# Bevezetés

Évek óta több ismeretterjesztő folyóirat számára írok matematikatörténeti vázlatokat. Időközben annyira belelendültem a tevékenységbe, hogy körülbelül két tucat új, vázlatos tanulmányt is megírtam. Ezeket a tanulmányokat kívánom most átdolgozva és összefésülve könyvként közreadni. Több célom volt a vázlatok írásával: a) szórakoztató formában tartalmas matematikával megismertetni az olvasókat; b) ráébreszteni a matematikában jártasabb olvasókat, hogy a matematikai felfedezések tényleges története gyakran ellentétes az utólagos logikai, tankönyvszerű kifejtéssel.

Korábbi könyvemet (Válogatott fejezetek a matematika történetéből, Bp. Typotex, 2009) matematikailag képzett – volt vagy jelenlegi – egyetemista hallgatóknak írtam; most szélesebb tábort szeretnék elérni, érdeklődő középiskolásokat vagy már végzetteket, akik korábban tanultak bevezető kalkulust (elemi analízist) is, és hajlandók megismerkedni a komplex számokkal és a valószínűség-számítás elemeivel is. Ugyanakkor most jobban követem az időrendi sorrendet, és az ágazati beosztás helyett az életrajzokat követem, vállalva az elkerülhetetlen ismétléseket (amelyeket a fejezetszámra mutató előre és hátra nyilak jeleznek: [→] és [←]) és a logikai bukfenceket. (Például a Napier-ről szóló fejezet haladóbb anyagot tartalmaz, mint a későbbi Newton–Leibniz-fejezet!) Minden fejezet vagy alfejezet első bekezdése(i) tartalmaz(nak) egy (vagy több) rövid életrajzot, és a következő bekezdés egy rövid korrajzot ad.

Két végletet igyekeztem elkerülni: 1) olyan információkkal elárasztani az olvasókat, amelyekből alig érthető valami a nem szakember számára (például Cauchy megteremtette a komplex változós függvények elméletét); 2) vagy hogy a matematika helyett a matematikusok furcsa vonásaira összpontosítsam az olvasók figyelmét (például a kimagasló matematikusok között jóval nagyobb arányban találunk furcsa egyéneket, mint az átlagemberek között). De így is biztosan lesznek olyan matematikai bonyodalmak, amelyeket az olvasók jelentős része nem ért meg azonnal, javaslom ezeket első olvasáskor át ugrani (a hosszabb – és gyakran elnagyolt és heurisztikus – bizonyításokkal együtt). Másrészt a hitelesség kedvéért előadok olyan részleteket is, amelyeket kényesebb ízlésű írók kihagytak volna.

Közgazdász lévén nem tudtam ellenállni néhány közgazdasági alkalmazás bemutatásának (jelenérték mint Laplace-transzformált, játékelmélet és a közgazdasági modellek). Ha a matematikai szabatosságot mindenáron meg akartam volna tartani, akkor meg kellett volna állnom a kalkulus születése előtt, azaz 1670-nél. Ezt szellemi öncsonkításnak éreztem volna, és vállalva a pongyolaságot, igyekeztem eljutni a 20. századig.

Az anyag jobb elsajátítását a jegyzetben elhelyezett feladatok segítik (a * jelzés arra utal, hogy a feladat nehéz), részletes megoldásokkal a könyv végén. Néha számítógépre lesz szükség a feladatok megoldásához, de ezek kihagyhatók.

A jegyzetet még nem volt módom tanítani, de remélem, hogy néhány középiskolai tanár részben vagy egészben kipróbálja. Aki hosszúnak találja a *Rövid matematikatörténetet*, az többféleképpen is rövidíthet. Például csak az analízissel, csak a számelmélettel vagy csak a valószínűség-számítással foglalkozik.

Köszönetemet fejezem ki Freud Róbertnek és Rácz Andrásnak, akik egy korábbi változat minden sorát gondosan átolvasták, Besenyei Ádámnak, Forberger Klaudiának, Forró Mártonnak, Kovács Kristófnak, Lerner Tamásnak, Pataki Jánosnak, Podonyi Anikónak, Reguly Ágostonnak, Rendek Csabának és Tétényi Eszternek értékes tanácsaikért. Gerner József és Varga Csaba végezte el a gépirat véglegesítését, beleértve az ábrák beillesztését. Természetesen a megmaradó hibákért kizárólag én vagyok felelős. Mindenkitől szívesen veszek minden segítő megjegyzést.

Budapest, 2012. november
Simonovits András
email: simonovits.andras@krtk.mta.hu

# Tartalomjegyzék

# 1. Eukleidész Elemei

> Eukleidész (kb. i.e. 300) már a városállamok bukása utáni, hellenisztikus korban élt, és a Nagy Sándor által alapított egyiptomi fővárosban, Alexandriában alkotott. Fő műve a több magyar fordításban is elérhető *Elemek*, amelynek jelentős része az elemi geometriát a ma is használt axiomatikus felépítésben tárgyalja. Tudjuk, hogy már előtte is írtak ilyen monográfiákat, de csak az övé maradt fent, talán azért is, mert jobban volt megszerkesztve, mint a korábbiak. Azt is tudjuk, hogy nem volt igazán jelentős matematikus, de elsőrendű tankönyvet írt, amely az elődök munkáit ragyogóan összegezte. Időtállóságára jellemző, hogy mai középiskolás geometriai könyveink is az Elemeket követik, amely talán a Biblia után a legtöbbször kiadott munka.

Ebben a fejezetben több évszázadot fogunk át, ezért korismertetésünk is több részre tagolódik. Most csak annyit jegyzünk meg, hogy a görögök előtti államok általában folyami civilizációk voltak (Egyiptom, Mezopotámia, Kína, India,...), ahol az öntözés megszervezése hatalmas és központosított állam létezését feltételezte. Ezzel szemben a görög civilizáció egészen Nagy Sándorig városállamokból állt, és a jelenlegi Görögországnál jóval nagyobb területet fogott át. A városállami demokráciákban szabadon gondolkoztak és vitatkoztak a szabadok (a rabszolgák nem), és különleges fejlettségű szellemi kultúrát hoztak létre.

## 1.1. Az Eukleidész előtti matematika

Tudjuk, hogy már a görögök előtt is volt matematika. A görög matematikusok voltak azonban az elsők, akik az i.e. 6. századtól kezdve felismerték, hogy (másokra visszavezethetetlen) alapfogalmakat (pont, egyenes, sík, tér,...) kell bevezetni, azokra bizonyításra nem szoruló axiómákat kell megfogalmazni, majd új fogalmak (kör, háromszög,...) definiálása után tételek mondhatók ki, amelyeket bizonyítani kell. Ez a legkönnyebben a geometriában végezhető el.

Talán a kis-ázsiai Thalész (kb. i.e. 585 körül) volt az első matematikus, aki nemcsak kimondott (korábban már ismert, és vélhetőleg a Közel-Keletről származó) tételeket, hanem megpróbált logikus bizonyításokat adni rájuk. Elemi tétele a nevét viseli: *A félkör átmérője a körív bármely pontjáról derékszögben látszik (kivéve az átmérő két végpontját).*

A dél-itáliai Püthagorasz (kb. i.e. 550 körül) nemcsak matematikus, hanem zenetudós, filozófus és egy titkos társaság szellemi vezetője is volt. A róla elnevezett tételt már korábban is ismerték.

**1.1. tétel.** *(Püthagorasz tétele, i.e. 6. század) A derékszögű háromszög átfogójára emelt négyzet területe egyenlő a befogókra emelt négyzetek területének összegével. Képletben, ha egy derékszögű háromszög két befogójának hossza a és b, átfogójáé pedig c, akkor fennáll a következő egyenlőség:*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Úgy tűnik azonban, hogy a hangszerek húrhosszainak aránya és a zenei harmónia közti összefüggést ő fedezte föl. Legegyszerűbb megfigyelése: ha egy húr hosszát megfelezzük, akkor megpengetve kétszer nagyobb rezgésszámú hangot, az alaphang oktávját adja, amely egybecseng az eredeti hanggal. Bonyolultabb osztásnál, amikor a húrt 12 egyenlő részre osztjuk, és ebből 8 vagy 9 egységet veszünk, akkor a hang rezgésszáma harmonikusan – jól hangzóan – változik: kvinttel („szó") vagy kvarttal („fá") magasabb hangot kapunk.

Bár az athéni Platón (i.e. 427–i.e. 348) elsősorban filozófus volt, de iskolájában (az Akadémiában) nagy súlyt fektetett a matematikai képzésre – mint a logikus észjárás segítőjére. Nem csoda, hogy iskolájában találjuk meg a kor nagy matematikusait, különösen Theaitétoszt (kb. i.e. 414–i.e. 369), aki a korábbról ismert kocka, tetraéder és dodekaéder után felfedezte a 4. és az 5. szabályos poliédert, az oktaédert és az ikozaédert. (Bevallom, nehéz elhinni, hogy az oktaédert a dodekaéder után fedezték fel.) A kor legnagyobb tudósa azonban Eudoxosz (kb. i.e. 410–i.e. 355), aki geometriai tudását csillagászként is gyümölcsöztette, amikor megalkotta az első kozmikus modellt.

## 1.2. Eukleidész geometriája

Mielőtt rátérnénk Eukleidész életművére, két róla szóló anekdotát mondunk el röviden: a) Amikor királya megkérdezte tőle, hogy nincs-e valamilyen gyorsabb út a matematika elsajátításához, mint az Elemek, akkor Eukleidész öntudatosan azt válaszolta: „a matematikához nincs királyi út." b) Egy gyakorlatias érzékű hallgatója megkérdezte a mestert: „Mi a haszna a matematikának?" A platonista tanár gőgösen azt mondta egy szolgájának: „Adj egy obulust a diáknak, hadd legyen valami haszna." (Reméljük, a második válasz nem vonatkozik e könyv olvasóira.)

A bevezetőben már jeleztük, hogy Eukleidész a hellén birodalom új központjában, Alexandriában dolgozott, amelyet Nagy Sándor alapított i.e. 323 előtt, és róla nevezték el. A rövidség kedvéért csak az I. könyv felépítését vázoljuk röviden. Ismert tételekre emlékeztetünk. I.1. Az egyenlő szárú háromszög megszerkeszthető ... I.15. Csúcsszögek egyenlők ... I.16. A háromszög bármelyik külső szöge nagyobb, mint a másik két csúcsánál fekvő szög ... I.20. A háromszög bármely két oldalhosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldalé (háromszög-egyenlőtlenség) ... Egybevágósági tételek ...De megakadt az I.30. tételnél, és a folytatáshoz szüksége volt a párhuzamossági axiómára, amelyet itt későbbi átfogalmazásban adunk meg: *egy adott egyeneshez egy vele egy síkban fekvő külső pontból pontosan egy párhuzamos egyenes húzható.* [→ **18**], s ezzel már igazolható az I.32: a háromszög belső szögeinek összege két derékszög. Hasonlóan igazolható az I.16. élesítése: a háromszög bármely két belső szögének összege egyezik a harmadik szög külső szögével.

S végül az I. könyv csúcspontja: I.47. (a Pitagorasz-tétel, 1.1. tétel.) A bizonyítás terület-átalakításon alapul, de nem a középiskolában tanulton, hanem annak egyik korábbi változatán. Ne feledkezzünk meg az I.48.-ról sem, amely a tétel megfordítását mondja ki, azaz a két tétel jellemzi a derékszögű háromszögeket az összes háromszög körében.

Ujjgyakorlatként egy jól ismert euklideszi tétel következik.

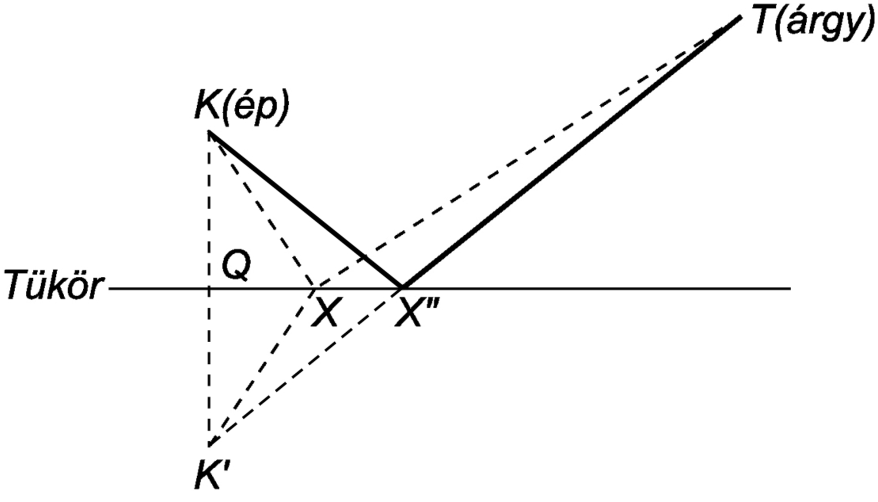
**1.1. feladat.** (Eukleidész, IV.4.) Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást!

Az *Elemek* utolsó tétele (XIII. könyv) mintegy megkoronázza a művet: pontosan öt szabályos poliéder létezik [→ **13.2. feladat**].

Érdekes, hogy megjelenik a szélsőérték-számítás. Hérón már tudta, hogy az $A$ pontból a síktükörtől visszaverődő fénysugár a legrövidebb úton jut el a $B$ pontba.

A görög matematikusok gondolkodásának kifinomultságára jellemző, hogy hamar felvetették: a párhuzamosokról szóló, híres V. posztulátum (más néven: axióma) más, mint a többi: úgy érezték, hogy ez valójában egy még be nem bizonyított tétel. Azért gondolták így, mert megfogalmazása tételszerűen hosszadalmas volt, és a végesben nem lehet ellenőrizni – szemben a többi axiómával [→ **18**]. Ugyanakkor a görögök nem teljesen értették meg, hogy az alapfogalmakat (pont, egyenes, sík stb.) nem lehet a végtelenségig visszavezetni, ezek az axiómákkal együtt határozzák meg a rendszert.




1.1. ábra. Fényvisszaverődés a síktükörről: a legrövidebb út

Az elmúlt 2300 évben sokan támadták a szerzőt és az őt követő matematikusokat, hogy miért kell olyan nyilvánvaló dolgokat bizonyítani, mint amilyen az I.16 vagy az I.20. A válasz nyilvánvaló: az axiomatikus tárgyalásban nem szabad a szemléletre támaszkodni, a logikai szabatosság megköveteli, hogy ,,mindent" bizonyítsunk legalább egyszer. Természetesen a görög matematikusok találtak olyan összefüggéseket is, amelyek távolról sem nyilvánvalóak, például a már említett Thalész- vagy Pitagorasz-tétel.

A kritikus és elvont görög matematikai gondolkodásra különösen jellemző, hogy már az i.e. 5. század végén olyan feladatokkal is foglalkoztak, amelyeknek nem volt gyakorlati jelentőségük, elméletileg azonban csak a 19. századi késői utódok tudták azokat megoldani. Ilyen a szabályos sokszög szerkesztése, a szögharmadolás, a kockakettőzés (az ún. déloszi probléma) és a kör négyszögesítése [→ **16.1**].

Eukleidész két utódjának a nevét említjük meg: az ókor legnagyobb geométere Apollóniosz volt (i.e. 262 után–i.e. 190 előtt), aki különösen a kúpszeletek témájában ért el csodálatra méltó eredményeket. S még nála is nagyobb volt Arkhimédész [→ **3**], akinek munkájában egyébként többször előfordul Eukleidész neve.

## 1.3. Eukleidész számelmélete

Az Elemek a geometria mellett számelméletet, analízist és aritmetikát is tartalmazott. Itt csak a matematika három különlegesen szép tételét idézzük fel. Jellemző, hogy ebből két bizonyítás indirekt, azaz Eukleidész föltette, hogy az állítás ellenkezője igaz, és ebből ellentmondást kapott.

**1.2. tétel.** *(Eukleidész, IX.20.) A prímszámok sorozata nem véges – vagyis végtelen sok prímszám van.*

**Bizonyítás.** Indirekt módon tegyük föl, hogy csak véges számú prímszám van, jelük $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$. Szorozzuk össze őket és a kapott számhoz adjunk 1-et. Az így kapott szám vagy maga is prímszám, vagy összetett, de akkor csak olyan osztói lehetnek, amelyek a felsorolt prímszámok között nem fordultak elő, hiszen bármelyikükkel osztva, 1 maradékot kapunk. Mindkét esetben új prímet kapnánk, s ez ellenmondás. □

Felhívjuk az olvasó figyelmét arra, hogy minden egyszerűsége ellenére e tétel és bizonyítása nagyon mély: általában nem a nagyság szerint következő prímszámot adja meg, hanem „csak” egy újabbat.

A már említett Pitagorasz-tétel megfordítását kiaknázva, már a piramisépítő egyiptomiak is úgy szerkesztettek derékszögű háromszöget, hogy kifeszítettek egy 3, 4 és 5 hosszúságú háromszöget, és a leghosszabb oldallal szemben derékszöget kaptak. (Valóban, $3^2 + 4^2 = 5^2$, mert $9 + 16 = 25$.) Természetes módon felvetődik a kérdés: milyen derékszögű háromszögek oldalhosszai egész számok? A megoldás megtalálható Eukleidész Elemeiben, és a megoldásokat pitagorászi számhármasoknak nevezik.

**1.2. feladat.** Igazoljuk a négyezer éves babiloni szabályt: a következő egész számhármasok kielégítik a Pitagorasz-tételt:

$$x = 2mn, \qquad y = m^2 - n^2, \qquad z = m^2 + n^2,$$

ahol $m$, $n$ természetes számok, amelyekre $m > n$. Megjegyezzük, hogy ha az összes, lényegében különböző (ún. primitív) számhármast keressük, akkor ki kell kötnünk, hogy $m$, $n$ különböző párosságúak és $(m, n) = 1$.

Nem minden egész befogójú derékszögű háromszög átfogója egész, sőt a legtöbb nem is racionális. Például ha mindkét befogó hossza azonos egész.

**1.3. tétel.** *(Eukleidész, X.27.) Az $x^2 = 2$ megoldása nem írható föl két egész szám hányadosaként, mai szóval $\sqrt{2}$ irracionális.*

**1.3. feladat.** a) Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}$ irracionális! b) Más alakban: igazoljuk, hogy két négyzetszám közül a nagyobbik nem lehet a kisebbiknek pontosan a kétszerese.

Hasznossága miatt kiemeljük az Eukleidészről elnevezett algoritmust, amellyel két természetes szám legnagyobb közös osztóját határozhatjuk meg. Legyen $a$ és $b$ a két természetes szám, feltehetjük, hogy $a > b$, és keressük a legnagyobb közös osztójukat, jele $(a,\ b)$. Végezzük el a maradékos osztást, azaz keressünk olyan $q > 0$ és $b > r \geq 0$ számot, amelyre $a = qb+r$. Ha $r = 0$, kész vagyunk, hiszen $b$ osztója $a$-nak: $(a, b) = b$. Ha $r \neq 0$, akkor ismételjük meg az eljárást, de most $b$-t osszuk el $r$-rel. Mivel $r < b$, a folyamat véges sok lépésben befejeződik, és az utolsó (0 maradékú) osztó a legnagyobb közös osztó. Kis számoknál persze egyszerűbb, ha fejben törzstényezőkre bontjuk a két számot, és vesszük a közös tényezőket. Például, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ és $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ legnagyobb közös osztója $2 \cdot 3 = 6$. De nagyobb számoknál már érdemes az euklideszi algoritmust alkalmazni. Külön vonzereje e módszernek, hogy nemcsak egész számokra alkalmazható, hanem polinomokra is, sőt sok számítógépes algoritmusban is döntő szerepe van.

Érdekes következmény:

**1.4. tétel.** *(Eukleidész, VII.30.) Ha a $p$ prímszám osztója az $ab$ szorzatnak, akkor osztója $a$-nak vagy $b$-nek.*

**Bizonyítás.** Tegyük föl, hogy $p$ az $a$-nak nem osztója. Az euklideszi algoritmus alapján belátható, hogy két szám legnagyobb közös osztója felírható, mint a két szám lineáris kombinációja: $(a, b) = ax + by$, ahol $x$ és $y$ egész. (Sőt, az algorimtus hatékonyan elő is állítja a kérdéses kombinációt.) Mivel $p$ prím, és a feltevés szerint az $a$-nak nem osztója, a legnagyobb közös osztó $(a, p) = 1$, és ezért létezik két olyan $x$ és $y$ egész szám, amelyre $xa + yp = 1$. Beszorozva $b$-vel: $xab + ypb = b$. A bal oldal mindkét tagja osztható $p$-vel, tehát a jobb oldal is osztható vele. □