Ellenőrzés

Variáns számítás

Érzékenység vizsgálat

Készítette: Dr. Ábrahám István

Az ellenőrzés

A matematikai modell megoldása, a szimplex táblák kitöltése közben könnyen elkövethetünk számolási hibát.

A kiindulási adatok ismeretében bármelyik táblázat helyességét viszonylag egyszerű módon ellenőrizhetjük.

Az ellenőrzés módszere lehetővé teszi az adott feladat különböző változatainak kiszámolását anélkül, hogy újra megoldanánk a problémát. **(Variánsszámítás)**

Az ellenőrzés módszerével a modellünk kapacitásainak, célfüggvény együtthatóinak az optimumra gyakorolt hatásait is vizsgálni tudjuk. **(Érzékenység vizsgálat)**

Az ellenőrzés módszerének bemutatására egy konkrét feladatból indulunk ki:

Egy normál lineáris programozási feladatban adott a kapacitás vektor: **b**=[100 200 350 150]* és a célfüggvény együtthatók vektora: **c***=[2 -2 -1 1]. A szimplex módszer alkalmazásával a következő optimális táblát kaptuk:

	u_1	x_2	x_3	u_4	b
x_1	0,5	2	0,5	0	50
u_2	0	-1	5	-1	50
u_3	1	3	5	-2	150
x_4	-0,5	-1	-0,5	1	100
-z	-0,5	-5	-1,5	-1	-200

Az ellenőrzéshez ezt a táblázatot használjuk fel.

1. lépés: a táblázat kiegészítése perem sorokkal és oszlopokkal.

Minden változóhoz két értéket rendelünk: az egyik 0, a másik pedig a primál, illetve duál feladat célfüggvényének az illető változóhoz tartozó együtthatója.

Az u_i értékekhez az eredeti kapacitásvektor megfelelő értékei tartoznak, az x_i értékekhez a célfüggvény együtthatók.

Tehát: **b**=[100 200 350 150]*

$\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$

Így: u_1 u_2 u_3 u_4

Valamint: **c***=[2 -2 -1 1]

$\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$

A hozzárendelés: x_1 x_2 x_3 x_4

		100	0	0	150		
		u_1	x_2	x_3	u_4	b	
2	x_1	0,5	2	0,5	0	50	0
0	u_2	0	-1	5	-1	50	200
0	u_3	1	3	5	-2	150	350
1	x_4	-0,5	-1	-0,5	1	100	0
	-z	-0,5	-5	-1,5	-1	-200	0
		0	-2	-1	0	0	

Ha a változó a helyén maradt (oszlopfőn, illetve sorkezdőként), akkor 0-t rendelünk hozzá, ha elmozdult, akkor „viszi magával a hozzárendelt (nem 0) értéket” - így keletkeznek a kiegészítő sorok és oszlopok. A célfüggvény alá és mellé 0 kerül.

2. lépés: az ellenőrzés végrehajtása

Behívjuk a kiegészített táblázatunkat:

		100	0	0	150		
		u_1	x_2	x_3	u_4	b	
2	x_1	0,5	2	0,5	0	50	0
0	u_2	0	-1	5	-1	50	200
0	u_3	1	3	5	-2	150	350
1	x_4	-0,5	-1	-0,5	1	100	0
	-z	-0,5	-5	-1,5	-1	-200	0
		0	-2	-1	0	0	

Az ellenőrzést külön a **sorokra** és külön az **oszlopokra** végezzük.

Sor ellenőrzés:

A kiegészítő felső sor elemeit szorozzuk a táblázat sorai elemeivel, a szorzatokat összeadjuk (ez a komponálás). A kapott számnak meg kell egyeznie a **két utolsó oszlopban** lévő számok **különbségével**.

Az 1. sorra: 100·0,5+0 ·2+0 ·0,5+150 ·0= 50-0.   Rendben.

A 2. sorra: 100 ·0+0 ·(-1)+0 ·5+150 ·(-1)=-150 és ez=50-200. Rendben.

A 3. sorra: 100 - 300=150 -350. Rendben.

A 4.sor: -50+150=100 - 0. Rendben.

Az 5. sor (a célfüggvény sora) :-50 -150=-200 - 0. Rendben.

Oszlop ellenőrzés

A kiegészítő baloldali oszlop elemeit komponáljuk a táblázat oszlopainak elemeivel. A kapott számnak meg kell egyeznie a **legalsó** kiegészítő sor megfelelő eleme és a **felette lévő** szám **különbségével.**

		100	0	0	150		
		u_1	x_2	x_3	u_4	b	
2	x_1	0,5	2	0,5	0	50	0
0	u_2	0	-1	5	-1	50	200
0	u_3	1	3	5	-2	150	350
1	x_4	-0,5	-1	-0,5	1	100	0
	-z	-0,5	-5	-1,5	-1	-200	0
		0	-2	-1	0	0	

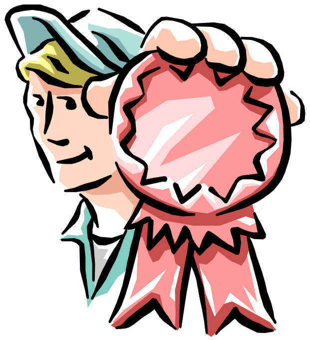
Az 1. oszlopra: 2·0,5+0 ·0+0 ·1+1 ·(-0,5)=0,5 és ez=0-(-0,5)=0,5. Rendben.

A 2. oszlopra: 2 ·2+1 ·(-1)=3 és ez=-2 –(-5)=3. Rendben.

3.oszlop: 1 – 0,5=-1 – (-1,5). Rendben.

4.oszlop:1=0 – (-1). Rendben.

Az 5.oszlop (a b oszlopa): 2 ·50+1·100=0 – (-200). Rendben.



Gyakorló feladat:

Adott egy LP feladat matematikai modellje:

$$\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}$$

$$2x_1+x_2+x_4+x_5 \leq 120$$

$$x_1+x_2+x_3+x_5 \leq 80$$

$$x_2+x_3+2x_4 \leq 60$$

$$z=2x_1+x_2+2x_3+4x_4+x_5 \to \max$$

Az optimális szimplex tábla:

	u_1	x_2	u_2	u_3	x_5	b
x_1	2/5	1/5	1/5	–1/5	3/5	52
x_3	–2/5	3/5	4/5	1/5	2/5	28
x_4	1/5	1/5	–2/5	2/5	–1/5	16
–z	–4/5	–9/5	–2/5	–8/5	–1/5	–224

Végezzünk ellenőrzést!

A táblázat kiegészítéséhez a modellből a **<u>b</u>** és a **<u>c</u>*** vektorokat használjuk fel:

<u>b</u>=[120 80 60]* **<u>c</u>***=[2 1 2 4 1]

A táblázat kiegészítése (**peremsorok** és **peremoszlopok**):

		u_1	x_2	u_2	u_3	x_5	b	
		120	0	80	60	0		
2	x_1	$2/5$	$1/5$	$1/5$	$-1/5$	$3/5$	52	0
2	x_3	$-2/5$	$3/5$	$4/5$	$1/5$	$2/5$	28	0
4	x_4	$1/5$	$1/5$	$-2/5$	$2/5$	$-1/5$	16	0
	$-z$	$-4/5$	$-9/5$	$-2/5$	$-8/5$	$-1/5$	-224	0
		0	1	0	0	1	0	

Sor ellenőrzés: 120 ·2/5+80 ·1/5+60 ·(-1/5)=52-0. Rendben.

-240/5+320/5+60/5=28

120/5 - 160/5+120/5=16.

A célfüggvény sora: -480/5 - 160/5 - 480/5= -224

Oszlop ellenőrzés: 2 ·2/5 - 2 ·2/5+4 ·1/5=0 - (-4/5)=4/5. Rendben.

És így tovább. Például az 5. oszlopra: 6/5+4/5 - 4/5=1 - (-1/5)=6/5.

Az ellenőrzés módszerének elméleti indoklása

A normál LP feladat ($\mathbf{x \geq 0}$, $\mathbf{Ax \leq b}$, $\mathbf{b \geq 0}$, $z=\mathbf{c^*x} \rightarrow \max$) megoldása egyenlet-rendszerre visszavezetéssel történt.

A kanonikus egyenletrendszer és megoldásának szimplex induló táblázata:

$\mathbf{Ax+u=b}$

$\mathbf{c^*x} - z=0$

	$\mathbf{x^*}$	
$\mathbf{u}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{b}$
$-z$	$\mathbf{c^*}$	0

A bázistranszformációk után a táblázat:

	u_1^*	x_2^*	b
x_1	A’		b_1'
u_2			b_2'
- z	$c_1'^*$	$c_2'^*$	- z_0

A táblázatból leolvasható az egyenletrendszer általános megoldása:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1' \\ \mathbf{b}_2' \\ -z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A'} \\ \mathbf{c'^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} \\ \mathbf{x_2} \end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{u_1}$ és $\mathbf{x_2}$ vektorok komponensei szabadon megválaszthatók.

A kanonikus egyenletrendszer: $\mathbf{Ax+u=b}$, $\mathbf{c^*x} - z=0$

Ennek triviális megoldása: $\mathbf{x}=\mathbf{0}$, $\mathbf{u}=\mathbf{b}$ és $z=0$.

A triviális megoldás vektorai felírhatók a bázistranszformációs táblázatnak megfelelően particionált alakban:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

Helyettesítsünk az általános megoldásba és rendezés után adódik:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{c}'^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1' \\ \mathbf{b}_2' \\ -z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Szavakkal</u>: a szimplex tábla „belső mátrixának” (**A’**) sorait komponáljuk az eredeti kapacitásvektor bázisba bevont elemei ($\mathbf{b}_1$) komponenseit és a többi helyen a nullvektor komponenseit tartalmazó vektorral. Eredményül kapjuk a **b** új koordinátáinak és az eredeti kapacitásvektor bázisba be nem vont elemei ($\mathbf{b}_2$) komponenseit és nullákat tartalmazó vektorok különbségét. Az összefüggés igaz a célfüggvény sorára is.

Az összefüggés **átláthatóbbá** tehető megfelelő elrendezés alkalmazásával.

I. A szimplex táblázathoz kiegészítő felső sort és jobboldali oszlopot illesztünk:

	$\mathbf{b_1^*}$	$\mathbf{0^*}$		
	u_1^*	x_2^*	b	
x_1	A'		b_1'	$\mathbf{0}$
u_2			b_2'	$\mathbf{b_2}$
$-z$	$c_1'^*$	$c_2'^*$	$-z_0$	0

II. Az ellenőrzés végrehajtása: a kiegészítő felső sor elemeit komponáljuk a belső mátrix elemeivel. Eredményül az utolsó oszlopban (**b**) és a kiegészítő oszlopban lévő számok különbségét kell kapnunk.

Az összefüggés igaz a célfüggvény sorára is, a z_o mellé nullát írva.

Ez az állítás (természetesen) megegyezik azzal, amit a konkrét példáknál a sorellenőrzés módszereként láthattunk.

Az oszlopellenőrzés magyarázatát az eredeti feladat ($x \geq 0$, $Ax \leq b$, $b \geq 0$, $z = c^*x \to \max$) duáljából kapjuk.

A duál feladat: $y \geq 0$, $A^*y \geq c$, $b^*y \to \min$.

A duál feladatot átalakítjuk: $-A^*y \leq -c$, $z = -b^*y \to \max$.

Az ehhez tartozó egyenletrendszer:

$$-A^*y + w = -c$$
$$-b^*y - z = 0$$

Az egyenletrendszer általános megoldásából kapjuk:

$$[\, c_1^* \;\; 0^* \,][\, A' \;\; b'^* \,] = [\, 0^* \;\; c_2^* \;\; 0 \,] - [\, c_1'^* \;\; c_2'^* \; - z_0 \,]$$

<u>Szemléletesen</u>: a szimplex táblát baloldali oszloppal és alsó sorral egészítjük ki.

		b_1^*	0^*		
		u_1^*	x_2^*	b	
c_1	x_1	A'		b_1'	0
0	u_2			b_2'	b_2
	$-z$	$c_1'^*$	$c_2'^*$	$-z_0$	0
		0^*	c_2^*	0	

Az <u>oszlopellenőrzés végrehajtása</u>: a baloldali kiegészítő oszlop elemeit komponáljuk a belső mátrix oszlopaival. Az eredménynek meg kell egyeznie a legalsó sor és a felette lévő sor elemeinek a különbségével.

Az oszlopellenőrzés a **b** oszlopára is elvégezhető.

Variáns számítás

Ha az LP feladatban valamelyik erőforrás kapacitása, vagy a célfüggvény együttható megváltozik, akkor általában más optimumot, **variánst** kapunk.

Adott egy optimális táblánk a kiegészítő sorokkal - oszlopokkal:

		160 ~~100~~	0	0	150		
		u_1	x_2	x_3	u_4	b	
2	x_1	0,5	2	0,5	0		0
0	u_2	0	-1	5	-1		200
0	u_3	1	3	5	-2		350
1	x_4	-0,5	-1	-0,5	1		0
	-z	-0,5	-5	-1,5	-1	-200	0
		0	-2	-1	0	0	

Változtassuk meg az u_1 kapacitást 160-ra.

Ekkor az utolsó oszlopban más számok jelenhetnek meg, így töröljük az utolsó oszlopot és a hiányzó számokat az ellenőrzés módszerével kiszámoljuk.

Az első sorra:160·0,5+0=ß$_1$-0, azaz ß$_1$=80.

A 2. sorra: nincs változás, az első elem 0, tehát ß$_2$ marad 50.

A 3. sorra: 160 - 300= ß$_3$ - 350, azaz ß$_3$=210.

A 4. sor: -80+150= ß$_4$=70

A célfüggvény sora: -80-150=-z$_o$-0, azaz z$_o$=230.

***Jelöljük az üres oszlop ideiglenes változóit ß$_i$-vel*.**

Az új optimumok: $\mathbf{x_0}$=[80 0 0 70]*, $\mathbf{u_0}$=[0 50 210 0]* és z$_0$=230.

Ha a **célfüggvény együtthatót** változtatjuk meg, akkor új számok léphetnek fel a célfüggvény sorában.

Példa: Az első célfüggvény együttható (az x_1-hez tartozó) változzon 4-re.

		100	0	0	150		
		u_1	x_2	x_3	u_4	b	
4 ~~2~~	x_1	0,5	2	0,5	0	50	0
0	u_2	0	-1	5	-1	50	200
0	u_3	1	3	5	-2	150	350
1	x_4	-0,5	-1	-0,5	1	100	0
	-z	α_1	α_2	α_3	α_4	-200	0
		0	-2	-1	0	0	

Töröljük a célfüggvény sorát és bevezetjük az α_i segédváltozót.

Az új értékeket az **oszlopellenőrzés** módszerével számoljuk:

Az 1. oszlopra: $4 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot (-0{,}5) = 0 - \alpha_1$, azaz $\alpha_1 =$ **-1,5**.

A 2. oszlop: $8 - 1 = -2 - \alpha_2$, így: $\alpha_2 =$ **-9**.

A 3. oszlop: $2 - 0{,}5 = -1 - \alpha_3$, azaz $\alpha_3 =$ **-2,5**.

A 4. oszlop: nincs változás, az új értéket nullával szorozzuk, így marad: **-1**.

Az utolsó oszlopra: $200 + 100 = 0 - (-z_0)$, tehát $z_0 =$ **300**.

A tábla maradt optimális (**nincs pozitív** elem a -z sorában). Az új $z_0 = 300$.

Az ellenőrzés módszere és így a variáns számítás is felírható **mátrixaritmetikai** jelölésekkel, illetve mátrix műveletekkel.

A tárgyalt alapösszefüggés:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A'} \\ \mathbf{c'}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{'} \\ \mathbf{b}_2^{'} \\ -z_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Átrendezve:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{'} \\ \mathbf{b}_2^{'} \\ -z_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A'} \\ \mathbf{c'}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A szimplex táblázatban a **b** új koordinátái:

$$\mathbf{b'} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{'} \\ \mathbf{b}_2^{'} \\ -z_o \end{bmatrix}$$

Az előző példánk adataival:

$$\mathbf{b'} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 2 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -0{,}5 & -1 & -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \\ 350 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 50 \\ 210 \\ 70 \end{bmatrix}$$

A mátrixművelettel tehát azonnal megkaphatjuk a az utolsó oszlop számait.

A sorellenőrzés, illetve az utolsó sor kitöltése szintén elvégezhető az általános összefüggésből:

$$[\ \mathbf{c_1^*}\ \ \mathbf{0^*}\ ][\ \mathbf{A'}\ \ \mathbf{b'^*}\ ] = [\ \mathbf{0^*}\ \ \mathbf{c_2^*}\ \ 0\ ] - [\ \mathbf{c_1'^*}\ \ \mathbf{c_2'^*} - z_0\ ]$$

Rendezés után:

$$[\ \mathbf{c_1'^*}\ \ \mathbf{c_2'^*} - z_0\ ] = [\ \mathbf{0^*}\ \ \mathbf{c_2^*}\ \ 0\ ] - [\ \mathbf{c_1^*}\ \ \mathbf{0^*}\ ][\ \mathbf{A'}\ \ \mathbf{b'^*}\ ]$$

Tehát a célfüggvény sora az előző feladatunkban:

$$\mathbf{c'^*} = [\ \mathbf{c_1'^*}\ \ \mathbf{c_2'^*} - z_0\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 2 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ -0{,}5 & -1 & -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & -2 & -1{,}5 & -1 \end{bmatrix}$$

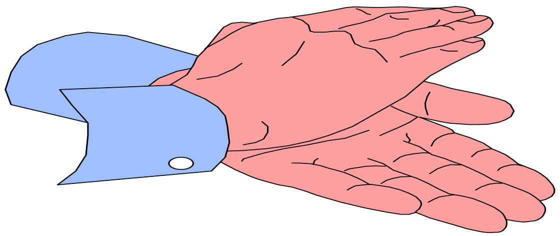
A mátrixművelettel így azonnal megkaptuk a az utolsó sor számait.

Gyakorló feladat: Egy LP feladat induló táblájában **b** = [40 37 27 26]* és **c** = [5 8 5 7 2]*. Az optimális tábla részlete:

	x_1	u_4	u_1	x_4	u_2	b
x_3	0	– 1	1	0	0	
x_5	– 1	– 1	0	1	1	
u_3	2	2	– 1	– 2	– 1	
x_2	1	1	0	1	0	
– z						

Írjuk fel a primál és duál optimális megoldást! Ha az eredeti feladatban a célfüggvényt $g(\mathbf{x}) = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 4x_5 \rightarrow$max-ra változtatjuk, akkor mi lesz az optimális primál megoldás?

Megoldás: egészítsük ki a táblázatot perem sorokkal és perem oszlopokkal!



		0	26	40	0	37		
		x_1	u_4	u_1	x_4	u_2	b	
5	x_3	0	– 1	1	0	0	14	0
2	x_5	– 1	– 1	0	1	1	11	0
0	u_3	2	2	– 1	– 2	– 1	2	27
8	x_2	1	1	0	1	0	26	0
	– z	– 1	– 1	– 5	– 3	– 2	– 300	0
		5	0	0	7	0	0	

Az optimumok leolvasása:

$\mathbf{x_o}$=[0 26 14 0 11]* $\mathbf{u_o}$=[0 0 2 0]* z_o=300.

$\mathbf{y_o}$=[5 2 0 1]* $\mathbf{w_o}$=[1 0 0 3 0]*.

Ha a g függvényben lévő együtthatókkal variánst, új célfüggvénysort írunk fel, akkor: Az új táblázatban a célfüggvény sora: **–z 3 3 –4 –4 –4**

Elkészítjük az új szimplex táblát, amit az optimum eléréséhez javítani kell:

	x_1	u_4	u_1	x_4	u_2	b
x_3	0	–1	1	0	0	14
x_5	–1	–1	0	1	1	11
u_3	2	$\boxed{2}$	–1	–2	–1	2
x_2	1	1	0	1	0	26
–z	3	3	–4	–4	–4	–230

	x_1	u_3	u_1	x_4	u_2	b
x_3	1	1/2	1/2	–1	–1/2	15
x_5	0	1/2	–1/2	0	1/2	12
u_4	$\boxed{1}$	1/2	1/2	–1	–1/2	1
x_2	0	–1/2	1/2	2	1/2	25
–z	0	–5/2	–5/2	–1	–3/2	–233

	u_4	u_3	u_1	x_4	u_2	
x_3	.	.	.	.	.	14
x_5	.	.	.	.	.	12
x_1	.	.	.	.	.	1
x_2	.	.	.	.	.	25
–z	0	.	.	.	.	.

Alternatív optimum van:

$\mathbf{x_{01}}$=[0 25 15 0 12]* $\mathbf{u_{01}}$=[0 0 0 1]* z_o=233

$\mathbf{x_{02}}$=[1 25 14 0 12]* $\mathbf{u_{01}}$=[0 0 0 0]*

Az általános megoldás: $\mathbf{x_0} = \lambda\, \mathbf{x_{01}} + (1-\lambda)\, \mathbf{x_{02}}$ és $\mathbf{u_0} = \lambda\, \mathbf{u_{01}} + (1-\lambda)\, \mathbf{u_{02}}$,
ahol $0 \le \lambda \le 1$.

Érzékenység vizsgálat

Lényege: Milyen határok között változtathatjuk meg a kapacitásvektor értékeket, illetve a célfüggvény együtthatókat, hogy az optimális megoldás bázisa (stuktúrája), illetve a célfüggvény értéke ne változzon meg.

Konkrétan: Olyan határokat keresünk a kapacitásvektor és a célfüggvény együtthatók komponenseire, hogy az optimális táblázatunk utolsó oszlopában és sorában ne történjen előjelváltás. Ezt az ellenőrzés módszerével érjük el.

Példa: Egy LP feladat induló táblájában **b** = [40 37 27 26]* és **c** = [5 8 5 7 2]*. Az optimális tábla „közepe” adott. Végezzünk érzékenység vizsgálatot a kapacitásokra!

		0	26	b_1	0	37		
		x_1	u_4	u_1	x_4	u_2	b	
5	x_3	0	-1	1	0	0		0
2	x_5	-1	-1	0	1	1		0
0	u_3	2	2	-1	-2	-1		27
8	x_2	1	1	0	1	0		0
	$-z$							
		5	0	0	7	0		

Megoldás: Felvesszük a kiegészítő sorokat úgy, hogy hogy először az u_1-hez tartozó értéket paraméternek (b_1) tekintjük elkezdjük a sorellenőrzést.

A kapacitás oszlopában (ami most üres) szereplő mennyiségeket jelöljük ideiglenesen β_i-vel. Az optimális táblázatban ezek nem lehetnek negatívak.

		0	26	b_1	0	37		
		x_1	u_4	u_1	x_4	u_2	b	
5	x_3	0	-1	1	0	0	β_1	0
2	x_5	-1	-1	0	1	1	β_2	0
0	u_3	2	2	-1	-2	-1	β_3	27
8	x_2	1	1	0	1	0	β_4	0
	$-z$							
		5	0	0	7	0		

Sorellenőrzés:

$-26+b_1= \beta_1-0$, és mivel optimum esetén $\beta_1\geq 0$, ezért $-26+b_1\geq 0$, így: $b_1\geq 26$.

A második sorban nincs b_1 (szorzója 0)

A 3. sor: $52-b_1-37= \beta_3-27$. A $\beta_3\geq 0$ miatt: $b_1\leq 42$.

A negyedik sorban nincs b_1 (szorzója 0).

A feltételekből következik, hogy optimális marad a tábla, ha b_1 26 és 42 között van, azaz: $26 \leq b_1\leq 42$.

Ezután a b_2-re végzünk érzékenység vizsgálatot: az u_2 „feletti” 37-et helyettesítjük b_2-vel, az u_1 fölé visszakerül a 40 és ismét sorellenőrzést végzünk. A feltétel most is: a β_i értékei nem lehetnek negatívak.

A sorellenőrzéssel adódó feltételek b_2-re:

		0	26	40	0	b_2		
		x_1	u_4	u_1	x_4	u_2	b	
5	x_3	0	-1	1	0	0	β_1	0
2	x_5	-1	-1	0	1	1	β_2	0
0	u_3	2	2	-1	-2	-1	β_3	27
8	x_2	1	1	0	1	0	β_4	0
	$-z$							
		5	0	0	7	0		

Az 1. sorból nincs feltétel: b_2 szorzója 0.

A 2. sorból: $-26+b_2=\beta_2\geq 0$, azaz $b_2\geq 26$.

A 3. sorból: $39-b_2=\beta_3\geq 0$, azaz $b_2\leq 39$.

A 4. sorból nincs feltétel: b_2 szorzója 0.

Összegezve: $26\leq b_2\leq 39$.

Érzékenység vizsgálat b_3-ra: az u_3-hoz tartozó szám, a 27 helyére b_3-at írunk, a b_2 helyére visszaírjuk a 37-et és sorellenőrzést végzünk:

$52-40-37=\beta_3-b_3$, azaz $\beta_3=b_3-25\geq 0$, tehát $b_3\geq 25$, és felső korlát nincs.

A **b_4-re** vonatkozó feltételek (u_4 fölé b_4-t írunk, sorellenőrzés, $\beta_i\geq o$):

$-b_4+40\geq 0$ $-b_4+37\geq 0$ $2b_4-50\geq 0$ $b_4\geq 0$ Tehát $25\leq b_4\leq 37$.

Megvizsgálhatjuk, hogy az egyes **kapacitás értékek** változásai hogyan befolyásolják az **optimális célfüggvény értéket.** Ehhez ismerni kell az optimális táblázatban a célfüggvény sorát (oszlopellenőrzéssel kapjuk):

		0	26	40	0	37		
		x_1	u_4	u_1	x_4	u_2	b	
5	x_3	0	−1	1	0	0		0
2	x_5	−1	−1	0	1	1		0
0	u_3	2	2	−1	−2	−1		27
8	x_2	1	1	0	1	0		0
	−z	−1	−1	−5	−3	−2	$-z_0$	0
		5	0	0	7	0	0	

Ha u_1 fölé 40 helyett b_1-et írunk és a célfüggvény sorára ellenőrzést végzünk:

$-26-5b_1-74=-z_o-0$, azaz $z_o=5b_1+100$.

Korábban kiszámoltuk: $26 \le b_1 \le 42$, így:

$230 \le z_o \le 310$.

Hasonlóan b_2-re:

$-26-200-2b_2=-z_o-0$, azaz $z_o=2b_2+226$.

Korábbról ismert: $26 \le b_1 \le 39$, így: $278 \le z_o \le 304$.

A b_3 határai a célfüggvény optimális értékét nem befolyásolják (a harmadik kapacitásból „maradvány” van), így $z_o=26+200+74=300$.

A b_4-re: $-b_4-200-74=-z_0-0$, tehát $z_o=b_4+274$ és mivel $25 \le b_4 \le 37$:

$299 \le z_o \le 311$.

Érzékenység vizsgálat a célfüggvény együtthatókra

Oszlopellenőrzéssel végezzük úgy, hogy a célfüggvény együtthatókat egymás után a c_i paraméterekkel helyettesítjük és felhasználjuk, hogy optimum esetén a **célfüggvény sorában nincs pozitív érték**.

A **táblázatunk** (a kapacitás oszlopát sorellenőrzéssel kiszámoltuk):

		0	26	40	0	37		
		x_1	u_4	u_1	x_4	u_2	b	
5	x_3	0	-1	1	0	0	14	0
2	x_5	-1	-1	0	1	1	11	0
0	u_3	2	2	-1	-2	-1	2	27
8	x_2	1	1	0	1	0	26	0
	$-z$	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5		0
		$\cancel{5}$ c_1	0	0	7	0	0	

Az utolsó sorba ideiglenesen α_i-ket írunk:

A vizsgálat **c_1-re**:

$-2+8=c_1-\alpha_1$, ebből: $\alpha_1=c_1-6$

Optimumnál: $\alpha_i \leq 0$, tehát $\mathbf{c_1 \leq 6}$. Az alsó határ c_1-re: $-\infty$.
A célfüggvény optimuma c_1-től nem függ: $z_o=70+22+208=300$.

A vizsgálat c_2-re (x_2 mellé a 8 helyett c_2-t írunk, oszlopellenőrzés és $\alpha_i \leq 0$):

A táblázat:

Számolás:

			0	26	40	0	37		
			x_1	u_4	u_1	x_4	u_2	b	
	5	x_3	0	-1	1	0	0	14	0
	2	x_5	-1	-1	0	1	1	11	0
	0	u_3	2	2	-1	-2	-1	2	27
c_2	$\cancel{8}$	x_2	1	1	0	1	0	26	0
		$-z$	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	$-z_0$	0
			5	0	0	7	0	0	

Az 1. oszlopnál:

$-2+c_2=5-\alpha_1$, mivel $\alpha_1 \leq 0$, így $-\alpha_1 \geq 0$.

$-\alpha_1=c_2-7\geq 0$, azaz $c_2\geq 7$.

A 2. oszlopnál:

$-5-2+c_2=0-\alpha_2\geq 0$, tehát: $c_2\geq 7$.

A 3. oszlopnál:

$5=-\alpha_3$, nincs feltétel c_2-re.

A 4. oszlopnál: $2+c_2=7-\alpha_4$, $\quad -\alpha_4=c_2-5\geq 0$, azaz $c_2\geq 5$.

Az 5. oszlopnál: $2=-\alpha_5$, nincs feltétel c_2-re.

Összesítve: $7\leq c_2 < \infty$.

A c_2 hatása a célfüggvény optimumra:

$70+22+0+26c_2=0-(-z_0)$, így: $z_o= 26c_2+92$. Ekkor: $274 \leq z_o < \infty$.

Hasonló számolással kapjuk: $0\leq c_3\leq 7$, $\quad z_o=14c_3+230$, $230\leq z_o\leq 328$.

Az x_4 nem került be az új bázisba, 3 egység „maradvány” volt, így $c_4\leq 10$ és $z_0=300$.

A c_5-re: $0\leq c_5\leq 3$, $\quad z_0=11c_5+278$, $\quad 278\leq z_o\leq 311$.

Gyakorló feladat: Egy lineáris programozási feladat matematikai modelljében a kapacitásvektor és a célfüggvény együtthatók : $\underline{b}$=[100 200 350 150]* és $\underline{c}$*=[6 –6 –3 3]. A megoldás során kapott szimplex tábla részlete:

	u_1	x_2	x_3	u_4
x_1	$1/2$	2	$1/2$	0
u_2	0	−1	5	−1
u_3	1	3	5	−2
x_4	$-1/2$	−1	$-1/2$	1
$-z$				

Végezzünk teljes érzékenység vizsgálatot!

Megoldás: a táblázat üres oszlopát és sorát az ellenőrzés módszerével kitöltjük, majd felvesszük a perem sorokat, oszlopokat:

		100	0	0	150		
		u_1	x_2	x_3	u_4	b	
6	x_1	$1/2$	2	$1/2$	0	50	0
0	u_2	0	−1	5	−1	50	200
0	u_3	1	3	5	−2	150	350
3	x_4	$-1/2$	−1	$-1/2$	1	100	0
	$-z$	$-3/2$	−15	$-9/2$	−3	−600	0
		0	−6	−3	0	0	

Érzékenység vizsgálat b_i értékeire:

b_2 és b_3 nincs teljesen kihasználva, így:
$b_2 \geq 200–50=150$, valamint
$b_3 \geq 200$ és $z_o=600$ mindkét esetben.

Számolás után:

b_1-re: $0 \leq b_1 \leq 300$ és $450 \leq z_o \leq 900$.

b_4-re: $50 \leq b_4 \leq 200$ és $300 \leq z_o \leq 750$.

A célfüggvény együtthatókra: **x_2 és x_3 nem került az új bázisba: $c_2 \leq 9$, $c_3 \leq 1{,}5$ és $z_o=600$.**

c_1-re: $3 \leq c_1 \leq \infty$ $450 \leq z_o \leq \infty$.

c_4-re: $0 \leq c_4 \leq 6$ $300 \leq z_o \leq 900$.

A fejezet tárgyalását befejeztük.