

# Tartalomjegyzék

<b>1. Előszó</b>	<b>1</b>
<b>2. Halmazok, relációk, függvények</b>	<b>3</b>
2.1. Halmazok, relációk, függvények $\boxed{A}$	3
2.1.1. Halmazok és relációk	3
2.1.2. Relációk inverze és kompozíciója	5
2.1.3. Függvények	6
2.2. Feladatok	8
2.3. Halmazok, relációk, függvények $\boxed{E}$	9
2.3.1. Ekvivalencia és rendezési reláció	9
2.3.2. Halmazok számossága	11
<b>3. Számhalmazok</b>	<b>13</b>
3.1. Valós számok $\boxed{A}$	13
3.1.1. A valós számok axiómarendszere	13
3.1.2. Természetes, egész és racionális számok	15
3.1.3. Felső és alsó határ	16
3.1.4. Intervallumok és környezetek	17
3.1.5. Valós számok hatványai	18
3.2. Feladatok	19
3.3. Komplex számok $\boxed{A}$	22
3.3.1. A komplex szám fogalma, műveletek	22
3.3.2. Komplex számok trigonometrikus alakja	23
<b>4. Elemi függvények</b>	<b>27</b>
4.1. Valós-valós függvények	
alaptulajdonságai $\boxed{A}$	27
4.2. Az elemi függvények $\boxed{A}$	29
4.2.1. Hatványfüggvények	29
4.2.2. Exponenciális és logaritmus függvények	32

4.2.3.	Trigonometrikus függvények és inverzeik . . . . .	35
4.2.4.	Hiperbolikus függvények és inverzeik . . . . .	40
4.2.5.	Néhány különleges függvény . . . . .	43
4.3.	Feladatok . . . . .	46
<b>5.</b>	<b>Sorozatok, sorok</b>	<b>49</b>
5.1.	Sorozatok, sorok <b>A</b> . . . . .	49
5.1.1.	A sorozat fogalma és tulajdonságai . . . . .	49
5.1.2.	Sorozat határértéke . . . . .	51
5.1.3.	Divergens sorozatok . . . . .	52
5.1.4.	Sorok . . . . .	53
5.2.	Feladatok . . . . .	55
5.3.	Sorozatok <b>E</b> . . . . .	59
5.3.1.	Sorozat konvergenciája . . . . .	59
5.3.2.	Műveletek konvergens sorozatokkal . . . . .	60
5.3.3.	Részsorozatok . . . . .	61
5.3.4.	Sorozat $\lim \sup$ -ja és $\lim \inf$ -je . . . . .	63
5.3.5.	Intervallumsorozat . . . . .	64
5.3.6.	Cauchy konvergenciakritérium . . . . .	65
5.4.	Sorok <b>E</b> . . . . .	66
5.4.1.	Sor konvergenciája . . . . .	66
5.4.2.	Konvergenciakritériumok . . . . .	67
5.4.3.	Végtelen sorok átrendezései . . . . .	69
<b>6.</b>	<b>Folytonosság</b>	<b>71</b>
6.1.	Folytonosság <b>A</b> . . . . .	71
6.1.1.	A folytonos függvény fogalma és tulajdonságai . . . . .	71
6.1.2.	A műveletek és a folytonosság kapcsolata . . . . .	73
6.1.3.	Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai . . . . .	73
6.2.	Feladatok . . . . .	74
6.3.	Folytonosság <b>E</b> . . . . .	75
6.3.1.	A folytonosság fogalma és az átviteli elv . . . . .	75
6.3.2.	Műveletek folytonos függvényekkel . . . . .	76
6.3.3.	Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai . . . . .	77
6.3.4.	Az inverzfüggvény folytonossága . . . . .	78
6.3.5.	Egyenletes folytonosság . . . . .	79
<b>7.</b>	<b>Függvény határértéke</b>	<b>81</b>
7.1.	Függvény határértéke <b>A</b> . . . . .	81
7.1.1.	„Végesben vett, véges” határérték . . . . .	81
7.1.2.	„Végtelenben vett”, illetve „nem véges” határérték . . . . .	83
7.1.3.	Egyoldali határérték . . . . .	85

7.2. Feladatok . . . . .	87
7.3. Függvény határértéke <b>E</b> . . . . .	89
7.3.1. A határérték általános definíciója és az átviteli elv . . . . .	89
7.3.2. Műveletek függvények határértékével . . . . .	91
<b>8. Differenciálhatóság</b>	<b>93</b>
8.1. Differenciálhatóság <b>A</b> . . . . .	93
8.1.1. A derivált fogalma és geometriai jelentése . . . . .	93
8.1.2. Elemi függvények deriváltja és a deriválási szabályok . . . . .	96
8.1.3. A derivált kapcsolata a függvény tulajdonságaival . . . . .	98
8.1.4. Többszörös derivált és a Taylor-polinom . . . . .	100
8.1.5. L'Hospital-szabály . . . . .	102
8.2. Feladatok . . . . .	104
8.3. Differenciálhatóság <b>E</b> . . . . .	107
8.3.1. A derivált fogalma és kapcsolata a folytonossággal . . . . .	107
8.3.2. Műveletek differenciálható függvényekkel, deriválási szabályok . . . . .	109
8.3.3. Lokális növekedés, fogyás, lokális szélsőérték . . . . .	111
8.3.4. Közéértéktételek . . . . .	113
8.3.5. A globális monotonitás elégséges feltételei . . . . .	115
8.3.6. Konvex és konkáv függvények . . . . .	115
8.3.7. Taylor-formula . . . . .	117
8.3.8. L'Hospital-szabály . . . . .	119
<b>9. Integrálhatóság, integrálszámítás</b>	<b>121</b>
9.1. Integrálszámítás <b>A</b> . . . . .	121
9.1.1. A Riemann-integrál fogalma és geometriai jelentése . . . . .	121
9.1.2. A Riemann-integrál és a műveletek kapcsolata . . . . .	124
9.1.3. Newton–Leibniz-formula . . . . .	125
9.1.4. Primitív függvény . . . . .	128
9.1.5. Az integrál alkalmazásai . . . . .	129
9.1.6. Fourier-sor . . . . .	137
9.1.7. Az improprius integrál . . . . .	139
9.2. Feladatok . . . . .	140
9.3. Integrálszámítás <b>E</b> . . . . .	143
9.3.1. Az integrál fogalma . . . . .	143
9.3.2. Az integrálhatóság feltételei . . . . .	144
9.3.3. Műveletek és az integrál kapcsolata . . . . .	146
9.3.4. Primitív függvény és a Newton–Leibniz-formula . . . . .	148
<b>10. Függvénysorozatok, függvénysorok</b>	<b>151</b>

10.1. Függvénysorozatok, függvényesorok <b>A</b> . . . . .	152
10.1.1. Függvénysorozatok . . . . .	152
10.1.2. Függvényesorok . . . . .	156
10.1.3. Hatványesorok . . . . .	158
10.2. Feladatok . . . . .	159
10.3. Függvénysorozatok, függvényesorok <b>E</b> . . . . .	161
10.3.1. Függvénysorozatok . . . . .	161
10.3.2. Függvényesorok . . . . .	162
10.3.3. Hatványesorok, Taylor-sorok . . . . .	163
<b>11. Többváltozós függvények</b>	<b>165</b>
11.1. Többváltozós függvények <b>A</b> . . . . .	165
11.1.1. Az $n$ -dimenziós tér . . . . .	165
11.1.2. Többváltozós függvények . . . . .	167
11.1.3. Határérték és folytonosság . . . . .	170
11.2. Feladatok . . . . .	172
11.3. Többváltozós függvények <b>E</b> . . . . .	174
11.3.1. Metrikus tér . . . . .	174
11.3.2. Nyílt és zárt halmazok; kompakt halmaz . . . . .	175
11.3.3. Folytonos függvények . . . . .	177
11.3.4. Fixponttétel . . . . .	178
<b>12. Többváltozós differenciálás</b>	<b>181</b>
12.1. Többváltozós deriválás <b>A</b> . . . . .	181
12.1.1. Parciális derivált . . . . .	181
12.1.2. Deriváltmátrix . . . . .	183
12.1.3. Érintő . . . . .	186
12.1.4. Szélsőérték . . . . .	187
12.2. Feladatok . . . . .	189
12.3. Többváltozós deriválás <b>E</b> . . . . .	195
12.3.1. Parciális derivált és deriváltmátrix . . . . .	195
12.3.2. Második derivált, Taylor-formula . . . . .	198
12.3.3. Szélsőérték . . . . .	201
12.3.4. Implicit- és inverzfüggvény tétel . . . . .	203
12.3.5. Feltételes szélsőérték . . . . .	207
<b>13. Vonalintegrál</b>	<b>211</b>
13.1. Vonalintegrál <b>A</b> . . . . .	211
13.1.1. A vonalintegrál fogalma és tulajdonságai . . . . .	211
13.1.2. Potenciál . . . . .	214
13.2. Feladatok . . . . .	216
13.3. Vonalintegrál <b>E</b> . . . . .	218

13.3.1. A vonalintegrál fogalma és tulajdonságai . . . . .	218
13.3.2. Potenciál . . . . .	219
<b>14. Differenciálegyenletek</b>	<b>225</b>
14.1. Differenciálegyenletek <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">A</span> . . . . .	225
14.1.1. Alapfogalmak . . . . .	225
14.1.2. Szétválasztható változójú differenciálegyenlet . . . . .	226
14.1.3. Alkalmazás . . . . .	227
14.2. Feladatok . . . . .	228
<b>15. Többváltozós függvény integrálja</b>	<b>231</b>
15.1. Többváltozós integrál <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">A</span> . . . . .	231
15.1.1. A többváltozós integrál fogalma . . . . .	231
15.1.2. Az integrál kiszámítása téglalapon és normáltartományon	232
15.1.3. Az integrál transzformációja . . . . .	235
15.2. Feladatok . . . . .	237
<b>16. Vektoranalízis</b>	<b>241</b>
16.1. Vektoranalízis <span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">A</span> . . . . .	241
16.1.1. Térgörbék . . . . .	241
16.1.2. Felületek . . . . .	246
16.1.3. A nabla . . . . .	251
16.1.4. Integrálátalakító tételek . . . . .	252
16.2. Feladatok . . . . .	253
<b>16. Komplex függvények</b>	<b>261</b>
16.1. Komplex sorozatok, végtelen sorok . . . . .	261
16.2. Komplex hatványsorok . . . . .	262
16.3. Komplex függvény folytonossága . . . . .	265
16.4. Komplex függvény határértéke . . . . .	266
16.5. Komplex függvény differenciálhatósága . . . . .	267
16.6. Komplex függvények integrálja . . . . .	270
16.6.1. Primitív függvény, az integrál kiszámítása . . . . .	275
16.7. Taylor-sor, harmonikus függvények . . . . .	277
16.8. Komplex függvények zérushelyei . . . . .	279
16.9. Becslések . . . . .	280
16.10. Komplex függvény maximuma . . . . .	283
16.11. Laurent-sor . . . . .	284
16.11.1. Szinguláris helyek . . . . .	286
16.11.2. A reziduum-tétel . . . . .	287