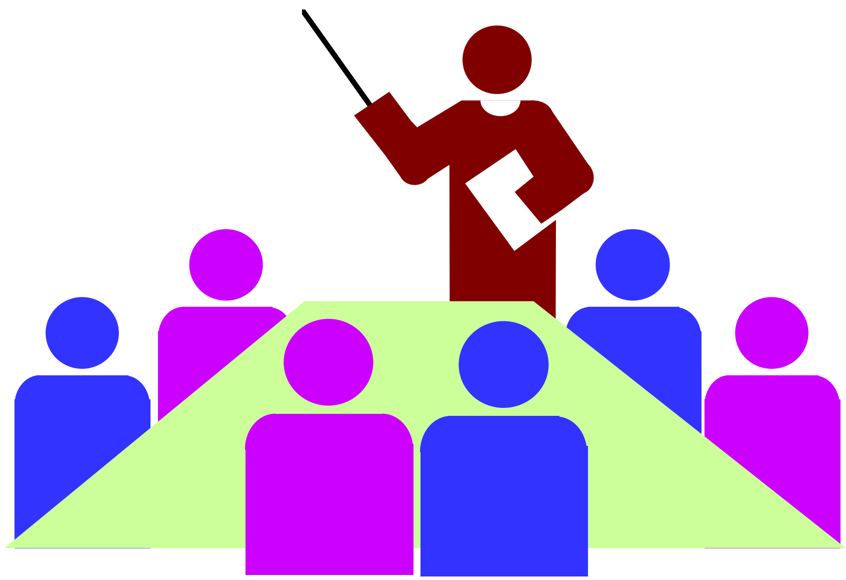
# Lineáris egyenletrendszerek



Készítette: Dr. Ábrahám István

A lineáris egyenletrendszereket kiterjedten használják optimumszámítási feladatokban.

***A téma tárgyalásához előkészületet kell tenni.***

## Mátrix faktorizáció

A faktorizáció a mátrix szorzattá alakítását jelenti.

A szorzattá alakítása során csak a két tényezős szorzatokkal foglalkozunk.

**Bázisfaktorizáció: mátrixoknak olyan szorzattá alakítása, amikor az első tényező oszlopvektorai bázist alkotnak az eredeti mátrix oszlopvektor terében.**

**Példa:** Legyen az $\underline{A}$ mátrix:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

**Igazolhatjuk, hogy az $\underline{A}$ mátrix rangja 2, és alkossa az első két vektor a bázist.**

Az $\underline{A}$ bázisfaktorizációja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & -7 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

***Végezzük el a szorzást!***

**A második tényező oszlopait még megmagyarázzuk.**

**Tétel:** Az $\underline{\mathbf{A}}$ mátrix bázisfaktorizációja: $\underline{\mathbf{A}}=\underline{\mathbf{A}}_1\cdot[\ \underline{\mathbf{E}}_r\ \underline{\mathbf{D}}\ ]$,

**ahol az $\underline{\mathbf{A}}_1$ az eredeti $\underline{\mathbf{A}}$ mátrix rangjának megfelelő számú független oszlopvektora $\underline{\mathbf{A}}$-nak,**

**az $[\ \underline{\mathbf{E}}_r\ \underline{\mathbf{D}}\ ]$ egyesített mátrixban $\underline{\mathbf{E}}_r$ a $r(\underline{\mathbf{A}})$-nak megfelelő rendű egységmátrix, $\underline{\mathbf{D}}$ az $\underline{\mathbf{A}}_1$-be be nem került oszlopvektorok az $\underline{\mathbf{A}}_1$ bázison vett koordinátáikkal.**

Bizonyítás: Legyen az $\underline{\mathbf{A}}=[\ \underline{\mathbf{a}}_1\ \underline{\mathbf{a}}_2 \ldots \underline{\mathbf{a}}_p]$ oszlopvektorokra particionált mátrix rangja r. Legyen az első **r** darab oszlopvektor lineárisan független.

Ekkor az $\underline{\mathbf{a}}_1\ \underline{\mathbf{a}}_2 \ldots \underline{\mathbf{a}}_r$ bázist alkot, tehát az $\underline{\mathbf{A}}$ minden oszlopvektora felírható az $\underline{\mathbf{a}}_1\ \underline{\mathbf{a}}_2 \ldots \underline{\mathbf{a}}_r$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Jelölés: $\underline{\mathbf{A}}_1=[\ \underline{\mathbf{a}}_1\ \underline{\mathbf{a}}_2 \ldots \underline{\mathbf{a}}_r]$.

Igaz: $\underline{\mathbf{a}}_1=\underline{\mathbf{A}}_1\cdot\underline{\mathbf{e}}_1$, $\underline{\mathbf{a}}_2=\underline{\mathbf{A}}_1\cdot\underline{\mathbf{e}}_2$, … $\underline{\mathbf{a}}_r=\underline{\mathbf{A}}_1\cdot\underline{\mathbf{e}}_r$, és:

$\underline{\mathbf{a}}_{r+1}=\underline{\mathbf{A}}_1\cdot\underline{\mathbf{d}}_{r+1}$, ahol a $\cdot\underline{\mathbf{d}}_{r+1}$ az $\underline{\mathbf{a}}_{r+1}$ vektor koordinátái az $(\underline{\mathbf{a}}_1;\underline{\mathbf{a}}_2;\ldots;\underline{\mathbf{a}}_r)$ bázisra vonatkozóan. Hasonlóan:

$\underline{\mathbf{a}}_{r+2}=\underline{\mathbf{A}}_1\cdot\underline{\mathbf{d}}_{r+2}$ és így tovább: $\underline{\mathbf{a}}_p=\underline{\mathbf{A}}_1\cdot\underline{\mathbf{d}}_p$.

**Így:** $\underline{\mathbf{A}}=[\underline{\mathbf{A}}_1\cdot\underline{\mathbf{e}}_1\ \ \underline{\mathbf{A}}_1\cdot\underline{\mathbf{e}}_2 \ldots \underline{\mathbf{A}}_1\cdot\underline{\mathbf{e}}_r\ \ \underline{\mathbf{A}}_1\cdot\underline{\mathbf{d}}_{r+1}\ \ \underline{\mathbf{A}}_1\cdot\underline{\mathbf{d}}_{r+2} \ldots \underline{\mathbf{A}}_1\cdot\underline{\mathbf{d}}_p]=\underline{\mathbf{A}}_1\cdot[\underline{\mathbf{e}}_1\ \ \underline{\mathbf{e}}_2 \ldots \underline{\mathbf{e}}_r\ \ \underline{\mathbf{d}}_{r+1}\ \ \underline{\mathbf{d}}_{r+2} \ldots \underline{\mathbf{d}}_p]$

Ezzel végeztünk, hiszen $[\underline{\mathbf{e}}_1\ \ \underline{\mathbf{e}}_2 \ldots \underline{\mathbf{e}}_r]=\underline{\mathbf{E}}_r$ és $[\underline{\mathbf{d}}_{r+1}\ \ \underline{\mathbf{d}}_{r+2} \ldots \underline{\mathbf{d}}_p]=\underline{\mathbf{D}}$.

***Az előző példában a szorzattá alakítás második tényezőjében az első két vektor egység-vektor, a következő hármat pedig a bázisba be nem vont vektorok új koordinátái adják.***

# Lineáris egyenletrendszerek megoldása

**Lineáris az egyenletrendszer, ha az egyenletrendszert alkotó $m$ darab egyenletben az $x_i$ ($1 \le i \le n$) ismeretlenek első hatványon szerepelhetnek.**

Az egyenletrendszer általános alakja:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{nm}x_n=b_m$$

Az $a_{ij}$ együtthatókat egy $\underline{A}$ mátrix elemeinek tekinthetjük: $\underline{A}=[\ a_{ij}\ ]$.

A változókat és az egyenletek jobboldalán álló számokat oszlopvektorok alakjában vehetjük fel: $\underline{x}=[x_1\ \ x_2\ \ldots\ x_n]^*$ és $\underline{b}=[b_1\ \ b_2\ \ldots\ b_m]^*$.

Így az egyenletrendszer röviden, mátrixaritmetikai írásmóddal adható meg:

$$\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{b}}.$$

**Példa:** Legyen az egyenletrendszerünk a következő:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & & & 3x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & & & = & 5 \end{array}$$

Ekkor az $\underline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$\underline{x}=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^*$ és $\underline{b}=[1\ 2\ 5]^*$

A lineáris egyenletrendszereknél külön vizsgáljuk a **megoldhatóságot** és ha van megoldás, akkor megadjuk a **megoldóképletet**.

**Tétel:** Az $\underline{\mathbf{A}}\,\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha a $\underline{\mathbf{b}}$ kompatíbilis az $\underline{\mathbf{A}}$ oszlopvektor terével.

Bizonyítás: Az $\underline{\mathbf{A}}\,\underline{\mathbf{x}}$ szorzat egy oszlopvektor, ami az $\underline{\mathbf{A}}$ oszlopvektorainak lineáris kombinációja, tehát az $\underline{\mathbf{A}}$ oszlopvektor terének egy vektora.

Kész

Olyan $\underline{\mathbf{x}}$ vektor, amellyel a lineáris kombináció a $\underline{\mathbf{b}}$ vektort állítja elő, csak akkor létezik, ha a $\underline{\mathbf{b}}$ kompatíbilis az $\underline{\mathbf{A}}$ oszlopvektor terével.

**Tétel:** Az $\underline{\mathbf{A}}\,\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszer általános megoldása:

$$\underline{\mathbf{x}}_r=\underline{\mathbf{d}}-\underline{\mathbf{D}}\cdot\underline{\mathbf{x}}_s\ ,$$

ahol $r$ =rang $\underline{A}$. Az $\underline{x}_r$ a rangnak megfelelő számú $x_i$ változóból álló vektor.
A $\underline{d}$ a $\underline{b}$ vektornak az $\underline{A}$ mátrix r elemű bázisán vett új koordinátáiból álló vektor.
$\underline{D}$ az $\underline{A}$ bázisba be nem került vektorainak új koordinátáiból áll.
Az $\underline{x}_s$ az ú.n. szabad változók vektora pedig az egyenletrendszer $n$ változója közül az $r$ darabon felülieket, $n$-$r$=$s$ változót tartalmaz.

**Az s=n–r számot az egyenletrendszer szabadságfokának nevezzük.**

***Az általános megoldás képletét és benne a betűk jelentését célszerű alaposan megjegyezni!***

A megoldóképlet **igazolása**:

Az $\underline{A}$ mátrix szorzattá alakítható (faktorizáció): $\underline{A}=\underline{A}_1\cdot[\ \underline{E}_r\ \underline{D}\ ]$,
ahol $\underline{A}_1$ az $\underline{A}$ rangjának megfelelő számú ($r$ darab) független oszlopvektorból áll.

Ha $\underline{b}$ kompatíbilis az $\underline{A}$ oszlopvektor terével, akkor: $\underline{b}=\underline{A}_1\cdot\underline{d}$, ahol $\underline{d}$ a $\underline{b}$-nek az $\underline{A}_1$ oszlopvektoraira vonatkozó koordinátáit tartalmazza.

Így igaz a következő: $\underline{A}\,\underline{x}=\underline{A}_1\cdot[\ \underline{E}_r\ \underline{D}\ ]\underline{x}=\underline{b}=\underline{A}_1\cdot\underline{d}$, amiből: $[\ \underline{E}_r\ \underline{D}\ ]\underline{x}=\underline{d}$.

Az $\underline{x}$ vektort bontsuk fel a ragnak megfelelő számú változóra, ez legyen $\underline{\mathbf{x}}_r$ és a „többi” változót tartalmazó $\underline{x}_s$ vektorra. Ekkor:

$$[\ \underline{\mathbf{E}}_r\ \underline{\mathbf{D}}\ ]\cdot[\ \underline{\mathbf{x}}_r\ \ \underline{\mathbf{x}}_s\ ]^* = \underline{\mathbf{E}}_r\underline{\mathbf{x}}_r+\underline{\mathbf{D}}\cdot\underline{\mathbf{x}}_s=\underline{\mathbf{x}}_r+\underline{\mathbf{D}}\cdot\underline{\mathbf{x}}_s = \underline{\mathbf{d}}.$$

***(Mátrix szorzás történt és tudjuk, hogy $\underline{E}_r\underline{x}_r=\underline{x}_r$)***

A mátrixegyenletet rendezve:

$$\underline{\mathbf{x}}_r=\underline{\mathbf{d}}-\underline{\mathbf{D}}\cdot\underline{\mathbf{x}}_s$$

**Példa:** Adjuk meg az általános megoldást:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & & & + & 3x_5 & = & 1\\
x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2\\
2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & & & = & 5
\end{array}$$

Az egyenletrendszer megoldásához először a megoldhatóságot kell vizsgálni.

Ezután az általános megoldást vesszük fel.

Mindez történhet **egy** táblázat sorozattal:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\boxed{1}$ | 2 | 6 | 0 | 3 | 1 | 2 | 6 | 0 | 3 | 1 | 2 | 2 | $-1$ | 3 |
| $x_2$ | 1 | 1 | 4 | 1 | 1 | 2 | $\boxed{-1}$ | $-2$ | 1 | $-2$ | 1 | 2 | $-1$ | 2 | $-1$ |
| | 2 | 1 | 6 | 3 | 0 | 5 | $-3$ | $-6$ | 3 | $-6$ | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

A táblázatokban egyenletrendszer megoldáskor az egyes oszlopokat a megfelelő változókkal jelöljük.

Látható, hogy a **b kompatíbilis** az **A oszlopvektor terével.**

***(Az utolsó táblázat 3. sorában csupa 0 van.)***

Így az egyenletrendszer megoldható.

Az általános megoldás:
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Az általános megoldást írhatjuk az egyes koordináták egyenlősége alapján:

$x_1=3-2x_3-2x_4+x_5$

$x_2=-1-2x_3+x_4-2x_5$

Az $x_3$, $x_4$, $x_5$ „szabad változók” tetszőleges valós számok lehetnek.

Az egyenletrendszer szabadságfoka tehát 3.

**Elnevezés:** Ha a szabad változóknak konkrét számértékeket adunk, akkor az egyenletrendszer **partikuláris** megoldását kapjuk.

**Példa:** Az $x_1=3-2x_3-2x_4+x_5$
$x_2=-1-2x_3+x_4-2x_5$ általános megoldásában $x_3=1,\ x_4=-2,\ x_5=0$,

akkor az egyenletrendszer egy **partikuláris megoldását** kapjuk:

$$\underline{x}_p=[\,5\ \ -3\ \ 1\ \ -2\ \ 0\,]^*.$$

**Elnevezés:** Ha a szabad változóknak számértékként 0-t adunk, akkor az egyenletrendszer egy **bázismegoldását** kapjuk.

Esetünkben **például**: $\underline{x}_b=[\,3\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,]^*$.

***Az egyenletrendszernek több bázismegoldása is lehet, a bázisba bevont egyik oszlopvektort (az $\underline{x}_r$ egyik elemét) kicserélhetjük az $\underline{x}_s$ egyik oszlopvektorával.***

**Példa:** Adjunk meg a fenti általános megoldásból egy másik bázismegoldást!

A bázistranszformáció táblázatát használjuk. Az utolsó táblázatunkban hajtsuk végre az $\mathbf{x_2}\leftrightarrow\mathbf{x_4}$ cserét:

| | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | b |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | 2 | −1 | 3 |
| $x_2$ | 2 | $\boxed{-1}$ | 2 | −1 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 |

A bázismegoldáshoz csak a b „legújabb” koordinátájára van szükség. Az oszlopfőn lévő változók értékei nullák.

Az újabb bázismegoldás: $\underline{x}_{b2}=[\,1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\,]^*$.

# A mátrix inverze

A **mátrix inverzén** olyan mátrixot értük, amellyel szorozva az eredeti mátrixot eredményül egységmátrixot kapunk.

**Egy mátrixot balról is és jobbról is szorozhatunk, így általában két különböző inverz mátrix létezhet:**

ha $\underline{A}\cdot\underline{X}=\underline{E}$, akkor $\underline{X}$ jobboldali inverz, jelöléssel: $\underline{X}=\underline{A}_j^{-1}$

ha $\underline{Y}\cdot\underline{A}=\underline{E}'$, akkor $\underline{Y}$ baloldali inverz, jelöléssel: $\underline{Y}=\underline{A}_b^{-1}$

**Tétel:** Ha $\underline{A}$ nem szinguláris, akkor $\underline{A}_j^{-1}=\underline{A}_b^{-1}=\underline{A}^{-1}$. *A tételt nem bizonyítjuk.*

A **mátrix invertálása** (ha lehetséges) úgy történhet, hogy a mátrix oszlopvektoraival az elemi bázistranszformáció lépéseivel kicseréljük a triviális bázis egységvektorait.

Az egységvektoroknak az új bázison vett (rendezett) koordinátái adják az inverz mátrixot.

**Példa:** Adjuk meg az $\underline{A}$ inverzét, ha

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 4\\ 2 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

**Megoldás:** „teljes” bázistranszformációt hajtunk végre:

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $e_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $a_3$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1 \longleftarrow e_1$ | $\boxed{1}$ | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 5 | −2 | −3 | 11 | −8 | 3 |
| $a_2 \longleftarrow e_2$ | 2 | 5 | 4 | −2 | $\boxed{1}$ | 2 | −2 | 1 | 2 | −6 | 5 | −2 |
| $a_3 \longleftarrow e_3$ | 2 | 6 | 7 | −2 | 2 | 5 | 2 | −2 | $\boxed{1}$ | 2 | −2 | 1 |

Az $\underline{A}$ inverze: $\underline{A}^{-1}=\begin{bmatrix}11 & -8 & 3\\ -6 & 5 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$

***Ellenőrizhetjük, hogy a mátrix és az inverz szorzata egységmátrixot eredményez.***

**Példa:** Az $\underline{a} = [\ 1\ \ -1\ \ 2\ ]^*$ és $\underline{b} = [\ -1\ \ 3\ \ 2]^*$ vektorok ismeretében adja meg az $\underline{a}\cdot\underline{b}^* - \underline{E}$ inverzét, ahol $\underline{E}$ a megfelelő egységmátrix.

**Megoldás:** Az $\underline{a}\cdot\underline{b}^*$ diadikus szorzat:

$$\underline{a}\cdot\underline{b}^* = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{a}\cdot\underline{b}^* - \underline{E}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix} := \underline{A}.$$

Az $\underline{A}$ invertálása:

| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $e_2$ | $a_2$ | $a_3$ | $e_2$ | $a_e$ | $e_3$ | $e_2$ | $e_1$ | $e_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_2$ | $-2$ | 3 | 2 | 2 | $-5$ | $-2$ | $-2$ | $\boxed{-1}$ | $-2$ | 2 | $-1$ | 2 |
| $a_1$ | $\boxed{1}$ | $-4$ | $-2$ | 1 | $-4$ | $-2$ | $-3$ | 0 | $-2$ | $-3$ | 0 | $-2$ |
| $a_3$ | $-2$ | 6 | 3 | 2 | $-2$ | $\boxed{-1}$ | $-2$ | 2 | $-1$ | $-6$ | 2 | $-5$ |

(A táblázat baloldalán az „evidensen" ott lévő egységvektorokat nem írtuk ki, csak helyettesítettük.)

Az **inverz mátrix** felvételéhez az utolsó táblázatot rendezni kell:
az új bázis vektorai sorkezdőként $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ sorrendben szerepeljenek és az oszlopfőn az egységvektorok is $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ sorrendben legyenek.

**Például** az inverz mátrix első sorának első eleme az $\mathbf{e_1}$-nek $\mathbf{a_1}$-re vonatkozó koordinátája: **0** legyen.

Az első sor második eleme az $\mathbf{e_2}$-nek $\mathbf{a_1}$-re vonatkozó koordinátája legyen: **–2**, és így tovább.

Az inverz mátrix:

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Ellenőrzés: annak kell teljesülnie, hogy $\underline{A}\cdot\underline{A}^{-1} = \underline{E}$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Megjegyzés:** Ha az $\underline{\mathbf{A}}\,\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{b}}$ egyenletrendszer megoldható és az $\underline{\mathbf{A}}$ nem szinguláris, akkor: $\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{A}}^{-1}\cdot\underline{\mathbf{b}}$. (Ugyanis ekkor az $\underline{A}\,\underline{x}=\underline{b}$-t az $\underline{A}^{-1}$-gyel balról beszorozhattuk.)

***Tehát a fenti (speciális) egyenletrendszert az inverzmátrix felhasználásával megoldhatjuk.***

**Példa:** Adottak az $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ mátrixok:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & 1 & -3\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}\quad \underline{B}=\begin{bmatrix}-4 & 4 & 5\\ -5 & 6 & 7\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\qquad \underline{C}=\langle\, 1\ \ -2\ \ 3\,\rangle.$$

a.) Igazolja, hogy $\underline{\mathbf{A}}$ és $\underline{\mathbf{B}}$ egymás inverzei!

b.) Adja meg az $\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{1}}$ és a $\underline{\mathbf{B}}\cdot\underline{\mathbf{X}}=\underline{\mathbf{C}}$ megoldásait!

Megoldás: a.) Ha inverzek, akkor a szorzatuk egységmátrix, tehát ez esetben szükségtelen a bázistranszformáció elvégzése. Valóban: $\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{B}}=\underline{\mathbf{E}}_3$ .

b.) $\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{1}}$-ből: $\underline{\mathbf{x}}=\underline{\mathbf{A}}^{-1}\cdot\underline{\mathbf{1}}$=(mivel $\underline{\mathbf{A}}^{-1}=\underline{\mathbf{B}}$)=$\underline{\mathbf{B}}\cdot\underline{\mathbf{1}}$**=[ 5 8 –1 ]*.**

A $\underline{B}\cdot\underline{X}=\underline{C}$-ből: $\underline{X}=\underline{B}^{-1}\underline{C}=\underline{A}\cdot\underline{C}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -2 & -2 & -9\\ -1 & 0 & 12\end{bmatrix}$

***A megoldások elég egyszerűek lettek.***

**Tétel:** $(\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{B}})^{-1}=\underline{\mathbf{B}}^{-1}\cdot\underline{\mathbf{A}}^{-1}$. (Az invertálás antikommutatív.)

Bizonyítás: Ha mindkét oldalt szorozzuk $\underline{\mathbf{A}}\cdot\underline{\mathbf{B}}$-vel, ugyanazt az egységmátrixot kapjuk.

**A fejezet tárgyalását befejeztük.**