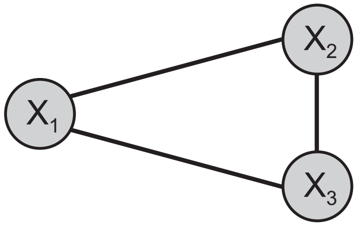
A

Gráfok

A matematika egy viszonylag új területe, a *gráfelmélet* is lehetőséget ad arra, hogy alkalmazásával optimalizálásokat végezzünk. Különböző szervezési problémák szemléletes leírására, a lehetséges és az optimális kapcsolatok, elérési utak meghatározására gyakran használnak egyszerűsített ábrákat, gráfokat. A kapcsolódási lehetőségek számának meghatározása többnyire kombinatorikai probléma. Egy adott pontból valamely más pontba különböző utak (élek, ívek sorozata) vezetnek, ezek közül a bizonyos szempontból optimális megtalálása a gráfelmélet egyik fő célja. Jelenleg főként logisztikai folyamatok, adott algoritmusú tevékenységek legkedvezőbb megoldásait kereshetjük a gráfok felhasználásával. A gráfelmélet létrejöttéhez a *modellezés* jól kihasználható volta is hozzájárult.
A gráfelmélet jelenleg is fejlődik, bővül. Anyagunkban az alapfogalmak, összefüggések, eljárások megismerése után példákon mutatunk be alkalmazásokat.

Alapfogalmak

Sok olyan feladat létezik, amelyben bizonyos elemek (fogalmak, személyek, tárgyak, stb.) között kapcsolatok léteznek, amelyeket pontokkal, vonalakkal adunk meg.
Szemléletesen: a *gráf olyan ábra*, amelyen adott *pontokat vonalak kötnek össze*. A pontokat gyakran körökkel, téglalapokkal ábrázoljuk. A pontokat szokás a gráf *csúcsainak, szögpontjainak*, az összekötő vonalakat a gráf *éleinek* nevezni.



A1. ábra

A gráf véges, ha a csúcspontjainak száma véges.
Ha két csúcsot (pontot) él köt össze, akkor a pontokat *szomszédosoknak* mondjuk.
Az egy pontból kiinduló élek számát a pont *fokszámának* nevezzük.
Reguláris az a gráf, amelyben minden csúcs fokszáma azonos.
Lehetséges, hogy egy gráf két pontja között több él is van („*többszörös él*"), illetve lehet olyan él is, amelynek kezdő és végpontja azonos („*hurokél*").
Egyszerű a gráf akkor, ha nincs benne többszörös él és hurokél.
Tétel: Egy véges egyszerű gráfban mindig van két olyan csúcspont, amelyek fokszáma megegyezik.
Példa: Egy iparág vállalatai között a kapcsolatok kölcsönösek. Igazoljuk, hogy van olyan két cég, amelyeknek ugyanannyi másik céggel van kapcsolata.
Megoldás: Legyen a cégek száma n. Egy cégnek ekkor 0-tól (n–1)-ig lehet más céggel kapcsolata, ami összesen n lehetőség. Nem lehet azonban egyszerre olyan cég, amelynek 0 és olyan, amelynek (n–1) kapcsolata van, mert az előzőnek nincs kapcsolata mással, az utóbbinak pedig mindenkivel van, azaz a „nulla kapcsolatúval" is van. Így a kapcsolatokra maximum (n–1) lehetőség van, viszont a cégek száma n, tehát biztosan van kettő, amelyeknek ugyanannyi kapcsolata van.
A tétel bizonyításának ugyanez a gondolatmenete.
Izolált pont az olyan csúcspont, amelyből nem indul ki él. Az *üres gráfban* nincsenek élek, az csupa izolált pontból áll.
Teljes gráf az, amelyben bármely két pontot él köt össze.
Tétel: Az n csúcspontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$.
Bizonyítás: n pont közül kell kiválasztani minden lehetséges módon kettőt, amelyek között szakaszt (élt) húzunk. A kiválasztásnál a sorrend nem

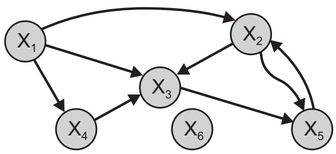
számít, ismétlés értelemszerűen nincs, így ismétlés nélküli kombinációval számolhatunk:

$$C_n^2 = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Komplementer gráf olyan gráf, ami egy adott gráfot teljes gráffá egészít ki, így ugyanannyi csúcspontjuk van, de ha az egyikben két pont között van él, akkor a komplementerében nincs és viszont. Így az üres gráf komplementere a teljes gráf, a teljes gráfnak pedig az üres gráf a komplementere.

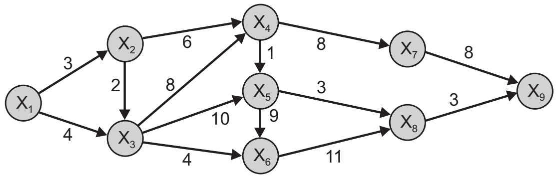
Irányított gráf, háló

Irányított gráf: olyan gráf, ahol minden élhez irány tartozik. Az irányított élt ívnek nevezzük.



A2. ábra

Kezdőpont: olyan szögpont, amibe nem megy ív. Például a A2. ábrán x1.
Végpont: olyan szögpont, amiből nem jön ki ív. Például a A3. ábrán x9.
Út: az ívek egymásutánja.
Egyszerű út: 1 ívet sem használunk kétszer.
Például: a A2. ábrán: x1–x3–x5.
Elemi út: nem megy át kétszer szögponton. Például: x1–x2–x3.
Körút: a kezdőpont megegyezik a végponttal. Például: x2–x3–x5–x2.
Összefüggő gráf: bármely két szögpont között van út.
Az *ív kapacitása*: az ívhez rendelt valós szám.
Háló: ha minden ívnek van kapacitása.
Példa: Egy időtervezési folyamatot ír le következő körútmentes háló:



A3. ábra

A körútmentes hálónak mindig van kezdő és végpontja.

Az irányított gráf megadása

Történhet *vizuálisan*: például a A3. ábra
A számítógépes megoldásokat egyszerűsíti a *gráf megadása mátrix alakban.*
Például a A2. ábrán vizuálisan megadott gráf mátrix alakban:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	1	1	0	0
x_2	0	0	1	0	1	0
x_3	0	0	0	0	1	0
x_4	0	0	1	0	0	0
x_5	0	1	0	0	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0

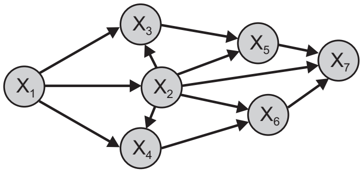
Mátrixunk elemei: Ha két csúcspont között van ív: 1. Ha nincs ív: 0.
Előfordul, hogy *halmaz reprezentációval* adjuk meg a gráfot. Felvesszük a szögpontok X halmazát ugyancsak a A2. ábra gráfjával: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_6\}$.
A megadást a Descartes szorzathoz hasonlóan rendezett párokkal végezzük:

$$(x_1, x_2);\ (x_1, x_3);\ (x_1, x_4);\ (x_2, x_3);\ (x_2, x_5) \text{ és így tovább.}$$

Az optimalizálás végrehajtásához „rendezett" gráfra, hálóra van szükség. A rendezést szintekre bontással végezzük.

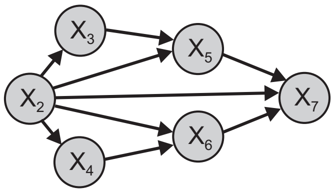
Háló szintekre bontása

Az összefüggő, irányított körútmentes gráf (háló) szintekre bontható. A vizuálisan megadott háló esetén, kisszámú csúcspont esetén ez egyszerűen végrehajtható. A szintekre bontás nem függ az ívek kapacitásaitól, így azokat nem tüntetjük fel.
Példa: Bontsuk szintekre a következő hálót:



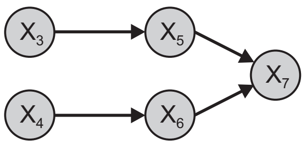
A4. ábra

Forrás ("ős nélküli szögpont", amelyből csak kifelé vezet nyíl): x_1.
Ez az *I. szint*, tehát maga a forrás szögpont.
Töröljük ezt a pontot és megkeressük a forrást a megmaradt hálón:



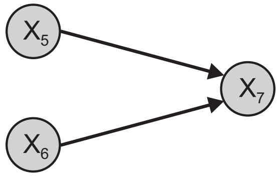
A5. ábra

A forrás most az x_2, ez lesz a *II. szint*.
Töröljük ezt a pontot és megkeressük az újabb forrást.



A6. ábra

Két forrás van, az x_3 és az x_4, ez lesz a *III. szint*.
Újabb törlés után ismét 2 forrás lesz, x_5 és x_6.

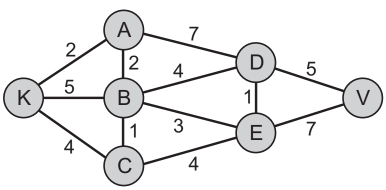


A7. ábra

Ez lesz a *IV. szint*, tehát x_5 és x_6.
Az V. szint maga az „utolsó” szögpont, az x_7 (végpont, nevezik „nyelőpont”-nak is). Összetettebb feladatokhoz gyakran felhasználjuk a *rangfüggvényt.*
Rangfüggvény: minden szögponthoz hozzárendeljük a szintje számát. A mi feladatainkban a rangfüggvényt nem használjuk.

Minimális (maximális) vonal (élsorozat) felvétele gráfon

Egy gráfban az élekhez értékeket rendelünk (pl.: távolság a szögpontok között) és keressük a K pont és a V pont között a legrövidebb utat.
Példa:



A8. ábra

A legrövidebb vonalat *minimális kifeszítő fának* is nevezik.
Kereshetjük a *maximális vonalat* is, ha ez a feladat.
Táblázatot készíthetünk, a következő felépítésben:

n	Megoldott pont	Legközelebbi pont	Távolság összeg	Új él	Megoldott új pont

Kiindulunk a K kezdőpontból és kitöltjük a táblázatot:

1	K	A	**2**	KA	A

Folytatjuk az eljárást, a következő lépés:

2	K A	C B	**4** 2+2=**4**	KC AB	C B

Újabb megoldott pontokból indulunk ki:

3	A B C	D E E	2+7=9 4+3=**7** 4+4=**8**	BE	E

Hasonló megfontolással:

4	A B E	D D D	2+7=9 4+4=**8** 7+1=**8**	BD ED	D

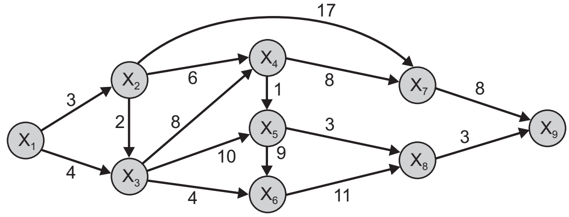
Végezetül az utolsó táblázat és az eredmény leolvasása:

5	D E	V V	8+5=**13** 7+7=**14**	DV	V

Két minimális vonal az eredmény: KABDV és KABEDV, és a hossza: 13.

Időtervezés

A háló íveinek értéke jelentsen időt. Kérdés: mennyi idő alatt lehet a programot biztosan megvalósítani? A *kritikus utat* keressük, a Forrástól a Nyelőig a maximális időt a projekthálóban úgy, hogy minden esemény megvalósuljon. Példa: Adott a következő háló:

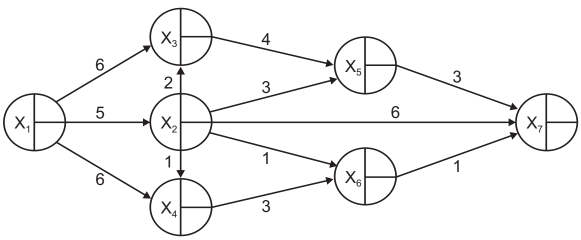


A9. ábra

Az egyes szögpontokhoz maximális elérési időt rendelünk, a forrással kezdünk, az ehhez rendelt érték érték 0.
$t_1=0$
$t_2=\underline{t_1+3}=3$ Az x_2-be jutás ideje.
$t_3=\max(t_1+4,\ \underline{t_2+2})=5$ (Tehát vesszük az x_3-ba jutás maximális idejét.)
$t_4=\max(t_2+6,\ \underline{t_3+8})=13$ (Hasonlóan a maximális elérést emeljük ki, és így tovább.)
$t_5=\max(\underline{t_3+10},\ t_4+1)=15$
$t_6=\max(t_3+4,\ \underline{t_5+9})=24$
$t_7=\max(t_2+17,\ \underline{t_4+8})=21$
$t_8=\max(t_5+3,\ \underline{t_6+11})=35$
$t_9=\max(t_7+8,\ \underline{t_8+3})=38$
A *kritikus út* tehát: $x_1x_2x_3x_5x_6x_8x_9$. Ennek az *időigénye*: 38.
Tartalék idő: a nem kritikus úton lévő események mennyit késhetnek anélkül, hogy a program megvalósulását késleltetnék.
Ehhez: a nyelőből az ívek irányát gondolatban megfordítjuk és megnézzük, hogy a nyelőből a többi szögpontba jutásnak mekkora a *minimális ideje*.

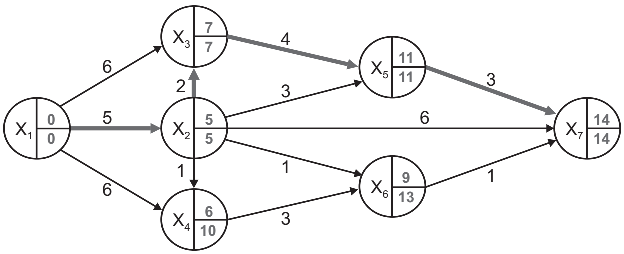
A kritikus út meghatározása rajzon

Adott az X_i eseményekből álló program az ívek kapacitásával:



Keressük a kritikus utat, annak időtartamát, továbbá az X_6 tartalékidejét és az X_2 legkorábbi és legkésőbbi megvalósításának időpontját.
Célszerű a szögpontokat jelentő köröket függőlegesen megfelezni, majd a a jobboldali részt vízszintesen ismét felezni. A felső körnegyedbe írjuk az adott szögpontba jutás maximális idejét, kezdésként x1-nél ide 0 kerül. X_2 esetén ez a szám 5, X_3 esetén 7, mert ebbe a szögpontba X_2-n keresztül is

eljuthatunk és 5+2 nagyobb, mint 6. Hasonlóan járunk el a többi szögpontnál is és végül az X_7 esetében 14 lesz az érték. Miután eljutottunk a nyelőpontba (X_7), az alsó környegyedbe is beírjuk a 14-et, majd onnan visszafelé haladással az alsó környegyedekbe beírjuk az adott szögpontba jutás legkisebb értékét. Így X_6-hoz 14–1=13 kerül, X_5-höz 14–3=11, X_4-hez 13–3=10, X_3-hoz 11–4=7 lesz alsó környegyedbe eső szám. Az X_2 pontba visszafelé haladással ötféleképpen juthatunk: X_7-ből ez a szám 14–6=8, X_6-ból 11–3=8, X_5-ből 13–1=12, X_4-ből 10–1=9 és X_3-ból 7–2=5, az 5 a legkisebb, ezt írjuk X_2-höz. Az X_1-hez (értelemszerűen is) 0 kerül. A kész rajzunk:



A kritikus út a forrástól a nyelőig a megfelelő kritikus eseményeket összekötő út, azaz ahol az alsó és felső környegyedbe eső számok megegyeznek, ez most: X_{12357}. A rajzon ezt vastag vonallal jeleztük. A kritikus út időtartama a nyelőhöz tartozó szám: 14.
Az X_6 legkorábbi ideje: 9. Legkésőbbi: 13. Tartalékidő a kettő különbsége: 4.
Az X_2 kritikus úton van, nincs tartalékidő.
A gyakorlatban ma már a legtöbb szervezési, logisztikai feladathoz készítenek hálótervet, az adatok mennyisége miatt általában ehhez számítógépet használnak.