A szállítási feladat

Készítette: Dr. Ábrahám István

Bevezető

A személyek, termékek, nyersanyagok szállításának lehető leggazdaságosabb megszervezése fontos kérdés.

Célunk lehet legkisebb összköltségre törekvés, vagy a legrövidebb úton, vagy idő alatt megvalósuló szállítási program.

Sok más területen felhasználhatjuk azokat az eredményeket, amelyeket a szállítási feladat megoldása során kaptunk.

A probléma felvetése

Példa: Adott két feladó állomás, a tőlük elszállítandó áru mennyisége rendre 70 és 30 egységnyi. 3 rendeltetési hely van, igényeik rendre 30, 20, 50 egységnyi. A feladóhelyek és a rendeltetési állomások között minden esetben lehetséges szállítás.

Az egyes relációkban a szállítási költségek egy egység szállítására vonatkozóan: F_1-ből R_1-be: 1, F_1-ből R_2-be: 4, F_1-ből R_3-ba: 2, valamint: F_2-ből R_1-be: 3, F_2-ből R_2-be: 2, F_2-ből R_3-ba: 1.

Az adatainkat táblázatba foglalhatjuk:

	R_1	R_2	R_3	
F_1	1	4	2	70
F_2	3	2	1	30
	30	20	50	

	R_1	R_2	R_3	
F_1	1	4	2	70
F_2	3	2	1	30
	30	20	50	

A sorok, illetve oszlopok végén a mozgatandó mennyiségek vannak, a táblázat belsejében a szállítási költségek egység-nyi szállítandó mennyiségre vonatkozóan.

A szállítási feladat megoldása többféleképpen történhet:

1.) A lineáris programozás szokásos módszereivel.

Matematikai modellt írunk fel a feladathoz, majd az megoldjuk.

2.) A disztribúciós módszerrel

Először előállítunk egy lehetséges disztribúciót („szállítási relációk szét-osztását”), majd ezt javítjuk az optimum eléréséig.

A szállítási feladatok megoldására más módszerek is léteznek, kezdve az ötlet-szerű szervezéstől az összes lehetséges változat kiszámításáig és közülük az optimális kiválasztásáig.

Ezek a „más” megoldások többnyire nem optimálisak, illetve nagyon költségesek, így mi a fenti két esettel foglalkozunk.

A szállítási feladat megoldása szimplex módszerrel

Az előző feladatunk táblázattal:

	R_1	R_2	R_3	
F_1	1	4	2	70
F_2	3	2	1	30
	30	20	50	

Az x_{ij} változó jelentse az egyes relációkban szállításra kerülő árumennyiséget.

Az induló feltétel: $x_{ij} \geq 0$, ahol $1 \leq i \leq 2$ és $1 \leq j \leq 3$.

A feltételi relációkat a szállítandó mennyiségek határozzák meg:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=70$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=30$$
$$x_{11}+x_{21}=30$$
$$x_{12}+x_{22}=20$$
$$x_{13}+x_{23}=50$$

A célunk a szállítás összköltségének minimalizálása:

$$z= x_{11}+4x_{12}+2x_{13}+3x_{21}+2x_{22}+x_{23} \rightarrow \min.$$

A feladat szimplex induló táblája:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	b
$\hat{u}_1$	1	1	1	0	0	0	70
$\hat{u}_2$	0	0	0	1	1	1	30
$\hat{u}_3$	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	30
$\hat{u}_4$	0	1	0	0	1	0	20
$\hat{u}_5$	0	0	1	0	0	1	50
z	–1	–4	–2	–3	–2	–1	0
$-\hat{z}$	2	2	2	2	2	2	200

Néhány bázistranszformáció után az optimális megoldás:

	x_{12}	x_{21}	
x_{13}	1	–1	40
x_{23}	–1	1	10
x_{11}	0	1	30
x_{22}	1	0	20
$\hat{u}_5$	0	0	0
z	–1	–3	160

$x_{11}=30$, $x_{13}=40$, $x_{22}=20$, $x_{23}=20$

A többi relációban 0 a szállított mennyiség.

A költség minimuma 160.

Általánosan: F_i jelentse a feladóhelyeket, f_i az elszállítandó áru mennyiségét.
R_j a rendeltetési helyeket, r_j az általuk igényelt árumennyiséget.
($1 \le i \le m$ és $1 \le j \le n$).

A C mátrix elemei: az egyes relációkban az egységnyi áru szállításának költségei.

Az X mátrix $x_{i\,j}$ elemei: az egyes relációkban szállításra kerülő árumennyiségek.

Az adataink táblázatos alakja:

	R_1	R_2	..	..	R_n	
F_1	c_{11}	c_{12}	..	..	c_{1n}	f_1
F_2	c_{21}	c_{22}	..	..	c_{2n}	f_2
:	..	..	..	..	..	..
:	..	..	..	..	..	..
F_m	c_{m1}	c_{m2}	..	..	c_{mn}	f_m
	r_1	r_2	..	..	r_n	

A matematikai modell: $x_{i\,j} \ge 0 \quad (1 \le i \le m \text{ és } 1 \le j \le n)$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = f_i \qquad (1 \le i \le m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = r_j \qquad (1 \le j \le n)$$

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Feltételeink: a szállítandó és az igényelt mennyiségek összege egyezzen meg:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i = \sum_{j=1}^{n} r_j$$

A cél az összköltség minimuma.

A matematikai modell alapján optimalizálást végezhetünk szimplex módszerrel.

A megoldandó feladat lehet bármilyen elosztási, szétosztási probléma. A korlátozó feltételek között más további feltétel is szerepelhet.

Példa: 10 millió forintot elhelyezünk 3 alapba, legyenek ezek a következők: 5 milliót részvénybe, 3 milliót államkötvénybe, 2 milliót lekötött betétbe fektetünk. **Négy társaságnál** fektetjük be a tőkét, azaz **portfoliót** hozunk létre. Az egyes társaságoknál 4, 3, 2 és 1 millió forintot helyezünk el. A társaságok adott időszakra az alapokra vonatkozóan adtak a **százalékos hozamokat** a következő táblázat szerint:

	A	B	C	D	
I	19	17	20	16	5
II	9,4	9,8	8,9	9,2	3
III	7,8	8	7,2	6,6	2
	4	3	2	1	

(Az A, B, C, D a társaságokat, az I, II, III az alapokat jelentse.)

Hogyan, milyen bontásban helyezzük el a pénzünket, ha a maximális hozam elérése a célunk? (Allokációs feladat.)

Megoldás:

Az x_{ij} jelentse az egyes alapokba valamelyik társaságnál elhelyezett tőkét.

A **triviális feltétel**: $x_{ij} \geq 0$, ahol $1 \leq i \leq 3$ és $1 \leq j \leq 4$.

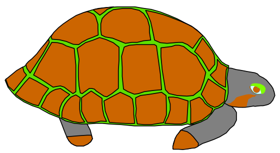
A **feltételi relációkat** a „peremértékek” határozzák meg:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=5 \qquad x_{11}+x_{21}+x_{31}=4$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=3 \qquad x_{12}+x_{22}+x_{32}=3$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=2 \qquad x_{13}+x_{23}+x_{33}=2$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=1$$

A **célunk** a hozam **maximalizálása**:

$$z=0{,}19x_{11}+0{,}17x_{12}+0{,}2x_{13}+0{,}16x_{14}+0{,}094x_{21}+0{,}098x_{22}+0{,}089x_{23}+0{,}092x_{24}+0{,}078x_{31}+$$
$$+0{,}08x_{32}+0{,}072x_{33}+0{,}066x_{34}\rightarrow \max$$

A modell **megoldása** kézi eszközökkel **hosszadalmas**.



A disztribúciós módszer

A disztribúciós módszer **lényege**: felveszünk egy lehetséges induló programot és azt javítjuk az optimumig.

A **módszert** egy, a kézi megoldásban már közepes nagyságúnak számító **feladat megoldásával** mutatjuk be.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	
F_1	6	2	8	7	5	40
F_2	4	3	7	5	9	70
F_3	2	1	3	6	4	60
F_4	5	6	4	8	3	30
	30	60	50	40	20	

F_i a feladó helyeket, R_j a célállomásokat jelenti.

A **szállítandó** és az **igényelt** mennyiségek a **jobboldali oszlopban**, illetve a **legalsó sorban** találhatók.

A táblázat belsejének $c_{i\,j}$ eleme az **i-edik** feladóhelyről a **j-edik** célállomásra történő szállításnál a szállított mennyiség **egy egységére eső költséget** jelenti.

A feladat zárt, ha a szállítandó és az igényelt mennyiségek összege megegyezik.

(Ahogy ebben az esetben is.)

Az induló program felírása

Az induló program felírásakor **célszerű** arra törekedni, hogy a költség-mátrix lehető **legkisebb elemeire** a lehető **legnagyobb szállításra kerülő mennyiséget** programozzuk.

Ekkor ugyanis viszonylag keveset kell javítanunk az optimum eléréséhez.

A költségmátrix redukálása

Az induló program felvételéhez célszerű a költségmátrixot úgy átalakítani, hogy minden sorban és minden oszlopban legyen legalább egy 0.

A szállítási összköltség szempontjából a $c_{i\,j}$ költségelemek egymáshoz viszonyított nagysága a döntő, így minden oszlopból-sorból levonhatunk egy-egy számot.

Oszlop korrekció

$$\underline{C}=\begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{C}'=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(Mindegyik oszlopból levontunk rendre 2 1 3 5 3 egységet.)

Az oszlop korrekció a költségekben $K'=2\cdot30+1\cdot60+3\cdot50+5\cdot40+3\cdot20=530$ költségcsökkenést jelent.

Sorkorrekció

A sorkorrekciót a $\underline{C}'$ mátrixon hajtjuk végre: csak az első sorból kell 1-et levonnunk és így már minden sorban és oszlopban lesz 0 költségelem.

A sorkorrekció hatása a költségre újabb $1\cdot40$ értékű csökkentést jelent, így a költségkorrekció összesen: $K''=570$.

Az oszlop-sor sorrend helyett a sor-oszlop sorrend szerint is korrigálhatunk. Ennek a végeredményre nincs hatása.

Az induló program előállítása

Az induló program felírásakor a minimális költségelemekre a lehetséges maximális mennyiséget programozzuk, célszerűen először a 0 költségelemekre.

Elnevezés: **a költségmátrixnak azt az elemét, amelyre szállítandó mennyiséget programoztunk, kötött elemnek nevezzük.**

Szabad elem: amelyre nem programoztunk.

Alapszabály: **a kötött elemek számát a kritikus szám határozza meg.**

A kritikus szám: az összes állomás számából kivonunk egyet.

A példánkban négy feladóhely és öt célállomás van, a kritikus szám: 9-1=8.

Az eredeti költségmátrix:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

A redukált költségmátrix:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Az induló szállítási program:

3	$\boxed{0}^{40}$	4	1	1	40
2	2	$\boxed{4}^{30}$	$\boxed{0}^{40}$	6	70
$\boxed{0}^{30}$	$\boxed{0}^{20}$	$\boxed{0}^{10}$	1	1	60
3	5	$\boxed{1}^{10}$	3	$\boxed{0}^{20}$	30
30	60	50	40	20	

A keretezett elemekre programoztuk a jobb felső részen lévő mennyiséget.

A program javítása

Csak akkor szükséges, ha kötött helyen van nullától különböző szám is.

(Ha csupa nullára programozva sikerült az induló programot felírni, akkor ennél kisebb költségű program nyilván nem létezhet.)

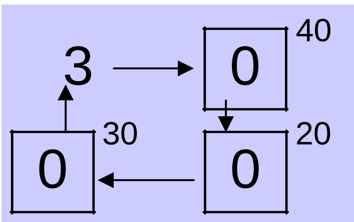
A körmódszer

Lényege: megvizsgáljuk, hogy áttolhatunk-e bizonyos szállítandó mennyiséget magas költségű kötött helyről alacsonyabb költségű szabad helyre.

A vizsgálat módja: a szabad helyeket egyenként megpróbáljuk bevonni a program-ba egy ú.n. kör (vagy más néven: hurok) képzésével.

Kör: minden szabad helyhez egyértelműen tartozik egy kör (haladási irány az illető szabad helyből kiindulva és oda visszatérve).
A kör képzésekor fordulni csak a kötött elemeken (csúcspontokon) lehet.

Például a költségmátrix első sorának első eleméhez tartozó kör:



Megvizsgáljuk: ha a kör mentén egy egységnyi szállítandó mennyiséget mozgatunk, akkor az javít-e a programon.

A programunknak ez a része ekkor így alakul:

3^{1}	$\boxed{0}^{39}$
$\boxed{0}^{29}$	$\boxed{0}^{21}$

A költség változást Δ_{11}-gyel jelölve: $\Delta_{11}=1\cdot3+0\cdot39+0\cdot21+0\cdot29=3$.

(A költség nagyobb lett, a c_{11} elem bevonásával nem javul a program.)

Javulás: ha megvizsgálva a szabad elemek köreit, a Δ_{ij} értéke negatív lesz.

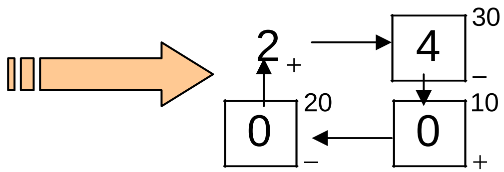
A Δ_{ij} értéke egyszerűen számolható:

A kör csúcspontjait váltakozó előjelekkel véve összeadjuk a csúcspontok költség-értékeit. A szabad hely előjele mindig pozitív.

Például: a Δ_{11} esetén: 3–0+0–0=3.

Vizsgáljuk meg a c_{22} körét:

3	$\boxed{0}^{40}$	4	1	1	40
2	2	$\boxed{4}^{30}$	$\boxed{0}^{40}$	6	70
$\boxed{0}^{30}$	$\boxed{0}^{20}$	$\boxed{0}^{10}$	1	1	60
3	5	$\boxed{1}^{10}$	3	$\boxed{0}^{20}$	30
30	60	50	40	20	



A Δ_{22} számítása: Δ_{22} =2–4+0–0=–2, a $\Delta_{22} < 0$, így ezen a körön a program javítható.

Az eredményünk azt mutatja, hogy 1 egységnyi mennyiség áttolása a szabad helyre 2 pénzegységgel javítja a programot.

A javítás módja

A körön maximum annyi egység mozgatható, hogy a szabad hely kötötté válásával legalább egy kötött elem szabaddá váljon.

Ez akkor valósul meg, ha a negatív csúcson lévő legkisebb értéket programozzuk a szabad elemre.

Ilyenkor a pozitív csúcsokon ennyivel nő, a negatívokon ennyivel csökken az oda programozott érték.

Példa: **A c_{22} körén a javított programrészlet:**

$\boxed{2}^{20}$	$\boxed{4}^{10}$
0	$\boxed{0}^{30}$

Elvégezzük a javítást:

3	$\boxed{0}^{40}$	4	1	1
2	$\boxed{2}^{20}$	$\boxed{4}^{10}$	$\boxed{0}^{40}$	6
$\boxed{0}^{30}$	0	$\boxed{0}^{30}$	1	1
3	5	$\boxed{1}^{10}$	3	$\boxed{0}^{20}$

Az új, javított táblázatot ismét megvizsgáljuk a $\Delta_{i\,j}$ értékekre.

Ahol javítani lehet, azt ott megtesszük.

Majd újabb vizsgálat következhet mindaddig, amíg a $\Delta_{i\,j}$ értékekre találunk negatív értéket.

Ha már nem lesz ilyen, akkor a programunk optimális.

Ez az eljárás eléggé hosszadalmas.

A potenciálok módszere

Lényege: a költségmátrix soraihoz is és oszlopaihoz is egy-egy számot rendelünk (ezek a potenciálok) úgy, hogy a két potenciál összege minden esetben egyenlő legyen az illető sorban és oszlopban lévő kötött elemmel.

Például az induló táblánk esetében:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ \hline 0 & . & \boxed{0} & . & . & . \\ 4 & . & . & \boxed{4} & \boxed{0} & . \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & . & . \\ 1 & . & . & \boxed{1} & . & \boxed{0} \end{array}$$

A szabad elemeket a potenciálok hozzárendelésekor nem írtuk ki.

A potenciálok segítségével a $\Delta_{i\,j}$ értékek egyszerűen számolhatók:

Minden költségelemből le kell vonni a neki megfelelő két potenciál összegét, így kapjuk a $\Delta_{i\,j}$ értékeket.

Az induló táblánk esetén:

$$[\Delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & \boxed{0} & 4 & 5 & 2 \\ -2 & -2 & \boxed{0} & \boxed{0} & 3 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & 5 & 2 \\ 2 & 4 & \boxed{0} & 6 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

Amelyik költségelemnél a $\Delta_{i\,j}$ negatív, annak a körén a program javítható.

Ebben az esetben a javítás a c_{21} vagy a c_{22} körén végezhető el. (Egyszerre csak az egyiken!)

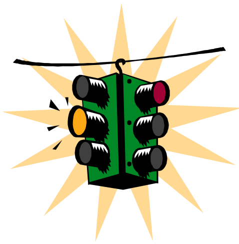
A javítást (kötött helyről áttolást a szabad helyre) körmódszerrel végezzük.

Ha a c_{22} körén javítunk, a program a következő lesz:

$$
\begin{array}{ccccc}
3 & \boxed{0}^{40} & 4 & 1 & 1 \\
2 & \boxed{2}^{20} & \boxed{4}^{10} & \boxed{0}^{40} & 6 \\
\boxed{0}^{30} & 0 & \boxed{0}^{30} & 1 & 1 \\
3 & 5 & \boxed{1}^{10} & 3 & \boxed{0}^{20}
\end{array}
$$

(Ahogy ezt már korábban láttuk.)

A táblázatunkat megvizsgáljuk a potenciálok módszerével:



A potenciálok:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & 0 & 2 & -2 & 1 \\
\hline
0 & . & \boxed{0} & . & . & . \\
2 & . & .\,\boxed{2} & \boxed{4} & \boxed{0} & . \\
-2 & \boxed{0} & . & \boxed{0} & . & . \\
-1 & . & . & \boxed{1} & . & \boxed{0}
\end{array}
$$

Kiszámoljuk:

$$
[\Delta_{ij}] = \begin{bmatrix}
+ & \boxed{0} & + & + & 0 \\
-2 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & + \\
\boxed{0} & + & \boxed{0} & + & + \\
+ & + & \boxed{0} & + & \boxed{0}
\end{bmatrix}
$$

(A $\Delta_{i\,j}$ táblázatban a pozitív számértékeket nem kell kiírni, elég a „+” jel.)

Láthatjuk: a javított táblázatunk sem optimális, a c_{21} körén javítani lehet.

A c_{21} köre:

$$
\begin{array}{cc}
2_{+} & \boxed{4}^{10}_{-} \\
\boxed{0}^{30}_{-} & \boxed{0}^{30}_{+}
\end{array}
$$

(Előjelek!)

Az áttolás után:

$$
\begin{array}{cc}
\boxed{2}^{10} & 4 \\
\boxed{0}^{20} & \boxed{0}^{40}
\end{array}
$$

Az új táblázatunkba beillesztjük a megváltoztatott részt és ismét elvégezzük a potenciálokkal a vizsgálatot.

Az új vizsgálathoz a potenciálok:

	2	0	2	– 2	1
0	.	$\boxed{0}$	.	.	.
2	.	. $\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$	.
– 2	$\boxed{0}$	.	$\boxed{0}$	.	.
– 1	.	.	$\boxed{1}$	.	$\boxed{0}$

A javításhoz a $[\Delta_{ij}]$ táblázat:

$[\Delta_{ij}] =$

	2	0	2	– 2	1
0	.	$\boxed{0}$	.	.	.
2	.	. $\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$	.
– 2	$\boxed{0}$	.	$\boxed{0}$	.	.
– 1	.	.	$\boxed{1}$	.	$\boxed{0}$

A $\Delta_{i\,j}$ táblázatban nincs negatív érték, így a szállítási programunk már optimális.

Leolvassuk az egyes relációkban szállítandó mennyiségeket (mátrix alakban):

$$[\,\underline{X}\,] = \begin{bmatrix} 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & 40 & 0 \\ 20 & 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

A mátrix x_{ij} eleme azt jelenti, hogy az i-edik feladótól a j-edik célállomásra mekkora mennyiség szállítása optimális.

Ennek a szállítási programnak a költsége: $K_{red}=2\cdot10+2\cdot20+1\cdot10=70$, az oszlop és sor redukciós költséggel együtt az összköltség: $K=570+70=640$.

Alternatív optimum, degeneráció

A legutolsó $[\Delta_{i\,j}]$ táblázatunkban 0 is szerepel szabad elemnél.

Ennek jelentése: az illető szabad elem körén mozgatva a lehetséges mennyiséget, szintén optimumot kapunk.

A költséget ez nem befolyásolja, a kapott új optimum alternatív optimum.

Alternatív optimumot kapunk a c_{32} körén:

$$\begin{matrix} \boxed{0}^{10}_{+} & \boxed{2}^{20}_{-} \\ \boxed{0}^{20}_{-} & 0_{+} \end{matrix}$$

Az áttolás után:

$$\begin{matrix} \boxed{2}^{30} & 2 \\ 0 & \boxed{0}^{20} \end{matrix}$$

A két negatív csúcson egyaránt 20 volt, tehát az áttolással mind-két elem szabaddá vált.

Ilyenkor, ha a tábla még nem optimális, valamelyik elemre 0 értéket programozunk.

Ez a degeneráció esete.

Előfordul, hogy már az induló tábla degenerált. A megoldást a tábla degenerált volta általában nem zavarja.

A feladatunkban a két alternatív alapmegoldás tehát:

$$\underline{X}_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & 40 & 0 \\ 20 & 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} \qquad \underline{X}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 20 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Az általános megoldást a két alapmegoldás konvex lineáris kombinációja adja:

$$\underline{X}_0 = \lambda \cdot \underline{X}_{01} + (1-\lambda)\underline{X}_{02}, \text{ ahol } 0 \le \lambda \le 1.$$

Névleges állomások beiktatása

Előfordul, hogy a feladóhelyekről elszállítandó és a célállomások által igényelt mennyiségek nem egyenlők (nem zárt a feladat).

Ekkor a disztribúciós módszer alkalmazhatóságához névleges állomást (új sort, vagy új oszlopot) kell beiktatni, amelyre 0 költséggel programozzuk a felesleget, vagy a hiányt.

Példa: **Tekintsük a következő feladatot:**

4	5	3	2	60
2	4	6	5	40
10	20	20	30	

(A sorkezdő helyen lévő feladóhelyeket és az oszlopfőkön a célállomásokat nem írtuk ki.)

A feladóhelyeken összesen 100 egység vár elszállításra, a célállomások összesen 80-at igényeltek.

Beiktatunk egy <u>névleges célállomást</u>, amely 0 költséggel „igényli" a hiányzó 20 egységet:

4	5	3	2	0	60
2	4	6	5	0	40
10	20	20	30	20	

Ez a feladat már „normál" szállítási feladat, a tárgyalt módszerrel megoldva kapjuk az optimális megoldást:

$$\underline{X}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 30 & 10 \\ 10 & 20 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Gyakorlás

Példa: Adjuk meg disztribúciós módszerrel az alábbi táblázattal adott szállítási feladat valamennyi optimális megoldását:

4	1	2	20
4	2	4	12
1	3	3	14
1	2	2	10
11	18	16	

Lehet-e az optimális megoldásban $x_{22}=3$? Ha igen, akkor mennyi a többi változó értéke?

Megoldás: A döntési változó x_{ij}, amely az i-edik feladóhelyről a j-edik célállomásra szállítandó mennyiséget jelöli**.**

Névleges célállomást kell beiktatni.

A kritikus szám: 7.

Az induló program (például):

4	$\boxed{1}$ 17	$\boxed{2}$ 3	0	20
4	$\boxed{2}$ 1	4	$\boxed{0}$ 11	12
$\boxed{1}$ 1	3	$\boxed{3}$ 13	0	14
$\boxed{1}$ 10	2	2	0	10
11	18	16	11	

A program javítása, első optimum:

$$\underline{X}_{01}=\begin{bmatrix} 0 & 17 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 11 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Összköltség: K=65.

Az általános megoldás:

$$\underline{\mathbf{X}}_{\mathbf{0}}=\lambda\underline{\mathbf{X}}_{\mathbf{01}}+(1-\lambda)\underline{\mathbf{X}}_{\mathbf{02}} \quad (0 \le \lambda \le 1)$$

Alternatív optimuma van a feladatnak:

$$\underline{X}_{02}=\begin{bmatrix} 0 & 14 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 11 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Ha $x_{22}=3$, akkor $\lambda=1/3$, és ekkor:

$$\underline{X}_{0p}=\begin{bmatrix} 0 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 11 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Tiltótarifák

A szállításoknál gyakran előfordul, hogy két állomás között nincs, vagy megszűnik a szállítási lehetőség.

Csak azt az esetet tárgyaljuk, amikor egy szállítási viszonylatban „tiltótarifa” van érvényben, azaz nem lehet azon az útvonalon szállítani.

Ha a szállítás költségmátrixában igen nagy költsége van egy elemnek, akkor a disztribúciós megoldás ezt a relációt automatikusan kikerüli.

A módszer: ha valamely relációban nem lehet szállítani, akkor a megfelelő költség-elem értéke egy M szám lesz, amely olyan nagy, hogy a költségmátrix redukálása-kor az értéke lényegében nem változik meg.

Ezután a szokásos módon megoldjuk a feladatot, az adott költségelem biztosan nem lesz kötött hely.

Példa: Az alábbi szállítási feladatban az 1. és a 2. feladótól a teljes készletet el kell szállítani. Az 1. feladó az 1. megrendelőnek nem szállíthat.

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	4	3	5	6	40
F_2	3	5	4	7	80
F_3	2	3	5	4	90
	70	70	40	20	

Cél a költség minimum.

Megoldás: A döntési változó x_{ij}, amely az i-edik feladóhelyről a j-edik célállomásra szállí-tandó mennyiséget jelöli.

Névleges rendeltetési helyet kell beiktatni.

A kritikus szám: 7.

Az induló program (például):

M	$\boxed{3}^{40}$	5	6	M	40
3	$\boxed{5}^{20}$	$\boxed{4}^{40}$	$\boxed{7}^{20}$	M	80
$\boxed{2}^{70}$	$\boxed{3}^{10}$	5	4	$\boxed{0}^{10}$	90
70	70	40	20	10	

Ha az első feladó az első megrendelőnek nem szállíthat, az azt jelenti, hogy $x_{11}=0$.

Ez akkor következik be, ha a megfelelő költség-elem igen nagy, azaz $c_{11}=M$.

Ha az 1. és 2. feladónál nem maradhat áru, ez akkor teljesül, ha ez a két feladó a névleges állomásnak „nem szállít”: $x_{15}=x_{25}=0$, azaz $c_{15}=c_{25}=M$.

Ezután következik a program javítása az optimumig, az optimum:

$$\underline{X}_0=\begin{bmatrix} 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 40 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & 0 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

Az összköltség minimuma: $K=630$.

A 3. feladónál 10 egység áru marad.

Látható, hogy a program kikerülte a „tiltott” helyeket.
A szállítási feladatok egyszerűen megoldhatók számítógéppel.

A fejezet tárgyalását befejeztük.