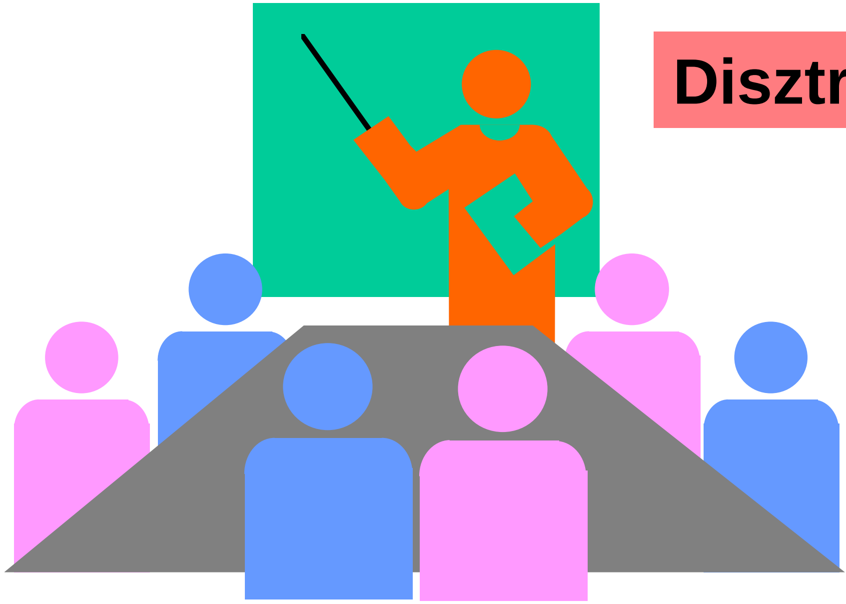
Esettanulmányok és modellek 5



Disztribúciós feladatok

Egészségügy

Készítette: Dr. Ábrahám István

Disztribúció

1. Az alábbi szállítási feladatban az 1. és a 2. feladótól a teljes készletet el kell szállítani. Az 1. feladó az 1. megrendelőnek nem szállíthat.

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	4	3	5	6	40
F_2	3	5	4	7	80
F_3	2	3	5	4	90
	70	70	40	20	

Cél a költség minimum.

Megoldás: A matematikai modell felvehető úgy, hogy az x_{ij} döntési változó jelentse az F_i-ből az R_j-be szállítandó mennyiséget.

Ekkor: $x_{ij} \geq 0$, ahol $1 \leq i \leq 3$ és $1 \leq j \leq 4$

Valamint: $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = f_i$ (ahol $\underline{f}$=[40 80 90]*) és: $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = r_j$ (ahol $\underline{r}$=[70 70 40 20]*)

Továbbá: $x_{11}=0$ (Az 1. feladó az 1. megrendelőnek nem szállíthat.)

Az 1. és 2. feladótól a teljes készletet el kell szállítani: $\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 40,$ $\sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 80.$

A célfüggvény a szokásos: $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min.$ (A c_{ij} a költségeket jelenti.)

A gépi megoldás Solverrel történhet, 12 változóval.

Egyszerűbb lesz a dolgunk, ha a „mátrixos” megoldást választjuk.

Névleges állomást (ötödik rendeltetési helyet) és tiltótarifákat kell felvennünk:

M	**3**	**5**	**6**	**M**	**40**
3	**5**	**4**	**7**	**M**	**80**
2	**3**	**5**	**4**	**0**	**90**
70	**70**	**40**	**20**	**10**	

A névleges célállomás „igénye" 10, az ide történő szállítási költségek eredetileg mind nullák.

A tiltásokat a többi költségelemhez képest igen nagy számok beírásával (M) valósítjuk meg. Például: M=99.

A gépi megoldás induló táblája:

	R1	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**		
F1	0	0	0	0	0	0	40
F2	0	0	0	0	0	0	80
F3	0	0	0	0	0	0	90
	0	0	0	0	0		
	70	70	40	20	10		0

	R1	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**
F1	99	3	5	6	99
F2	3	5	4	7	99
F3	2	3	5	4	0

Megoldása:

	R1	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**		
F1	0	40	0	0	0	40	40
F2	40	0	40	0	0	80	80
F3	30	30	0	20	10	90	90
	70	70	40	20	10		
	70	70	40	20	10		630

	R1	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**
F1	99	3	5	6	99
F2	3	5	4	7	99
F3	2	3	5	4	0

Az optimális megoldások a táblázatból kiolvashatók.

$$\underline{\mathbf{X}}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{40} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{40} & \mathbf{0} & \mathbf{40} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{30} & \mathbf{30} & \mathbf{0} & \mathbf{20} & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

Az összköltség minimuma: **K=630**.

A 3. feladónál 10 egység marad (a névleges állomás-nak szállít).

2. (Kocsis Péter: Opt. döntések lin.pr. (79. oldal) nyomán): Egy cég 4 városban (A, B, C, D) 1-1 üzlethelyiséget bérelne négy ingatlanközvetítőtől, mindegyiktől csak egyet-egyet. A bérleti díjakra az ajánlatok (ezer Ft havonta):

	I	II	III	IV
A	160	120	100	140
B	80	90	100	80
C	80	90	60	60
D	130	160	140	120

A 4 városban hogyan kössünk üzletet a 4 ingatlanközvetítővel, hogy a havi bérleti díj minimális legyen?

Az ilyen típusú feladatokat hozzárendelési problémának nevezik. Ez olyan disztribúciós feladat, amelyben a sorok és oszlopok „végén” csupa egyes áll.

A matematikai modell döntési változója $\mathbf{x_{ij}}$, amelynek értéke 1, ha az i-edik városban a j-edik közvetítő ajánlatát elfogadjuk, más esetben $x_{ij}=0$.

Így: $x_{ij} \in \{0, 1\}$.

A feltételek: $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1,\quad \sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1$

A célfüggvény: $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min.$

A gépi megoldás a modell alapján Solverrel történhet, 16 változóval.

Ez esetben is egyszerűbb lesz a dolgunk, ha a „mátrixos” megoldást választjuk.

Készítse el önállóan mindkét módon a megoldást!

Egészségügy

1. (Kocsis Péter: Opt. döntések lin.pr. (32. oldal) nyomán): Egy kórházban háromféle műtétet végezhetnek két műtőben. Ismertek a következők:

	Műtéti idő (óra)	Költség (Ft/óra)		Műtétszám (db/hét)	
		I. műtő	II. műtő	Minimum	Maximum
A	8	-	60000	1	3
B	1,5	28000	34000	8	25
C	2	32000	37000	12	28

Az I. műtőben az „A" műtétet nem hajtják végre.

Az I. műtőben hetente maximum 30 órát, a másodikban 60 órát dolgozhatnak.

Cél: az egyes műtőkben hány és milyen műtétet hajtsanak végre, hogy a heti ráfordítás minimális legyen?

Megoldás: A döntési változó $\mathbf{x_{ij}}$ jelentése: az i-edik fajta műtétből a j-edik műtőben hányat végeznek el.

$x_{ij} \in \mathbf{N}$

A feltételek: $x_{11}=0$ $x_{12}\geq 1$ $x_{12}\leq 3$ ***„A" típusú operációk a két műtőben.***

$x_{21}+x_{22}\geq 8$ $x_{21}+x_{22} \leq 25$ ***„B" típusú operációk a két műtőben.***

$x_{31}+x_{32}\geq 12$ $x_{31}+x_{32} \leq 28$ ***„C" típusú operációk a két műtőben.***

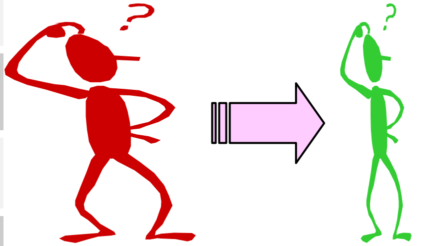
Időkorlátok: $1{,}5x_{21}+2x_{31} \leq 30$ $8x_{12}+1{,}5x_{22}+2x_{32} \leq 60$

A célfüggvény: $z= 8\cdot 60000x_{12}+1{,}5\cdot 28000x_{21}+\ldots+2\cdot 37000x_{32}\rightarrow \min.$

2. (Sz. T. K. főiskolai hallgató esettanulmánya nyomán): Fogyókúra tartásához néhány élelmiszer adatait összegyűjtöttük:

	ENERGIA (KCAL)	ZSÍR (G)	SZÉNHIDRÁT (G)	FEHÉRJE (G)	ÁR (FT)
Növényi vagdalt	159	6,5	6	19	33
Cottage sajt	85	2,2	3,1	12,8	111
Diétás kenyér	191	2,7	33,3	7,8	50
Olivás margarin	424	48	0,16	0,02	80
Tehéntej	67	3,6	5,3	3,4	25
Tojás	164	12	0,6	13,5	22
Harcsa	78	0,8	0,2	17,5	110
Sárgarépa	35	0,2	8,1	1,2	20
Narancs	40	1,5	8,5	0,6	25

Az adatok minden esetben 100 g-nyi mennyiségre vonatkoznak.



(Az eredeti dolgozat jóval több élelmiszert és más feltételeket is tartalmazott.)

A nyugalmi alapanyagcseréhez 75 kg-os nő esetén napi 1225 kcal szükséges, de 1600 kcal felett már nem lesz eredményes a fogyókúra.

Naponta 60 g zsír elegendő a szervezetnek.

Szénhidrátból 50 és 100 g között ajánlott a napi fogyasztás.

Fehérjéből legalább 150 g szükséges a napi feladatok ellátásához.

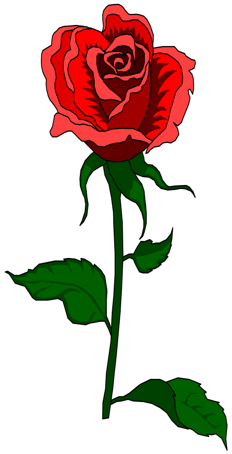
Adjuk meg ezekkel a feltételekkel a legolcsóbb fogyókúra receptjét!

Megoldás: A döntési változó az egyes élelmiszerek napi adagja (100 g-ra).

$x_i \geq 0$ (i=1, 2, …, 9) ***Értelemszerűen i=1 az első élelmiszernél és így tovább.***

A feltételek: $159x_1+85x_2+\ldots+40x_9 \geq 1225$

$159x_1+85x_2+\ldots+40x_9 \leq 1600$ **A kalória határok miatt.**



$6{,}5x_1+2{,}2x_2+\ldots+1{,}5x_9 \leq 60$ **Naponta 60 g zsír elegendő.**

$6x_1+3{,}1x_2+\ldots+8{,}5x_9 \geq 50$

$6x_1+3{,}1x_2+\ldots+8{,}5x_9 \leq 100$ **A szénhidrát határokat is betartjuk.**

$19x_1+12{,}8x_2+\ldots+0{,}6x_9 \geq 150$ **Fehérjéből legalább 150 g szükséges.**

A célfüggvény: $z=33x_1+111x_2+\ldots25x_9 \rightarrow \min.$

Nagyszámú további feltételt adhatunk meg, például a sárgarépát nem szeretjük:

$x_8=0$ Vagy: narancsból legalább fél kilót (5·100 g) fogyasztanánk: $x_9 \geq 5$

Újabb változatot jelenthet naponta más változatokkal a heti étrend kialakítása.

A célfüggvény is lehetne maximum („rongyrázás”), illetve határokat adhatunk a napi kiadásokra.

3. „Vizsgatemetés" (F. Z. L. főiskolai hallgató esettanulmánya nyomán): Sikeres vizsgaidőszak után T.B. a közeli vendéglőben ünnepel. Italokat is fogyasztanak. T.B. hatféle italra gondol, amelyekről ismertek a következők:

	Sör	Kisfröccs	Kommersz	Vilmos	Gin-tonic	Whisky-cola
Ár (Ft/db)	**240**	**100**	**130**	**350**	**420**	**450**
Idő (perc/db)	**20**	**8**	**10**	**15**	**22**	**20**
Mennyiség (liter/db)	**0,5**	**0,2**	**0,05**	**0,04**	**0,3**	**0,3**
Alkohol (ezrelék/db)	**0,2**	**0,14**	**0,35**	**0,25**	**0,3**	**0,3**
Élvezeti érték (db)	**3**	**1**	**-3**	**2**	**4**	**-1**

Az idő az átlagos fogyasztás ideje. Az alkohol ez esetben a véralkohol szint növelő hatást jelenti. Az élvezeti érték szubjektív kategória.

T.B. összesen maximum 1,5 ezrelék alkoholszintet és legalább 2 élvezeti értéket akar elérni. Minden poharat fenékig iszik. Az ünneplés 3 óra hosszat tarthat.

Kommersz vegyespálinkából legfeljebb egyet, Vilmos körtéből kettőt tervez.

A két koktélból együtt legalább 2, de legfeljebb 4 a terve.

Sörből minimum kettőt, a fröccsel együtt viszont maximum ötöt fogyasztana.

Milyen italválasztással kerülne legolcsóbba az ünneplés?

Megoldás: x_i jelentse a fogyasztott italfélék darabszámát. $x_i \in \mathbf{N}$ *„Fenékig”*

A feltételek: $0{,}2x_1+0{,}14x_2+0{,}35x_3+0{,}25x_4+0{,}3x_5+0{,}3x_6 \le 1{,}5$ ***Alkoholszint.***

$3x_1+x_2-3x_3+2x_4+4x_5-x_6 -2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6) \ge 0$ ***Élvezeti érték.***

$20x_1+8x_2+10x_3+15x_4+22x_5+20x_6 \le 180$ ***3 óra hosszat tarthat.***

$x_3 \le 1$ $x_4 = 2$ ***Töményet csak mértékkel!***

$x_5 + x_6 \ge 2$ $x_5 + x_6 \le 4$ ***A koktélok.***

$x_1 \ge 2$ ***Sör.***

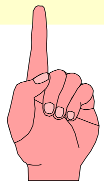
$x_1 + x_2 \le 5$ ***Sör és fröccs együtt.***

Az eredeti dolgozat több italfajtát és más feltételeket is tartalmazott.

A célfüggvény: $z=240x_1+100x_2+130x_3+350x_4+420x_5+450x_6 \rightarrow \min.$

Az eredeti dolgozatban korlát szerepelt az elkölthető pénzösszegre és az alkoholszint maximalizálása volt a cél.

Mértékletesség $\leftrightarrow$ Egészség!



A fejezet tárgyalását befejeztük.