

# 14. fejezet

## Tárgymutató

### 14.1. Címszavak jegyzéke

#### A

Adams–Bashforth módszerek	71
Adams–Moulton módszerek	71
Adams–módszerek, változó lépéstávolságú	96
algebri-differenciálegyenletek	150
alulintegráció	346, 377, 380
approximáció rendje	222
A-stabilitás	125, 129
erős	125, 146, 148
$AN$ -stabilitás	158
$A(\alpha)$ -stabilitás	125

#### B

BDF-képletek	130, 142
B-stabilitás	154
BN-stabilitás	154
beágyazási tétel, diszkrét	238
beágyazható, folytonosan	238
beágyazott módszer	49
becslés, a-priori	218
stabilitási	221
belövés módszere, megcélzó módszer	292
Butcher-féle lineáris módszercsalád	166
Butcher–mátrix	46

Butcher-táblázat	46
Butcher-transzformáció	137

**C**

Courant-Fischer-(Poincaré-)tétel	322
Crouzeix és Raviart tétele	195
csererendszer	10, 24, 114

**D**

Davidenko-módszer	129
delta-függvény, diszkrét	229
Differencia-egyenletek	94
differenciahányados, egyoldalú	266
haladó	26, 213, 351
központi elsőrendű	214, 352
(központi) másodrendű	215, 216, 353
haladó harmadrendű	215, 284
(központi) negyedrendű	216, 285
retrográd	130, 214
differenciálegyenlet megoldása végtelen intervallumon	181
differenciálegyenlet rendszer, merev	114
differenciaséma	216
egzakt	228, 259, 272
konvergens	222
konzervatív	259
konzisztens	221
súlyozott	120, 195
Dirichlet-féle peremfeltétel	209
DIR-módszerek	135
diszkrétizáció, véges differencia	221
többszintű	373
disszipatív egyenlet	15, 152
dualitási fogás	319

**E**

egyenlet, disszipatív	15, 152
elliptikus	302
gerenda-	372

14.1. CÍMSZAVAK JEGYZÉKE	401
hővezetési	209
konvekció-diffúzió	262
egylépéses módszer	27
stabil	31
energia megőrzése (avagy: megmaradása)	172, 260
energia-módszer	237
erős stabilitást megtartó módszerek	163
Euler-módszer, haladó vagy explicit	26, 116, 120, 177
retrográd vagy implicit	116, 120, 129, 142, 177
exponenciális mátrixfüggvény	19, 23, 203

## F

feladat, inverz	68, 300, 377
fixpont iteráció	71, 291
forrás, mesterséges	258
Fredholm-alternatíva	206
függvény, interpolációs	342
függvényterek:	
$H_0^1(0, 1)$	239, 304
$H^1(0, 1)$	245, 305
$H_0^1(\omega_h)$	239
$L_2(\omega_h)$	239
$L_2(0, 1)$	238
$H_0^2(\omega_h)$	340
$H^2(\omega_h)$	287

## G

Galjorkin-módszer	305, 310
folytonos	174
Gauss-elimináció, sávós	131, 223, 290, 321, 347
Gauss-képletek	134, 316, 344
Gauss-Newton módszer	300
Gear-módszer	117, 130
Green-féle függvény	214, 271, 291
diszkrét	230

## Gy

gyökfeltétel	87
--------------	----

erősített 92

**H**

Hamilton-rendszer	175
határérték, reguláris	182
határréteg	117
hatékonyság	54, 142
Hermite-bázis	342
Hermite-féle interpolációs polinom	58, 105, 108
hiba, globális	29
kerekítési	38, 209, 229
lokális	28, 81
hibabecslés	58
hibaindikátor	61, 101, 225
normált hibakonstans	108, 127
hibavektor	223
Hilbert-tér	305, 308

**I**

Iljin-séma	273
invariánsok megőrzése	
lineáris invariánsok	171
nemlineáris invariánsok	174
inverz feladatok	68, 300, 377

**K**

kalapfüggvények	310
képlethiba	28, 42, 81
Runge-Kutta módszeré	42
többlépéses módszeré	81
differenciasémáé	222
kerekítési hibák	38
kollokációs eljárás	105
kontraktív megoldások	15, 152
kontraktívitás	15, 152, 170
konvergencia rend	29, 48, 222
egyenletes	277
konvergens módszer	28, 93, 224

## 14.1. CÍMSZAVAK JEGYZÉKE

403

monoton módon (Newton–módszer)	293
konzervativitás	171, 261
konzisztencia rend	29, 48, 81, 224
konzisztens módszer	29, 42, 81
közelítés, legjobb	310
középpont szabály	74
Kronecker–szorzat	136, 156

## L

Lagrange–interpoláció	71, 97
Lax–Milgram lemmá	310
lépéstávolság (lépésköz)	25, 215
változó	36, 96
lépésválasztás	66, 96
lépcsőszám, Runge–Kutta módszereké	41
Lipschitz–folytonosság, egyoldalú	22
lokális	35
logaritmikus norma	18, 61, 186
LU-felbontás	131
L-spline	333
L-stabil	125, 129, 140, 147

## M

majoráns függvény	219
maradékvektor	223
Markov-féle láncok	173
mátrix, Gram-féle	314, 322
fundamentális	203
ritka	219, 131, 321
rosszul kondicionált	114, 209
sávós	131, 347
szimmetrikus pozitív definit	314, 322
kondíciószáma	114, 210
mátrixnorma, indukált	18, 186
speciális	90, 92
maximumelv, diszkrét	170
megmaradási törvények	171, 260
megoldás, általánosított avagy gyenge	307
iterációs	291, 293

klasszikus	214, 307
kontraktív	15, 152
periodikus	24, 186, 301
stacionárius	24, 199
merev rendszer	117
merev-pontos módszer	146
merev-stabil módszer	130
mérlegegyenlet	10, 258
Milne-féle hibabecslés	101
Milne–Simpson képlet	192
modulus, folytonossági	228
monotonítás	149, 154, 168, 170
műveletigény	55, 142
M-mátrix	11, 24, 113, 219, 256, 266, 277, 293

## N

Neumann-féle feladat, szinguláris	280
peremfeltétel	212
stabilitási feltétel	91
Newton-módszer	131, 143, 177, 292, 296, 300, 301
folytonos	129
módosított	151
Nitsche-fogás	319
Nordsieck-eljárások	103
-vektor	103
norma, energetikai	309
logaritmikus	18, 186
negatív (indexű)	243
normált	32

## O

operátor, stabil megoldási	32
oszcillációk, gyors	125, 286
oszcillációmentes megoldás	268

## Ö

összegzés, parciális 239, 251

## P

Padé-közelítés 123, 148-149  
 Patankar-féle függvények 275  
 peremérték feladat kondíciószáma 210  
     megoldhatósága 206  
     negyedrendű 285, 336  
 peremfeltétel, elsőfajú 211  
     harmadfajú 211, 231, 326  
     másodfajú 212, 231  
     periodikus 207, 301, 377  
     szeparált 206, 376  
     vegyes 211  
 Poincaré-egyenlőtlenség 328, 357  
 pozitivitás megtartása 155, 170  
 prediktor-korrektor eljárások 83, 98-100

## R

rács 26, 213  
     belső pontjai 213  
     kváziekvidisztáns 247  
     nemekvidisztáns 246  
 Radau-képletek 137  
 Rayleigh-hányados 240, 322  
 rend, maximális 109  
     változtatása 96  
 rendcsökkenés 143  
 rendszer, disszipatív 15, 152  
     implicit 150  
     merev 114, 117  
     stabil 24  
 Richardson-extrapoláció 63  
 Ritz-Galjorkin módszer 305, 310, 368  
 Robin-féle peremfeltétel 211  
 Rosenbrock-módszerek 138, 143  
 Rosenbrock-Wanner (ROW) módszerek 139, 142, 150

Rosenbrock–módszer, komplex együtthatójú	149, 196
Routh–Hurwitz tétel	113
Runge–fogás	62, 224, 225
Runge–Kutta módszerek	39-68, 132, 155-161
beágyazott	49
diagonálisan implicit	135
egyszeresen diagonálisan implicit	137
explicit	39-68
folytonos	56
globális hibája	58
hatékonysága	54
implicit	132-138
klasszikus negyedrendű	44
kontraktivitása	155-161, 164
particionált	49, 176
reguláris	183
stabilitása	46

## S

sajátértékek	117, 321
sajátérték feladat, általánosított	322
standard alakú	323
Simpson–formula	43
SIRK–módszerek	137
skalárszorzatok	238, 305
Spijker–norma	80, 92, 190
spline, harmadfokú	229
SSP – ld. erős stabilitást megtartó módszer	
stabil	31, 32
stabil, algebrailag	155
stabilitás	32, 87, 223, 308
stabilitási elmélet, nemlineáris	152
függvény	123, 141
polinom, első	87
polinom, második	87
tartomány, abszolút	121
STIFF DETEST	142
súlyok	41



**Sz**

szemidiszkretizáció	14, 143, 148, 153, 163
végeselemes	150
szimplektikus módszer	174, 176
szingularitások kezelése	180
Szoboljev–Szlobogyetszkij tér	359
Szoboljev-tér	237, 354, 384
szuperkonvergencia	318

**T**

tartomány, abszolút stabilitási	121
Lipschitz–folytonos	356
többlepéses módszer, explicit	69
implicit	69
lineáris	69
képlethibájá	81
kontraktivitása	161
konzisztens	81
0-stabil	86
tömeg megmaradási törvény	172
trapézformula (trapézsabály)	72, 117, 120, 122, 127, 162, 177
túldiszkretizálni	268

**U**

upwind- (upstream-) approximáció	268
----------------------------------	-----

**V**

variációs feladat	305
véges differenciák	215
végelem interpoláció	363
módszer	303
mechanikai értelmezése	312
végtelen intervallum	182
V-elliptikus	306

0-stabil	34, 86
$\varepsilon$ -egyenlőtlenség	246
$\vartheta$ -eljárás	120, 195

## 14.2. Tételek, lemmák jegyzéke

10.1. Tétel (skaláris egyenlet disszipativitása)	15
10.2. Lemma (logaritmikus norma tulajdonságai)	19
10.3. Tétel (rendszerek disszipativitása)	21
10.4. Lemma (exponenciális mátrixfüggvény nemnegativitása)	23
10.5. Tétel (lineáris csererendszer megoldásainak tulajdonságai)	24
10.6. Tétel (Euler–módszer tulajdonságai)	31
10.7. Tétel (Euler–módszer stabilitása lokális Lipschitz–folytonosság esetén)	35
10.8. Tétel (általános explicit Runge–Kutta módszer stabilitása)	46
10.9. Következtetés (Runge–Kutta módszer konvergenciája)	48
10.10. Tétel (Runge–Kutta módszer globális hibájának sorfejtése)	65
10.11. Tétel (a középpont szabály tulajdonságai)	76
10.12. Tétel (Spijker, a középpont szabály instabilitása)	80
10.13. Lemma (többlépéses módszer konzisztenciája)	81
10.14. Tétel (általános többlépéses módszer konzisztenciája és stabilitása)	87
10.15. Lemma (speciális mátrixnorma)	92
10.16. Tétel (lineáris többlépéses módszer konvergenciája)	93
10.17. Tétel (többlépéses módszer stabilitásának szükséges és elégséges feltétele)	96
10.18. Lemma (konzisztens többlépéses módszer rendje és normált hibakonstansa)	108
10.19. Tétel (Dahlquist 1. tétele: stabil többlépéses módszer maximális konzisztenciarendje)	109
10.20. Lemma (Butcher; Wanner, Hairer, Nørsett; exponenciális függvény Padé–approximációja)	124
10.21. Lemma (Dahlquist, többlépéses módszer A-stabilitásának szükséges feltétele)	126
10.22. Tétel (Dahlquist 2. tétele: A-stabil többlépéses módszerek jellemzése)	127
10.23. Lemma (Runge–Kutta módszerek A-stabilitása)	128
10.24. Lemma (merev-pontos Rosenbrock–módszer L-stabilitása)	147
10.25. Tétel (Butcher, Burrage; Crouzeix; implicit Runge–Kutta módszerek kontraktivitása)	155

14.2. TÉTELEK, LEMMÁK JEGYZÉKE	409
10.26. Következtetés ( $AN$ -, $BN$ - és algebrai stabilitás ekvivalenciájának feltétele)	159
10.27. Tétel (Dahlquist, explicit Runge–Kutta módszerek kontraktivitása)	160
10.28. Lemma (Shu, Osher; erős stabilitást megtartó Runge–Kutta módszer)	164
10.29. Lemma (Shu, erős stabilitást megtartó többlépéses módszer)	166
10.30. Lemma (Spijker, Butcher-féle lineáris módszer család $c(S, T)$ -értékének tulajdonságai)	168
10.31. Tétel (Spijker, Butcher-féle lineáris módszer család SSP-tulajdonságának maximális intervalluma)	169
10.32. Tétel (Iserles, 2-lépcsős Runge–Kutta módszer regularitása)	183
11.1. Tétel (Fredholm–alternatíva: lineáris peremérték feladat megoldhatósága)	206
11.2. Tétel (modellfeladat differenciasémájának tulajdonságai)	224
11.3. Lemma („diszkrét” első Green-féle képlet)	239
11.4. Lemma („diszkrét” $H_0^1$ -norma)	239
11.5. Lemma („diszkrét” beágyazási tételek, 1)	240
11.6. Tétel (modellfeladat differenciasémájának $H_0^1(\omega_h)$ -beli becslése)	242
11.7. Lemma („diszkrét” beágyazási tétel, 2)	245
11.8. Tétel (harmadfajú peremérték feladatot approximáló séma stabilitása és konvergenciája)	248
11.9. Tétel (differenciaséma konvergenciája nemekvidisztáns rácson)	250
11.10. Lemma (változó együtthatójú differenciaséma stabilitása)	255
11.11. Tétel (változó együtthatójú differenciaséma konvergenciája)	256
11.12. Tétel (speciális differenciaséma egyenletes konvergenciája)	277
11.13. Tétel (Szamarszkij, Andrejev; szinguláris Neumann–feladat megoldásának becslése)	282
11.14. Tétel (Szamarszkij, Andrejev; negyedrendű differenciaséma stabilitása)	287
11.15. Tétel (egyértelműen megoldható nemlineáris peremérték feladat)	291
11.16. Tétel (egyértelműen megoldható diszkrét nemlineáris peremérték feladat)	293
11.17. Tétel (peremérték feladat visszavezetése kezdetiérték feladatra)	294
11.18. Lemma (modellfeladat variációs megfogalmazása)	307

11.19. Lemma (peremérték feladat és variációs feladat összefüggése)	307
11.20. Tétel (variációs feladat megoldásának létezése, unicitása, stabilitása)	308.
11.21. Lemma (Céa–lemma: a Ritz–Galjorkin módszer kváziop-timálitása)	311
11.22. Tétel (modellfeladat végeelem megoldásának konvergencia becslése)	316
11.23. Tétel (harmadfajú peremérték feladat variációs alakjának és megoldásának tulajdonságai)	329
11.24. Tétel (harmadfajú peremérték feladat végeelem megoldásának konvergenciája)	329
11.25. Tétel (egzakt differenciaséma és $\mathcal{L}$ -spline végeelem módszer ekvivalenciája)	334
11.26. Tétel (negyedrendű elsőfajú peremérték feladat általánosított megoldásának tulajdonságai)	341
11.27. Tétel (negyedrendű elsőfajú peremérték feladat végeelem megoldásának tulajdonságai)	343
11.28. Lemma (Bramble / Hilbert; lineáris funkcionál becslése)	357
11.29. Tétel (szakaszonként polinomiális interpoláció hibája)	364
11.30. Következtetés (végeelem módszer hibája szakaszonként $k$ -adfokú bázis esetén)	368

### 14.3. Pseudokódos algoritmusok jegyzéke

RK3–algoritmus	53
RK4–algoritmus	54
Prediktor–korrektor eljárás	84
Változó lépéstávolságú Adams–módszer együtthatóinak kiszámítása	98
Nordsieck–módszer algoritmus	104
Nordsieck–módszer prediktor lépése	104
Sávós Gauss–elimináció algoritmus	347

### 14.4. Táblázatok jegyzéke

Klasszikus Runge–Kutta képletek	46
Dormand–Prince 5(4) Runge–Kutta képlete	52
Runge–Kutta képletek hatékonysága	55
Adams–Nordsieck módszerek együtthatói	107
Elemi módszerek karakterisztikus gyökei	122

<i>14.4. TÁBLÁZATOK JEGYZÉKE</i>	411
Retrográd differencia-képletek Nordsieck–alakja	131
Kétlépcsős Radau-IIA-módszerek Butcher–táblazatai	138
Merev rendszereket megoldó módszerek hatékonysága	142
Optimális kontraktív háromlépéses módszer (Lenferink)	163
Kezdeti és vgső Hamilton–függvény számított eltérése	180
Negyedrendű DIRK–módszer	198
Másod- és negyedrendű differenciaséma numerikus eredményei	229
Szakaszonként polinomiális interpolációk jellemzői	364