C

Optimumkeresés számítógépen

Az optimumok megtalálása mind a gazdasági életben, mind az élet sok más területén nagy jelentőségű. A matematikában számos módszert dolgoztak ki erre a célra, például a függvények szélsőértékeinek keresése differenciálszámítással, vagy a lineáris programozás (LP). A gyakorlatban felhasználható lineáris programozási modellek megoldása manuálisan sok időt igényel, így többféle számítógépes megoldás áll ma már rendelkezésünkre ezeknek a modelleknek a megoldására és az eredmények elemzésére. Felhasználhatjuk az Excel lehetőségeit, valamint a Lingo szoftvert (aminek 300 folytonos változót kezelni tudó demo változata az internetről ingyenesen letölthető) az optimumok keresésére. Az eljárásokat példákon keresztül mutatjuk be.

Az Excel használata LP modellek megoldására

Tekintsük a következő szöveges feladatot:
Négy erőforrás felhasználásával négyféle terméket gyártanak. Az egyes termékek egy-egy egységébe az erőforrásokból rendre 1, 0, 2, 1; 1, 2, 2, 0; 0, 2, 2, 1 és 1, 2, 0, 0 épül be az egyes erőforrásokból. Az erőforrások felső korlátai: 100, 160, 100, 60. A termékek eladási egységárai rendre: 6, 6, 5, 4. Milyen termékszerkezetnél lesz maximális az árbevétel?
A matematikai modell döntési változói a gyártandó mennyiségek: x_1, x_2, x_3, x_4.
Induló feltétel: a.) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$
Korlátozó feltételek: b.) $x_1+x_2+x_4 \leq 100$

$$2x_2+2x_3+2x_4 \leq 160$$
$$2x_1+2x_2+2x_3 \leq 100$$
$$x_1+x_3 \leq 60$$
$$x_1+x_3 \leq 60$$

A célfüggvény: c.) $z=6x_1+6x_2+5x_3+4x_4 \rightarrow \max$

A feladat megoldása történhet szimplex módszerrel, az optimumok:

$$\underline{x}_o = \begin{bmatrix}35 & 0 & 15 & 65\end{bmatrix}^* \quad \underline{u}_o = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 10\end{bmatrix}^* \quad z_o = 545$$

A duál optimumok: $\underline{y}_o$=[2,5 0,75 1,75 0]* $\underline{w}_o$=[0 1,5 0 0]*

A számítógépes megoldást Excellel az *adatbevitellel* kezdjük.

Célszerű a termékek oszlopait x_i-vel, a feltételek sorait f_i-vel elnevezni.

A feltételek sorai alatt legyen a célegyütthatók sora ($\underline{c}^*$), alatta legyen az $\underline{x}^*$, az optimális megoldások sora, induláskor nullákkal feltöltve („módosuló cellák”).

Az x_4 oszlopa után töltsünk fel egy oszlopot nullákkal a $\underline{c}^*$ soráig, majd legyen egy oszlop a relációjeleknek és egy a kapacitásoknak.

Az induló gépi táblánk:

	x1	x2	x3	x4			b
f1	1	1	0	1	0	<=	100
f2	0	2	2	2	0	<=	160
f3	2	2	2	0	0	<=	100
f4	1	0	1	0	0	<=	60
c*	6	6	5	4	0		
x*	0	0	0	0			

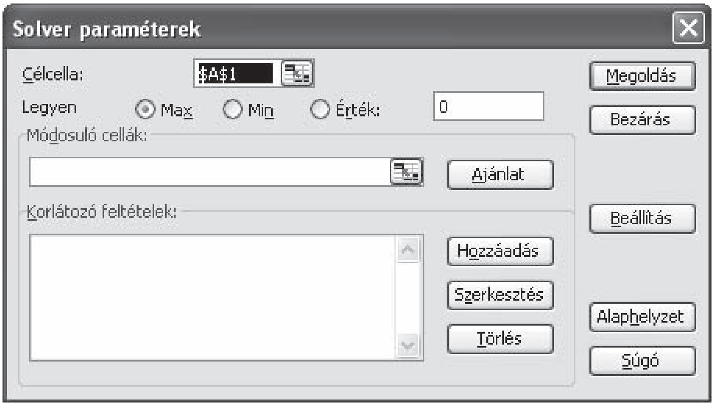
Az adattáblázatot az Excellben bárhol elhelyezhetjük. Legyen x1 a B1 cellában.

Az x4 utáni oszlopban állítjuk elő a modell feltételeinek baloldalát és a célfüggvényt, az adatok és a változók skaláris szorzataként. Ehhez: az F2 cellába behívjuk a Szorzatösszeg függvényt.

Az első tömbbe kerül a B2E2 sor, a másodikba a B7E7 sor „dollárjelekkel”, amit az F4 billentyűvel vihetünk fel. Ezután az F2 cellában előállított „skaláris szorzatot” alkalmazzuk a többi sorra úgy, hogy az F2 cella jobb alsó sarkában megjelenő vonszoló füllel lejövünk az F6 celláig, ezután rákattintunk az F6 cellára, ez lesz a célcella.

Megoldás

Az Excel eszközök menüjéből behívjuk a Solvert. Ha nincs ott, akkor a Bővítmények menüpontból bekérjük. Az Excel változataiban a Solver alakja más lehet.



A célcella most F6 (ha a kurzort ott hagytuk, akkor automatikusan ez jelenik meg. Ha nem: rákattintunk).
Maximumot keresünk (bejelölés).
Módosuló cellák: $\underline{x}^*$ sora (B7E7), kattintsunk a sorra, bevisszük.
Korlátozó feltételek: Hozzáadás gombbal egyesével bevisszük: F2<=H2 (rákattintunk a cellákra), majd a Felvesz gomb után jön a következő: F3<=H3 és a többi. Ha csupa azonos reláció szerepel a korlátozó feltételeknél (mint most), akkor egyszerre is bevihetjük a baloldali, majd a jobboldali oszlopot és lezárjuk a bevitelt.
A Beállítás gombon a nemnegatív és a lineáris feltételeket jelöljük be.
Ezt követően indulhat a Megoldás.
A megoldás gombra kattintva megkapjuk az optimális (primál) megoldást:

	x1	x2	x3	x4			b
f1	1	1	0	1	100	<=	100
f2	0	2	2	2	160	<=	160
f3	2	2	2	0	100	<=	100
f4	1	0	1	0	50	<=	60
c*	6	6	5	4	545		
x*	35	0	15	65			

Az x^* sorából az optimum: $\underline{x}_o=[35\ 0\ 15\ 65]^*$. A célfüggvény optimuma: $z_o=545$.
Az eltérésváltozó optimumok a kapacitás „maradványok”, a relációjelek utáni és előtti oszlopokban lévő számok különbségei: $\underline{u}_o=[0\ 0\ 0\ 10]^*$.

A duál optimum, és az érzékenységvizsgálat az érzékenységjelentésből adódik:

Microsoft Excel 11.0 Érzékenység jelentés

Módosuló cellák

Cella	Név	Végérték	Redukált költség	Objective Célegyüttható	Megengedhető növekedés	Megengedhető csökkenés
B8	x* x1	35	0	6	3	3
C8	x* x2	0	-1,5	6	1,5	1E+30
D8	x* x3	15	0	5	5	3
E8	x* x4	65	0	4	1E+30	3

Korlátozó feltételek

Cella	Név	Végérték	Shadow Árnyékár	Feltétel jobb oldala	Megengedhető növekedés	Megengedhető csökkenés
F3	f1	100	2,5	100	30	70
F4	f2	160	0,75	160	140	60
F6	f4	50	0	60	1E+30	10
F5	f3	100	1,75	100	20	60

Az $\underline{y}_o$ értékeit a Shadow Árnyékár oszlopból, a duál eltérésváltozók, a $\underline{w}_o$ értékeit pedig (a mi jelölésrendszerünk szerint abszolút értékben) a Redukált költség oszlpból olvashatjuk le.

Tehát a duál optimumok: $\underline{y}_o$=[2,5 0,75 1,75 0]* $\underline{w}_o$=[0 1,5 0 0]*

A Megengedhető növekedés, Megengedhető csökkenés oszlopok értékes információkat tartalmaznak, jelentésük: a célfüggvény együtthatókat (felső táblázat: Módosuló cellák) és a kapacitás értékeket (Korlátozó feltételek) milyen határok között változtatjuk meg, ha azt akarjuk, hogy az optimum szerkezete változatlan maradjon.

Az Excellel történő számítógépes optimalizálás bővebb kifejtésére a szakirodalomban, illetve más stúdiumokban kerül sor.

Optimalizálás a Lingo programmal

A szofver előnye, hogy a matematikai modell a szokásos alakban írható be, tud speciális modelleket kezelni és pontosabb az Excelnél.

Használatához szükséges tudni:

1.) A nemnegatív feltételt külön nem kell beírni, a program ezt feltételezi.

2.) A relációkat pontosvesszővel kell lezárni, a szorzásjelet ki kell írni.

3.) A nagyobb-egyenlő, kisebb-egyenlő relációknál nem kell egyenlőséget írni.
4.) A célt (min vagy max) sor elején ki kell írni.
A program indítása után begépeljük a modellt, legyen ez az Excellel megoldott példánk.
x1+x2+x4<100;
2*x2+2*x3+2*x4<160;
2*x1+2*x2+2*x3<100;
x1+x3<60;
max=6*x1+6*x2+5*x3+4*x4;
A *megoldást* a Solve parancsra lépve kapjuk. Használhatjuk a „piros célkarika” ikont is erre a célra.
Global optimal solution found.

```
Objective value:                                545.0000
Total solver iterations:                               4

                          Variable           Value        Reduced Cost
                                X1        35.00000            0.000000
                                X2        0.000000            1.500000
                                X4        65.00000            0.000000
                                X3        15.00000            0.000000

                               Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                 1        0.000000            2.500000
                                 2        0.000000           0.7500000
                                 3        0.000000            1.750000
                                 4        10.00000            0.000000
```

A program globális optimumot talált, ehhez 4 lépésben jutott el.
Az egyes optimális megoldások elhelyezkedése a táblázaton jól látható:

$$z_o = 545 \quad \underline{x}_o = \left[35\ \ 0\ \ 15\ \ 65\right]^* \quad \underline{u}_o = \left[0\ \ 0\ \ 0\ \ 10\right]^*$$

$$\underline{y}_o = \left[2{,}5\ \ 0{,}75\ \ 1{,}75\ \ 0\right]^* \quad \underline{w}_o = \left[0\ \ 1{,}5\ \ 0\ \ 0\right]^*$$

A Lingoban célfüggvényként szerepeltethetünk törtfüggvényt (ez a gyakorlatban sokszor előfordul), vagy más nem lineáris (pl. másodfokú) függvényt. A Lingonak ezen kívül sok alkalmazási lehetősége van, ami a letölthető Felhasználói kézikönyvben megtalálhatunk.