A

Matematikai alapfeladatok

Ebben a fejezetben a könyvben lévő feladatok megoldásához szükséges matematikai apparátus gyakorlására találunk feladatokat, melyek az egyoldalas *Laplace*-transzformáció (a továbbiakban jelző nélkül), az inverz *Laplace*-transzformáció és a polinomosztás területére terjednek ki. Az előbbi két témakör részletesebb kifejtése megtalálható [3] A függelékében. A gyakran használt összefüggéseket az A.1 táblázatban foglaltuk össze.

Tételezzük fel hogy az $f(t), t \in [0, \infty)$ egy olyan függvény, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\int_0^\infty |f(t)| dt < \infty, \quad \exists A, \alpha \in \mathbb{R}, \quad lim_{t\to\infty} f(t) A \mathrm{e}^{\alpha t} = 0.$$

Jelölje $\mathscr{L}$ azt az integrál transzformációt , amely az $f(t)$ függvényhez egy $F(s), s \in \mathbb{C}$ függvényt rendel, azaz $\mathscr{L} : f(t) \to F(s)$, ahol

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \mathrm{e}^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}. \tag{A.1}$$

Az $F(s)$ komplex változós függvény pozitív valós, azaz $F(s) = \bar{F}(s)$.

A *Laplace*-transzformáció inverzét a következőképp definiáljuk : $\mathscr{L}^{-1}$: $F(s) \to f(t)$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) \mathrm{e}^{st} ds, \quad t \in [0, \infty). \tag{A.2}$$

A (A.1) és (A.2) összefüggésekkel definiált transzformációpárt *Laplace*- és *inverz Laplace*-transzformációnak nevezzük, és az $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, illetve $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ szimbólumokkal jelöljük.

A *Laplace*-transzformáció lineáris, azaz időfüggvények lineáris kombinációját *Laplace*-transzformáltjaik lineáris kombinációjába képezi le. Legyen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\mathscr{L}\{f_1(t)\} = F_1(s), \mathscr{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) \Rightarrow \mathscr{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \\ = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s).$$

További fontos tulajdonságok, amelyeket a lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletek megoldásánál (az LTI-rendszerek időbeli viselkedésének analízisében) használunk fel, a következők:

1. Egy $f(t)$ függvény idő szerinti deriváltját *Laplace*-transzformáltja s-el való szorzatába képezi le: $\mathscr{L}\{\frac{d}{dt} f(t)\} = sF(s) - f(0)$.
2. Egy $f(t)$ függvény idő szerinti integrálját *Laplace*-transzformáltja $\frac{1}{s}$-el való szorzatába képezi le: $\mathscr{L}\{\int\limits_0^\infty f(t)dt\} = \frac{1}{s}F(s)$.
3. Az $f(t)$ és $g(t)$ függvények konvolúcióját *Laplace*-transzformáltjuk szorzatába képezi le:

$$\mathscr{L}\{\int\limits_0^\infty g(t-\tau)f(\tau)d\tau\} = G(s)F(s).$$

Az alábbiakban néhány példák mutatunk a *Laplace*-transzformáció közvetlen kiszámítására.

A.1. feladat

Legyen $f(t) = \delta(t)$ a Dirac-deltafüggvény. Ekkor

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = \int\limits_0^\infty \delta(t)\mathrm{e}^{-st}dt = \mathrm{e}^{-st}|_0 = 1.$$

A.2. feladat

Legyen $f(t) = 1(t)$ az egységugrás függvény. Ekkor

$$\mathscr{L}\{1(t)\} = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-st}dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} - \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} = \frac{1}{s}.$$

A.3. feladat

Legyen $f(t) = \mathrm{e}^{at}$. A *Laplace*-transzformált:

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}(t)\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-st}dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t}dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}.$$

A.4. feladat

Vizsgáljuk a $f(t) = \mathrm{e}^{i\omega t}$ függvényt.

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{i\omega t}\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{e}^{-st}dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-i\omega)t}dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{-(s-i\omega)t}}{-(s-i\omega)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-i\omega}$$

$$= \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \mathscr{L}\{\cos\omega t\} + i\mathscr{L}\{\sin\omega t\}.$$

A.5. feladat

A deriválásra vonatkozó szabályok alkalmazásával kapjuk az alábbi függvények *Laplace*-transzformáltjait:

Legyen $f(t) = t1(t)$ a sebesség egységugrás-függvénye. Ha $f(t) = t$, $t > 0$, akkor $\frac{dt}{dt} = 1$, $t > 0$, és mivel $\mathscr{L}\{\frac{d}{dt}f(t)\} = sF(s) - f(0)$, $f(0-) = 0$, következik, hogy $\frac{1}{s} = s\mathscr{L}\{t1(t)\}$, amiből kapjuk, hogy

$$\mathscr{L}\{t1(t)\} = \frac{1}{s^2}.$$

Hasonlóképp kapjuk, hogy

$$\mathscr{L}\{t^2 1(t)\} = \frac{2}{s^3}.$$

Általában pedig

$$\mathscr{L}\{t^n 1(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Eltolási tételek

Legyen

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C} \quad \Re\{s\} > \alpha.$$

Legyen $a \in \mathscr{C}$, amelyre $\Re\{s-a\} > \alpha$. Ekkor

$$F(s-a) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-(s-a)t}dt$$
$$= \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{at}dt = \mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}f(t)\}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha egy $f(t)$ függvényt e^{at}-vel szorzunk, akkor a *Laplace*-transzformáltján a-val való eltolást kell elvégezni.

A.6. feladat

Vizsgáljuk a $f(t) = 1(t-\tau)$ függvény *Laplace*-transzformáltját:

$$\mathscr{L}\{1(t)\} = \int_\tau^\infty \mathrm{e}^{-st}dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_\tau^\infty = \lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} - \lim_{t\to\tau}\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s} = \frac{1}{s}\mathrm{e}^{-s\tau}.$$

A.7. feladat

$$\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos\omega t\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\cos\omega t dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-st}\frac{\mathrm{e}^{i\omega t}+\mathrm{e}^{-i\omega t}}{2}dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(\alpha+s-i\omega)t}dt + \int_0^\infty \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(\alpha+s+i\omega)t}dt$$
$$= \left[\frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(\alpha+s-i\omega)t}}{-(\alpha+s-i\omega)}\right]_0^\infty + \left[\frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(\alpha+s+i\omega)t}}{-(\alpha+s+i\omega)}\right]_0^\infty$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{\alpha+s-i\omega} + \frac{\frac{1}{2}}{\alpha+s+i\omega} = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$$

Ha egy $f(t)$ függvényen végzünk eltolást az időtengely mentén τ idővel jobbra, akkor hasonlóan belátható, hogy *Laplace*-transzformáltját az $\mathrm{e}^{-s\tau}$ függvénnyel kell szorozni:

$$\mathscr{L}\{f(t-\tau)\} = \mathrm{e}^{-s\tau}F(s).$$

Kezdetiérték- és végértéktételek

Belátható, hogy az idő- és operátorfüggvények s tartománybeli kezdeti és ún. végértékei között fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s),$$
$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Ezek a tételek igen hasznosak a *Laplace*–inverz *Laplace*-transzformációk számításánál az eredmények ellenőrzése szempontjából.

Az inverz *Laplace*-transzformáció kiszámítása

Az inverz *Laplace*-transzformációt az alábbi improprius integrállal definiáltuk:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\mathrm{e}^{st} ds, \quad t \in [0,\infty).$$

Legyenek az $F(s)$ függvénynek egyszeres pólusai: $\mathscr{P} = \{p_1,\ldots,p_n\}$, és legyen $\sigma > \Re\{p_i\}, i = 1,\ldots,n$. Ekkor a fenti improprius integrált helyettesíthetjük egy olyan zárt görbe menti integrállal, amelyet a képzetes tengellyel párhuzamos, attól balra σ távolságra haladó egyenes és egy R sugarú félkör alkot. Az $F(s)$ pólusai ezen a zárt görbén belül helyezkednek el. Belátható, hogy az e^{st} függvény pólusai mind a jobb félsíkra esnek. Ha $R \to \infty$, akkor az integrált az ún. reziduum-tétellel számíthatjuk ki:

$$f(t) = \sum_{p_i\in\mathscr{P}} Res_{p_i} F(s)\mathrm{e}^{st} = \sum_{i=1}^{n} \lim_{s\to p_i} (s-p_i)F(s)\mathrm{e}^{st}.$$

Ha az $F(s)$ racionális törtfüggvény, azaz

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{\Pi_{j=1}^{m}(s-z_i)}{\Pi_{i=1}^{n}(s-p_i)},$$

ahol $\mathscr{Z} = \{z_1,\ldots,z_m\}$ a zérusok, $\mathscr{P} = \{p_1,\ldots,p_n\}$ pedig a pólusok, akkor az előző összefüggés alapján

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{s\to p_i} (s-p_i)F(s)\mathrm{e}^{st} = \sum_{i=1}^{n} \lim_{s\to p_i} \frac{b(s)}{\frac{a(s)}{(s-p_i)}}\mathrm{e}^{st},$$

ahol az

$$a'(s) = \lim_{s \to p_i} \frac{a(s)}{(s-p_i)}$$

határérték az $a(s)$ polinom deriváltja az $s = p_i$ helyen. Ezzel megkaptuk az ún. *kifejtési tételt*, amely szerint egyszeres pólusokra az $F(s)$ függvény inverz *Laplace*-transzformáltja :

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b(s)}{a'(s)} \mathrm{e}^{st}|_{s=p_i},$$

ahol $a'(s)$ az $a(s)$ polinom s szerinti deriváltja.

A.8. feladat

Legyen $F(s) = \frac{1}{s-a}$. Az $F(s)$ pólusa $p = a, b(s) = 1, \quad a(s) = s-a, \quad a'(s) = 1$. A kifejtési tétellel:

$$f(t) = \lim_{s \to a} \mathrm{e}^{st} = \mathrm{e}^{at}.$$

Az inverz *Laplace*-transzformált kiszámítása parciális törtekre bontással

Egyszeres pólusok esetén az $F(s)$ függvényt parciális törtekre bonthatjuk:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s-p_i},$$

ahol $R_i, i = 1, \ldots, n$ az $F(s)$ rezidumai a $p_i, i = 1, \ldots, n$ helyeken. Ekkor az inverz *Laplace*-transzformált egyszerű összeg alakban írható:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{s \to p_i} (s-p_i) \frac{R_i}{s-p_i} \mathrm{e}^{st} = \sum_{i=1}^{n} R_i \mathrm{e}^{p_i t}.$$

A.9. feladat

$F(s) = \frac{5}{s+2}, \quad f(t) = 5\mathrm{e}^{-2t}$

A.10. feladat

$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+5)}, \quad f(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-5t}$

A.11. feladat

$F(s) = \frac{s+3}{(s+1-5i)(s+1+5i)}$

$$\begin{aligned} f(t) = &\lim_{s\to -1+5i}(s+1-5i)\frac{s+3}{(s+1-5i)(s+1+5i)}\mathrm{e}^{st}+\\ &\lim_{s\to -1-5i}(s+1+5i)\frac{s+3}{(s+1-5i)(s+1+5i)}\mathrm{e}^{st}\\ &= 0.2i\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{-5it}-\mathrm{e}^{5it})+0.5\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^{5it}+\mathrm{e}^{-5it})\\ &= 0.4\mathrm{e}^{-t}sin(5t)+\mathrm{e}^{-t}cos(5t). \end{aligned}$$

Adjuk meg a következő függvények $\mathscr{L}$-transzformáltját!

A.12. feladat

$f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}$

Megoldás:

$$F(s) = \mathscr{L}\{\mathrm{e}^{-\alpha t}\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\cdot \mathrm{e}^{-st}dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\alpha+s)}dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{-t(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\right]_0^\infty =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\right] - \left.\frac{\mathrm{e}^{-t(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\right|_{t=0} = 0 - \frac{1}{-(\alpha+s)} = \frac{1}{\alpha+s}$$

A.13. feladat

$f(t) = 1-\mathrm{e}^{-\alpha t}$

Megoldás:

$$F(s) = \mathscr{L}\{1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\} = \int_0^\infty \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\right) \cdot \mathrm{e}^{-st} dt = \int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-st} - \mathrm{e}^{-t(\alpha+s)}\right) dt =$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} dt - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\alpha+s)} dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \left[\frac{\mathrm{e}^{-t(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\right]_0^\infty =$$

$$= \left[\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right) - \left.\frac{\mathrm{e}^{-st}}{-s}\right|_{t=0}\right] - \left[\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\right) - \left.\frac{\mathrm{e}^{-t(\alpha+s)}}{-(\alpha+s)}\right|_{t=0}\right] =$$

$$= \left[0 - \frac{1}{-s}\right] - \left[0 - \frac{1}{-(\alpha+s)}\right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{\alpha+s}$$

Határozzuk meg a következő függvények inverz $\mathscr{L}^{-1}$-transzformáltját!

A.14. feladat

$$F(s) = \frac{2}{5s+1}$$

Megoldás:

$$F(s) = \frac{0.4}{s + \frac{1}{5}}$$

$$s + \frac{1}{5} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = -\frac{1}{5}$$

$$f(t) = \lim_{s\to-\frac{1}{5}} \left[\left(s + \frac{1}{5}\right) \cdot \frac{0.4}{s+\frac{1}{5}} \cdot \mathrm{e}^{st}\right] = \lim_{s\to-\frac{1}{5}} \frac{2}{5} \cdot \mathrm{e}^{st} = \frac{2}{5} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t}$$

A.15. feladat

$$F(s) = \frac{2}{s(5s+1)}$$

Megoldás:

$$F(s) = \frac{0.4}{s\left(s+\frac{1}{5}\right)}$$

$$s\left(s+\frac{1}{5}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_1 = 0, \qquad p_2 = -\frac{1}{5}$$

$$f(t) = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{0.4}{s\left(s+\frac{1}{5}\right)}\cdot e^{st}\right] + \lim_{s\to -\frac{1}{5}}\left[\left(s+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{0.4}{s\left(s+\frac{1}{5}\right)}\cdot e^{st}\right] =$$

$$= 2 - 2\cdot e^{-\frac{1}{5}t} = 2\cdot\left(1-e^{-\frac{1}{5}t}\right)$$

A.16. feladat

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2+3s+2)}$$

Megoldás:

$$s(s^2+3s+2) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_1 = 0, \qquad p_2 = -1, \qquad p_3 = -2$$

$$f(t) = \lim_{s\to 0}\left[s\cdot\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\cdot e^{st}\right] + \lim_{s\to -1}\left[(s+1)\cdot\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\cdot e^{st}\right] +$$

$$+ \lim_{s\to -2}\left[(s+2)\cdot\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\cdot e^{st}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{-1\cdot(-1+2)}\cdot e^{-t} + \frac{1}{-2\cdot(-2+1)}\cdot e^{-2t} = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-2t}$$

A.1. táblázat. Gyakran használt *Laplace*-transzformációs összefüggések

Laplace-transzformált, $\mathscr{L}(s)$	Időfüggvény, $f(t)$, $t \in [0, \infty)$
1	$\delta(t)$
$e^{-s\tau}$	$\delta(t-\tau)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{s}{1+\beta s}$	$\frac{1}{\beta}\delta(t) - \frac{1}{\beta^2}e^{-\frac{1}{\beta}t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$1 - e^{-\alpha t}$
$\frac{\alpha}{s(s-\alpha)}$	$-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}(1+\alpha t)e^{-\alpha t}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\beta-\alpha}e^{-\beta t}$
$\frac{s+A}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{A-\alpha}{\beta-\alpha}e^{-\alpha t} + \frac{A-\beta}{\alpha-\beta}e^{-\beta t}$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	$-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}t + \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}te^{-\alpha t} - \frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2(s+\beta)}$	$-\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}e^{-\alpha t} + \frac{1}{\beta-\alpha}te^{-\alpha t} + \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}e^{-\beta t}$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2(s+\beta)}$	$\frac{\beta}{(\beta-\alpha)^2}e^{-\alpha t} + \frac{\alpha}{\alpha-\beta}te^{-\alpha t} - \frac{\beta}{(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$
$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)}e^{-\alpha t} + \frac{1}{\beta(\beta-\alpha)}e^{-\beta t} + \frac{1}{(\alpha\beta)}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{e^{-\beta t}}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)} + \frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
$\frac{s+A}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{(A-\alpha)e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{(A-\beta)e^{-\beta t}}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)} + \frac{(A-\gamma)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\sin\omega t$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$
$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$
$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin\omega t)$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}e^{-\alpha t}\sin\omega t$
$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\omega t$

Polinomosztás

A következő feladatok a polinomosztás témakörébe tartoznak. A polinomosztás menete a következő: kiszámítjuk az osztandó és az osztó legnagyobb kitevőjű tagjainak hányadosát. Ezzel az értékkel visszaszorozzuk az osztót. Az így kapott eredményt kivonjuk az osztandóból. Ezután a kivonás utáni értéket tekintjük osztandónak, és ezen alkalmazzuk az előbb leírt lépéseket. Az osztás addig tart, amíg az osztandó legnagyobb kitevőjű tagjának fokszáma nagyobb vagy egyenlő, mint az osztó legnagyobb kitevőjű hatványának fokszáma.

A.17. feladat

$$(x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1) : (x^2 + 1) =$$

1. lépés:
Az osztandó és az osztó legnagyobb kitevőjű tagjának hányadosa: x^3.

$$\begin{aligned}
&(x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1) : (x^2 + 1) = x^3 \\
-&(x^5 + x^3) \\
=& x^4 - 2x^3 - 2x - 1 \text{ (ez lesz az új osztandó)}
\end{aligned}$$

2. lépés: Az új osztandó és az osztó legnagyobb kitevőjű tagjának hányadosa: x^2.

$$\begin{aligned}
&(x^4 - 2x^3 - 2x - 1) : (x^2 + 1) = x^2 \\
-&(x^4 + x^2) \\
=& -2x^3 - x^2 - 2x - 1 \text{ (ez lesz az új osztandó)}
\end{aligned}$$

3. lépés: Az új osztandó és az osztó legnagyobb kitevőjű tagjának hányadosa: $-2x$.

$$\begin{aligned}
&(-2x^3 - x^2 - 2x - 1) : (x^2 + 1) = -2x \\
-&(-2x^3 - 2x) \\
=& -x^2 - 1 \text{ (ez lesz az új osztandó)}
\end{aligned}$$

4. lépés:

Az új osztandó és az osztó legnagyobb kitevőjű tagjának hányadosa: -1.

$$\begin{aligned}
&(-x^2-1):(x^2+1)=-1\\
&-(-x^2-1)\\
&=0
\end{aligned}$$

A eredmény:

$$x^3+x^2-2x-1$$

A.18. feladat

$(x^3-1):(x-1)=$

$$\begin{aligned}
&(x^3-1):(x-1)=x^2+x+1\\
&-(x^3-x^2)\\
&=x^2-1\\
&-(x^2-x)\\
&=x-1\\
&-(x-1)\\
&=0
\end{aligned}$$

Az eredmény:

$$x^2+x+1$$

A.19. feladat

$(x^4-2x^3+4x^2-6x+8):(x-1)=$

$$
\begin{aligned}
&(x^4-2x^3+4x^2-6x+8):(x-1)=x^3-x^2+3x-3\\
&-(x^4-x^3)\\
&=-x^3+4x^2-6x+8\\
&-(-x^3+x^2)\\
&=3x^2-6x+8\\
&-(3x^2-3x)\\
&=-3x+8\\
&-(-3x+3)\\
&=5
\end{aligned}
$$

Az osztásban maradék képződött.
Az eredmény:

$$x^3-x^2+3x-3+\frac{5}{x-1}$$

A.20. feladat

$(x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10):(x^2-2x+2)=$

$$
\begin{aligned}
&(x^5-2x^4+x^3+7x^2-12x+10):(x^2-2x+2)=x^3-x+5\\
&-(x^5-2x^4+2x^3)\\
&=-x^3+7x^2-12x+10\\
&-(-x^3+2x^2-2x)\\
&=5x^2-10x+10\\
&-(5x^2-10x+10)\\
&=0
\end{aligned}
$$

Az eredmény:

$$x^3-x+5$$

A.21. feladat

$(2x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 2) : (x^2 + x + 1) =$

$$
\begin{aligned}
&(2x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 2) : (x^2 + x + 1) = 2x^2 - 3x + 5 \\
&-(2x^4 + 2x^3 + 2x^2) \\
&= -3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 \\
&-(-3x^3 - 3x^2 - 3x) \\
&= 5x^2 + 6x + 2 \\
&-(5x^2 + 5x + 5) \\
&= x - 3
\end{aligned}
$$

Az osztásban maradék képződött.
Az eredmény:

$$2x^2 - 3x + 5 + \frac{x-3}{x^2+x+1}$$

