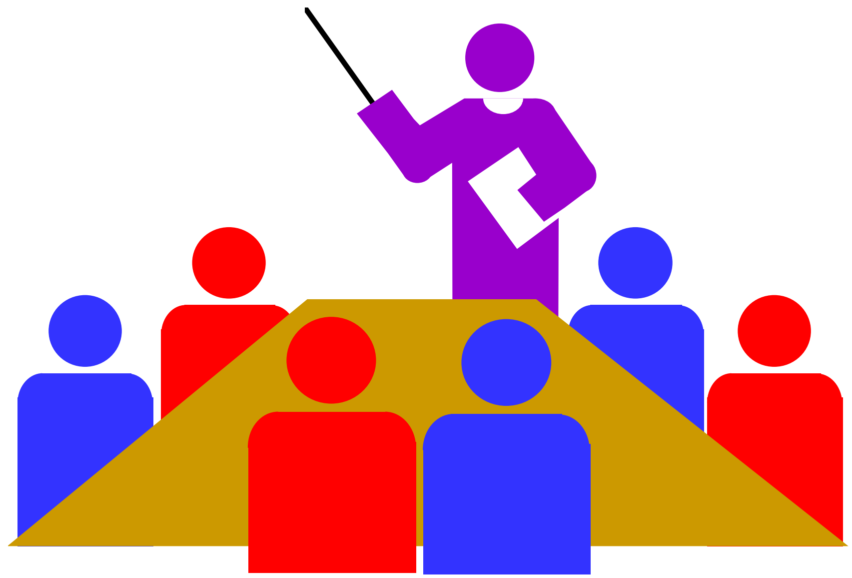
Bázistranszformáció



Készítette: Dr. Ábrahám István

A „**bázis transzformációja**” azt jelenti, hogy egy lineáris tér egy adott bázisán felírt vektorokat egy másik bázis vektorai lineáris kombinációjával állítjuk elő.

Ez azzal jár, hogy a vektorok egy adott bázison megadott koordinátáit átírjuk egy másik bázis vektorai szerinti koordinátákra.

Elemi bázistranszformáció

Elemi a bázistranszformáció akkor, ha az egyik adott bázis vektorait egyesével cseréljük ki egy másik bázis vektoraira.

Példa: Adottak az $\underline{a}_1=[\,2 \;\; -1\,]^*$, $\underline{a}_2=[\,1 \;\; 3\,]^*$ és a $\underline{v}=[\,4 \;\; 5\,]^*$ vektorok. Írjuk fel a $\underline{v}$ vektor koordinátáit az $(\underline{a}_1;\underline{a}_2)$ bázison!

Először azt mutatjuk meg, hogy az L_2 térben az $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ vektorok bázist alkotnak (függetlenek). A lineáris kombinációjuk:

$$\lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{azaz:} \quad \begin{matrix} 2\lambda_1+\lambda_2=0 \\ -\lambda_1+3\lambda_2=0 \end{matrix}$$

Csak a $\lambda_1=\lambda_2=0$ lehetnek a megoldások, így az $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ vektorok függetlenek, bázist alkothatnak L_2-ben.

Mindhárom vektor komponensekkel adott, a triviális bázison (egységvektorok!) vett koordinátákkal. Részletezve:

$\underline{a}_1=2\underline{e}_1-\underline{e}_2$, $\underline{a}_2=\underline{e}_1+3\underline{e}_2$, $\underline{v}=4\underline{e}_1+5\underline{e}_2$.

Az **elemi bázistranszformáció** szerint a $\underline{v}$ felírásában először az egyik egységvektort cseréljük ki az $\underline{a}_1$-re, majd a másikat $\underline{a}_2$-re.

Az $\underline{e}_1$ cseréje $\underline{a}_1$-re: az $\underline{a}_1=2\underline{e}_1-\underline{e}_2$-ből: $\underline{e}_1=\frac{1}{2}\underline{a}_1+\frac{1}{2}\underline{e}_2$

Ez azt is jelenti, hogy az $\underline{e}_1$ koordinátáit kiszámoltuk az $(\underline{a}_1;\underline{e}_2)$ bázison: $\underline{e}_1=[\ ½\ \ ½\ ]^*$.

Számoljuk ki az $\underline{a}_2$ és a $\underline{v}$ koordinátáit is az $(\underline{a}_1;\underline{e}_2)$ bázison:

$\underline{a}_2=\underline{e}_1+3\underline{e}_2=\frac{1}{2}\underline{a}_1+\frac{1}{2}\underline{e}_2+3\underline{e}_2=\frac{1}{2}\underline{a}_1+\frac{7}{2}\underline{e}_2$ ***A koordináták: $\underline{a}_2=[\ 1/2\ \ 7/2\ ]^*$.***

Helyettesítve: $\underline{v}=4\underline{e}_1+5\underline{e}_2=4(½\,\underline{a}_1+½\underline{e}_2)+5\underline{e}_2=2\underline{a}_1+7\underline{e}_2$.

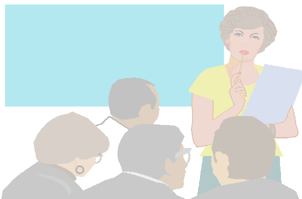
A koordináták: $\underline{v}=[\ 2\ \ 7\ ]^*$ az $(\underline{a}_1;\underline{e}_2)$ bázison.

A fenti számolási eljárást rövidíthetjük táblázatba foglalással. Az **induló tábla**:

	a_1	a_2	v
e_1	$\boxed{2}$	1	4
e_2	-1	3	5

Oszlopfőre kerülnek az eredeti bázison adott **vektorok** jelei, **sorkezdők** az eredeti **bázis** vektorainak jelei (nincsenek aláhúzva a betűk!).

A **bekeretezett elem** mutatja (**generálja**) azt, hogy melyik vektort melyikkel cserélünk ki.



Az $\underline{a_1}$ és $\underline{e_1}$ cseréje után a koordináták táblázatos alakban:

	e_1	a_2	v
a_1	1/2	1/2	2
e_2	1/2	7/2	7

A táblázatból az új koordináták olvashatók le az ($\underline{a_1}$;$\underline{e_2}$) bázison.

Az **új táblázat** készítése a **„betűcsere”** után :

1.) A **generáló elem** (a bekeretezett szám) **helyére írjuk a reciprokát**.

2.) A generáló elem **oszlopát szorozzuk a reciprok (–1)-szeresével.**

3.) A generáló elem **sorát szorozzuk a reciprokkal**. Az egyes oszlopokban az így kapott számokat (ezek most: ½ és 2) nevezzük **q** értékeknek.

4.) A hiányzó **új koordináták** számítása: új koordináta = =(régi koo.)–(**q** szorozva a gen. elem oszlopában a megfelelő régi koo.-val).

Az 1-4. pontban foglalt szabályt az „egyenletrendezéses” levezetésünkből láthatjuk.

Például az $\underline{a_2}$ második új koordinátája = 3–1/2 (–1)=7/2,
vagy a $\underline{v}$ második új koordinátája = 5–2·(–1)=7.

A bázistranszformáció következő lépése: az $\underline{e_2}$ vektort kicseréljük $\underline{a_2}$-vel.

A második bázisvektor csere után a **táblázatunk** az előző táblázat (amelyben a generáló elemet bekereteztük) folytatása:

	e_1	a_2	v		e_1	e_2	v
a_1	$1/2$	$1/2$	2	a_1	$3/7$	$-1/7$	1
e_2	$1/2$	$\boxed{7/2}$	7	a_2	$1/7$	$2/7$	2

Az új táblázatból leolvashatók az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ és $\underline{v}$ koordinátái az $(\underline{a}_1;\underline{a}_2)$ bázison.

Táblázatainkat „összeilleszthetjük”:

	a_1	a_2	v		e_1	a_2	v		e_1	e_2	v
e_1	$\boxed{2}$	1	4	a_1	$1/2$	$1/2$	2	a_1	$3/7$	$-1/7$	1
e_2	-1	3	5	e_2	$1/2$	$\boxed{7/2}$	7	a_2	$1/7$	$2/7$	2

Gyakran előfordul, hogy a régi bázisvektorok új koordinátáira nincs szükségünk, ekkor az új táblázatokban azok oszlopait elhagyhatjuk.

Tehát a bázistranszformációnkat táblázatos alakban a következőképpen írhatjuk:

	a_1	a_2	v		a_2	v		v
e_1	$\boxed{2}$	1	4	a_1	$1/2$	2	a_1	1
e_2	-1	3	5	e_2	$\boxed{7/2}$	7	a_2	2

Példa: Adottak az $\underline{a}_1$=[1 2 2]*, $\underline{a}_2$=[2 5 6]* és $\underline{a}_3$=[1 4 7]* vektorok.

Mutassuk meg, hogy a 3 vektor független és adjuk meg a triviális bázis vektorainak koordinátáit az ($\underline{a}_1$;$\underline{a}_2$;$\underline{a}_3$) bázison!

***Alapötlet**: ha mindhárom vektor az új bázisba bevonható, akkor függetlenek, hiszen bázist csak független vektorok alkothatnak.*

Elemi bázistranszformációval egyenként kicseréljük a triviális bázis egységvektorait:

	a_1	a_2	a_3	e_1	a_2	a_3	e_1	e_2	a_3	e_1	e_2	e_3
$a_1 \longleftarrow e_1$	$\boxed{1}$	2	1	1	2	1	5	−2	−3	11	−8	3
$a_2 \longleftarrow e_2$	2	5	4	−2	$\boxed{1}$	2	−2	1	2	−6	5	−2
$a_3 \longleftarrow e_3$	2	6	7	−2	2	5	2	−2	$\boxed{1}$	2	−2	1

Az $\underline{e}_1$ koordinátái tehát az ($\underline{a}_1$;$\underline{a}_2$;$\underline{a}_3$) bázison: $\underline{e}_1$=[11 –6 2]*, valamint: $\underline{e}_2$=[–8 5 –2]* és $\underline{e}_3$=[3 –2 1]*.

A táblázatok számolása a generáló elemek kijelölésével kezdődik és a negyedik lapon felírt 1-4. lépést hajtottuk végre.

A kezdő táblázat baloldalára a triviális bázis egységvektorait ki sem szoktuk írni, hiszen az induló táblában ott mindig azok vannak.

A bázistranszformáció fent bemutatott algoritmusát általánosan is indokolhatjuk.

Az elemi bázistranszformáció általánosan

Tétel: Ha az L_n tér egy bázisa a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k, \ldots, \underline{b}_n$ vektorrendszer és $\underline{c} \in L_n$ $(\underline{c} \neq \underline{0})$, valamint a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k, \ldots, \underline{b}_n$ bázison $c_k \neq 0$, akkor a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{c}, \ldots, \underline{b}_n$ vektorrendszer is bázisa az L_n-nek.

(A tétel azt fejezi ki, hogy ki lehet cserélni a bázisban egy vektort egy másikra.)

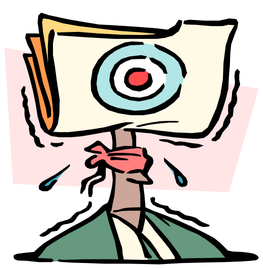
Bizonyítás: Elegendő belátni, hogy a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{c}, \ldots, \underline{b}_n$ vektorrendszer független vektorokból áll.

Tegyük fel, hogy a vektorrendszer összefüggő (indirekt feltétel).
Ekkor (rendezés, $\underline{c}$ kifejezése): $\underline{c} = c_1'\underline{b}_1 + c_2'\underline{b}_2 + \ldots + 0 \cdot \underline{b}_k + \ldots + c_n'\underline{b}_n$.
Ez viszont ellentmondás, mert a feltételünk szerint a $\underline{b}_k$ együtthatója nem 0.

Tétel: Ha az L_n tér egy bázisa a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k, \ldots, \underline{b}_n$ vektorrendszer és $\underline{c} \in L_n$ $(\underline{c} \neq \underline{0})$, valamint a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k, \ldots, \underline{b}_n$ bázison $c_k \neq 0$, akkor a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{c}, \ldots, \underline{b}_n$ bázison egy tetszőleges $\underline{x} = [\, x_1 \;\; x_2 \ldots x_k \ldots x_n \,]^* \in L_n$ vektor új koordinátái:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 - q \cdot c_1 \\ x_2 - q \cdot c_2 \\ \ldots \\ q \\ \ldots \\ x_n - q \cdot c_n \end{bmatrix}$$

ahol $q = \dfrac{x_k}{c_k}$



Bizonyítás: A $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k, \ldots, \underline{b}_n$ bázison $\underline{c}=c_1\underline{b}_1+c_2\underline{b}_2+\ldots+c_k\cdot\underline{b}_k+\ldots+c_n\underline{b}_n$.

Kifejezzük $\underline{b}_k$-t:: $\underline{b}_k = -\frac{c_1}{c_k}\underline{b}_1 - \frac{c_2}{c_k}\underline{b}_2 - \ldots + \frac{1}{c_k}\underline{c} - \ldots - \frac{c_n}{c_k}\underline{b}_n$

Ha adott az $\underline{x}=[\, x_1 \;\; x_2 \ldots x_k \ldots x_n \,]^*$ vektor L_n-ben, akkor a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k, \ldots, \underline{b}_n$ bázison:
$\underline{x}=x_1\underline{b}_1+x_2\underline{b}_2+\ldots+x_k\cdot\underline{b}_k+\ldots+x_n\underline{b}_n$. A $\underline{b}_k$ helyére helyettesítünk:

$$\underline{x}=x_1\underline{b}_1+x_2\underline{b}_2+\ldots+x_k\cdot\left(-\frac{c_1}{c_k}\underline{b}_1-\frac{c_2}{c_k}\underline{b}_2-\ldots+\frac{1}{c_k}\underline{c}-\ldots-\frac{c_n}{c_k}\underline{b}_n\right)+\ldots+x_n\underline{b}_n.$$

A $\underline{b}_i$ vektorok együtthatóit összegyűjtjük:

$$\underline{x}=\left(x_1-\frac{x_k}{c_k}c_1\right)\underline{b}_1+\left(x_2-\frac{x_k}{c_k}c_2\right)\underline{b}_2+\ldots+\frac{x_k}{c_k}\underline{c}+\ldots+\left(x_n-\frac{x_k}{c_k}c_n\right)\underline{b}_n$$

Végeztünk, hiszen az $\frac{x_k}{c_k}$ hányadost jelöltük q-val.

Ha az eredeti bázisban lévő $\underline{b}_k$ koordinátáit akarjuk felírni az új bázisban, akkor a tetszőleges $\underline{x}$ vektor helyére $\underline{b}_k$-t írva annak a koordinátáit a kapjuk.

Az elemi bázistranszformáció algoritmusának egyes lépései a tételünkből következnek.

A bázistranszformáció széleskörű alkalmazása előtt áttekintjük az eljárást.

Az elemi bázistranszformáció lépései (ismétlés)

*Az induló tábla felvétele után az **új táblázatban** a „betűcsere” után:*

1.) A **generáló elem helyére írjuk a reciprokát**.

2.) A generáló elem **oszlopát szorozzuk a reciprok (–1)-szeresével.**

3.) A generáló elem **sorát szorozzuk a reciprokkal**. Az egyes oszlopokban az így kapott számokat nevezzük **q** értékeknek.

4.) A hiányzó **új koordináták** számítása: új koordináta= =(régi koo.)–(**q** szorozva a gen. elem oszlopában a megfelelő régi koo.-val).

Példa: Adjuk meg, hogy a következő 4 vektorból mennyi a függetlenek száma:

$\underline{a}_1$=[3 1 2]*, $\underline{a}_2$=[2 –1 3]*, $\underline{a}_3$=[7 –1 8]*, $\underline{a}_4$=[1 2 –1]*.

A bázistranszformáció induló táblázatában baloldalra a triviális bázis vektorait nem írtuk ki, (helyük üresen maradt) és az újabb táblázatokat folytatólagosan írjuk:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_2	a_3	a_4	a_3	a_4
a_2	3	2	7	1	$\boxed{5}$	10	–5	2	–1
a_1	$\boxed{1}$	–1	–1	2	–1	–1	2	1	1
	2	3	8	–1	5	10	–5	0	0

Az $\underline{a}_3$ és $\underline{a}_4$ nem vonható be, mert a 0 nem lehet generáló elem („nincs reciproka”) tehát a négy vektorból maximum 2 független választható ki (amely bármely 2 lehet!)

A bázistranszformáció alkalmazásai

Az elemi bázistranszformáció igen széleskörű alkalmazásai közül először azokkal foglalkozunk, amikor a triviális bázis vektorainak új koordinátáit nem kell kiszámolnunk.

Ilyenkor az elemi bázistranszformáció 1-4. lépést tartalmazó algoritmusában elegendő a 3. és a 4. lépést végrehajtanunk.

Vektorrendszer rangjának meghatározása

A **vektorrendszer rangját** a közülük kiválasztható **független vektorok** maximális száma alkotja.

Bázist csak független vektorok alkothatnak. Így egy vektorrendszer vektorai között annyi a független, ahányat közülük be tudunk vonni a belőlük képzett új bázisba.

Példa: Adjuk meg a következő vektorrendszer rangját:

$$\underline{a}_1=[\ 3\ \ 1\ \ 2\ ]^*,\ \underline{a}_2=[\ 2\ \ -1\ \ 3\ ]^*,\ \underline{a}_3=[\ 7\ \ -1\ \ 8\ ]^*,\ \underline{a}_4=[\ 1\ \ 2\ \ -1\ ]^*.$$

A négy vektor közül kiválasztható függetlenek maximális száma:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_2	a_3	a_4	a_3	a_4
a_2	3	2	7	1	$\boxed{5}$	10	−5	2	−1
a_1	$\boxed{1}$	−1	−1	2	−1	−1	2	1	1
	2	3	8	−1	5	10	−5	0	0

Lásd: előző példa!

A vektorrendszer **rangja** tehát **2**.

Mátrix rangja

A **mátrix rangját** az oszlop-, vagy sorvektorai közül kiválasztható független vektorok maximális száma adja.

Így a mátrix rangjának meghatározása egy vektorrendszer rangjának számolását jelenti.

Példa: Milyen **p** és q érték mellett lesz a következő **mátrix rangja 2**, illetve **3**?

Mikor lesz a **dimenzió 3**, illetve mikor **nem szinguláris a mátrix**?

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 7 & p \\ 2 & -4 & 8 & q \end{bmatrix}$$

A megoldást az oszlopvektorokkal végrehajtott bázistranszformációval végezzük.

A táblázataink:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_2	a_3	a_4	a_2	a_4
a_3	4	8	0	4	–4	$\boxed{4}$	–8	–1	–2
a_1	$\boxed{1}$	3	–1	3	3	–1	3	2	1
	–2	3	7	p	9	5	p+6	$\boxed{14}$	p+16
	2	–4	8	q	–10	10	q–6	0	q+14

r($\underline{A}$)≠2, ugyanis az $\underline{a}_2$ a 3. a koordinátájával mindig bevonható.

r($\underline{A}$)=3, ha q+14=0, azaz q=–14, ekkor a p tetszőleges valós szám lehet.

Ez esetben a **dimenzió 3.**

r($\underline{A}$)=4, ha q+14≠0, azaz **q≠–14**. A p tetszőleges valós szám lehet.

Ez esetben a mátrix **nem szinguláris (reguláris)**: **r($\underline{A}$)=n=4**.

Kompatibilitás vizsgálat

Bizonyos feladatoknál nagy jelentősége van annak, hogy eldöntsük: **egy** (vagy több) **vektor** kompatíbilis-e (lineárisan kombinálható-e) egy adott vektorrendszer vektoraival.

A kompatibilitás vizsgálatát is bázistranszformációval végezzük.

Példa: Kompatíbilis-e az **A** mátrix sorvektor terével a **b*** és **c*** vektor, ha:

$$\underline{A}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix},\quad \underline{b}^*=[\,2\ \ -15\ \ 3\ \ -1\,],\quad \underline{c}^*=[\,1\ \ 4\ \ -2\ \ -3\,].$$

Mennyi a mátrix rangja?

Megoldás: Az **A*** oszlopvektoraival, tehát az **A** transzponálása után az ugyancsak transzponált **b** és **c** vektorokkal bázistranszformációt hajtunk végre:

	a_1	a_2	a_3	a_4	b	c	a_2	a_3	a_4	b	c	a_2	a_3	b	c	a_2	b	c
a_1	$\boxed{1}$	−3	2	0	2	1	−3	2	0	2	1	−3	2	2	1	1	2	−1
a_3	−3	1	1	3	−15	4	−8	7	3	−9	7	−2	$\boxed{1}$	0	1	−2	0	1
a_4	0	2	−2	−1	3	−2	2	−2	$\boxed{-1}$	3	−2	−2	2	−3	2	2	−3	0
	2	12	−1	4	−1	−3	18	−5	4	−5	−5	26	−13	7	−13	0	7	0

Az **A** mátrix **rangja 3.**

A **b*** **nem kompatíbilis**, mert a **b** felírásához az egyik triviális bázisvektort is fel kell használnunk:: $\underline{b}=2\underline{a}_1+(-3)\underline{a}_4+7\underline{e}_4$. **(Az $\underline{e}_4$ a negyedik sor elején „rejtőzködik”.)**

A **c*** pedig **kompatíbilis** az A sorvektoraival, hiszen $\underline{c}=-\underline{a}_1+\underline{a}_3$.

A fejezet tárgyalását befejeztük.