left(u - S^*(t)\right)^2.$$

Ha $t \nearrow t_0$, akkor

$$P(t_0,u) - K - u \geq \frac{1}{2} D \left(u - S^*(t_0-)\right)^2 > 0.$$

Vagyis $S^*(t_0) < u$. Ebből következően

$$c^* > u > \frac{S^*(t_0) + S^*(t_0-)}{2} \triangleq c^*,$$

ami lehetelen. □

6.66. Definíció (Szabad határ probléma)**.** Keresendő egy a $[0,T] \times \mathbb{R}_+$ halmazon definiált $f(t,x)$ és egy a $[0,T)$ szakaszon definiált jobbról folytons, nem csökkenő d függvény. A következőket követeljük meg:

1. A $\mathcal{D} \triangleq \{(t,x) \in (0,T) \times (0,\infty) \mid x > d(t)\}$ halmazon az f'_t, f'_x és f''_{xx} deriváltak léteznek és folytonosak, valamint $\mathcal{A}f = 0$,
2. $f(t,x) = K - x$, ha $0 \leq t < T$ és $0 \leq x \leq d(t)$,
3. $f(T,x) = (K-x)^+$, ha $x \geq d(T)$,
4. $\lim_{x\to\infty} \max_{0\leq t\leq T} |f(t,x)| = 0$,
5. a $[0,T] \times \mathbb{R}_+$ minden elemére $f(t,x) \geq (K-x)^+$,

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

6. $f'_x(t, d(t)+) = -1$ ha $0 \le t < T$,
7. $\delta d(T) \stackrel{\circ}{=} \delta d(T-) \le rK$.

A d-re tett feltételek miatt a $\mathcal{D}$ halmaz nyílt, így az első pont értelmes. Az első négy feltétel szerint a $\mathrm{cl}(\mathcal{D})$ halmaz parabolikus határán az f megoldása egy parabolikus egyenletnek. A feladat azért szabad határ probléma, mert a $\mathcal{D}$ halmaz alsó határának meghatározása része a problémának. Normál parabolikus feladat esetén minden határpontra egyetlen feltételt szabunk. A szabad határ probléma esetén a szabad határon két feltételnek kell teljesülni,

$$f(t, d(t)) = K - d(t), \quad t < T,$$
$$\frac{\partial f(t, d(t)+)}{\partial x} = -1, \quad t < T,$$

de cserébe a határ nincsen előre rögzítve. Definiáljuk az

$$\mathcal{E} \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} [0,T) \times [0,K), & \text{ha } r \ge \delta \\ [0,T) \times [0, rK/\delta), & \text{ha } r < \delta \end{cases}$$

halmazt. A $g(x) \stackrel{\circ}{=} (K-x)^+$ függvény az $\mathcal{E}$ halmazon folytonosan deriválható és $(\mathcal{A}g)(x) = \delta x - rK < 0$. Ennek megfelelően a d függvény a $[0,T) \times \mathbb{R}_+$ halmazt két részre vágja.

$$\mathcal{A}f = 0, \quad \text{és} \quad f \ge g \quad \text{a } \mathcal{D} \text{ halmazon}$$
$$\mathcal{A}f < 0, \quad \text{és} \quad f = g \text{ az } ([0,T) \times \mathbb{R}_+) \setminus \mathrm{cl}(\mathcal{D}) \text{ halmazon.}$$

6.67. Állítás. *A $(P(t,x), S^*(t))$ pár az egyetlen megoldása a fenti szabad határ problémának.*

Bizonyítás. Elegendő belátni, hogy a szabad határ probléma megoldása egyértelmű. Ehhez ismét az Itô-formulát fogjuk használni. Az imént belátott explicit Doob–Meyer-dekompozícióhoz hasonlóan írjuk fel a

$$\frac{f(T, S^{t,x}(T))}{R(T)} = f(t,x) + \sigma \int_t^T \frac{S(u)}{R(u)} f_x(u, S(u))\, dw(u) + \\ + \int_t^T \frac{\delta S(u) - rK}{R(u)} \chi(S(u) < d(u))\, du$$

felbontást. Az $f(t,x)$ függvényről nem tettük fel, hogy az x szerint konvex, így nem tudjuk, hogy az f'_x parciális derivált korlátos. Ebből következően a sztochasztikus integrálról csak azt tudjuk, hogy lokális martingál. Legyen (τ_n) egy lokalizációs sorozat. Tetszőleges $t \le \tau \le T$ megállási idő esetén

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{f(\tau \wedge \tau_n, S^{t,x}(\tau \wedge \tau_n))}{R(\tau \wedge \tau_n)}\right) = \\ = f(t,x) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_t^{\tau \wedge \tau_n} \frac{\delta S(u) - rK}{R(u)} \chi(S(u) < d(u))\, du\right).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az f a negyedik feltétel miatt korlátos, így majorált konvergencia tétel az egyik oldalon a másik oldalon pedig a monoton konvergencia tétele alkalmazható. Felhasználva, hogy az integrátor nem pozitív,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K-S^{t,x}(\tau)\right)^{+}}{R(\tau)}\right) \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{f\left(\tau, S^{t,x}(\tau)\right)}{R(\tau)}\right) =$$
$$= f(t,x) + \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_t^{\tau} \frac{\delta S(u) - rK}{R(u)} \chi\left(S(u) < d(u)\right) du\right) \leq f(t,x),$$

ahol kihasználtuk az ötödik megkötést. Ebből $P(t,x) \leq f(t,x)$. Legyen

$$\tau \triangleq \inf\{s \geq t \mid S(s) \leq d(s)\} \wedge T.$$

Ekkor a peremértékek miatt $f\left(\tau, S^{t,x}(\tau)\right) = \left(K - S^{t,x}(\tau)\right)^{+}$. Mivel a τ a megállási tartomány t utáni első találati pontja, ezért

$$\int_t^{\tau} \frac{\delta S(u) - rK}{R(u)} \chi\left(S(u) < d(u)\right) du = \int_t^{\tau} 0 du = 0,$$

vagyis

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{\left(K-S^{t,x}(\tau)\right)^{+}}{R(\tau)}\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{f\left(\tau, S^{t,x}(\tau)\right)}{R(\tau)}\right) = f(t,x)$$

vagyis $f(t,x) = P(t,x)$. Hátravan még a $d = S^*$ egyenlőség igazolása. Ehhez elegendő belátni, hogy a

$$\mathcal{C} = \left\{(t,x) \mid P(t,x) > (K-x)^{+}\right\} = \{(t,x) \mid x > S^*(t)\}$$

és a

$$\mathcal{D} \triangleq \{(t,x) \mid x > d(t)\}$$

halmazok megegyeznek. Ha $(t,x) \in \mathcal{C}$, akkor $\mathcal{A}f(t,x) = 0$. Ebből következően $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{D})$. Mivel a $\mathcal{D}$ nyílt, ezért $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$. A szerepek megcserélésével kaphatjuk a fordított irányú tartalmazást. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

7. fejezet

Kamatlábmodellek

A Black–Scholes-világ általánosításai közül a legfontosabb a kötvényekre vonatkozó elmélet. Az alábbiak célja, hogy alkalmas modellkeretet építsünk a $B(t,T)$ elemi kötvények elméleti, matematikai meghatározására. Miként korábban megjegyeztük, a $B(t,T)$ éppen a T időpontban esedékes, $H_T \equiv 1$ összeg ára a $t < T$ időpontban. Az általános árazási formula miatt értéke éppen $B(t,T) = R(t)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(1/R(T) \mid \mathcal{F}_t\right)$, ahol R a $\mathbf{Q}$ martingálmértékhez tartozó diszkont folyamat. Vagyis a $\mathbf{Q}$ ismeretében az R segítségével a B egyszerűen meghatározható. A fordított irány azonban nem egyértelmű: Ha ismerjük a $B(t,T)$ folyamatot, akkor számtalan különböző ($\mathbf{Q}$,R) pár létezik, amelyből a $B(t,T)$ származtatható. Nyilvánvalóan érdemes olyan párt választani, amely a számolásokat egyszerűvé teszi. Adott S részvény esetén a $\mathbf{Q}_T$ forward mérték éppen az a mérték, amelyre a $0 \le t \le T$ szakaszon az $S(t)/B(t,T)$ martingál. Miként beláttuk,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{d\mathbf{Q}_T}{d\mathbf{Q}} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{d\mathbf{Q}_T}{d\mathbf{Q}} \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{B(t,T)}{B(0,T)\,R(t)},$$

amiből rögzített $B(t,T)$ esetén tetszőleges a $\mathbf{Q}_T$-re abszolút folytonos $\mathbf{Q}$ esetén meghatározható a megfelelő R, vagy tetszőleges R-hez meghatározható a $\mathbf{Q}$. A továbbiakban a $B(t,T)$ segítségével definiálni fogunk egy alkalmas R-et, és a hozzá tartozó $\mathbf{Q}$ mértéket fogjuk kockázatsemleges mértéknek nevezni. Vagyis a kamatlábmodellek alapfogalma nem az (S,R) pár, hanem a $B(t,T)$ elemi kötvények folyamatai. Tovább bonyolítja a helyzetet, hogy az elemi kötvények által meghatározott piac nem teljes.

Hangsúlyozni kell, hogy minden T-re adott egy-egy folyamat, így a modellben szereplő folyamatok száma végtelen. A továbbiakban feltételezzük, hogy a $B(t,T)$ folyamatok mindegyike pozitív, a T szerint deriválható, illetve minden T esetén $B(T,T) = 1$. Az elemi kötvények $B(t,T)$ családját a kötvények

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

lejárati szerkezetének mondjuk. A $B(t,T)$ elemi kötvények segítségével számos szorosan összefüggő pénzügyi koncepciót fogalmazhatunk meg. Ezeket a különböző matematikai konstrukciókat hozamgörbéknek mondjuk. A hozamgörbék információs tartalma azonos a lejárati szerkezet által hordozott információval, csak különböző, esetlegesen praktikusabban megragadható formában, prezentálja azt.

7.1. Forward ráták és hozamgörbék

Legyen $t<S<T$. Ha a t időpontban eladunk egy az S időpontban lejáró elemi kötvényt és az így kapott $B(t,S)$ árból veszünk $B(t,S)/B(t,T)$ darab a T időpontban lejáró elemi kötvényt, akkor a T időpontban $B(t,S)/B(t,T)$ összeghez jutunk, miközben az S időpontban kifizettünk 1 egységet. (Természetesen a t időpontban a két üzlet eredője nulla.) Ennek megfelelően az $[S,T]$ időszak elején befektetett egységnyi összeg az időtartam végén $B(t,S)/B(t,T)$ összeget ér. Az így kapott úgynevezett forward üzlet eredményét alapvetően két módon definiálhatjuk. Ha az

$$\frac{B(t,S)}{B(t,T)}-1=\frac{B(t,S)-B(t,T)}{B(t,T)}=L\cdot(T-S)$$

képlettel meghatározott L értéket adjuk meg, akkor úgynevezett egyszerű, vagy LIBOR forward rátáról szokás beszélni. Ha a

$$\frac{B(t,S)}{B(t,T)}=\exp\left(F\cdot(T-S)\right)$$

képlettel definiált F értéket adjuk meg, akkor folytonos forward rátáról beszélünk.

7.1. Definíció. Vezessük be a következő jelöléseket:

1. A t időpontban számított, az $[S,T]$ szakaszon érvényes LIBOR forward ráta
$$L(t,S,T)=-\frac{B(t,T)-B(t,S)}{B(t,T)\cdot(T-S)}.$$
2. Az $[S,T]$ szakaszon érvényes LIBOR spot ráta
$$L(S,T)\triangleq L(S,S,T)=-\frac{B(S,T)-B(S,S)}{B(S,T)\cdot(T-S)}=-\frac{B(S,T)-1}{B(S,T)\cdot(T-S)}.$$
3. A t időpontban számított, az $[S,T]$ szakaszon érvényes folytonos forward ráta
$$F(t,S,T)=-\frac{\log B(t,T)-\log B(t,S)}{T-S}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

4. Az $[S,T]$ szakaszon érvényes folytonos spot ráta

$$F(S,T) \triangleq F(S,S,T) = -\frac{\log B(S,T) - \log B(S,S)}{T-S} = -\frac{\log B(S,T)}{T-S}.$$

5. A t időpontban számított $t < T$ időponthoz tartozó pillanatnyi, folytonos forward ráta

$$f(t,T) \triangleq \lim_{S \nearrow T} F(t,S,T) = -\frac{\partial \log B(t,T)}{\partial T}. \tag{7.1}$$

6. Azonnali rövid kamat, vagy egyszerűen rövid kamat

$$r(t) \triangleq f(t,t) = -\frac{\partial \log B(t,t)}{\partial T}.$$

7. Bankbetéten az

$$R(t) \triangleq \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right)$$

folyamatot értjük.

Miként már jeleztük az R-hez tartozó $\mathbf{Q}$ mértéket kockázatsemleges mértéknek fogjuk mondani. Így a $\mathbf{Q}$ definíciója szerint érvényes a $\pi_t(H_T) = R(t)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(H_T/R(T) \mid \mathcal{F}_t)$ árazási formula. Ennek megfelelően érvényes a

$$\begin{aligned} B(t,T) &= R(t)\,\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

képlet is. Az $f(t,T)$ (7.1) definíciójából evidens, hogy

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)\,ds\right).$$

7.2. Azonnali rövid kamatlábmodellek

A legegyszerűbb modellezési környezetet akkor kapjuk, ha közvetlenül az $r(t)$ folyamatot egy az r-re felírt sztochasztikus differenciálegyenlettel modellezzük és a $B(t,T)$ értékeit az r-re felírt egyenlet paraméterei segítségével határozzuk meg. Mivel ez a megközelítés számos helyen elérhető, ezért csak röviden foglalkozom vele.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Tegyük tehát fel, hogy a kockázatsemleges mérték alatt az r kielégíti a

$$dr = b(t,r)\,dt + \sigma(t,r)\,dw$$

egyenletet. A $B(t,T)$ alakulását a legegyszerűbben a Black–Scholes-differenciálegyenlettel analóg, úgynevezett lejárati szerkezet egyenlettel[1] számolhatjuk ki. Tegyük fel, hogy egy alkalmas $f(t,r)$ függvény kielégíti a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,r) + b(t,r)\frac{\partial}{\partial r}f(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)\frac{\partial^2}{\partial r^2}f(t,r) = r\cdot f(t,r),$$
$$f(T,r) = h(r)$$

egyenletet. A $h(r)$ a T időpontban érvényes képlete az esetleges származtatott terméknek. Formailag a Black–Scholes-egyenlethez képest összesen annyi változás történt, hogy az x helyébe r került. Ez azonban lényeges változást jelent ugyanis az $r\cdot f(t,r)$ tagban immáron az r szorzó is változó és nem konstans mint korábban. Tekintsük az $X(t) \triangleq f(t,r(t))$ folyamatot és legyen $D(t) \triangleq \exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)$. Világos, hogy

$$dD(s) = -r(s)\,D(s)\,ds,$$

illetve az Itô-formula miatt

$$dX = df = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,r) + b(t,r)\frac{\partial}{\partial r}f(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)\frac{\partial^2}{\partial r^2}f(t,r)\right)dt +$$
$$+\,\sigma(t,r)\frac{\partial}{\partial r}f(t,r)\,dw.$$

A parciális integrálás formulája és a polaritási szabály alapján

$$\begin{aligned}
&D(T)X(T) - D(t)X(t) = \\
&= \int_t^T X(s)\,dD(s) + \int_t^T D(s)\,dX(s) = \\
&= \int_t^T -r(t)\,f(s,r(s))\,D(s)\,ds + \\
&\quad + \int_t^T D(s)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,r) + b(s,r)\frac{\partial}{\partial r}f(s,r) + \frac{1}{2}\sigma^2(s,r)\frac{\partial^2}{\partial r^2}f(s,r)\right)ds + \\
&\quad + \int_t^T D(s)\,\sigma(s,r)\frac{\partial}{\partial r}f(s,r)\,dw,
\end{aligned}$$

ugyanis a D korlátos változású, így a kvadratikus keresztvariációs tag nulla. Mivel az f kielégíti a parciális differenciálegyenletet, ezért a ds tagok összege

[1] Term Structure Equation.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

nulla, így az $Y(t) \triangleq D(T)X(T) - D(t)X(t)$ előáll egy Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrálként, így a $t = 0$ időpontban nulla értéket felvevő lokális martingál. Ismételten felmerül, hogy mikor lesz egy lokális martingál valódi martingál. Ha például tudjuk, hogy $r \geq 0$, akkor $0 \leq D(t) \leq$ ≤ 1, ezért ha az f egyenletesen korlátos, akkor az Y egyenletesen korlátos lokális martingál, így egy valódi martingál, következésképpen

$$D(t)X(t) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(D(T)X(T) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_0^T r(s)ds\right) h(r(T)) \mid \mathcal{F}_t\right),$$

amiből

$$X(t) \triangleq f(t, r(t)) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_0^T r(s)ds\right) h(r(T)) \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Ha $h = 1$, akkor $f(t,r) = B(t,T)$.

Ahhoz persze, hogy a parciális differenciálegyenletet meg tudjuk oldani egyszerűsítéseket kell bevezetni. A legnépszerűbb család az úgynevezett affin lejárati szerkezettel[2] rendelkező modellek, amikor az $f(t,r)$ függvényt $\exp(A(t,T) - C(t,T) \cdot r)$ alakban keressük[3]. A modellcsalád angol elnevezése alapján ilyenkor ATS modellekről beszélünk. Az elnevezés nyilvánvaló indoka, hogy az exponenciális függvény kitevőjében levő kifejezés az r affin függvénye. Affin lejárati szerkezet esetén a megoldandó lejárati szerkezet egyenlete

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t,T) - \frac{\partial C}{\partial t}(t,T)\, r - b(t,r)\, C(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)\, C^2(t,T) = r,$$
$$A(T,T) = 0, C(T,T) = 0$$

módon is írható. Természetesen semmi okunk sincs feltételezni, hogy adott $b(t,r)$ és $\sigma(t,r)$ függvények esetén a keresett $A(t,T)$, illetve $C(t,T)$ függvények meghatározhatóak. Ha továbbá feltesszük még, hogy

$$b(t,r) = \alpha(t)\, r + \beta(t),$$
$$\sigma^2(t,x) = \gamma(t)\, r + \delta(t),$$

akkor az egyenlet

$$r = \frac{\partial A}{\partial t}(t,T) - \beta(t)\, C(t,T) + \frac{1}{2}\delta(t)\, C^2(t,T) -$$
$$- \left(\frac{\partial C}{\partial t}(t,T) + \alpha(t)\, C(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)\, C^2(t,T)\right) r$$

[2] Affine Term Structure.

[3] Parciális differenciálegyenletek megoldásakor a leghatékonyabb módszer a szorzatra bontás módszere. Az alábbi eljárás éppen ennek a megközelítésnek egy verziója.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

módon egyszerűsödik. Mivel az egyenlőségnek minden r esetén teljesülni kell, ezért

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t,T) - \beta(t) C(t,T) + \frac{1}{2}\delta(t) C^2(t,T) = 0,$$
$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,T) + \alpha(t) C(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t) C^2(t,T) = -1.$$

Vegyük észre, hogy a második egyenlet csak a C-től függ és az első egyenlet

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t,T) = \beta(t) C(t,T) - \frac{1}{2}\delta(t) C^2(t,T)$$

alakú, amely már a C ismeretében egyszerű integrálással megoldható. A C-re vonatkozó egyenlet az

$$y'(x) = c(x) + a(x) y(x) + b(x) y^2(x)$$

alakú úgynevezett Riccati-egyenletek közé tartozik, amelyeknek nem ismert a zárt alakban való általános megoldása. Ugyanakkor a Riccati-egyenletek megoldása mégsem reménytelen. Miként ismert, ha valamiképpen megsejthető az egyenlet egy megoldása, akkor az egyenlet általános megoldásának megkeresése visszavezethető egy alkalmas lineáris differenciálegyenlet megoldására.

7.2. Példa. Vasicek-modell.

A Vasicek-modellben a $\mathbf{Q}$ mérték alatt a

$$dr = (b - ar)\,dt + \sigma dw, \quad r(0) = r_0$$

egyenlettel írjuk le az azonnali rövid kamatláb alakulását, ahol a, b és σ a modell pozitív paraméterei. Ilyenkor

$$b(t,r) = -ar + b, \quad \sigma^2(t,x) = \sigma^2.$$

A C függvényekre vonatkozó egyenletek

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,T) - aC(t,T) = -1, \quad C(T,T) = 0.$$

Ez minden T-re egy közönséges konstans együtthatós lineáris egyenlet, így

$$C(t,T) = \frac{1}{a}\left(1 - \exp\left(-a(T-t)\right)\right).$$

Az A-ra vonatkozó egyenlet

$$\frac{\partial A}{\partial t}(t,T) = bC(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 C^2(t,T), \quad A(T,T) = 0.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ezt t szerint integrálva

$$A(t,T) = -\left(A(T,T) - A(t,T)\right) = \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T C^2(s,T)\,ds - b\int_t^T C(s,T)\,ds.$$

A C már meghatározott képletét behelyettesítve

$$A(t,T) = \left(C(t,T) - T + t\right)\left(\frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) - \frac{\sigma^2 C^2(t,T)}{4a}$$

és

$$B(t,T) = \exp\left(A(t,T) - C(t,T)\,r(t)\right). \qquad \square$$

7.3. Példa. Ho–Lee-modell.

A Ho–Lee modelben a $\mathbf{Q}$ mérték alatt a

$$dr = \theta(t)\,dt + \sigma dw, \quad r(0) = r_0$$

egyenlettel írjuk le az azonnali rövid kamatláb alakulását, ahol σ a modell pozitív paramétere, $\theta(t)$ egy függvény, amit a modellben az aktuális hozamgörbéhez való kalibráláshoz lehet felhasználni. Ilyenkor

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,T) = -1, \quad C(T,T) = 0,$$
$$\frac{\partial A}{\partial t}(t,T) = \theta(t)\,C(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 C^2(t,T), \quad A(T,T) = 0.$$

Ebből $C(t,T) = T - t$ és

$$A(t,T) = \int_t^T \theta(s)\,(s-T)\,ds + \frac{\sigma^2}{2}\frac{(T-t)^3}{3}.$$

A θ függvényt úgy kell meghatározni, hogy teljesüljön a $B(0,T) = B^*(T)$ egyenlőség, ahol $B^*(T)$ a ténylegesen a $t = 0$ megfigyelt lejárati szerkezet. A $B^*(T)$ helyett az illesztéshez egyszerűbb az $f^*(0,T)$ forward rátát használni. A forward ráta és az elemi kötvények ára a

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)\right)ds$$

képlet miatt kölcsönösen egyértelmű viszonyban van. Így

$$f^*(0,T) = -\frac{d\ln B^*(T)}{dT}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A forward ráta előnye, hogy segítségével érvényes a

$$-\int_0^T f^*(0,s)\,ds = A(0,T) - C(0,T)\,r(0) = \\ = \int_0^T \theta(s)\,(s-T)\,ds + \frac{\sigma^2}{2}\frac{T^3}{3} - Tr(0).$$

egyenlőség. A parametrikus integrálás deriválásával minden $T>0$ esetén

$$-f^*(0,T) = \theta(s)\,(T-T) - \int_0^T \theta(s)\,ds + \frac{\sigma^2}{2}T^2 - r(0).$$

Újra deriválva és átrendezve

$$\theta(t) = \frac{\partial f^*(0,t)}{\partial T} + \sigma^2 t.$$

Ezt visszaírva

$$\int_t^T \theta(s)\,(s-T)\,ds = \\ = \int_t^T \left(\frac{\partial f^*(0,s)}{\partial T} + \sigma^2 s\right)(s-T)\,ds = \\ = \left[\left(f^*(0,s) + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right)(s-T)\right]_t^T - \int_t^T f^*(0,s)\,ds - \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T s^2 ds = \\ = -f^*(0,s)\,(T-t) - \frac{\sigma^2 t^2}{2}(t-T) - \int_t^T f^*(0,s)\,ds - \frac{\sigma^2}{6}\left(T^3 - t^3\right)$$

Ebből

$$B(t,T) = \exp\left(A(t,T) - C(t,T)\cdot r\right) = \\ = \exp\left(-\int_t^T f^*(0,s)\,ds\right)\times \\ \times \exp\left(f^*(0,s)(T-t) - \frac{\sigma^2 t^2}{2}(t-T) - \frac{\sigma^2}{6}(T^3-t^3) + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3 - (T-t)r\right) = \\ = \frac{B^*(T)}{B^*(t)}\exp\left(f^*(0,s)\,(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}t\,(t-T)^2 - (T-t)\,r(t)\right). \qquad \square$$

7.4. Példa. Hull–White-modell.

A Hull–White-modellben a $\mathbf{Q}$ alatt

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

$$dr = (\theta(t) - ar)\,dt + \sigma dw, \quad r(0) = r_0,$$

ahol ismételten a $\theta(t)$ függvényt úgy kell meghatározni, hogy a $t = 0$ időpontban a modell a megfigyelt $B^*(T)$ lejárati szerkezethez illeszkedjen. A differenciálegyenletek

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,T) + aC(t,T) = -1, \quad C(T,T) = 0,$$
$$\frac{\partial A}{\partial t}(t,T) = \theta(t)\,C(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 C^2(t,T), \quad A(T,T) = 0.$$

Az első egyenlet a Vasicek-modellhez hasonlóan egy lineáris differenciálegyenlet, így

$$C(t,T) = \frac{1}{a}\left(1 - \exp\left(-a(T-t)\right)\right),$$
$$A(t,T) = \int_t^T \frac{1}{2}\sigma^2 C^2(s,T) - \theta(t)\,C(t,T)\,ds.$$

A θ meghatározásához ismerni kell a $B(0,T) = B^*(T)$ függvényt, vagy ami evvel azonos az $f^*(0,T) = -d\ln B^*(T)/dT$ forward rátát. A $f(t,T)$ definíciójából

$$f^*(0,T) = -\frac{\partial A}{\partial T}(0,T) + \frac{\partial C}{\partial T}(0,T)\,r(0).$$

A már kiszámolt A és B függvényeket beírva, a parametrikus integrál deriválási szabálya alapján

$$f^*(0,T) = \theta(T)\,C(T,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 C^2(T,T) +$$
$$+ \int_0^T \theta(s)\frac{\partial C(s,T)}{\partial T} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial C^2(s,T)}{\partial T}ds + \exp(-aT)\,r(0) =$$
$$= \int_0^T \theta(s)\exp\left(-a(T-s)\right)ds - \frac{\sigma^2}{2}C^2(0,T) + \exp(-aT)\,r(0).$$

Ha bevezetjük a $g(t) \stackrel{\circ}{=} \frac{\sigma^2}{2}C^2(0,t)$ függvényt és észrevesszük, hogy a

$$\frac{dx}{dt} = -ax(t) + \theta(t), \quad x(0) = r(0)$$

egyenlet megoldása éppen

$$x(t) = \int_0^T \theta(s)\exp\left(-a(T-s)\right)ds + \exp(-aT)\,r(0),$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

akkor az egyenlet $f^*(0,T) = x(T) - g(T)$ alakba írható. Így

$$\theta(T) = \frac{dx(T)}{dT} + ax(T) = \frac{df^*(0,T)}{dT} + \frac{dg(T)}{dT} + ax(T) = \tag{7.2}$$
$$= \frac{df^*(0,T)}{dT} + \frac{dg(T)}{dT} + a\left(f^*(0,T) + g(T)\right) =$$
$$= \frac{df^*(0,T)}{dT} + af^*(0,T) + \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - \exp\left(-2aT\right)\right).$$

Ebből következően ha a $B^*(T)$ kétszer deriválható, akkor a most belátott (7.2) képlet segítségével a θ egyértelműen meghatározható. Egyszerű, de hosszadalmas számolással

$$B(t,T) = \frac{B^*(T)}{B^*(t)} \times$$
$$\times \exp\left(C(t,T)f^*(0,T) - \frac{\sigma^2}{4a}C^2(t,T)(1-\exp(-2at)) - C(t,T)r(t)\right). \qquad \square$$

7.5. Példa. A Cox–Ingersoll–Ross-modell.

A Cox–Ingersoll–Ross, röviden CIR-modellben a $\mathbf{Q}$ mérték alatt

$$dr = (b - a \cdot r)\,dt + \sigma\sqrt{r}dw,$$

ahol a, b és σ a modell pozitív paraméterei. A megfelelő egyenletek

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,T) - aC(t,T) - \frac{1}{2}\sigma^2 C^2(t,T) = -1,$$
$$\frac{\partial A}{\partial t}(t,T) - bC(t,T) = 0.$$

A problémát a $t \mapsto C(t,T)$-re érvényes

$$y' = -1 + ay + \frac{1}{2}\sigma^2 y^2$$

konstans együtthatós Riccati-egyenlet megoldása jelenti. Az egyenlet általános megoldásához szükségünk van egy lehetséges megoldásra. Mivel az egyenlet konstans együtthatós, érdemes egy $y = y^*$ konstans megoldást keresni. A másodfokú egyenletet megoldva az

$$y^* = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} = \frac{-a - \gamma}{\sigma^2}$$

az egyenlet egy lehetséges megoldása, ahol $\gamma \triangleq \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$. A Riccati-egyenlet megoldásához javasolt közismert receptet követve vezessük be a $z = 1/(y - y^*)$ változót. Átrendezve

$$y = y^* + \frac{1}{z}, \quad y' = -\frac{z'}{z^2}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Behelyettesítve

$$-\frac{z'}{z^2} = -1 + a\left(y^* + \frac{1}{z}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(y^* + \frac{1}{z}\right)^2 =$$
$$= -1 + ay^* + a\frac{1}{z} + \frac{\sigma^2}{2}\left((y^*)^2 + 2\frac{y^*}{z} + \frac{1}{z^2}\right) =$$
$$= -1 + ay^* + \frac{\sigma^2}{2}(y^*)^2 + \left(a + \sigma^2 y^*\right)\frac{1}{z} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{z^2} =$$
$$= 0 - \gamma\frac{1}{z} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{z^2}.$$

A $-z^2$ kifejezéssel átszorozva a $z' - \gamma z = -\sigma^2/2$ lineáris differenciálegyenlethez jutunk. Ennek általános megoldása

$$z = \frac{\exp(-\gamma t)\,\sigma^2 + c}{2\gamma\exp(-\gamma t)},$$

amiből

$$y = y^* + \frac{2\gamma\exp(-\gamma t)}{\exp(-\gamma t)\,\sigma^2 + c} = \frac{y^*\left(\exp(-\gamma t)\,\sigma^2 + c\right) + 2\gamma\exp(-\gamma t)}{\exp(-\gamma t)\,\sigma^2 + c} =$$
$$= \frac{\exp(-\gamma t)\left(y^*\sigma^2 + 2\gamma\right) + y^* c}{\exp(-\gamma t)\,\sigma^2 + c}.$$

Mivel $y(T) = 0$, ezért

$$c = -\exp(-\gamma T)\left(\sigma^2 + \frac{2\gamma}{y^*}\right).$$

A c értékét behelyettesítve, elemi számolással

$$C(t,T) = y(t) = \frac{\exp(-\gamma t)(-a+\gamma) - \exp(-\gamma T)(-a+\gamma)}{\exp(-\gamma t)\,\sigma^2 - \exp(-\gamma T)\left(\sigma^2 + 2\frac{\gamma}{y^*}\right)} =$$
$$= \frac{\exp(\gamma(T-t))(-a+\gamma) - (-a+\gamma)}{\sigma^2\exp(\gamma(T-t)) - (\sigma^2 + 2\gamma/y^*)} = \frac{y^*(-a+\gamma)(\exp(\gamma(T-t)) - 1)}{\sigma^2 y^*\exp(\gamma(T-t)) - (\sigma^2 y^* + 2\gamma)} =$$
$$= \frac{y^*(\gamma - a)\left(\exp(\gamma(T-t)) - 1\right)}{\sigma^2 y^*\exp(\gamma(T-t)) - (\gamma - a)} = \frac{\frac{a^2-\gamma^2}{\sigma^2}\left(\exp(\gamma(T-t)) - 1\right)}{\sigma^2 y^*\exp(\gamma(T-t)) + (a-\gamma)} =$$
$$= \frac{-2\left(\exp(\gamma(T-t)) - 1\right)}{-(a+\gamma)\exp(\gamma(T-t)) + (a-\gamma)} = \frac{2\left(\exp(\gamma(T-t)) - 1\right)}{(a+\gamma)\exp(\gamma(T-t)) + (\gamma - a)} =$$
$$= \frac{2\left(\exp(\gamma(T-t)) - 1\right)}{(a+\gamma)\left(\exp(\gamma(T-t)) - 1\right) + 2\gamma}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az A-ra vonatkozó egyenletből

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} = bC(t,T), \quad A(T,T) = 0.$$

Megmutatjuk, hogy

$$A(t,T) = \frac{2b}{\sigma^2} \ln\left(\frac{2\gamma \exp\left((a+\gamma)(T-t)/2\right)}{(a+\gamma)\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right)+2\gamma}\right).$$

Egyszerű helyettesítéssel azonnal látható, hogy

$$A(T,T) = \frac{2b}{\sigma^2}\ln 1 = 0.$$

Ha U jelöli a logaritmus mögötti tört számlálóját és V a nevezőjét, akkor deriválva

$$\frac{d}{dt}\frac{2b}{\sigma^2}\ln\frac{U}{V} = \frac{2b}{\sigma^2}\frac{V}{U}\frac{U'V - V'U}{V^2} = \frac{2b}{\sigma^2}\left(\frac{U'}{U} - \frac{V'}{V}\right).$$

A deriválásokat elvégezve

$$U' = -\gamma(a+\gamma)\exp\left(\frac{a+\gamma}{2}(T-t)\right),$$
$$V' = -\gamma(a+\gamma)\exp\left(\gamma(T-t)\right).$$

Behelyettesítve és a γ definícióját felhasználva, ismételten elemi számolással

$$\frac{2b}{\sigma^2}\left(-\frac{a+\gamma}{2} - \frac{-\gamma(a+\gamma)\exp\left(\gamma(T-t)\right)}{(a+\gamma)\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right)+2\gamma}\right) =$$
$$= \frac{2b}{\sigma^2}\frac{\left(\gamma - \frac{a+\gamma}{2}\right)(a+\gamma)\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right) - 2\gamma\frac{a+\gamma}{2} + \gamma(a+\gamma)}{(a+\gamma)\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right)+2\gamma} =$$
$$= \frac{b}{\sigma^2}\frac{(\gamma-a)(a+\gamma)\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right)}{(a+\gamma)\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right)+2\gamma} =$$
$$= \frac{b}{\sigma^2}\frac{\left(\gamma^2-a^2\right)\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right)}{(a+\gamma)\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right)+2\gamma} = b\frac{2\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right)}{(a+\gamma)(\exp(\gamma(T-t))-1)+2\gamma}$$

ami éppen a $C(t,T)$. Az A-ban szereplő logaritmus felhasználásával

$$B(t,T) = A_0(t,T)\exp\left(-C(t,T)r\right),$$

ahol

$$A_0(t,T) \doteq \left(\frac{2\gamma\exp\left((a+\gamma)(T-t)/2\right)}{(a+\gamma)\left(\exp\left(\gamma(T-t)\right)-1\right)+2\gamma}\right)^{2b/\sigma^2}. \qquad \square$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

7.3. A HJM nincsen arbitrázs feltétel

Az úgynevezett Heath–Jarrow–Morton-modellekben, röviden HJM-modellekben, nem az $r(t)$ rövid kamatlábakra, hanem az $f(t,T)$ forward rátákra koncentrálunk. A modellezési megközelítés legfőbb értéke éppen az a felismerés, hogy az $f(t,T)$ szerinti modellezés egyszerűbb, mint a rövid kamatlábak modellezése. Tegyük fel tehát, hogy az elemi kötvények mozgását valamilyen mérték alatt a

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dw, \\ f(0,T) &= f^*(0,T) \end{aligned}$$

típusú egyenletekkel írjuk le, ahol $f^*(0,T)$ a $t=0$ időpontban megfigyelt forward görbe. Ha ismert az egyenlet valamilyen megoldása, akkor az elemi kötvények áralakulását a

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,du\right)$$

egyenlettel határozhatjuk meg. A későbbiek szempontjából érdemes hangsúlyozni, hogy az exponenciális függvény kitevőjében szereplő integrálban a t időparaméter két helyen is szerepel: Egyrészt az integrál határában, másrészt az integrandus képletében.

7.3.1. A HJM-feltétel levezetése

Ahhoz, hogy az $f(t,T)$ ismeretében vissza tudjuk számolni a $B(t,T)$ kifejezést elegendő a standard Itô-formulát alkalmazni a kitevőben szereplő $X(t,T) \stackrel{\circ}{=} -\int_t^T f(t,u)\,du$ folyamatra. A nehézség az X folyamat definíciójában szereplő integrál kezelésében van, amely kiszámolására a standard Itô-kalkulus nem használható. Első lépésként érdemes tehát kiszámolni az X folyamat alakulását leíró egyenletet. A folyamat definíciójában a t időváltozó két helyen szerepel. A parametrikus integrálok deriválási szabálya alapján azt vélemezhetjük, hogy a deriváláskor egyrészt az integrál határa szerint kell deriválni, másrészt az integrál alatt kell deriválni. Ennek megfelelően azt sejtjük, hogy

$$\begin{aligned} dX(t,T) &= f(t,t) - \int_t^T df(s,u)\,du = r(t) - \int_t^T df(s,u)\,du = \\ &= r(t) - \int_t^T \alpha(t,u)\,dtdu + \sigma(t,u)\,dwdu = \\ &= r(t) + \alpha^*(t,T)\,dt + \sigma^*(t,T)\,dw, \end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ahol definíció szerint

$$\alpha^*(t,T) \stackrel{\circ}{=} -\int_t^T \alpha(t,u)\,du, \quad \sigma^*(t,T) \stackrel{\circ}{=} -\int_t^T \sigma(t,u)\,du.$$

A pontos igazolás a sztochasztikus integrálásra vonatkozó Fubini-tételre épül, amelyet a teljesség kedvéért most idézünk:

7.6. Definíció. Jelölje $\mathcal{P}$ az $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ téren az előrejelezhető folyamatok által generált σ-algabrát. Vagyis legyen $\mathcal{P}$ a legszűkebb σ-algebra az $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ téren, amelyre nézve az összes folytonos adaptált folyamat mint kétváltozós függvény mérhető.

7.7. Állítás (Paraméteres integrálok mérhetősége)**.** *Legyen X az $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}, \mathcal{F})$ sztochasztikus alaptéren értelmezett szemimartingál, $(C, \mathcal{C})$ tetszőleges mérhető tér. Ha $H(c,t,\omega)$ olyan $(\mathcal{C}\times\mathcal{P})$-mérhető függvény, amelyre a $H(c)$ minden c-re az X szerint integrálható*[4]*, akkor a $H(c)\bullet X$ paraméteres sztochasztikus integrál rendelkezik $(\mathcal{C}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{A})$-mérhető verzióval, vagyis megadható olyan $Z(c,t,\omega)$ a $\mathcal{C}\times\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\times\mathcal{A}$ σ-algebra szerint mérhető függvény, amely a c paraméter minden értéke esetén a megkülönböztethetetlenség erejéig azonos a $H(c)\bullet X$ integrállal*[5]*.*

7.8. Tétel (Fubini–tétel nem korlátos integrandusokra)**.** *Legyen X szemimartingál, $(C, \mathcal{C}, \mu)$ véges mértéktér, $H(c,t,\omega)$ olyan $\mathcal{C}\times\mathcal{P}$ szorzat σ-algebra szerint mérhető függvény, amelyre a*

$$\sqrt{\int_C H^2(c,t,\omega)\,d\mu(c)} = \|H(t,\omega)\|_2$$

az X szerint integrálható. Ha $H(c)\bullet X$ jelöli a paraméteres integrál mérhető verzióját, akkor μ-majdnem minden c-re létezik a $H(c)\bullet X$ integrál és

$$\int_C (H(c)\bullet X)\,d\mu(c) = \left(\int_C H(c)\,d\mu(c)\right)\bullet X,$$

vagyis a bal oldali kétszeres integrál a jobb oldalon szereplő sztochasztikus integrál jobbról reguláris verziója.

[4] Szándékosan nem tisztázzuk, hogy milyen értelemben vett integrálhatóságról beszélünk. Az integrálható folyamatok családja az X szemimartingálok különböző családjai esetén más és más. A kulcs tulajdonság az adott osztályon belül a majorált konvergencia tétel teljesülése.

[5] A $Z(c)$ természetesen, mint minden sztochasztikus integrál, adaptált és a t időparaméter szerint jobbról reguláris.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

7.9. Tétel (Fubini-tétel Wiener-folyamatokra)**.** *Legyen* $(C, \mathcal{C}, \mu)$ *egy véges mérték tér és legyen* w *egy Wiener-folyamat. Ha* $H(c,t,\omega)$ *egy adaptált, szorzatmérhető folyamat és*

$$\mathbf{P}\left(\int_0^t \int_C H^2(c,s)\, d\mu(c)\, ds < \infty\right) = 1,$$

akkor

$$\int_C \int_0^t H(c,s)\, dw(s)\, d\mu(c) = \int_0^t \int_C H(c,s)\, d\mu(c)\, dw(s).$$

A sztochasztikus integrálokra vonatkozó Fubini-tétel szerint tehát ha a $d\mu dw$ *integrál létezik, akkor a* $dwd\mu$ *is létezik és a két integrál megegyezik.*

Az X-re vonatkozó egyenletre visszatérve

$$\begin{aligned} X(t) &\stackrel{\circ}{=} -\int_t^T f(t,u)\, du = \\ &= -\int_t^T \left(f^*(0,u) + \int_0^t \alpha(s,u)\, ds + \int_0^t \sigma(s,u)\, dw(s)\right) du. \end{aligned}$$

Ha feltesszük, hogy az $a(t,T)$ és a $\sigma(s,T)$ folyamatok folytonosak, akkor mindkét integrálra alkalmazható a Fubini-tétel. Az integrálokat tehát megcserélve és kihasználva az integrálok additivitását

$$\begin{aligned} X(t) &\stackrel{\circ}{=} -\int_t^T f(t,u)\, du = \\ &= -\int_t^T f^*(0,u)\, du - \int_0^t \int_t^T \alpha(s,u) du ds - \int_0^s \int_t^T \sigma(s,u) du dw(s) = \\ &= -\int_0^T f^*(0,u)\, du - \int_0^t \int_s^T \alpha(s,u)\, du ds - \int_0^t \int_s^T \sigma(s,u)\, du dw(s) + \\ &\quad + \int_0^t f^*(0,u) du + \int_0^t \int_s^t \alpha(s,u) du ds + \int_0^t \int_s^t \sigma(s,u) du dw(s) = \\ &= X(0) + \int_0^t r(s) ds - \int_0^t \int_s^T \alpha(s,u) du ds - \int_0^t \int_s^T \sigma(s,u) du dw(s) \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} X(0) + \int_0^t r(s)\, ds + \int_0^t \alpha^*(s,T)\, ds + \int_0^t \sigma^*(s,T)\, dw(s), \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy

$$r(s) \stackrel{\circ}{=} f(s,s) = f(0,s) + \int_0^s \alpha(u,s)\, du + \int_0^s \sigma(u,s)\, dw(u),$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

illetve hogy az integrálokat visszacserélve

$$\int_0^t \int_s^t \alpha(s,u)\,duds + \int_0^t \int_s^t \sigma(s,u)\,dudw(s) =$$
$$= \int_0^t \int_0^s \alpha(s,u)\,dsdu + \int_0^t \int_0^s \sigma(s,u)\,dw(s)\,du.$$

Az X-re már alkalmazhatjuk a standard Itô-formulát, amellyel a következőt kapjuk:

7.10. Állítás. *Ha az f forward rátákra teljesül a*

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dw(t),$$
$$f(0,T) = f^*(0,T)$$

egyenlet, akkor a $B(t,T)$ elemi kötvényekre

$$\frac{dB}{B}(t) = \left(r(t) + \alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)^2\right)dt + \sigma^*(t,T)\,dw(t),$$

ahol

$$\alpha^*(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,u)\,du, \quad \sigma^*(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,u)\,du.$$

Ezidáig a modelleket a $\mathbf{P}$ mérték alatt írtuk fel. Most térjünk át a $\mathbf{Q}$ mértékre. Ezt a Girszanov-tétel segítségével úgy végezhetjük el, hogy a w helyébe egy

$$w(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds + \widehat{w}(t)$$

folyamatot írunk, ahol a $\widehat{w}$ egy $\mathbf{Q}$ Wiener-folyamat. Mivel a sztochasztikus integrálok a mértékcsere során nem változnak, az új egyenlet:

$$\frac{dB}{B}(t,T) = \left(r(t) + \alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)^2 + \lambda(t)\,\sigma^*(t,T)\right)dt + \tag{7.3}$$
$$+ \sigma^*(t,T)\,d\widehat{w}(t) \mathrel{\mathring{=}}$$
$$\mathrel{\mathring{=}} \gamma(t)\,dt + \sigma^*(t,T)\,d\widehat{w}(t).$$

Vagy ami ugyanez:

$$B(T,T) - B(t,T) \mathrel{\mathring{=}} \int_t^T B(s,T)\,\gamma(s)\,ds + \int_t^T B(s,T)\,\sigma^*(s,T)\,d\widehat{w}(s).$$

A $\mathbf{Q}$ mérték alatt

$$B(t,T) = \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right)\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\frac{1}{R(T)} \mid \mathcal{F}_t\right) \mathrel{\mathring{=}} R(t)\,Y(t),$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ahol az $Y(t)$ egy martingál. A parciális integrálás formulája alapján

$$\begin{aligned} B(T,T) - B(t,T) &= \int_t^T R(s)\,dY(s) + \int_t^T Y(s)\,dR(s) = \\ &= \int_t^T R(s)\,dY(s) + \int_t^T r(s)\,R(s)\,Y(s)\,ds = \\ &= \int_t^T R(s)\,dY(s) + \int_t^T r(s)\,B(s,T)\,ds. \end{aligned}$$

A modellkeretben az árazási formula levezetésekor kihasználtuk, hogy az $\mathcal{F}$ filtrációt egy Wiener-folyamat generálja. Ebből következően az, lényegében az integrálreprezentációs tétel következményeként, az Y martingál is folytonos. A folytonos szemimartingálok egyértelmű felbontása alapján, felhasználva, hogy $B(s,T) \neq 0$

$$r(t) + \alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)^2 + \lambda(t)\,\sigma^*(t,T) \stackrel{\circ}{=} \gamma(t) = r(t).$$

Az $r(t)$ folyamatot mind a két oldalon elhagyva és a T paraméter szerint deriválva

$$\alpha(t,T) + \sigma^*(t,T)\,\sigma(t,T) + \lambda(t)\,\sigma(t,T) = 0.$$

A σ^* definícióját beírva

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)\,du - \lambda(t)\,\sigma(t,T).$$

Ha már eleve a $\mathbf{Q}$ mértékből indultunk ki, akkor a következő nevezetes eredményhez jutunk:

7.11. Állítás (HJM-drift-feltétel)**.** *A* $\mathbf{Q}$ *mérték alatt felírt*

$$\begin{aligned} df(t,T) &= \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dw(t), \\ f(0,T) &= f^*(0,T) \end{aligned}$$

egyenlet α *és* σ *paramétereire teljesülni kell az*

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)\,du$$

azonosságnak.

7.12. Példa. A Ho–Lee-modell és a HJM-feltétel.

Tegyük fel, hogy a $\sigma(t,T)$ konstans. Ekkor

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)\,du = \sigma\int_t^T \sigma du = \sigma^2(T-t).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ilyenkor

$$f(t,T)-f(0,T)=\int_0^t\sigma^2(T-s)ds+\int_0^t\sigma dw(s)=\sigma^2t\left(T-\frac{t}{2}\right)+\sigma w(t),$$

amiből

$$r\left(t\right)=f\left(t,t\right)=f\left(0,t\right)+\frac{\sigma^2}{2}t^2+\sigma w\left(t\right),$$
$$dr\left(t\right)=\left(\frac{\partial f\left(0,t\right)}{\partial T}+\sigma^2t\right)dt+\sigma dw\left(t\right),$$

ami éppen a kezdeti forward rátához illesztett Ho–Lee-modell. □

7.13. Példa. Affin lejárati szerkezetek és a HJM-feltétel.

Affin lejárati szerkezet esetén az elemi kötvényekre

$$B\left(t,T\right)=\exp\left(A\left(t,T\right)-C\left(t,T\right)\cdot r\left(t\right)\right).$$

Ebből a forward rátákra

$$f\left(t,T\right)=-\frac{\partial\log B\left(t,T\right)}{\partial T}=\frac{\partial C\left(t,T\right)}{\partial T}r\left(t\right)-\frac{\partial A\left(t,T\right)}{\partial T}.$$

Ebből a parciális integrálás formulája alapján

$$\begin{aligned}df\left(t,T\right)&=\frac{\partial C\left(t,T\right)}{\partial T}dr\left(t\right)+r\left(t\right)d\frac{\partial C\left(t,T\right)}{\partial T}-d\frac{\partial A\left(t,T\right)}{\partial T}=\\&=\frac{\partial C\left(t,T\right)}{\partial T}dr\left(t\right)+r\left(t\right)\frac{d}{dt}\frac{\partial C\left(t,T\right)}{\partial T}dt-\frac{d}{dt}\frac{\partial A\left(t,T\right)}{\partial T}dt.\end{aligned}$$

Ha az r kielégíti a

$$dr\left(t\right)=\alpha\left(t,r\left(t\right)\right)dt+\beta\left(t,r\left(t\right)\right)dw\left(t\right)$$

egyenletet, akkor

$$\begin{aligned}df\left(t,T\right)=&\left(\frac{\partial C\left(t,T\right)}{\partial T}\alpha\left(t,r\left(t\right)\right)+r\left(t\right)\frac{d}{dt}\frac{\partial C\left(t,T\right)}{\partial T}-\frac{d}{dt}\frac{\partial A\left(t,T\right)}{\partial T}\right)dt+\\&+\beta\left(t,r\left(t\right)\right)\frac{\partial C\left(t,T\right)}{\partial T}dw\left(t\right),\end{aligned}$$

ami egy HJM-modell

$$\sigma\left(t,T\right)=\beta\left(t,r\left(t\right)\right)\frac{\partial C\left(t,T\right)}{\partial T}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

diffúziós együtthatóval. A $C(t,t)=0$ összefüggést használva a HJM-drift-feltételben szereplő $\sigma\sigma^*$ kifejezést kiszámolva

$$\begin{aligned}
&\sigma(t,T)\,\sigma^*(t,T)=\sigma(t,T)\int_t^T\sigma(t,u)\,du=\\
&=\beta(t,r(t))\,\frac{\partial C(t,T)}{\partial T}\int_t^T\beta(t,r(t))\,\frac{\partial C(t,u)}{\partial T}du=\\
&=\beta(t,r(t))^2\,\frac{\partial C(t,T)}{\partial T}\left[C(t,u)\right]_t^T=\beta(t,r(t))^2\,\frac{\partial C(t,T)}{\partial T}C(t,T).
\end{aligned}$$

A HJM-feltétel affin lejárati szerkezett esetén a

$$\begin{aligned}
&\beta(t,r(t))^2\,\frac{\partial C(t,T)}{\partial T}C(t,T)=\\
&=\frac{\partial C(t,T)}{\partial T}\alpha(t,r(t))+r(t)\,\frac{d}{dt}\frac{\partial C(t,T)}{\partial T}-\frac{d}{dt}\frac{\partial A(t,T)}{\partial T}.
\end{aligned}\tag{7.4}$$

alakba írható. □

7.14. Példa. A HJM-feltétel és a Vasicek-modell.

Például a Vasicek-modell esetén

$$\begin{aligned}
C(t,T)&=\frac{1}{a}\left(1-\exp\left(-a\left(T-t\right)\right)\right),\\
A(t,T)&=\frac{\sigma^2}{2}\int_t^T C^2(s,T)\,ds-b\int_t^T C(s,T)\,ds,\\
dr&=(b-ar)\,dt+\sigma dw,
\end{aligned}$$

amit behelyettesítve az előző példában szereplő (7.4) egyenletbe

$$\begin{aligned}
&\sigma^2\exp\left(-a\left(T-t\right)\right)\frac{1}{a}\left(1-\exp\left(-a\left(T-t\right)\right)\right)=\\
&=\exp\left(-a\left(T-t\right)\right)\left(b-ar(t)\right)+ar(t)\exp\left(-a\left(T-t\right)\right)+\\
&\quad+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial C^2(t,T)}{\partial T}-b\frac{\partial C(t,T)}{\partial T}=\\
&=b\exp\left(-a\left(T-t\right)\right)+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial C^2(t,T)}{\partial T}-b\frac{\partial C(t,T)}{\partial T}.
\end{aligned}\tag{7.5}$$

Közvetlen számolással az utolsó két tag

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial C^2(t,T)}{\partial T}-b\frac{\partial C(t,T)}{\partial T}=\sigma^2C(t,T)\,\frac{\partial C(t,T)}{\partial T}-b\frac{\partial C(t,T)}{\partial T}=\\
&=\frac{\partial C(t,T)}{\partial T}\left(\sigma^2C(t,T)-b\right)=\exp(-a(T-t))\left(\frac{\sigma^2}{a}(1-\exp(-a(T-t)))-b\right).
\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ezt visszaírva a megkezdett (7.5) számítás egyszerű kiemeléssel folytatható

$$\exp\left(-a\left(T-t\right)\right)\left(b+\frac{\sigma^2}{a}\left(1-\exp\left(-a\left(T-t\right)\right)\right)-b\right)=$$
$$=\exp\left(-a\left(T-t\right)\right)\left(\frac{\sigma^2}{a}\left(1-\exp\left(-a\left(T-t\right)\right)\right)\right),$$

ami éppen a korábbi (7.5), vagyis a HJM-feltétel teljesülését a Vasicek-modellre ellenőriztük. □

A forward rátára vonatkozó modellt időnként célszerű nem a (t,T) parametrizálásban felírni, hanem a (t,x) parametrizálás mellett, ahol az x a $T-t$ időtartam. Ilyenkor Musiela parametrizációról beszélünk. A Musiela paramatrizációban a forward ráta szokásos jelölése $r\left(t,x\right)$. Vagyis $f\left(t,T\right)\triangleq r\left(t,T-t\right)$, vagy megfordítva $r\left(t,x\right)\triangleq f\left(t,t+x\right)$. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{Q}$ mérték alatt a forward ráta kielégíti a

$$df\left(t,T\right)=\sigma\left(t,T\right)\sigma^{*}\left(t,T\right)dt+\sigma\left(t,T\right)dw$$

egyenletet és vezessük be a

$$\sigma_0\left(t,x\right)\triangleq\sigma\left(t,t+x\right),$$
$$\sigma_0^{*}\left(t,x\right)\triangleq\sigma_0\left(t,x\right)\int_0^x\sigma_0\left(t,s\right)ds$$

jelöléseket. Miként megmutatható,

$$dr\left(t,x\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}r\left(t,x\right)+\sigma_0^{*}\left(t,x\right)\right)dt+\sigma_0 dw\left(t\right).$$

Az Itô-formula hibás, de formális alkalmazása szerint

$$dr\left(t,x\right)=df\left(t,t+x\right)+\frac{\partial f}{\partial T}\left(t,t+x\right)dt=$$
$$=\left(\alpha\left(t,t+x\right)+\frac{\partial}{\partial x}r\left(t,x\right)\right)dt+\sigma\left(t,t+x\right)dw=$$
$$=\left(\alpha\left(t,t+x\right)+\frac{\partial}{\partial x}r\left(t,x\right)\right)dt+\sigma_0\left(t,x\right)dw.$$

A HJM-feltételben $s=u+t$ helyettesítést végezve

$$\alpha\left(t,t+x\right)=\sigma\left(t,t+x\right)\int_t^{t+x}\sigma\left(t,s\right)ds=\sigma_0\left(t,x\right)\int_0^x\sigma\left(t,u+x\right)du=$$
$$=\sigma_0\left(t,x\right)\int_0^x\sigma_0\left(t,x\right)du\triangleq\sigma_0^{*}\left(t,x\right).$$

ami éppen a kívánt alak.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

7.15. Állítás. *A HJM-feltétel teljesülése esetén az elemi kötvények folyamatára teljesül a*

$$\frac{dB}{B}(t,T) = r(t)\,dt - \int_t^T \sigma(t,s)\,dw(s)$$

egyenlet. Az r folyamatra

$$r(t) \stackrel{\circ}{=} f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)\,ds + \int_0^t \sigma(s,t)\,dw(s) = \tag{7.6}$$
$$= f(0,t) + \int_0^t \sigma(s,t) \int_s^t \sigma(s,u)\,duds + \int_0^t \sigma(s,t)\,dw(s)$$

7.3.2. Markov-tulajdonság

A HJM-modellezési kör segítségével egy tetszőlegesen specifikált $\sigma(t,T)$ segítségével definiálhatunk egy modellt a rövid kamatlábakra. A legtöbb így kapott modell azonban nem lesz Markov-tulajdonságú, ugyanis az $r(t)$ értékét előállító integrálokban a t időparaméter explicite szerepel az integrandusokban is. A nem Markov-tulajdonság azért probléma, mert így amikor a modellt diszkretizáljuk, akkor a lehetséges utak száma exponenciálisan nő.

Bizonyos esetekben azonban biztosítható, hogy az r Markov-folyamat lesz. Ha a $\sigma(t,T)$ felírható $h(t)\,g(T)$ szorzat alakban, ahol h és g szigorúan pozitív, folytonos determinisztikus függvények, akkor az r rövid kamatlábat leíró folyamat Markov-folyamat lesz. Valóban az előző alpont végén belátott (7.6) szerint

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t h(s)\,g(t) \int_s^t h(s)\,g(u)\,duds + \int_0^t h(s)\,g(t)\,dw(s) =$$
$$= f(0,t) + g(t) \int_0^t h^2(s) \int_s^t g(u)\,duds + g(t) \int_0^t h(s)\,dw(s) \stackrel{\circ}{=}$$
$$= a(t) + g(t) \int_0^t h(s)\,dw(s).$$

Ebből a parciális integrálási formula szerint

$$dr(t) = \frac{d}{dt}a(t)\,dt + g(t)\,h(t)\,dw(t) + g'(t)\,dt \int_0^t h(s)\,dw(s) =$$
$$= \frac{d}{dt}a(t)\,dt + g(t)\,h(t)\,dw(t) + g'(t)\,\frac{r(t)-a(t)}{g(t)}dt,$$

vagyis az r valóban Markov-folyamat.

7.16. Példa. A HJM-feltétel és a Hull–White-modell.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Legyen

$$\sigma(t,T) = \sigma \exp(-a(T-t)).$$

Ilyenkor

$$h(t) = \sigma \exp(at), \quad g(T) = \exp(-aT),$$
$$a(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-\exp(-at))^2.$$

Elemi számolással

$$dr(t) = \left(\frac{\partial f(0,t)}{\partial T} + af(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1-\exp(-2at)) - ar(t)\right)dt + \sigma dw(t),$$

ami a korábban belátott (7.2) sor miatt éppen az illesztett Hull–White-modell. □

7.4. Sztochasztikus diszkontfaktor modellek

A HJM-modellezési megközelítés alapvető hibája: nem biztosítja, hogy az r rövid kamatláb nem negatív legyen. Ebből következően automatikusan nem biztosítható, hogy teljesüljenek a $0 \le B(t,T) \le 1$, illetve a $\partial B(t,T)/\partial T < 0$, közgazdaságilag igencsak kézenfekvő követelmények. A sztochasztikus diszkontfaktor megközelítés fő előnye, hogy ebben a modellkörnyezetben az $r \ge 0$ tulajdonság mindig biztosítva van. A modellezési keret megértéséhez első lépésként a $\mathbf{Q}$ mellett tekintsük egy $\mathbf{P}$-vel jelölt másik mértéket. A $\mathbf{P}$ egy lehetséges interpretációja, hogy a $\mathbf{P}$ a valódi valószínűség. Vezessük be a Radon–Nikodym deriváltakból álló $\Lambda(t) = d\mathbf{Q}_t/d\mathbf{P}_t$ folyamatot, ahol $\mathbf{Q}_t$, illetve $\mathbf{P}_t$ a megfelelő mértékek leszűkítése az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrákra. Legyen továbbá

$$Z(t) \doteq \exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)\Lambda(t). \tag{7.7}$$

A továbbiakban a Z folyamatra mint sztochasztikus diszkontfaktorra fogunk hivatkozni. A Z bevezetését a következő lemma indokolja.

7.17. Lemma. *Tetszőleges $t < T$ esetén*

$$B(t,T) = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(T) \mid \mathcal{F}_t)}{Z(t)}. \tag{7.8}$$

Általánosabban, tetszőleges H_T olyan kifizetés esetén amelyre érvényes az árazási formula

$$\pi_t(H_T) = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(H_T Z(T) \mid \mathcal{F}_t)}{Z(t)}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. A bizonyítás a Bayes-formula felhasználásával közvetlen számolással adódik:

$$B(t,T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right) \mid \mathcal{F}_t\right) =$$
$$= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right)}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right)} =$$
$$= \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right)\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right)}{\exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)\Lambda(t)} = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(Z(T) \mid \mathcal{F}_t\right)}{Z(t)}.$$

Az általános eset indoklása analóg. □

A definícióból evidens, hogy ha $r \geq 0$ és $s < t$, akkor

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(Z(t) \mid \mathcal{F}_s\right) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\left(-\int_0^t r(s)\,ds\right)\Lambda(t) \mid \mathcal{F}_s\right) =$$
$$= \exp\left(-\int_0^s r(s)\,ds\right)\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\left(-\int_s^t r(s)\,ds\right)\Lambda(t) \mid \mathcal{F}_s\right) \leq$$
$$\leq \exp\left(-\int_0^s r(s)\,ds\right)\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\Lambda(t) \mid \mathcal{F}_s\right) =$$
$$= \exp\left(-\int_0^s r(s)\,ds\right)\Lambda(s) = Z(s),$$

vagyis ha $r \geq 0$, akkor a Z sztochasztikus diszkontfaktor nem negatív szupermartingál. A nem negatív szupermartingálok egy speciális alosztályát alkotják a sztochasztikus potenciálok. Emlékeztetünk a definícióra:

7.18. Definíció. A $Z \geq 0$ folyamatot sztochasztikus potenciálnak mondjuk, ha

1. a Z szupermartingál,
2. $\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}(Z(t)) = 0$.

7.19. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $B(t,T)$ lejárati szerkezet pozitív, ha a Z sztochasztikus diszkontfaktor potenciál.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Ha $r \geq 0$, akkor az exponenciális függvény kitevője nem pozitív, így használható a majorált konvergencia tétele

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(Z\left(T\right)\right) = \lim_{T\to\infty} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\left(-\int_0^T r\left(s\right)ds\right)\Lambda\left(T\right)\right) =$$
$$= \lim_{T\to\infty} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_0^T r\left(s\right)ds\right)\right) =$$
$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\lim_{T\to\infty}\int_0^T r\left(s\right)ds\right)\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_0^\infty r\left(s\right)ds\right)\right).$$

Ha $\int_0^\infty r\left(s\right)ds = \infty$, akkor a Z nem csak szupermartingál, hanem potenciál is. A fordított irány nem feltétlenül teljesül. Ha Z egy potenciál, akkor a

$$Z\left(t\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(Z\left(t\right)\right)\frac{Z\left(t\right)}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(Z\left(t\right)\right)} \overset{\circ}{=} D\left(t\right)\cdot\Lambda\left(t\right) = \exp\left(-R\left(t\right)\right)\Lambda\left(t\right)$$

felbontásban a D monoton csökken és tekinthető diszkontfaktornak, miközben a Λ martingál tekinthető a mértékcserét megadó deriváltfolyamatnak. Ha azonban tekintünk egy olyan monoton csökkenő, nullához tartó függvényt, amely szinguláris abban az értelemben, hogy a deriváltjának integrálja nem maga a függvény, akkor egy olyan potenciált kapunk, amely alkalmas $r \geq 0$ folyamattal nem írható fel a korábban definiált (7.7) alakú Z sztochasztikus diszkontfaktorként. Ugyancsak problémát jelenthet az, hogy egy potenciálhoz konstruált martingál csak lokálisan ekvivalens mértékcserét generál. Ezektől a problémáktól azonban el szokás tekinteni és a potenciálokat nem negatív rövid kamatlábat definiáló sztochasztikus diszkontfaktorként szokás interpretálni.

7.4.1. A feltételes várható értékre vonatkozó Fubini-tétel

Mielőtt tovább megyünk érdemes két technikai problémát megvizsgálni.

1. Milyen értelemben igaz az úgynevezett feltételes várható értékre vonatkozó Fubini-tétel:

$$\mathbf{E}\left(\int_a^b X d\mu\left(s\right) \mid \mathcal{G}\right) = \int_a^b \mathbf{E}\left(X\left(s\right) \mid \mathcal{G}\right) d\mu\left(s\right),$$

vagyis mikor lehet az integrálást és a feltételes várható érték képzést felcserélni. Egy lehetséges bizonyítási gondolat a következő: Tetszőleges $A \in \mathcal{G}$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

esetén

$$\int_A \int_a^b \mathbf{E}\left(X\left(s\right) \mid \mathcal{G}\right) d\mu\left(s\right) d\mathbf{P} =$$
$$= \int_a^b \int_A \mathbf{E}\left(X\left(s\right) \mid \mathcal{G}\right) d\mathbf{P} d\mu\left(s\right) = \int_a^b \int_A X\left(s\right) d\mathbf{P} d\mu\left(s\right) =$$
$$= \int_A \int_a^b X\left(s\right) d\mu\left(s\right) d\mathbf{P} = \int_A \mathbf{E}\left(\int_a^b X\left(s\right) d\mu\left(s\right) \mid \mathcal{G}\right) d\mathbf{P},$$

amiből

$$\int_a^b \mathbf{E}\left(X\left(s\right) \mid \mathcal{G}\right) d\mu\left(s\right) = \mathbf{E}\left(\int_a^b X d\mu\left(s\right) \mid \mathcal{G}\right)$$

feltéve, hogy meg tudjuk mondani, hogy mit jelent az $\int_a^b \mathbf{E}\left(X\left(s\right) \mid \mathcal{G}\right) d\mu\left(s\right)$. és meg tudjuk mutani, hogy mérhető a $\mathcal{G}$ σ-algebrára nézve. A probléma alapvetően abból származik, hogy az $s \mapsto \mathbf{E}\left(X\left(s\right) \mid \mathcal{G}\right)$ hozzárendelés általában nem tekinthető folyamatnak, amelynek vannak trajektóriái, amiket ki lehet integrálni. A hozzárendelés csak valószínűségi változók egy indexelt halmaza. Ez a nullmértékű halmazok szokásos bosszúja, ugyanis nem megszámlálható nullmértékű halmazt kellene egyetlen nullmértékű halmazba összevonni. Ahhoz, hogy a felcserélési szabálynak értelmet tudjunk adni, fel kell tételezni, hogy a feltételes várható értékek egy reguláris feltételes várható értékből származnak. Ilyenkor tetszőleges ξ valószínűség változó esetén az $\int_\Omega \xi\left(\omega'\right) P\left(d\omega', \omega\right)$ parametrikus integrál éppen az $\mathbf{E}\left(\xi \mid \mathcal{G}\right)$ egy verziója. Ekkor a közönséges Fubini-tétel alapján, például ha az X folyamat nem negatív és szorzatmérhető minden ω esetén,

$$\mathbf{E}\left(\int_a^b X\left(s\right) d\mu\left(s\right) \mid \mathcal{G}\right)\left(\omega\right) = \int_\Omega \left(\int_a^b X\left(s, \omega'\right) d\mu\left(s\right)\right) P\left(d\omega', \omega\right) =$$
$$= \int_a^b \int_\Omega X\left(s, \omega'\right) P\left(d\omega', \omega\right) d\mu\left(s\right) = \int_a^b \mathbf{E}\left(X\left(s\right) \mid \mathcal{G}\right)\left(\omega\right) d\mu\left(s\right).$$

2. A másik technikai probléma a következő: a modellkör alapfeltétele, hogy a

$$B\left(t, T\right) = \exp\left(\int_0^t r\left(s\right) ds\right) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_0^T r\left(u\right) du\right) \mid \mathcal{F}_t\right)$$

hozamgörbéről feltesszük, hogy deriválható a T szerint. Ebből következően az

$$X\left(T\right) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_0^T r\left(u\right) du\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \tag{7.9}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

kifejezésnek is deriválhatónak kell lenni a T szerint. Szeretnénk a deriválást a feltételes várható érték alatt elvégezni. Erre több út is kínálkozik, attól függően, hogy milyen további megkötésekkel élünk. Vegyük észre, hogy minden pontban

$$\frac{d}{ds}\exp\left(-\int_0^s r(u,\omega)\,du\right) = r(s,\omega)\exp\left(-\int_0^s r(u,\omega)\,du\right).$$

Ha erről a kifejezésről feltesszük, hogy az ω szerint van integrálható majoránsa, akkor a deriválás és a feltételes várható érték képzése a szokásos módon felcserélhető. Ha azonban ezzel a feltevéssel nem akarunk élni, akkor a következőképpen járhatunk el: A Newton–Leibniz-formula és a feltételes várható értékre vonatkozó Fubini-tétel szerint, kihasználva, hogy $r \geq 0$, így a Fubini-tétel használható

$$X(T) - X(0) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^T r(s)\exp\left(-\int_0^s r(u)\,du\right)ds \mid \mathcal{F}_t\right) =$$
$$= \int_0^T \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(r(s)\exp\left(-\int_0^s r(u)\,du\right) \mid \mathcal{F}_t\right)ds.$$

A ds szerint integrál alatti kifejezés majdnem minden kimenetelre integrálható kell legyen, így a két oldal deriváltja majdnem mindenhol egybeesik, vagyis majdnem minden T-re

$$\frac{d}{dT}X(T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(r(T)\exp\left(-\int_0^T r(u)\,du\right) \mid \mathcal{F}_t\right),$$

vagyis ha nem is minden T-re, de majdnem minden ω-ra majdnem minden T-re a deriválás elvégezhető a feltételes várható érték alatt.

7.4.2. A Flesaker–Hughston-formula

7.20. Lemma. *Tekintsük a $B(t,T)$ alakulását leíró (7.8) hányados számlálóját: $X(t,T) \triangleq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(T) \mid \mathcal{F}_t)$. Ha $r \geq 0$, akkor az $X(t,T)$ folyamat a T paraméter szerint deriválható és majdnem minden T-re*

$$\frac{\partial X(t,T)}{\partial T} = -\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(r(T)\,Z(T) \mid \mathcal{F}_t). \tag{7.10}$$

Bizonyítás. A Z definíciójából a parciális integrálás formulája miatt

$$Z(T) = Z(t) - \int_t^T rZds + \int_t^T R(s)^{-1}\,d\Lambda(s).$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

A Λ martingál, és mivel $r \geq 0$, ezért $R^{-1}(s) \overset{\circ}{=} \exp\left(-\int_0^s r(u)\,du\right) \leq 1$, tehát a Λ szerinti integrál martingál.

$$\begin{aligned}
&X(t,T) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(T) \mid \mathcal{F}_t) = \\
&= Z(t) - \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_t^T rZds \mid \mathcal{F}_t\right) + \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_t^T R(s)^{-1}\,d\Lambda(s) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= Z(t) - \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_t^T rZds \mid \mathcal{F}_t\right) + \int_t^t R(s)^{-1}\,d\Lambda(s) = \\
&= Z(t) - \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_t^T rZds \mid \mathcal{F}_t\right),
\end{aligned}$$

amiből – ismételten kihasználva, hogy $r \geq 0$ – a feltételes várható értékre vonatkozó Fubini-tétel miatt

$$\begin{aligned}
\frac{X(t,T+h) - X(t,T)}{h} &= -\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\frac{1}{h}\int_T^{T+h} r(s)\,Z(s)\,ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= -\frac{1}{h}\int_T^{T+h} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(r(s)\,Z(s) \mid \mathcal{F}_t)\,ds.
\end{aligned}$$

A korábbi definíciókat visszaírva

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(-r(s)\,Z(s) \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(-r(s)\exp\left(-\int_0^s r(u)\,du\right)\Lambda(s) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(-r(s)\exp\left(-\int_0^s r(u)\,du\right) \mid \mathcal{F}_t\right).
\end{aligned}$$

De ez utóbbi kifejezés majdnem mindenhol a fenti (7.9) sorban definiált $X(t) \overset{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_0^s r(u)\,du\right) \mid \mathcal{F}_t\right)$ deriváltja, ezért

$$\frac{X(t,T+h) - X(t,T)}{h} = \frac{1}{h}\int_T^{T+h} \frac{d}{ds}X(s)\,ds = \frac{X(T+h) - X(T)}{h}.$$

Az $X(T)$ feltételezett deriválhatóságából a lemma már következik. □

7.21. Állítás. *Ha a $B(t,T)$ lejárati szerkezet pozitív, akkor*

$$B(t,T) = \frac{\int_T^\infty \Phi(s)\,M(t,s)\,ds}{\int_t^\infty \Phi(s)\,M(t,s)\,ds},$$

ahol az $M(t,T)$ pozitív martingálok T-vel indexelt halmaza és Φ egy nem negatív determinisztikus függvény. Az $M(t,T)$ választható

$$M(t,T) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(r(T)\,Z(T) \mid \mathcal{F}_t)$$

módon.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Bizonyítás. Az előző lemma jelölésével

$$X(t,T) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(T) \mid \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_0^T r(s)\,ds\right) \mid \mathcal{F}_t\right).$$

A lejárati szerkezet pozitivitása definíció szerint azt jelenti, hogy a Z potenciál, vagyis egyúttal nem negatív szupermartingál, így létezik a $\lim_{T\to\infty} Z(T)$ határérték. A Fatou-lemma miatt $0 = \lim_{T\to\infty} \mathbf{E}(Z(T)) \geq \mathbf{E}(Z(\infty))$, következésképpen $Z(\infty) = 0$. A Newton–Leibniz-szabály szerint

$$X(t,s) = X(t,s) - X(t,\infty) = \int_s^\infty \frac{\partial X}{\partial T}(t,u)\,du = \int_s^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(r(u)\,Z(u) \mid \mathcal{F}_t)\,du.$$

A $\Phi \equiv 1$ és $M(t,u) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(r(u)\,Z(u) \mid \mathcal{F}_t)$ választás mellett

$$\frac{\int_T^\infty \Phi(s)M(t,s)ds}{\int_t^\infty \Phi(s)M(t,s)ds} = \frac{X(t,T)}{X(t,t)} = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(T) \mid \mathcal{F}_t)}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(t) \mid \mathcal{F}_t)} = \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(T) \mid \mathcal{F}_t)}{Z(t)} = B(t,T).$$

□

7.22. Állítás. *Tegyük fel, hogy egy alkalmas $\Phi(s)$ nem negatív, determinisztikus függvény és $M(t,T)$ nem negatív martingálok T-vel indexelt családja esetén az*

$$B(t,T) = \frac{\int_T^\infty \Phi(s)\,M(t,s)\,ds}{\int_t^\infty \Phi(s)\,M(t,s)\,ds}$$

kifejezés értelmes. Ilyenkor a $B(t,T)$ egy olyan pozitív hozamgörbét definiál, amelyhez tartozó sztochasztikus diszkontfaktor éppen a

$$Z(t) = \int_t^\infty \Phi(s)\,M(t,s)\,ds.$$

Bizonyítás. A feltételes várható értékre vonatkozó Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(T) \mid \mathcal{F}_t) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_T^\infty \Phi(s)\,M(T,s)\,ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ = \int_T^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\Phi(s)\,M(T,s) \mid \mathcal{F}_t)\,ds = \\ = \int_T^\infty \Phi(s)\,M(t,s)\,ds \geq \int_t^\infty \Phi(s)\,M(t,s)\,ds,\end{aligned}$$

amiből a $Z(T)$ trajektóriái abszolút folytonosak és a Z szupermartingál.

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(T)) = \lim_{T\to\infty} \int_T^\infty \Phi(s)\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(M(T,s))\,ds = \\ = \lim_{T\to\infty} \int_T^\infty \Phi(s)\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(M(0,s))\,ds.\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az $M(u,s)$ az u szerint martingál az $\mathcal{F}_t$ filtráció szerint, amelyet egy Wiener-folyamat generál, így az $M(0,s)$ determinisztikus. Mivel a feltételek szerint a $B(t,T)$ értékét megadó kifejezés mindig értelmes, ezért a $t=0$ esetben az integrál konvergens, ezért

$$\lim_{T\to\infty}\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(T))=\lim_{T\to\infty}\int_T^{\infty}\Phi(s)\,M(0,s)\,ds=0,$$

következésképpen a Z potenciál, vagyis a Z tekinthető sztochasztikus diszkontfaktornak. □

7.23. Példa. A racionális törtfüggvény modell.

Legyenek α és β determinisztikus nem negatív függvények és legyen K egy martingál. Ha $M(t,T)\triangleq\alpha(T)+\beta(T)K(t)$, akkor racionális törtfüggvény modellről beszélünk. Ilyenkor

$$B(t,T)=\frac{\int_T^{\infty}\Phi(s)\,\alpha(s)\,ds+\int_T^{\infty}\Phi(s)\,\beta(s)\,ds\cdot K(t)}{\int_t^{\infty}\Phi(s)\,\alpha(s)\,ds+\int_t^{\infty}\Phi(s)\,\beta(s)\,ds\cdot K(t)}.$$

Gyakran a $K(t)$ éppen valamilyen γ függvényhez tartozó

$$K(t)\triangleq\exp\left(\int_0^t\gamma(s)\,ds-\frac{1}{2}\int_0^t\gamma^2(s)\,dw(s)\right)$$

exponenciális martingál. □

7.24. Példa. Feltételes variancia potenciál.

Tekintsünk egy $\xi\in L^2(\Omega)$ valószínűségi változót és tekintsük az általa generált $X(t)=\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\xi\mid\mathcal{F}_t)$ martingált. Legyen

$$\begin{aligned}Z(t)&\triangleq\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left((X(t)-\xi)^2\mid\mathcal{F}_t\right)=\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(X(t)^2+\xi^2-2X(t)\,\xi\mid\mathcal{F}_t\right)=\\&=\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\xi^2\mid\mathcal{F}_t\right)+X^2(t)-2X(t)\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\xi\mid\mathcal{F}_t)=\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\xi^2\mid\mathcal{F}_t\right)-X^2(t).\end{aligned}$$

A Z nyilvánvalóan nem negatív és egy martingál és egy szubmartingál különbsége, így szupermartingál. Mivel a ξ négyzetesen integrálható, ezért nyilvánvalóan $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(t))\to 0$, így a kifejezés egy potenciál. □

7.25. Példa. A Markov-potenciál-modell.

Legyen $a\geq 0$ és tekintsük az $A(t)\triangleq\int_0^t a(s)\,ds$ növekedő folyamatot. Tegyük fel, hogy az $A(\infty)=\int_0^{\infty}a(s)\,ds$ valószínűségi változó integrálható. Legyen

$$\begin{aligned}Z(t)&\triangleq\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(A(\infty)\mid\mathcal{F}_t)-\int_0^t a(s)\,ds=\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_t^{\infty}a(s)\,ds\mid\mathcal{F}_t\right)=\\&=\int_t^{\infty}\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(a(s)\mid\mathcal{F}_t)\,ds,\end{aligned}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

ahol kihasználtuk a feltételes várható értékre vonatkozó Fubini-tételt. A Z nyilvánvalóan egy potenciál, ugyanis, felhasználva, hogy az $A(\infty)$ a feltétel szerint integrálható, így alkalmazható a majorált konvergencia tétele

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(t)) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_t^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(a(s) \mid \mathcal{F}_t)\, ds\right) = \int_t^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(a(s) \mid \mathcal{F}_t)\right) ds = \\ = \int_t^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(a(s))\, ds = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_t^\infty a(s)\, ds\right) \to 0.$$

A rövid kamatlábakra vonatkozó alábbi (7.11) formula szerint

$$r(t) = \frac{a(t)}{Z(t)}.$$

A korábban bevezetett X folyamatra, ismételten a feltételes várható értékre vonatkozó Fubini-tétel szerint

$$X(t,T) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(Z(T) \mid \mathcal{F}_t) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_T^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(a(s) \mid \mathcal{F}_T)\, ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ = \int_T^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(a(s) \mid \mathcal{F}_T) \mid \mathcal{F}_t\right) ds = \int_T^\infty \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(a(s) \mid \mathcal{F}_t)\, ds.$$

Következésképpen $\Phi(s) \equiv 1$ és $M(t,T) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(a_T \mid \mathcal{F}_t)$. A modellt tovább specifikálva legyen Y egy stacionér Markov-folyamat és legyen

$$a(t) \stackrel{\circ}{=} \exp(-\alpha t)\, g(Y(t)),$$

ahol $g \geq 0$ egy deteriminisztikus függvény. Ekkor felhasználva, hogy Y egy Markov-folyamat,

$$Z(t) = \int_t^\infty \exp(-\alpha s)\, \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(g(Y(s)) \mid Y(t))\, ds.$$

A Z szoros kapcsolatban van az Y resolvens operátorával. Miként ismert, az Y resolvens operátorán az

$$g \mapsto (R_\alpha g)(x) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_0^\infty \exp(-\alpha s)\, g(Y(s))\, ds \mid Y(0) = x\right)$$

leképezést értjük. A Markov-folyamat homogenitása alapján

$$Z(t) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\int_0^\infty \exp(-\alpha(t+s)) g(Y(t+s)) \mid Y(t)\right) = \exp(-\alpha t)\,(R_\alpha g)(Y(t)),$$

amiből

$$B(t,T) = \exp(-\alpha(T-t))\, \frac{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}((R_\alpha g)(X(T)) \mid \mathcal{F}_t)}{(R_\alpha g)(X(t))}.$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Az r rövid kamatláb meghatározása céljából a korábban belátott (7.11) sor szerint

$$r(t) = \frac{a(t)}{Z(t)} = \frac{\exp(-\alpha t)\, g(Y(t))}{\exp(-\alpha t)\,(R_\alpha g)(Y(t))} = \frac{g(Y(t))}{(R_\alpha g)(Y(t))}.$$

A homogén Markov-folyamatok rezolvensei felírhatók $R_\alpha = (\alpha I - G)^{-1}$ alakban, ahol G általában egy A differenciáloperátor kiterjesztése. Ha $f = (\alpha I - A)^{-1} g$, amiből $g = (\alpha I - A) f$, akkor

$$r(t) = \frac{(\alpha - A) f(Y(t))}{f(Y(t))}. \qquad \square$$

7.26. Lemma. *Ha egy M martingállal és $h \geq 0$ folyamattal*

$$dZ = -h dt + dM,$$

akkor

$$r(s) = \frac{h(s)}{Z(s)}. \tag{7.11}$$

Bizonyítás. A parciális integrálás formulája szerint

$$dZ = -r(t) Z(t)\, dt + \exp\left(-\int_0^t r(s)\, ds\right) d\Lambda.$$

Mivel a filtrációt egy Wiener-folyamat generálja a Λ martingál folytonos. A folytonos szemimartingálok egyértelmű felbontási tétele miatt $r(t) Z(t) = h(t)$, amiből a lemma igazolása evidens. $\square$

7.5. Kamat opciók árazása

A hozamgörbe elméletek fontos alkalmazása a kamat opciók elmélete. Egy kamat opciós ügylet definiálásához legyenek adva a $T_0 < T_1 < \ldots < T_n$ időpontok. Az egyes $\alpha_k \triangleq T_k - T_{k-1}$ időszakaszok hosszát szokás tenornak mondani. Emlékeztetünk, hogy ha $t < S < T$, akkor az

$$L(t,S,T) = -\frac{B(t,T) - B(t,S)}{B(t,T) \cdot (T-S)}$$

hányadost LIBOR-rátának neveztük. Ezzel összhangban vezessük be a $[0, T_{k-1}]$ időszakon értelmezett

$$L_k(t) \triangleq \frac{1}{\alpha_k} \frac{B(t,T_{k-1}) - B(t,T_k)}{B(t,T_k)}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

úgynevezett LIBOR-rátákat. Az R rátához és $T_0 < T_1 < \ldots < T_n$ időpontokhoz tartozó cap kamat opción a T_k időpontokban esedékes, de a T_{k-1} időpontban már kiszámolható

$$H_k \triangleq \alpha_k \left(L_k\left(T_{k-1}\right) - R\right)^+$$

pénzáramot értjük. Az egyes H_k kifizetések szokásos elnevezése caplet. Vagyis egy cap capletek egy portfoliója. A cap opciók árazásához elegendő a capletek árazási formuláját megadni.

7.5.1. A LIBOR-modell

Az úgynevezett LIBOR-modell célja, hogy beillessze a piaci gyakorlatban használt úgynevezett Black-formulát a matematikai pénzügyek hagyományos elméletébe. Az általános árazási formula alapján

$$\pi_t\left(H_k\right) = \alpha_k \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\exp\left(-\int_0^{T_k} r\left(s\right) ds\right)\left(L_k\left(T_{k-1}\right) - R\right)^+ \mid \mathcal{F}_t\right).$$

A $\mathbf{Q}$ mérték helyett célszerű bevezetni a $\mathbf{Q}_{T_k}$ forward mértékeket. Emlékeztetünk, hogy a forward mértékre való áttéréskor új ármércét vezetünk be, és az $R\left(t\right) = \exp\left(\int_0^t r\left(s\right) ds\right)$ helyett a $B\left(t,T\right)$ elemi kötvények szerinti ármércével dolgozunk. Ennek előnye, hogy ilyenkor

$$\pi_t\left(H_k\right) = \alpha_k B\left(t,T_k\right) \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_{T_k}}\left(\left(L_k\left(T_{k-1}\right) - R\right)^+ \mid \mathcal{F}_t\right),$$

vagyis a diszkontálás kivihető a várható érték elé annak ellenére, hogy a diszkontfaktor nem detereminisztikus. Az egyszerűbb jelölés céljából érdemes a többszörös indexeket elhagyni és az $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_{T_k}}$ helyett csak az egyszerűbb $\mathbf{E}_k$ jelöléssel élni. Az új jelöléssel a k-adik caplet ára

$$\pi_t\left(H_k\right) = \alpha_k B\left(t,T_k\right) \mathbf{E}_k\left(\left(L_k\left(T_{k-1}\right) - R\right)^+ \mid \mathcal{F}_t\right).$$

Az új ármérce bevezetésnek további előnye a következő:

7.27. Lemma. *Az $\mathbf{E}_k$-hogy tartozó $\mathbf{Q}_k \triangleq \mathbf{Q}_{T_k}$ mérték alatt az L_k martingál a $[0,T_{k-1}]$ időszakaszon.*

Bizonyítás. A definíciók felhasználásával

$$L_k\left(t\right) \triangleq \frac{1}{\alpha_k}\frac{B\left(t,T_{k-1}\right) - B\left(t,T_k\right)}{B\left(t,T_k\right)} = \frac{1}{\alpha_k}\left(\frac{B\left(t,T_{k-1}\right)}{B\left(t,T_k\right)} - 1\right).$$

A kifejezésben szereplő hányados éppen a T_{k-1} időpontban lejáró elemi kötvény ára a $\mathbf{Q}_k$-hoz tartozó ármércében kifejezve, így martingál az adott ármércéhez tartozó kockázatsemleges mérték mellett. □

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

7.28. Definíció. LIBOR-modellen a különböző lejárati időpontokhoz tartozó $k = 1,2,\ldots,n$ indexekkel jelölt

$$dL_k(t) = \sigma_k(t) L_k(t) dw_k(t)$$

alakú egyenletekből álló egyenletrendszert értjük, ahol a $\sigma_k(t)$ volatilitásokról feltesszük, hogy determinisztikusak és mindegyik w_k egy közös m-dimenziós Wiener-folyamatból a $\mathbf{Q}_k$ mértékre való áttéréskor kapott többdimenziós Wiener-folyamatot jelöl.

A LIBOR-modellben a $\mathbf{Q}_k$ alatt az L_k exponenciális martingál, így

$$L_k(T) = L_k(t) \exp\left(\int_t^T \sigma_k(s) dw_k(s) - \frac{1}{2}\sum_{u=1}^{m}\int_t^T \sigma_{ku}^2(s) ds\right),$$

ahol értelemszerűen σ_{ku} a σ_k vektor u-adik koordinátája. Mivel a LIBOR-modell feltétele szerint a σ_k determinisztikus, ezért az $L_k(T)$ lognormális eloszlású. A lognormális eloszláshoz tartozó normális eloszlás várható értéke éppen az exponenciális függvényben szereplő determinisztikus integrál értéke

$$m_k(t,T) = -\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{m}\int_t^T \sigma_{ku}^2(s) ds,$$

a varianciája pedig

$$S_k^2(t,T) = \sum_{u=1}^{m}\int_t^T \sigma_{ku}^2(s) ds.$$

Ebből a Black–Scholes-formula, pontosabban annak módosítása a Black-formula[6] levezetésének elemi módosításával azonnal látható, hogy a k-adik caplet ára a t időponban

$$\alpha_k B(t,T_k)\left(L_k(t)\cdot\Phi(d_1) - R\cdot\Phi(d_2)\right),$$

ahol

$$d_1 \triangleq \frac{1}{S_k(t,T_{k-1})}\left(\ln\frac{L_k(t)}{R} + \frac{1}{2}S^2(t,T_{k-1})\right),$$
$$d_2 \triangleq d_1 - S_k(t,T_{k-1}).$$

Ezt a formulát szokás Black-formulának mondani.

[6] V.ö.: 5.7. példa, 280. oldal. Black-formulán a határidős árakra vonatkozó call opciók árazási formuláját szokás érteni. Mivel a határidős árak lényegében a kamatláb függvényei, ezért a határidős árakra vonatkozó Black-formula azonnal átvihető a kamatlábakra vonatkozó opciókra. Az egyetlen eltérés az, hogy most a diszkontálásra használt elemi kötvények árai sztochasztikusak.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

7.5.2. A LIBOR-modell konzisztenciája

A Black-formula „levezetése" nyilvánvalóan definíció szerint történt, pontosan úgy definiáltuk a LIBOR-modellt, hogy minden rendben legyen. Például a dinamikát a forward mértékek alatt adtuk meg és evvel minden egyes caplet esetén kivihettük a diszkontfaktort a feltételes várható érték elé, a dinamikát ugyanakkor minden capletre lognormálisnak definiáltuk. Ha azonban mélyebb matematikai elemzést akarunk, akkor célszerű legalábbis a modell konzisztenciáját megvizsgálni.

A $\mathbf{Q}_k$ mértékek a $[0, T_k]$ időszakaszokon értelmesek, így a legbővebben időszakaszra definiálható mérték a $\mathbf{Q}_n$, ugyanis a legutolsó időpont a T_n. Definiáljuk tehát az összes LIBOR-rátát a $\mathbf{Q}_n$ mérték alatt a

$$dL_k = L_k(t)\left(\mu(t, L(t))\,dt + \sigma_k(t)\,dw_n(t)\right), \quad k = 1,2,\ldots,n$$

egyenletekkel. Meg kell mutatni, hogy alkalmasan választott $\mu_k(t,l)$ függvényekkel elérhető, hogy minden k esetén a $\mathbf{Q}_k$ alatt az L_k kielégítse a $dL_k = \sigma_k L_k dw_k$ egyenletet. Ezt indukcióval fogjuk elvégezni. Az indukció végrehajtásához ki kell számolni az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrákon definiált $\Lambda_{ij}(t) = d\mathbf{Q}_j/d\mathbf{Q}_i$ deriváltfolyamatokat. A mértékcserékre és az ármércékre vonatkozó (4.3) képlet alapján

$$\Lambda_{ij}(t) = \frac{B(t,T_j)}{B(t,T_i)}\frac{B(0,T_i)}{B(0,T_j)},$$

speciálisan a visszafelé való indukcióhoz

$$\Lambda_{i,i-1}(t) = \frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)}\frac{B(0,T_i)}{B(0,T_{i-1})} \stackrel{\circ}{=} b_i\left(1+\alpha_i L_i(t)\right),$$

ahol $b_i \stackrel{\circ}{=} B(0,T_i)/B(0,T_{i-1})$. Ebből $d\Lambda_{i,i-1}(t) = b_i\alpha_i dL_i(t)$. A dL_i-re a kívánt formát beírva

$$\begin{aligned} d\Lambda_{i,i-1}(t) = b_i\alpha_i dL_i(t) \,.&= b_i\alpha_i\sigma_i(t)\,L_i(t)\,dw_i = \\ &= b_i\alpha_i\sigma_i(t)\,\frac{\Lambda_{i,i-1}(t)}{\Lambda_{i,i-1}(t)}L_i(t)\,dw_i = \\ &= b_i\alpha_i\sigma_i(t)\,\frac{\Lambda_{i,i-1}(t)}{b_i\left(1+\alpha_i L_i(t)\right)}L_i(t)\,dw_i = \\ &= \sigma_i(t)\,\frac{\alpha_i L_i(t)}{1+\alpha_i L_i(t)}\Lambda_{i,i-1}(t)\,dw_i. \end{aligned}$$

A mértékcserét megvalósító Girszanov-transzformáció egy exponenciális martingál, ahhoz tehát, hogy a kívánt alakot elő tudjuk állítani a Girszanov-formulában a magfüggvényt a

$$\gamma_i(t) \stackrel{\circ}{=} \sigma_i(t)\,\frac{\alpha_i L_i(t)}{1+\alpha_i L_i(t)}$$

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

képlettel kell megadni. A Girszanov-formula szerint

$$dw_i = \sigma_i(t)\frac{\alpha_i L_i(t)}{1+\alpha_i L_i(t)}dt + dw_{i-1},$$

vagyis, indukcióval

$$dw_k = -\sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i(t)\frac{\alpha_i L_i(t)}{1+\alpha_i L_i(t)} + dw_n.$$

Világos, hogy a gondolatmenet megfordítható. Tegyük fel, hogy adottak a σ_k determinisztikus, m-dimenziós volatilitás vektorok, $k = 1,2,\ldots,n$. Tekintsük egy $\mathbf{Q}_n$ mértéket és egy m-dimenziós w_n Wiener-folyamatot és legyen $dL_n = L_n\sigma_n dw_n$. Ezt követően definiáljuk a $\mathbf{Q}_{n-1}$ új mértéket a γ_n által megadott Girszanov-transzformációval. Majd definiáljuk az L_{n-1} folyamatot, és folytassuk az eljárást egészen a $k = 1$ indexig.

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Tárgymutató

Adaptált folyamat, 65
módosítás erejéig való egyenlőség, 65
Affin lejárati szerkezet, 420
Amerikai opció, 42
ára, 60
Amerikai put opció, 382
folytatási halmaz találati ideje, 378
Amerikai put és call opciók kapcsolata, 381
Arbitrázsnyereség, 244
Árfolyamspekuláció, 244
Ármérce, 244, 246, 251
Asszociativitási szabály, 100, 214, 247
Ázsiai opciók, 318

Barrier-opciók, 300
Bayes-formula, 12, 253, 276, 425
Bessel-folyamat, 145, 188, 189, 320
dimenzió, 189
index, 189
Black–Scholes-differenciáloperátor, 390
Black–Scholes-differenciálegyenlet, 270
Black–Scholes-modell, 273
Black-formula, a Black-76 modell, 280
Burkholder–Davis–Gundy-egyenlőtlenség, 106

Call opció, 48
CIR-modell, 412
Cox–Ingersoll–Ross-modell, 412
Csere opciók, 285

$\mathcal{D}$ osztály, 84, 379
Dinkin-formula, 121
Diszkontált részvényárfolyam, 244
Diszkontált várható érték szabály, 8
Diszkontálás, 36, 38
Doob–Meyer-felbontás, 59, 379
Doob-egyenlőtlenség, 63, 105
első, 74
második, 74
sztochasztikus integrálás, 82
Dupla barrier opció, 303
Duplázási stratégia, 110

Egyenletes integrálhatóság, 63, 74
korlátos halmazok, 74
martingálok kiterjeszthetősége, 74
Egyértelműségi tétel, 158
Ekvivalens lokális martingálmérték, 249
Ekvivalens martingálmérték, 18
Ekvivalens mértékcsere, 124, 125
Előrejelezhető folyamatok, 207
Elemi kötvény, 403
Előrejelezhető folyamatok, 208
Értékfolyamat
alulról korlátos, 245
Eszközárazás diffúziós modellje, 260
Eszközárazás első alaptétele, 19
Eszközárazás második alaptétele, 31
Európai call opciók ára, 275
Excesszív függvények, 366

Fair ár, 267
Felrobbanó gyenge megoldás létezése, 181

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Felrobbanó megoldás, 180
Filtráció, 18, 65
  generált, 67, 244
  jobbról folytonos, 66
  kibővített, 68
Fisk-tétel, 89
Flesaker–Hughston-formula, 429
Folyamat
  előrejelezhető, 207
  Wiener, 67
Folytatási halmaz, 375
Folytatási régió, 386, 393
Folytonos forward ráta, 404
Forward mérték, 254
Forward ráta, 404
Független növekményű folyamat, 67, 68

Gallér opciók ára, 277
Girszanov ellenpéldája, 190
Girszanov-transzformáció, 133
  Wiener-folyamat, 136
Girszanov-tétel, 134
  Wiener-folyamat, 136
Gronwall-egyenlőtlenség, 147

Harmonikus függvény, 364
  Wiener-folyamat, 364
Határidős quanto ügylet, 289
Határidős kötési árfolyamos opció, 278
Határidős ügyletek árazása, 274
Határérték és az integrál felcserélhetősége, 90
Heath–Jarrow–Morton-modell, 415
Helyettesítéses integrálás, 104, 191
HJM-drift-feltétel, 419
HJM-modell, 415
Ho–Lee-modell, 409
Hull–White-modell, 410, 423
Háló, 344

Infinitezimális generátor, 201, 205
Integrálfolyamat ugrásai, 247
Itô–Stieltjes-integrál, 75
Itô-diffúzió, 256, 362
Itô-folyamat, 256
Itô-formula, 112
Itô-izometria, 207

Keresztvariáció, 91
Kibővített filtráció, 68, 224
Kockázat piaci ára, 260
Kockázatsemleges mérték, 250
Kompakt halmazokon való sztochasztikusan egyenletes konvergencia, 77
Korai lehívás prémiuma, 398
Korlátos változású folyamat, 86
Korlátos változású függvény, 75
Korlátozott határidős opció, 278
Kunita–Watanabe-egyenlőtlenség, 211, 212
Kvadratikus keresztvariáció megállítása, 95
Kvadratikus variáció, 206, 257
Kötvény, 245, 273, 403

L^0-tér, 18
$\mathcal{L}^2$, 209
Lamperti-azonosság, 322
Laplace-transzformáció, 337
Lebesgue–Stieltjes-integrál, 77, 86
Lehívási régió, 386
Lejárati szerkezet egyenlet, 406
LIBOR, 404, 434
Lokalizációs sorozat, 83
Lokális martingál, 83
  folytonossága, 241
  szerinti integrál, 216
Lokálisan ekvivalens mértékcsere, 127
  Wiener-folyamat, 139
Lokálisan korlátos folyamat, 220
Lokálisan négyzetesen integrálható függvények, 215
Lokálisan négyzetesen integrálható martingál, 83

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Lényeges szuprémum, 344
Lévy-féle karakterizációs tétel, 116

Magrabe-formula, 285
Markov-folyamat
  Bessel-folyamat, 320
  erős Markov-folyamatok, 192, 194, 196
  homogén, 199
Markov-potenciál-modell, 431
Martingál, 72
  $\mathcal{H}^2$, 81
  négyzetesen integrálható, 79, 81
Martingálkritérium, 106
Martingálmérték, 9, 250
Martingálprobléma, 164, 169, 196
Maximumfolyamat, 291
Maximumfolyamat eloszlása, 292
Megengedett portfólió, 249
Megengedett stratégia, 110
Megoldások összehasonlítása, 154
Megállási idő, 44, 69
  tartózkodási idő, 71
Megállási opciókról szóló tétel, 72
Megállási régió, 386
Megállított folyamat, 72
Megállított σ-algebra, 73
Megállítási szabály, 213
Minimumfolyamat, 291
Mérhető funkcionálok, 195
Módosított Bessel-függvény, 321

Nem létezik optimális megállítás, 355
Newton–Leibniz-formula, 77
Nincsen arbitrázs, 18, 20, 23, 40, 110, 258
Nyereményfolyamat, 39

Önfinanszírozás, 245
Opció
  amerikai, 381
    végtelen lejárat, 387
  ázsiai, 318
  barrier, 300
  csere, 285
  európai call, 275
  európai put, 279
  gallér opció, 277
  határidős kvantó, 289
  határidős kötési árfolyam opció, 278
  korlátos határidős opció, 278
  kvantó, 287
  szabad végpontú call, 315
  visszatekintő, 310
  választható, 280
  összetett, 281
Optimalitási kritérium, 353
Optimális megállási idő, 50
  legkisebb, 53
Optimális megállítás, 46
  optimalitási kritérium, 361
Optimális megállítás problémája, 341
Összetett opciók árazása, 281

Parabolikus egyenlet, 401
Parabolikus határ, 401
Parciális integrálás formulája, 91, 246
Polaritási formula, 96, 210
Polaritási szabály, 247
Portfólió, 19
  replikáló, 111
  önfinanszírozó
    diszkrét időhorizont, 38
    folytonos időhorizont, 245
Put opció, 48
Put opció ára, 279

Quanto opciók, 287

Racionális törtfüggvény modell, 431
Radon–Nikodym-folyamat, 127
Reguláris mérték
  kompakt reguláris, 140
Reguláris trajektória, 66
  balról, 66

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

jobbról, 66
Rezolvens operátor, 200
Wiener-folyamat, 200
Riccati-egyenlet, 408
Riemann–Stieltjes-integrál, 75, 76
Részvény, 245, 273

Snell-burkoló, 48, 344, 353
call opció, 345
létezése, 353
Stacionárius növekményű folyamat, 67
Szabad határ probléma, 400
Szabad végpontú call opció, 315
Szemimartingál, 86, 218, 245
ekvivalens mértékcsere, 133
folytonos, 86
Folytonos szemimartingál egyértelmű felbontása, 90
σ kompakt halmaz család, 140
Szintátlépési idő, 71
Szkorohod egzisztencia tétele, 172, 187
korlátos együtthatók, 177
Szokásos feltételek, 66, 196
Sztochasztikus differenciál, 256
Sztochasztikus differenciálegyenlet, 144
egyértelműség
Itô, 147
Yamada–Watanabe, 150
eloszlásban való egyértelműség, 155
erős Markov-tulajdonság, 196
erős megoldás, 145
gyenge megoldás, 145, 164
homogén, 196
megoldás létezése, 160
megoldások összehasonlítása, 154
Sztochasztikus folyamat
folytonos, 66
Sztochasztikus integrál
Fubini-tétel
korlátlan integrandus, 416
Sztochasztikus integrál, 76, 243
folytonos lokális martingál szerint, 216
integrálfolyamat létezése, 85
linearitás, 87
létezése, 81
létezése folytonos lokális martingál integrátorokra, 85
létezése $\mathcal{H}^2_{\mathrm{loc}}$ integrátorokra, 84
parciális integrálás, 91
szemimartingál, 86
Sztochasztikus integrál L^2-becslése, 80
Sztochasztikus integrál megállítása, 87
Sztochasztikus logaritmus, 133
Sztochasztikus potenciál, 425
Szubmartingál, 44, 72
Szuperharmonikus burkoló, 369
Szuperharmonikus függvények, 365
Szuperközepes függvények, 365
Szupermartingál, 72
alulról korlátos lokális martingál, 110
Szupermartingál, 251, 274
megállási opciók tétele, 344
Szuperreplikálás, 43, 267, 339
Származtatott termék, 35

Találati idő, 69
nem megállási idő, 70
nyílt halmaz, 69
zárt halmaz, 69
Teljesség, 10, 30, 266
Tétel
Arzela–Ascolli, 173
asszociativitási szabály, 100
Bolzano–Weierstrass, 20
Burkholder–Davis–Gundy-egyenlőtlenség, 104, 106
Dalang–Morton–Willinger, 18, 19
Doob–Meyer, 379
Dudley, 224, 249
elveszett illúziók, 41
eszközárazás első alaptétele, 19
eszközárazás második alaptétele, 31

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter

© Typotex Kiadó

Fisk, 89
Geman–Yor, 320
Girszanov, 134, 136, 261, 265
Harrison–Pliska, 18
határérték és integrálás, 90
integrálreprezentáció, 229, 236, 239
nem teljesül, 242
Itô-formula, 112
Kereskedett termékek martingál mértéke, 9
keresztvariáció karakterizálása, 95
Kreps–Yan, 24
Kunita–Watanabe-egyenlőtlenség, 211, 212
Lévy-féle karakterizációs, 109, 116, 290
majorált konvergencia, 219
martingálkritérium, 106
megoldások összehasonlítása, 154
megállási opció, 44, 72
megállítási szabály, 87, 95
monoton osztály, 232
polaritási fornula, 96
Prohorov, 173
Szkorohod, 172, 189
Szkorohod egzisztencia, 172, 187
korlátos együtthatók, 177
sztochasztikus integrálok invarianciája, 222
Tyihonov-féle egyértelműségi, 122
tükrözési elve, 119
Yamada–Watanabe, 150, 189
ármérce változás, 246
összehasonlitás, 189
Túlzó függvények, 366
Tükrözési elv, 119
Tükrözött Wiener-folyamat, 291

Ugrás, 66

Vasicek-modell, 408, 421
Visszatekintő opció, 310
Választható opció, 280
Várható jelenérték szabály, 8
Véges kúp, 21
Véges változású folyamat, 86
Végtelen lejárattal rendelkező put opció, 387

Wiener-folyamat, 67, 83
drifttel rendelkező, 137
Fubini-tétele, 416
generált filtráció, 239
keresztvariáció, 93
korrelált, 93
rezolvens operátor, 200
trenddel rendelkező, 294, 394
tükrözött, 169
összenyomott, 108, 110

Yamada–Watanabe, 150
ellenpélda, 190

www.interkonyv.hu © Medvegyev Péter