Mátrixaritmetika

Tartalom:

A vektor és mátrix fogalma

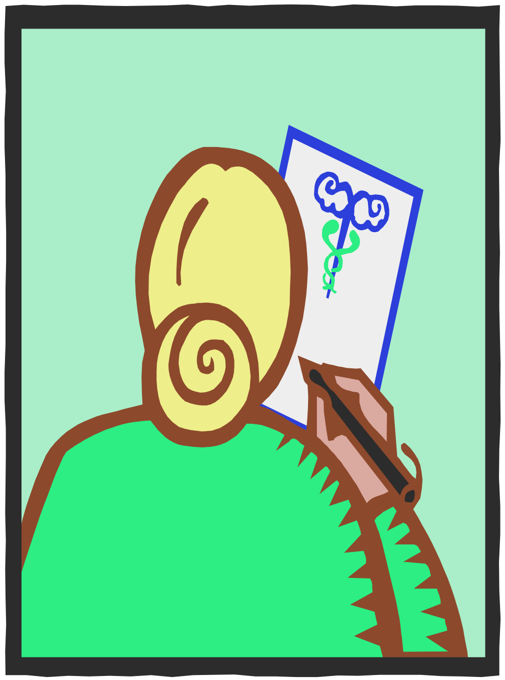
Speciális mátrixok

Relációk és műveletek mátrixokkal

A mátrixok szorzása

A diadikus szorzat. Hatványozás

Gyakorlati alkalmazások



Készítette: Dr. Ábrahám István

A vektor és mátrix fogalma

A vektor és mátrix tulajdonképpen a számfogalom általánosítása.

A számokkal a tárgyak, jelenségek mennyiségi vonatkozásait jellemezzük.

Sok esetben ez a jellemzés egy számmal nem valósítható meg.

Például: Ha a szabó méreteket vesz egy ruha készítéséhez, akkor egész számsort ír fel.

Vagy: Ha egy egyszerű termelési folyamatot tekintünk, amikor 3 erőforrás felhasználásával négyféle terméket gyártanak, akkor a gyártást jellemezheti az, hogy egy egységnyi termékbe az erőforrásokból menynyi épül be. Ezt számtáblázat alakjában vehetjük fel. Például:

	I	II	III	IV
A	4	3	3	1
B	2	1	0	5
C	0	1	2	3

Ha a sorok és oszlopok élén mindig erőforrások és termékek állnak, akkor hasonló esetben elegendő megadni a számtáblázatot (mátrixot):

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mátrix: m sorban és n oszlopban elrendezett számtáblázat. (m és n pozitív egész.)

Jelölés: a mátrixokat általában az ábécé nagybetűivel jelöljük, amelyeket aláhúzunk és a számtáblázatot szögletes zárójelek közé tesszük.

Általánosan: a mátrix elemeit a_{ij}-vel jelöljük, ahol az i, az első index, mindig a sor számát jelenti a mátrixban, így az értékei 1-től m-ig lehetnek a pozitív egész számok, a j pedig az oszlop számát jelöli ($1 \le j \le n$). Tehát:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Az így megadott mátrixot m-szer n típusúnak nevezzük. Az m és n a mátrix jelzőszámai.

A mátrix megadható **rövidítve** is:

$\underline{A}=[a_{ij}]$, ahol $1 \le i \le m$ és $1 \le j \le n$.

Példa: a 3·4-es mátrixnak 3 sora és 4 oszlopa van.

A **vektor** olyan mátrix, amelynek egyik jelzőszáma 1, a másik 1-nél nagyobb.

Jelölés: a vektorokat aláhúzott kisbetűkkel jelöljük.

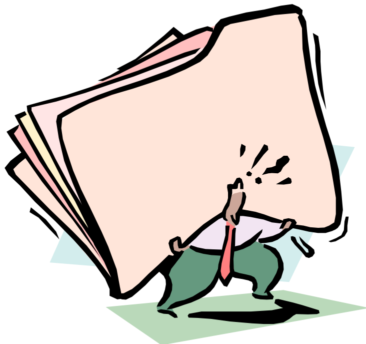
Például egy 1·4-es **sorvektor**: $\underline{a}^*=[2 \quad 0 \quad -1{,}4 \quad 3/4]$

A sorvektorhoz megkülönböztető jelként csillagot (*) írunk.

Például egy 3·1-es **oszlopvektor**:

$$\underline{b}=\begin{bmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

Az oszlopvektort csillag (*) nélkül jelöljük.



A mátrix transzponáltja

Gyakran előfordul, hogy egy számtáblázat oszlopait és sorait felcseréljük. Mátrixoknál ezt az eljárást transzponálásnak nevezzük.

Jelölés: az $\underline{A}$ mátrix transzponáltja $\underline{A}$*.

Példa: Ha

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ akkor } \underline{A}^* = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: 1.) A vektorok megadásánál az oszlopvektort tekintjük elsődlegesnek, a sorvektor annak transzponáltja, innen a csillag a jelölésnél.

Így az oszlopvektort is írhatjuk „vízszintesen”, ha a jobboldal transzponáltját vesszük.

Példa: A $\underline{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{7} \end{bmatrix}$ vektor írható $\underline{b}$=[6 0 7]* alakban is.

2.) Bármely mátrixot tekinthetünk oszlopvektorokból, illetve sorvektorokból állónak (particionálás).

Például a fenti $\underline{A}$ mátrix felírható olyan oszlopvektorként, amely az

$\underline{a}_1$*=[4 3 3 1]
$\underline{a}_2$*=[2 1 0 5]
$\underline{a}_3$*=[0 1 2 3] sorvektorokból áll.

Speciális mátrixok

I. Említettük, hogy a **vektor** olyan mátrix, amelynek egyik jelzőszáma 1.

Az oszlopvektor $m \cdot 1$ típusú ($m>1$), a sorvektor $1 \cdot n$ típusú ($n>1$). ($m, n \in N^+$)

Ha mindkét jelzőszám 1, akkor a mátrixot egyetlen szám alkotja.

Ilyenkor a mátrixot jelölő szögletes zárójel elhagyható és a (valós) számot skalárnak nevezzük. A skalárokat a görög ábécé kisbetűivel jelöljük: $\alpha, \dots, \lambda, \mu, \dots$

Speciális vektorok: 1.) a nullvektor minden eleme 0: $\underline{0}=[0\ 0\ \dots\ 0]^*$

A speciális vektorok egyaránt lehetnek oszlop- vagy sorvektorok.

2.) az egységvektor egy eleme 1, a többi 0:
$\underline{e}_1=[1\ 0\ \dots\ 0]^*$, $\underline{e}_2=[0\ 1\ \dots\ 0]^*, \dots$

3.) az összegzővektor minden eleme 1: $\underline{1}=[1\ 1\ \dots\ 1]^*$

II. **Négyzetes** (kvadratikus) az a mátrix, amelynek jelzőszámai egyenlők.

Példa: Az $\underline{M}$ mátrix $4 \cdot 4$-es, a mátrix rendje 4.

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & \pi \\ \sqrt{5} & 1 & 2{,}3 & 0 \\ 7 & 2 & 25 & 8 \\ 0 & 4 & -9 & 6 \end{bmatrix}$$

A mátrixban az elemek tetszőleges valós számok lehetnek.

Elnevezések: a négyzetes mátrix főátlóját a bal felső saroktól a jobb alsó sarokig húzott átlóban lévő számok alkotják.

Például az M főátlóját a 3 1 25 6 számok jelentik.

Mellékátló: a főátlóra merőleges átló.

Például az M mellékátlóját a π 2,3 2 0 számok alkotják.

Diagonális az a négyzetes mátrix, amelyben a főátlón kívüli elemek nullák.

Példa: A D mátrix diagonális (a D diagonál mátrix):

A diagonál mátrix megadása a főátlóval történik.

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Jelölés: $\underline{D} = < 3 \;\; 1 \;\; 25 \;\; 6 >$.

Speciálisan: **egységmátrix** az olyan diagonál mátrix, amelyben a főátlóban csupa egyes áll.

Példa: Az $\underline{E}_3$ (harmadrendű) egységmátrix: $\underline{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Megjegyzés: az egységmátrix sorait is és oszlopait is egységvektorok alkotják.

A **nullmátrix** csupa nullából áll.

Megjegyzés: a nem négyzetes mátrix is lehet nullmátrix, ha minden eleme 0. Ilyenkor meg kell adni a jelzőszámokat.

A négyzetes mátrixok között még két esetet említünk:

1.) Trianguláris (háromszög) mátrix az, amelyiknél a főátló alatt, vagy a a főátló felett minden elem 0.

Példa: A $\underline{T}_f$ mátrix felső trianguláris, a $\underline{T}_a$ pedig alsó trianguláris:

$$\underline{T}_f = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & \pi \\ 0 & 0 & 2{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \underline{T}_a = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Az egységmátrixok vagy a négyzetes nullmátrixok egyszerre alsó és felső triangulárisak

2.) Szimmetrikus az a mátrix, amelyiknél az elemek a főátlóra tükrözöttek, azaz: $a_{ij}=a_{ji}$ minden i-re és j-re.

Példa: Az $\underline{S}$ mátrix szimmetrikus:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Ferdén szimmetrikus az a mátrix, amelynél $a_{ij}= -a_{ji}$ (**minden i-re és j-re).**

$$\underline{S}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

További speciális mátrixokkal találkozhatunk a későbbi tanulmányaink során.

Relációk és műveletek mátrixokkal

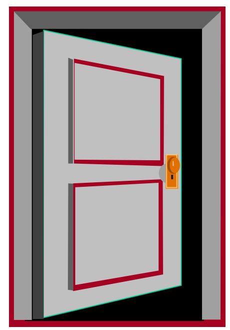
Két, vagy több mátrix között aritmetikai relációt (kapcsolatot, viszonyt) csak akkor állapíthatunk meg, ha a mátrixok azonos típusúak.

Ha a mátrixok nem azonos típusúak, akkor összehasonlíthatatlanok.

Két azonos típusú mátrix között az „=”, a „≤”, a „<”, a „>”, vagy a „≥” reláció közül valamelyik akkor és csak akkor áll fenn, ha a mátrixok minden megfelelő eleme között fennáll a reláció.

Példa: Állapítsunk meg relációkat a következő mátrixok között:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix} \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$



Megoldás: Mindhárom mátrix különböző típusú, tehát közöttük arimetikai reláció nem adható meg.

Igaz viszont: $\underline{B} \geq \underline{0}$, valamint látható, hogy $\underline{A}$ és $\underline{C}$ egymás transzponáltjai, tehát: $\underline{A}=\underline{C}^*$, illetve $\underline{A}^*=\underline{C}$.

***Elmondhatjuk**: az azonos jelzőszámú mátrixok között is viszonylag ritkán lehet relációt tapasztalni.*

Műveletek mátrixok között

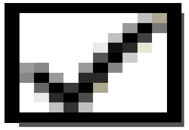
Mátrixok közötti műveleten mátrixok elemeinek egymáshoz rendelését értjük.

Összeadás

Két <u>azonos típusú</u> mátrixot úgy adunk össze, hogy a megfelelő elemeiket összeadjuk.

Példa: Ha az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ mátrixok adottak, akkor az összegük:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{akkor } \underline{A}+\underline{B} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$



A mátrixok között értelmezett összeadás a vektorokra is vonatkozik.

Vigyázat! Oszlopvektort sorvektorral nem lehet összeadni, hiszen a jelzőszámaik mások!

Skalárral való szorzás

Tetszőleges mátrixot egy valós számmal (skalárral) mindig meg lehet szorozni.

Ha adott az $\underline{A}=[a_{i\,j}]$ mátrix és a λ valós szám, akkor a mátrix λ-szorosán azt a mátrixot értjük, amelynek minden eleme az eredeti mátrix elemeinek λ-szorosa.

Tehát: $\lambda\cdot\underline{A}=[\lambda a_{i\,j}]$.

Példa: A fenti $\underline{A}$ mátrix $\lambda=5$ esetén: $5\underline{A} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 0 & 15 \\ 5 & -45 \end{bmatrix}$

A kivonást külön nem kell értelmezni, hiszen az visszavezethető $\lambda = -1$-gyel történő szorzásra és összeadásra: $\underline{A}-\underline{B}=\underline{A}+(-1)\underline{B}$.

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai

Kommutatív tulajdonság: $\underline{A}+\underline{B}=\underline{B}+\underline{A}$, illetve: $\lambda\underline{A}=\underline{A}\cdot\lambda$.

Asszociatívitás: $\underline{A}+(\underline{B}+\underline{C})=(\underline{A}+\underline{B})+\underline{C}=\underline{A}+\underline{B}+\underline{C}$, illetve: $(\lambda\mu)\underline{A}=\lambda(\mu\underline{A})=\lambda\mu\underline{A}$.

Disztributív tulajdonság: $\lambda(\underline{A}+\underline{B})=\lambda\underline{A}+\lambda\underline{B}$, illetve: $(\lambda+\mu)\underline{A}=\lambda\underline{A}+\mu\underline{A}$.

A transzponálás „műveletettartó” az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve: $(\underline{A}+\underline{B})^*=\underline{A}^*+\underline{B}^*$, illetve: $(\lambda\underline{A})^*=\lambda\underline{A}^*$.

Mátrixok szorzása

A mátrixok egymással való szorzása eltér a valós számok körében végzett szorzástól.

A mátrix szorzást vektorok szorzására vezetjük vissza.

Két vektor skalárszorzata

Adott egy n elemű $\underline{a}^*$ sorvektor és egy ugyancsak n elemű $\underline{b}$ oszlopvektor.

A két vektor skalárszorzata a megfelelő elemek szorzatának összege.

Példa: Legyen $\underline{a}^*=[\,3\ \ -1\ \ 5\ \ 0\,]$ és $\underline{b}=[\,4\ \ -2\ \ 3\ \ 8\,]^*$ (a $\underline{b}$ oszlopvektor!).

A skaláris szorzatuk: $\underline{a}^*\cdot\underline{b}=3\cdot4+(-1)\cdot(-2)+3\cdot5+0\cdot8=29$.

Általánosan: Az n elemű $\underline{a}^*$ sorvektor és $\underline{b}$ oszlopvektor skaláris szorzata:

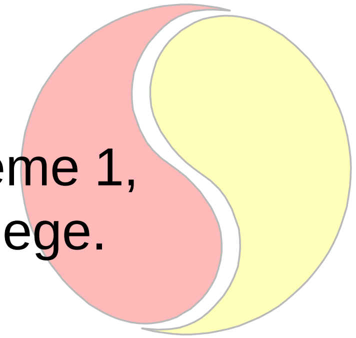
Az első tényező mindig a sorvektor!

$$\underline{a}^* \cdot \underline{b} = [\, a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_n \,] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Fontos a sorrend!
Az mindig sorvektor szorozva oszlopvektorral!

A skaláris szorzás eljárását ("szorozd össze a megfelelő elemeket és a szorzatokat add össze") **komponálásnak** is nevezzük.

A skaláris szorzat kommutatív: $\underline{a}^* \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \underline{b}^* \cdot \underline{a}$.



Speciálisan: Ha a skalárszorzatban az egyik vektor minden eleme 1, akkor a komponálás eredménye a másik vektor elemeinek összege.

Példa: Legyen $\underline{\mathbf{a}}^* = [\, 3 \;\; -1 \;\; 5 \;\; 0 \,]$ és $\underline{\mathbf{b}} = [\, 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \,]^*$, akkor:

$$\underline{\mathbf{a}}^* \cdot \underline{\mathbf{b}} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 7.$$

Ha egy vektor minden eleme egy, akkor a skalárszorzás miatt nevezzük a vektort összegző vektornak.

Mátrixszorzás vektorokra bontással (partícionálással)

Összeszorozhatunk két mátrixot a skaláris szorzat definíciója alapján, ha az első tényezőt sorvektorokra, a másodikat pedig oszlopvektorokra bontjuk. Szükséges, hogy a két típusú vektorok elemszámai azonosak legyenek.

Példa: Adott az A és B mátrix, vegyük fel A-t sorvektorokra, B-t oszlopvektorokra particionálva:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}2 & -6 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[2 & -6 & 1]\\ [3 & 0 & -1]\end{bmatrix} \quad \text{és } \underline{B}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\\ 5 & 4\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\3\\4\end{bmatrix}\right]$$

Az $\underline{A}\cdot\underline{B}$ szorzatmátrix első sorának első elemét megkapjuk, ha az $\underline{A}$ első sorvektorát komponáljuk a $\underline{B}$ első oszlopvektorával:

[2 –6 1]·[1 0 5]*=2+0+5=7.

Az $\underline{A}\cdot\underline{B}$ szorzatmátrix első sorának második elemét megkapjuk, ha az $\underline{A}$ első sorvektorát komponáljuk a $\underline{B}$ második oszlopvektorával:

[2 –6 1]·[–2 3 4]*=–18.

Hasonló komponálással a szorzatmátrix második sorának első eleme: –2, a második sor második eleme pedig –10. Tehát:

$$\underline{A}\cdot\underline{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{-6} & \mathbf{1}\\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{3}\\ \mathbf{5} & \mathbf{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{7} & \mathbf{-18}\\ \mathbf{-2} & \mathbf{-10}\end{bmatrix}$$

Tehát sorokat oszlopokkal komponálunk.

A mátrixszorzás általánosan

Ha az $\underline{A}$ mátrix $m{\cdot}p$ típusú és a $\underline{B}$ mátrix $p{\cdot}n$ típusú, akkor a szorzatukon azt az $m{\cdot}n$ típusú $\underline{C}$ mátrixot értjük, amelynek bármely c_{ij} eleme az $\underline{A}$ mátrix i-edik sorvektorának és a $\underline{B}$ mátrix j-edik oszlopvektorának skaláris szorzata.

Jelöléssel:

$$\underline{A}\cdot\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_1^* \\ \underline{\mathbf{a}}_2^* \\ \dots \\ \underline{\mathbf{a}}_m^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{b}}_1 & \underline{\mathbf{b}}_2 & \dots & \underline{\mathbf{b}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{a}}_1^*\cdot\underline{\mathbf{b}}_1 & \underline{\mathbf{a}}_1^*\cdot\underline{\mathbf{b}}_2 & \dots & \underline{\mathbf{a}}_1^*\cdot\underline{\mathbf{b}}_n \\ \underline{\mathbf{a}}_2^*\cdot\underline{\mathbf{b}}_1 & \dots & \dots & \underline{\mathbf{a}}_2^*\cdot\underline{\mathbf{b}}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{\mathbf{a}}_m^*\cdot\underline{\mathbf{b}}_1 & \dots & \dots & \underline{\mathbf{a}}_m^*\cdot\underline{\mathbf{b}}_n \end{bmatrix}$$

Fontos: A szorozhatóság feltétele, hogy az első tényező oszlopainak száma **megegyezzen** a második tényező sorainak számával.

Ha ez teljesül, akkor a két mátrixot konformábilisnek nevezzük.

Konkrétan: Az $\underline{A}$ és $\underline{B}$ akkor szorozható, ha a középső jelzőszámok megegyeznek és ilyenkor az eredmény jelzőszámait a két „szélső" jelzőszám adja.

Példa: Ha az $\underline{A}$ mátrix **3·4**-es, akkor ez mátrix jobbról csak **4·n** típusúval, balról pedig **n·3** típusúval szorozható. $(n \in N^+)$

Ha például az első tényező **3·4**-es, akkor azt egy **4·2**-sel szorozva egy **3·2**-es mátrixot kapunk:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{15} \\ \mathbf{36} & \mathbf{21} \\ \mathbf{24} & \mathbf{8} \end{bmatrix}$$

A szorzást „**sorvektor komponálva oszlopvektorral**” módon végeztük.

Áttekinthetőbbé tehetjük a szorzást, ha az ú.n. **Falk sémát** alkalmazzuk, amely a szorzás következő elrendezését jelenti:

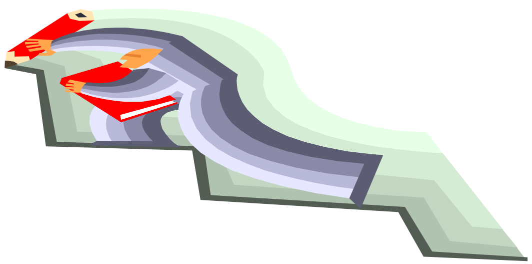
					5	– 1
B					0	2
					0	4
					6	5
	3	4	5	– 2	3	15
A	6	7	2	1	36	21
	0	0	– 3	4	24	8

Húztunk két egymásra merőleges szakaszt, a bal alsó negyedbe kerül az A mátrix, a jobb felsőbe a B, és az eredmény, amit úgy kapunk, hogy az A mátrix sorait komponáljuk a B megfelelő oszlopaival, a jobb alsó negyedbe kerül. A szögletes zárójelek kiírása ekkor nem szükséges.

Példa: Legyen a B' 3·3-as, a B'·A szorzást végezzük el Falk módszerrel:

				3	4	5	– 2
			A	6	7	2	1
				0	0	– 3	4
	5	– 1	0	9	13	23	– 11
B^{i}	0	2	4	12	14	– 8	18
	3	0	1	9	12	12	– 2

A **sorok** és **oszlopok** komponálásával kapjuk a szorzatmátrix elemeit.



A mátrixszorzás tulajdonságai

1.) A mátrixszorzás **nem kommutatív**! Tehát általában: $\underline{A}\cdot\underline{B} \neq \underline{B}\cdot\underline{A}$.

Példa: Adott az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & -1 \\ 9 & 3 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{és a } \underline{B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Képezzük az $\underline{A}\cdot\underline{B}$ és a $\underline{B}\cdot\underline{A}$ szorzatokat!

Egyszerűen belátható (például a Falk sémát alkalmazva), hogy $\underline{A}\cdot\underline{B}=\underline{0}$.

A $\underline{B}\cdot\underline{A}$ szorzat eredménye egészen más:

$$\underline{B}\cdot\underline{A} = \begin{bmatrix} -37 & -14 & 23 \\ 37 & 14 & -23 \\ -37 & -14 & 23 \end{bmatrix}$$

Végezzük el gyakorlásul ezeket a szorzásokat!

2.) A mátrixszorzás **asszociatív**, ha a szorzásnál a konformábilitás fennáll:

$$\underline{A}\cdot(\underline{B}\cdot\underline{C})=(\underline{A}\cdot\underline{B})\cdot\underline{C}=\underline{A}\cdot\underline{B}\cdot\underline{C}.$$

Az asszociatívitás skalárszorzóra is fennáll: $\lambda(\underline{A}\cdot\underline{B})=(\lambda\underline{A})\underline{B}$.

3.) A mátrixszorzás **disztributív**, ha a konformábilitás fennáll:

$\underline{A}\cdot(\underline{B}+\underline{C})=\underline{A}\cdot\underline{B}+\underline{A}\cdot\underline{C}$, illetve: $(\underline{A}+\underline{B})\cdot\underline{C}= \underline{A}\cdot\underline{C}+\underline{B}\cdot\underline{C}$.

A szorzat **transzponáltjára** vonatkozó szabály: $(\underline{A}\cdot\underline{B})^*=\underline{B}^*\cdot\underline{A}^*$.

Speciális mátrixműveletek

Sokszor szükségünk van arra, hogy egy táblázatból kiemeljünk egy sort, vagy oszlopot, összeadjuk az elemeket, vagy valamilyen más **adatbányászást** hajtsunk végre.

Ilyenkor mátrixaritmetikai műveleteket, módszereket alkalmazhatunk.

1. Egy oszlop kiemelése a mátrixból

Az $\underline{A}$ mátrix j-edik oszlopát kapjuk, ha a mátrixot jobbról szorozzuk a j-edik egységvektorral: $\underline{a}_j=\underline{A}\cdot\underline{e}_j$. (Az egységvektor ekkor csak oszlopvektor lehet!)

Példa: Legyen adott egy 4·3-as $\underline{A}$ mátrix:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & -1 \\ 9 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Emeljük ki a 3. oszlopot!

(Az $\underline{A}$-t szorozzuk jobbról az $\underline{e}_3$-mal:)

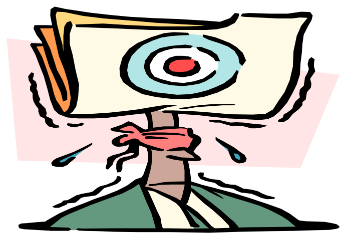
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & -1 \\ 9 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2. Egy sor kiemelése a mátrixból

Az $\underline{A}$ mátrix i-edik sorát kapjuk, ha a mátrixot balról szorozzuk az i-edik egységvektorral: $\underline{b}_i^*=\underline{e}_i^*\cdot\underline{A}$. Ekkor az egységvektor sorvektor (konformábilitás!).

Példa: Az $\underline{A}$ mátrixból emeljük ki a második sort:

$$[\,0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\,]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & -1 \\ 9 & 3 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}=[\,6\ \ 5\ \ -1\,]$$



3. A mátrix j-edik oszlopában lévő elemek összege

A j-edik oszlopot kiemeljük, és a kapott vektor elemeit az összegzővektorral összeadjuk.

$$\underline{\mathbf{1}}^*\cdot(\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{e}}_j)$$

Írhatjuk zárójel nélkül is (asszociatívitás): $\underline{\mathbf{1}}^*\cdot\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{e}}_j$.

4. A mátrix i-edik sorában lévő elemek összege

Az előzőhöz hasonlóan : sorkiemelés, majd az összegzővektorral „összeadatunk”:

$$\underline{\mathbf{e}}_i^*\cdot\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{1}}.$$

Példa: Az $\underline{A}$ 3. oszlopa elemeinek összege

$$[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 6 & 5 & -1\\ 9 & 3 & -6\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]\cdot\begin{bmatrix}3\\-1\\-6\\-1\end{bmatrix}=-5.$$

Példa: Az $\underline{A}$ 2. sora elemeinek összege:

$$[0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 6 & 5 & -1\\ 9 & 3 & -6\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=10.$$

5. A mátrix oszlopaiban lévő elemek összege oszloponként

Az összegző sorvektorral balról szorozzuk a mátrixot: $\underline{\mathbf{1}}^*\cdot\underline{\mathbf{A}}$.

6. A mátrix soraiban lévő elemek összege soronként

Az összegző oszlopvektorral jobbról szorozzuk a mátrixot: $\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{1}}$.

Végezzük el gyakorlásul ezeket a szorzásokat!

7. A mátrix összes elemeinek összege

Vagy az oszlopelemek összegét összegezzük,vagy a sorelemek összegét összegezzük:

$(\underline{1}^{*}\cdot\underline{A})\cdot\underline{1}=\underline{1}^{*}\cdot(\underline{A}\cdot\underline{1})=\underline{1}^{*}\cdot\underline{A}\cdot\underline{1}.$ *(A zárójeleket ki sem kell írni. Ügyeljünk a konformábilitásra!)*

Példa:

$$[\,1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\,]\cdot\begin{bmatrix}-1&0&3\\6&5&-1\\9&3&-6\\1&2&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]\cdot\begin{bmatrix}2\\10\\6\\2\end{bmatrix}=20$$

8. A mátrix minden elemének szorzása egy számmal

Ez alapművelet: $\lambda\cdot\underline{A}=[\lambda\cdot a_{i\,j}]$.

9. A mátrix egy oszlopában lévő elemek szorzása egy számmal

Az $\underline{A}$ mátrixot jobbról szorozzuk a megfelelően módosított egységmátrix-szal.
Például ha a 2. oszlopot akarjuk szorozni λ-val:

$\underline{A}\cdot<1\ \lambda\ 1\ \ldots\ 1>.$ (Az egységmátrix diagonál mátrix, a főátlóban csupa 1 áll.)

Példa: Az $\underline{A}$ 2. oszlopát szorozzuk meg 3-mal:

$$\begin{bmatrix}-1&0&3\\6&5&-1\\9&3&-6\\1&2&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&3\\6&15&-1\\9&9&-6\\1&6&-1\end{bmatrix}$$

10. A mátrix egy sorában lévő elemek szorzása egy számmal

Az $\underline{A}$ -t balról szorozzuk a módosított egységmátrix-szal:

$<1\ 1\ \lambda\ 1\ \ldots\ 1>\cdot\underline{A}.$

A diadikus szorzat. Mátrixok hatványozása

A diadikus szorzat két vektor szorzata, oszlopvektor·sorvektor sorrendben.

A mátrixszorzás szabálya szerint két vektor akkor is összeszorozható, ha az első tényező m·1 típusú (azaz oszlopvektor), a második pedig 1·n típusú, hiszen a középső jelzőszámok megegyeznek. Az eredmény m·n-es mátrix.

Példa: Adott az $\underline{a}$=[3 -1 0 2]* oszlopvektor és a $\underline{b}$*=[1 2 5] sorvektor. Képezzük az $\underline{\mathbf{a}}\cdot\underline{\mathbf{b}}^*=\underline{\mathbf{A}}$ diadikus szorzatot!

Használjuk a Falk sémát:

$$\begin{array}{cc|ccc} & \underline{\mathbf{b}} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \hline & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{15} \\ \underline{\mathbf{a}} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-5} \\ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{10} \end{array}$$

Az eredmény egy 4·3-as mátrix.

Megjegyzés: Hasonlóan egyszerűen szorozható össze két diagonális mátrix:

$$< a_1\ a_2 \dots a_n >\cdot< b_1\ b_2 \dots b_n >=< a_1b_1\ a_2b_2 \dots a_nb_n >$$

Az (azonos típusú) diagonál mátrixok szorzata is diagonál mátrix. A szorzat-mátrix elemeit megkapjuk, ha a tényezők megfelelő elemeit összeszorozzuk.

Hatványozni (önmagával megszorozni) csak akkor lehet egy mátrixot, ha az **négyzetes**.

Tehát: $\underline{A}^2=\underline{A}\cdot\underline{A}$, $\underline{A}^3=\underline{A}^2\cdot\underline{A}$, és így tovább: $\underline{A}^n=\underline{A}^{n-1}\cdot\underline{A}$. Megegyezés szerint: $\underline{A}^0=\underline{E}$.

Elnevezés: Az $\underline{A}$ mátrix **nilpotens**, ha $\underline{A}\neq\underline{0}$, de $\underline{A}^n=\underline{0}$.

A legkisebb olyan kitevő, amelynél a mátrix hatvány $\underline{0}$ lesz, a **nilpotencia foka**.

Példa: Adott az $\underline{A}$ mátrix:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\quad \text{ekkor: } \underline{A}^2=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \text{és } \underline{A}^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\underline{0}$$

Tehát az $\underline{A}$ mátrix **nilpotens** és a nilpotencia foka 3.

Elnevezés: Az $\underline{A}$ mátrix **projektor** mátrix, $\underline{A}^2=\underline{A}$.

Példa: Adott az $\underline{A}$ mátrix:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}1&-5\\0&0\end{bmatrix},\quad \text{ekkor } \underline{A}^2=\begin{bmatrix}1&-5\\0&0\end{bmatrix}=\underline{A}, \text{ tehát az } \underline{A} \text{ projektor mátrix.}$$

A mátrixok hatványozásához további összefüggések tartoznak, ezekkel nem foglalkozunk.

Gyakorlati alkalmazások

A társadalmi, gazdasági, természeti folyamatokhoz kapcsolódó adathalmazok (**vektorok**, **mátrixok**) áttekintését, értelmezését, a velük való számolást jelentősen **egyszerűsíti** a „mátrixos” írásmód, a **mátrixaritmetika**.

Példa: A következő feladatban a kérdésekre mátrixaritmetikai jelölésekkel válaszoljunk!

Egy üzem 4 erőforrás (például élőmunka, anyag, energia, gépek) felhasználásával háromféle terméket készít. Az első termék egy egységébe az erőforrásokból rendre **3, 1, 2, 4**, a másodikba **3, 3, 4, 1**, a harmadikba **2, 2, 4, 2** egységnyi épül be.
Az erőforrásokból maximálisan felhasználható kapacitások: **500, 450, 620 és 390**.
Az egyes termékekből **50, 70, 60** darabot kívánnak gyártani. Az erőforrások egységárai: **2, 3, 4, 3** pénzegység, az egyes termékek eladási árai **40, 50, 45** pénzegység.
A felhasznált erőforrások költségén kívül a termékekhez egyéb költségek (csomagolás, raktározás, stb.) járulnak, ezek darabonként: **3, 3, 2** pénzegység.

1.) Az adott feltételekkel megvalósítható-e a termelés?

2.) Mennyi maradvány van az egyes erőforrásokból?

3.) Mennyi a termelés összköltsége?

4.) Egy darab terméknek mennyi az előállítási költsége?

5.) Mennyi a fajlagos önköltség darabonként?

6.) Mekkora az összes ráfordítás?

7.) Mennyi a teljes árbevétel?

Megoldás: az adatainkat elrendezzük.

Az **erőforrás beépülés** táblázatának felvételéhez jelöljük az egyes erőforrásokat A, B, C, D-vel, a termékeket I, II, III-mal:

	I	II	III
A	3	3	2
B	1	3	2
C	2	4	4
D	4	1	2

Ismert tehát a termelést meg-határozó ú.n. **technológiai mátrix**:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A **kapacitás** adatokat vektorként vesszük fel: $\underline{\mathbf{b}}$**=[500 450 620 390]*.**

A **kapacitások egységárai** pedig: $\underline{\mathbf{a}}$**=[2 3 4 3]*.**

A tervezett **gyártási program** vektor alakja: $\underline{\mathbf{p}}$***=[50 70 60].**

Az **eladási ár** vektor: $\underline{\mathbf{c}}$***=[40 50 45].**

A **további költségek** vektora: $\underline{\mathbf{t}}$***=[3 3 2].**

Az **1.) kérdésre** a válasz mátrixaritmetikai alakja:

$$\underline{A}\cdot\underline{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{50} \\ \mathbf{70} \\ \mathbf{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{480} \\ \mathbf{380} \\ \mathbf{620} \\ \mathbf{390} \end{bmatrix} \le \underline{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{500} \\ \mathbf{450} \\ \mathbf{620} \\ \mathbf{390} \end{bmatrix}$$

A kapacitásvektor komponensei nem kisebbek a számolt értékeknél, így a tervezett termelés lehetséges.

A **2.) kérdésre** a válasz mátrixaritmetikai alakja:

$$\underline{b}-\underline{A}\cdot\underline{p}=[\,20\ \ 70\ \ 0\ \ 0\,]^*.$$

A **3.) kérdésre:** $\underline{a}^*\cdot(\underline{A}\cdot\underline{p})=_{\text{(az asszociativitás miatt)}}=\underline{a}^*\cdot\underline{A}\cdot\underline{p}=6000.$

U.i.:az egységárakkal rendre szorozzuk a szükséges kapacitás mennyiségeket és a szorzatokat összeadjuk.

A **4.) kérdésre** a válasz: skalárisan szorozzuk az $\underline{a}^*$ sorvektorral az $\underline{A}$ oszlopvektorait, tehát magát az $\underline{A}$-t:

$$\underline{a}^*\cdot\underline{A}=[\,2\ \ 3\ \ 4\ \ 3\,]\cdot\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}=[\,29\ \ 34\ \ 32\,].$$

Az **5.) kérdésre:** $\underline{a}^*\cdot\underline{A}+\underline{t}^*=[\,32\ \ 37\ \ 34\,].$

U.i.:a fajlagos önköltséget akkor kapjuk, ha a további költségeket rendre hozzáadjuk az előállítási költségekhez.

A **6.) kérdésre** a válasz: az összes ráfordítás úgy adódik, hogy a fajlagos önköltségeket rendre szorozzuk a darabszámokkal és a szorzatokat összeadjuk:

$(\underline{a}^*\cdot\underline{A}+\underline{t}^*)\cdot\underline{p}=6230.$ **Ez a skalárszorzat írható $\underline{p}^*\cdot(\underline{a}^*\cdot\underline{A}+\underline{t}^*)^*$ alakban is.**

A **7.) kérdésre** a válasz: a teljes (lehetséges) árbevételt megkapjuk, ha a darab-számokat rendre szorozzuk az eladási egységárakkal és a szorzatokat összeadjuk:

$$\mathbf{\underline{c}^{*}\cdot\underline{p}=\underline{p}^{*}\cdot\underline{c}=8200.}$$

További kérdéseink lehetnek:

8.) Mekkora a fedezeti összeg?

A válasz: a fedezeti összeg=árbevétel – üzemi ráfordítás, tehát:

$$\mathbf{\underline{c}^{*}\cdot\underline{p}-(\underline{a}^{*}\cdot\underline{A}+\underline{t}^{*})\cdot\underline{p}=1970.}$$

9.) Mekkora a termelési program **összes erőforrás szükséglete** termékenként?

A válasz mátrixaritmetikai alakja kicsit bonyolultabb:

$$\mathbf{\underline{A}\cdot\langle\,\underline{p}\,\rangle}$$

A technológiai mátrixot jobbról szorozzuk a p elemeiből álló diagonális mátrix-szal.

$$\underline{A}\cdot\langle\,\underline{p}\,\rangle=\begin{bmatrix}3&3&2\\1&3&2\\2&4&4\\4&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50&0&0\\0&70&0\\0&0&60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}150&210&120\\50&210&120\\100&280&240\\200&70&120\end{bmatrix}$$

A mátrixaritmetikának további **széleskörű alkalmazási lehetőségei** vannak.

A fejezet tárgyalását befejeztük.