

# Tartalomjegyzék

Előszó	1
<b>I. Fejezetek a klasszikus analízisből</b>	<b>3</b>
1. Topológia $\mathbb{R}^n$ -ben	5
2. Lebesgue-integrál, $L^p$ -terek, paraméteres integrál	9
2.1. Lebesgue-integrál, $L^p$ terek . . . . .	9
2.2. Paraméteres integrálok . . . . .	12
3. A $C_0^\infty(\Omega)$ függvénytér	15
3.1. Multiindexek . . . . .	15
3.2. A kompakt tartójú sima függvények tere . . . . .	16
3.3. Az egységapproximáció alkalmazása . . . . .	18
3.4. Az egységosztás tétele . . . . .	24
<b>II. Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek</b>	<b>27</b>
4. Parciális differenciálegyenletek alapfogalmai, példák	29
4.1. Motiváció . . . . .	29
4.2. Alapfogalmak . . . . .	30
4.2.1. Parciális differenciálegyenlet fogalma . . . . .	30
4.2.2. Parciális differenciálegyenletek főbb típusai . . . . .	31
4.2.3. Mellékfeltételek, korrekt kitűzésű feladatok . . . . .	32
4.3. Néhány elemi úton megoldható egyenlet . . . . .	34
4.3.1. Integrálható egyenletek . . . . .	34
4.3.2. Közönséges differenciálegyenletre visszavezethető egyenletek . . . . .	35
4.3.3. Új változók bevezetésével megoldható egyenletek . . . . .	36

4.3.4. Elsőrendű lineáris egyenletek . . . . .	38
4.4. Feladatok . . . . .	41
<b>5. A matematikai fizika néhány parciális differenciálegyenlete</b>	<b>45</b>
5.1. Motiváció . . . . .	45
5.2. A hővezetés matematikai leírása . . . . .	46
5.2.1. Hővezetés egy dimenzióban . . . . .	47
5.2.2. Hővezetés két és magasabb dimenzióban . . . . .	51
5.2.3. Stacionárius hővezetés . . . . .	54
5.2.4. A hővezetési egyenlet Einstein-féle levezetése . . . . .	56
5.3. A hullámmozgás matematikai leírása . . . . .	58
5.3.1. Az egydimenziós hullámegyenlet . . . . .	58
5.3.2. Hullámegyenlet két és magasabb dimenzióban . . . . .	63
5.4. További példák . . . . .	65
5.4.1. Lineáris egyenletek . . . . .	65
5.4.2. Nemlineáris egyenletek . . . . .	67
5.4.3. Egyenletrendszerek . . . . .	68
5.5. Feladatok . . . . .	69
<b>6. Másodrendű lineáris egyenletek kanonikus alakja</b>	<b>73</b>
6.1. Az egyenletek osztályozása . . . . .	73
6.2. Az egyenletek kanonikus alakja . . . . .	76
6.3. Feladatok . . . . .	85
<b>7. A Laplace- és Poisson-egyenlet</b>	<b>87</b>
7.1. Előkészületek . . . . .	87
7.1.1. Fizikai háttér . . . . .	88
7.1.2. Green-formulák . . . . .	89
7.2. Speciális megoldások . . . . .	92
7.2.1. Radiális megoldások . . . . .	92
7.2.2. Alapmegoldás és Newton-potenciál . . . . .	95
7.3. Klasszikus peremérték-feladatok . . . . .	100
7.3.1. A klasszikus feladatok kitűzése . . . . .	100
7.3.2. A megoldás egyértelműsége . . . . .	102
7.3.3. Dirichlet-elv . . . . .	106
7.4. Klasszikus sajátérték-feladatok . . . . .	109
7.4.1. A klasszikus sajátérték-feladatok kitűzése . . . . .	110
7.4.2. Sajátértékek, a változók szétválasztásának módszere . . . . .	112
7.4.3. Fourier-módszer . . . . .	116
7.5. Harmonikus függvények . . . . .	120
7.5.1. Maximum- és minimumelvek . . . . .	120
7.5.2. A Dirichlet-feladat megoldásának egyértelműsége . . . . .	124
7.5.3. Harmonikus függvények további tulajdonságai . . . . .	125

7.6.	Green-függvény . . . . .	129
7.6.1.	Green harmadik formulája . . . . .	129
7.6.2.	A Green-függvény értelmezése és tulajdonságai . . . . .	131
7.6.3.	Poisson-formula gömbön . . . . .	135
7.6.4.	További példák Green-függvényekre . . . . .	141
7.7.	Feladatok . . . . .	144
<b>8.</b>	<b>A hővezetési egyenlet</b>	<b>149</b>
8.1.	Fizikai motiváció . . . . .	149
8.2.	Speciális megoldások . . . . .	150
8.2.1.	Hasonlósági megoldások . . . . .	150
8.2.2.	Alapmegoldás . . . . .	153
8.3.	Cauchy-feladatok . . . . .	155
8.3.1.	A klasszikus Cauchy-feladatok kitűzése . . . . .	155
8.3.2.	A homogén egyenlet megoldása . . . . .	156
8.3.3.	Duhamel-elv és az inhomogén egyenlet . . . . .	160
8.3.4.	Egyértelműség . . . . .	162
8.3.5.	Tyihonov példája . . . . .	166
8.4.	Vegyes feladatok . . . . .	168
8.4.1.	Maximum- és minimumelvek . . . . .	169
8.4.2.	Egyértelműség . . . . .	171
8.4.3.	Fourier-módszer . . . . .	175
8.5.	Feladatok . . . . .	178
<b>III.</b>	<b>Disztribúcióelmélet</b>	<b>179</b>
<b>9.</b>	<b>Disztribúcióelmélet</b>	<b>181</b>
9.1.	Motiváció . . . . .	181
9.2.	A disztribúció fogalma, példák . . . . .	184
9.2.1.	A disztribúció fogalma . . . . .	184
9.2.2.	Példák . . . . .	187
9.3.	Algebrai műveletek, disztribúció tartója . . . . .	190
9.3.1.	Algebrai műveletek . . . . .	190
9.3.2.	Disztribúció tartója . . . . .	191
9.4.	Disztribúció deriváltja . . . . .	193
9.5.	Disztribúciók direkt szorzata . . . . .	200
9.5.1.	A direkt szorzat definíciója . . . . .	200
9.5.2.	Műveleti tulajdonságok . . . . .	203
9.6.	Disztribúciók konvolúciója . . . . .	205
9.6.1.	Függvények konvolúciója . . . . .	205
9.6.2.	Disztribúciók konvolúciója: definíció, példák . . . . .	208
9.6.3.	Műveleti tulajdonságok . . . . .	213

9.7. Alapmegoldások . . . . .	216
9.7.1. Példák alapmegoldásra . . . . .	217
9.8. Feladatok . . . . .	225
<b>10. Általánosított Cauchy-feladatok hiperbolikus egyenletekre</b>	<b>231</b>
10.1. Az általánosított Cauchy-feladat . . . . .	232
10.2. A klasszikus Cauchy-feladat . . . . .	236
10.3. Feladatok . . . . .	241
<b>11. Általánosított Cauchy-feladatok parabolikus egyenletekre</b>	<b>243</b>
11.1. Az általánosított Cauchy-feladat . . . . .	244
11.2. A klasszikus Cauchy-feladat . . . . .	247
11.3. Feladatok . . . . .	250
<b>IV. Szoboljev-terek</b>	<b>251</b>
<b>12. Szoboljev-terek</b>	<b>253</b>
12.1. A $H^1(\mathbb{R}^N)$ tér . . . . .	254
12.2. A $H^1(\Omega)$ terek . . . . .	258
12.3. A $H_0^1(\Omega)$ tér . . . . .	263
12.4. A $H^2(\Omega)$ tér . . . . .	264
12.5. A $H^1(\Omega)'$ és $H^{-1}(\Omega)$ duális terek . . . . .	266
12.6. Feladatok . . . . .	268
<b>13. Elliptikus problémák</b>	<b>273</b>
13.1. Dirichlet-feladat I . . . . .	273
13.2. Dirichlet-feladat II . . . . .	275
13.3. Neumann-feladat I . . . . .	277
13.4. Neumann-feladat II . . . . .	278
13.5. A Laplace-operátor spektráلتétele . . . . .	280
13.6. Feladatok . . . . .	282
<b>14. Evolúciós problémák</b>	<b>285</b>
14.1. Hővezetési egyenlet . . . . .	286
14.2. Hullámgömb . . . . .	288
<b>15. Útmutatások, megoldások</b>	<b>293</b>
15.1. Megoldások a 9. fejezet feladataihoz . . . . .	293
15.2. Megoldások a 10. fejezet feladataihoz . . . . .	318
15.3. Megoldások a 11. fejezet feladataihoz . . . . .	323
15.4. Útmutatások a 12. fejezet feladataihoz . . . . .	326
15.5. Útmutatások a 13. fejezet feladataihoz . . . . .	328

<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>331</b>
<b>Tárgymutató</b>	<b>345</b>
<b>Névmutató</b>	<b>353</b>