

# Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
<b>1. Optimalizálás gráfokon</b>	<b>5</b>
1.1. Algoritmusok hatékonyságáról . . . . .	5
1.2. Gráfok bejárása: elérhetőség . . . . .	11
1.2.1. Szélességi keresés . . . . .	14
1.2.2. Mélységi keresés . . . . .	15
1.3. Optimális utak és potenciálok . . . . .	18
1.3.1. Bevezetés . . . . .	18
1.3.2. Legolcsóbb utak aciklikus digráfban . . . . .	19
1.3.3. Legolcsóbb utak nemnegatív költségekre: Dijkstra algoritmusa . . . . .	23
1.3.4. Konzervatív költségfüggvények, megengedett potenciálok, tenziók . . . . .	25
1.3.5. Legolcsóbb utak: min-max tétel és optimalitási feltétel	30
1.3.6. Algoritmusok . . . . .	32
1.4. Páros gráfok optimális párosításai . . . . .	39
1.4.1. Maximális elemszámú párosítások: a javító utak módszere	40
1.4.2. Maximális súlyú teljes párosítások: a magyar módszer	42
1.4.3. Egerváry eredeti bizonyítása és algoritmusa . . . . .	46
1.4.4. Maximális súlyú párosítások . . . . .	49
1.5. Áramok és folyamok hálózatokban . . . . .	52
1.5.1. Fogalmak . . . . .	52
1.5.2. Motivációk . . . . .	54
1.5.3. Megengedett áramok . . . . .	56
1.5.4. Áramok és folyamok kapcsolata . . . . .	58
1.6. Folyam algoritmusok . . . . .	60
1.6.1. Maximális folyamok: a növelő utak módszere . . . . .	61
1.6.2. Skálázási technika . . . . .	61
1.6.3. Legrövidebb növelő utak . . . . .	62

1.6.4. Minimális költségű folyamatok . . . . .	63
<b>2. Lineáris egyenletrendszerek</b>	<b>71</b>
2.1. Vektortér, altér, lineáris függetlenség . . . . .	71
2.2. Mátrixok, egyenletrendszerek megoldhatósága . . . . .	74
2.3. Egyenletrendszer megoldáshalmaza, affin alterek . . . . .	79
<b>3. Lineáris egyenlőtlenség-rendszerek megoldása</b>	<b>85</b>
3.1. Bevezetés . . . . .	85
3.1.1. Megjegyzések az intuícioról . . . . .	86
3.2. Kúpok, poliéderek, politópok . . . . .	89
3.2.1. Kúpok . . . . .	90
3.2.2. Poliéderek és politópok . . . . .	91
3.3. Csúcsok és bázismegoldások . . . . .	95
3.3.1. Bázismegoldások . . . . .	95
3.3.2. Csúcsos poliéderek . . . . .	99
3.3.3. Korlátos poliéderek . . . . .	101
3.4. A Fourier–Motzkin-elimináció és következményei . . . . .	102
3.4.1. Oszlop-elimináció . . . . .	103
3.4.2. Poliéder = politóp + generált kúp . . . . .	104
3.4.3. Az FM-eljárás hatékonysága . . . . .	109
3.4.4. Alkalmazások . . . . .	110
3.5. Megoldhatóság: a Farkas-lemma . . . . .	112
3.5.1. Direkt bizonyítás . . . . .	115
3.5.2. A szimplex algoritmus a Farkas-lemmára . . . . .	118
3.5.3. Lineáris és logikai következmény . . . . .	123
3.5.4. Alkalmazások . . . . .	125
<b>4. Lineáris optimalizálás</b>	<b>129</b>
4.1. Iránymenti korlátosság . . . . .	129
4.2. Optimalitás . . . . .	132
4.2.1. Optimalitási feltételek . . . . .	133
4.2.2. A dualitástétel . . . . .	136
4.2.3. Következmények . . . . .	139
4.2.4. Játékelméleti alkalmazás . . . . .	140
<b>5. Lineáris programozás és hálózati optimalizálás</b>	<b>145</b>
5.1. Teljesen unimoduláris mátrixok . . . . .	145
5.1.1. Definíciók és példák . . . . .	146
5.1.2. Farkas-lemma, dualitástétel, optimalitási feltételek TU-mátrixokra . . . . .	149
5.1.3. Kerekítés és egyenletes színezés . . . . .	151
5.2. A lineáris programozás alkalmazásai a hálózati optimalizálásban	153

5.2.1.	Páros gráfok: optimális részgráfok . . . . .	153
5.2.2.	Páros gráfok: élszínezések . . . . .	156
5.2.3.	Megengedett potenciálok, legolcsóbb utak . . . . .	157
5.2.4.	Megengedett áramok és folyamok . . . . .	158
5.2.5.	Minimális költségű áramok és folyamok . . . . .	159
5.2.6.	Hálózati mátrixokkal adott lineáris programok . . . . .	161
<b>6.</b>	<b>A szimplex módszer változatai</b>	<b>163</b>
6.1.	Primál szimplex módszer . . . . .	163
6.1.1.	A szimplex módszer tulajdonságai . . . . .	165
6.1.2.	A szimplex módszer egy lépése . . . . .	167
6.1.3.	Érzékenységvizsgálat . . . . .	169
6.1.4.	Módosított szimplex módszer . . . . .	171
6.2.	Duál szimplex módszer . . . . .	171
6.2.1.	A duál szimplex módszer tulajdonságai . . . . .	171
6.2.2.	A duál szimplex módszer egy lépése . . . . .	172
6.2.3.	Alkalmazás: új feltétel hozzávétele . . . . .	173
6.2.4.	Alkalmazás: primál megengedett bázis keresése . . . . .	173
6.2.5.	A duál szimplex módszer egy másfajta interpretációja . . . . .	174
6.3.	Kétfázisú szimplex módszer . . . . .	175
6.4.	Hálózati szimplex módszer . . . . .	177
6.4.1.	Primál hálózati szimplex módszer lépései . . . . .	180
6.4.2.	Duál hálózati szimplex módszer . . . . .	181
6.4.3.	Kezdeti primál bázis keresése . . . . .	183
6.4.4.	Erősen megengedett bázisok . . . . .	185
<b>7.</b>	<b>Egészértékű lineáris programozás</b>	<b>187</b>
7.1.	Bevezetés . . . . .	187
7.2.	Vágósíkos eljárás . . . . .	191
7.2.1.	Gomory-vágás . . . . .	192
7.3.	Dinamikus programozási algoritmusok . . . . .	195
7.3.1.	Bináris hátizsákfeladat . . . . .	195
7.3.2.	Nemnegatív mátrixú egész értékű feladat . . . . .	196
7.4.	Korlátozás és szétválasztás . . . . .	196
7.5.	Közelítő algoritmusok . . . . .	200
7.5.1.	Minimális lefogó csúcshalmaz . . . . .	200
7.5.2.	Minimális költségű lefogó csúcshalmaz . . . . .	202
<b>8.</b>	<b>Konvex optimalizálás</b>	<b>205</b>
8.1.	Konvex halmazok . . . . .	205
8.1.1.	Alaptulajdonságok . . . . .	205
8.1.2.	Konvex halmazok szeparációja . . . . .	208
8.2.	Konvex függvények . . . . .	209

8.3.	Feltétel nélküli optimalizálás . . . . .	211
8.4.	Feltételes optimalizálás . . . . .	212
8.4.1.	A Karush–Kuhn–Tucker-tétel . . . . .	213
8.4.2.	Lagrange-duális . . . . .	216
8.5.	Megoldási módszerek . . . . .	217
8.5.1.	Megengedett csökkenési irány keresése . . . . .	217
8.5.2.	Gradiens módszer . . . . .	219
8.5.3.	Arany metszés módszer . . . . .	219
8.5.4.	Newton módszer . . . . .	220

<b>Ajánlott irodalom</b>	<b>223</b>
--------------------------	------------