12. fejezet

Jelölések II

A következőkben felsoroljuk a II. kötet standard jelöléseit. Egyes helyeken ettől eltérő elnevezések is előfordulhatnak.

Az I.-gyel jelölt első kötetben szereplő jelöléseket nem ismételjük. Ezért javasoljuk, hogy az olvasó nézze meg azokat ott, különösen a vektorok, mátrixok, algoritmusok jelöléseit, ld. ott I. 7. Így pl. itt is egyes helyeken használjuk az $e := (1, \dots, 1)^T$ vektort.

Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tetszőleges valós mátrix, akkor

$$\mu(A) := \lim_{h \searrow 0} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$$

a logaritmikus normája, alsó indexszel jelöljük azt, hogy melyik vektornorma alapján definiáltuk a logaritmikus normát, pl. $\mu_{(2)}(A)$ az euklideszi normára vonatkozik.

Amennyiben $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív definit és szimmetrikus mátrix, úgy azt írjuk, hogy $A = A^T > 0$.

Ha y a t idő differenciálható függvénye, akkor $\dot{y} := \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, ha y kétszer differenciálható t szerint, akkor $\ddot{y}$ a második derivált.

Legyen y az x helykoordináta k-szor differenciálható függvénye. Ekkor $\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k} = y^{(k)}$-val jelöljük a k-adik deriváltját, ill. az első három deriváltat mint y', y'', y'''.

Legyen $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-folytonos második argumentuma szerint. Ezt $f \in Lip(y)$-nal jelöljük.

Legyen f az x, y folytonosan differenciálható függvénye: ekkor parciális deriváltjai

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= f_x, & \tfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= f_y, \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} &= f_{xy}, & \tfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= f_{xx}, \end{aligned}$$

stb. Amennyiben $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ második argumentumának folytonosan differenciálható vektorfüggvénye, akkor f_y az f Jacobi–mátrixa. Ezt J-vel is jelöljük.

Az $y'(x) = f(x, y(x))$ közönséges differenciálegyenlet numerikus megoldásánál a numerikus értéket y_i-vel jelöljük, a pontos értéket $y(x_i)$-vel, a hibát $e_i := y(x_i) - y_i$-vel.

Az általános egylépéses módszer képlete

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i, h),$$

lokális hibája

$$g_i := \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \Phi(x_i, y(x_i), h),$$

Φ a növekmény-függvény.

Speciálisabban a Runge–Kutta képleteket a következőképpen jelöljük:

$$\begin{array}{ll} y_{i+1} & = y_i + h\sum_{j=1}^{s} c_j k_j, \\ k_j & = k_j(x,y,h) := f\left(x + ha_j, y + h\sum_{\ell=1}^{s} b_{j\ell}k_\ell\right), \qquad j = 1, \ldots, s, \end{array}$$

ahol s a lépcsőszám, $a_j := \sum_{\ell=1}^{j-1} b_{j\ell}$. A beágyazott módszer súlyait $\hat{c}_j$-vel jelöljük.

Az általános lineáris ℓ-lépéses módszer

$$\sum_{k=0}^{\ell} \alpha_k y_{i+k} = h\sum_{k=0}^{\ell} \beta_k f_{i+k}, \qquad f_{i+k} := f(x_{i+k}, y_{i+k}).$$

$\mathbf{P(EC)^mE}$: prediktor-korrektor módszer m korrektor lépéssel és befejező f-kiértékeléssel.

$\mathbf{P(EC)^m}$: prediktor-korrektor módszer m korrektor lépéssel – de befejező f-kiértékelés nélkül.

Függvényterek:

$C^k[0,1]$ jelöli a $[0,1]$ intervallumon definiált, k-szor folytonosan differenciálható függvények terét;

$H^k(0,1)$ a (0,1) intervallumon definiált, négyzetesen integrálható és általánosított értelemben k-szor differenciálható függvények Szoboljev–terét; amikor $k = 0$, akkor ehelyett $L_2(0,1)$-t írunk. H^k normáját $\|\cdot\|_k$-val jelöljük, ugyanakkor a (csak a k-edik deriváltakat tartalmazó) félnormát $|\cdot|_k$-kal. $H_0^k(0,1)$ az a *Szoboljev–tér*, amely a $[0,1]$ intervallumon definiált, végtelenül sokszor differenciálható és a szakasz végpontjainak közelében eltűnő függvényeknek a $\|\cdot\|_k$ normában való lezárásából adódik.

Differencia-jelölések:

$\overline{\omega}_h$ ekvidisztáns rács:

$$\overline{\omega}_h := \{x_i := ih, \;\; i = 0, 1, ..., N\}.$$

$\gamma_h := \{0, 1\}$-gyel jelöljük a perempontokat. A rács felező pontjai: $x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$.

A haladó, ill. a retrográd differenciahányados:

$$u_{x,i} := \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i) = u_{\overline{x},i+1}\,, \text{ ill. } u_{\overline{x},i} := \frac{1}{h}(u_i - u_{i-1}) = u_{x,i-1}\,;$$

a központi elsőrendű differenciahányados:

$$u_{\overset{\circ}{x},i} := \frac{1}{2h}(u_{i+1} - u_{i-1}) = \frac{1}{2}(u_{x,i} + u_{\overline{x},i});$$

a központi másodrendű differenciahányados:

$$u_{\overline{x}x,i} = \frac{1}{h}(u_{x,i} - u_{\overline{x},i}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1});$$

a haladó harmadrendű differenciahányados:

$$\begin{aligned} u_{x\overline{x}x,i} &:= \frac{1}{h}(u_{x\overline{x},i+1} - u_{x\overline{x},i}) = \frac{1}{h^3}\left(u_{i+2} - 3u_{i+1} + 3u_i - u_{i-1}\right) \\ &= u_{\overline{x}\overline{x}x,i+1} = u_{\overline{x}\overline{x}\overline{x},i+2} = u_{xxx,i-1}\,; \end{aligned}$$

a központi negyedrendű differenciahányados:

$$u_{\overline{x}x\overline{x}x,i} := \frac{1}{h^4}\left(u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}\right).$$

$\vec{f}_h := (f_1, \ldots, f_{N-1})^T$ a (perempontokat nem érintő) projekciót $C[0,1]$-ból $\mathbb{R}^{N-1}$-be jelöli, ahol $f_i := f(x_i)$.

Ugyanúgy (környezettől függ) $\vec{u}_h$-val jelöljük az u projekcióját $C[0,1]$-ből $\mathbb{R}^{N+1}$-be is: $\vec{u}_h := (u_0, \ldots, u_N)^T$ (tehát az $\overline{\omega}_h$ rács perempontjait is érinti).

Az ω_h, ill. $\overline{\omega}_h$ rácson definiált függvények terei:

$L_1(\omega_h)$, amelynek normája $\|y\|_{L_1,h} := \sum_{j=1}^{N-1} |y_j|h$;

$L_2(\omega_h)$, normája $\|y\|_{(0,h)} := \left((y,y)_{(0,h)}\right)^{1/2} := \left(\sum_{j=1}^{N-1} y_j^2 h\right)^{1/2}$;

$H_0^1(\omega_h)$, normája $|y|_{(1,h)} := \left(\sum_{j=1}^{N} (y_{\overline{x},j})^2 h\right)^{1/2}$, itt formálisan $y_0 = y_N = 0$;

$C(\overline{\omega}_h)$, normája $\|y\|_{C(\overline{\omega}_h)} := \max_{0 \le i \le N} |y_i|$.

A nemekvidisztáns rács jelölései:

$$\overline{\omega}_h := \{x_0 := 0,\ \ x_i := \sum_{j=1}^{i} h_{j-1/2} > x_{i-1},\ \ i = 1, \ldots, N,\ \ x_N = 1\},$$

perempontjai $\gamma_h := \{0, 1\}$, h viszont a maximális lépésközt jelöli, $h := \max_i h_{i-1/2}$.

Ezen rács i-edik lokális átlaglépésköze $\widetilde{h}_i := \frac{1}{2}(h_{i-1/2} + h_{i+1/2})$.
A nemekvidisztáns rácson az elsőrendű differenciahányados

$$u_{x,i+1/2} := (u(x_{i+1}) - u(x_i))/h_{i+1/2}\,.$$

Egy hozzátartozó függvénytér: $L_2(\omega_h)$, normája $\|y\|_{(0,h)} := \left(\sum_{j=1}^{N-1} y_j^2 \widetilde{h}_j\right)^{1/2}$.

