# További programozási esetek

## Hiperbolikus, kvadratikus, integer, bináris, többcélú programozás

Készítette: Dr. Ábrahám István

# Hiperbolikus programozás

**Gazdasági problémák optimalizálásakor gyakori, hogy nem a bevétel maximalizá-lása, vagy a legkisebb költségre törekvés a cél, hanem az egységnyi költségre eső bevételre (azaz egy tört alakú célfüggvénnyel) keressük az optimumot.**

Ha egy LP feladatban a célfüggvény $g(\underline{x}) = \dfrac{f_1(\underline{x})}{f_2(\underline{x})} \to \text{opt.}$ alakú,

akkor hiperbolikus programozási feladatról (későbbiekben: HP) van szó.

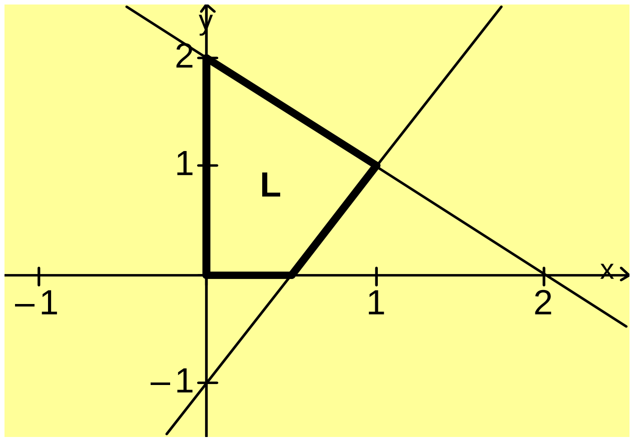
**A hiperbolikus elnevezést az indokolja, hogy az egyváltozós, elsőfokú számlálójú és nevezőjű törtfüggvény képe hiperbola (ha a számláló nem többszöröse a neve-zőnek).**
**A HP feladat grafikus megoldásában feltételezzük, hogy a lehetséges megoldások halmaza korlátos, a számláló és a nevező elsőfokú és a nevező sehol sem 0.**

Példa: $\underline{x} \geq \underline{0}$

$$x_1+x_2 \leq 2$$
$$2x_1-x_2 \leq 1$$

$$g(\underline{x}) = \frac{x_1 + 2x_2}{x_2 + 1} \to \max.$$

**A feltételek teljesülnek: a nevező sehol nem 0 (hiszen $\underline{x} \geq \underline{0}$ ) és az L halmaz korlátos:**



**Megoldás**: A g($\underline{x}$) célfüggvény értékének konstansnak kell lennie.

**Ez kétdimenziós esetben ábrázolva olyan egyenes sereget (sugársort) jelent, amelyek mindegyike egy ponton, az L halmazon kívül eső póluson megy át.**

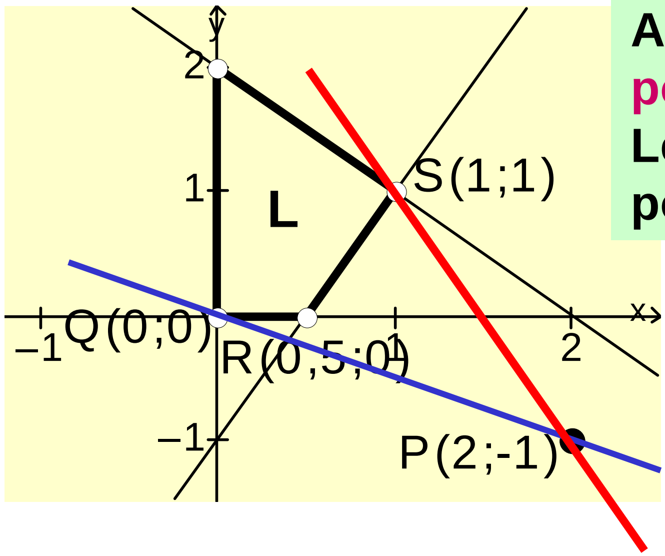
**A pólus koordinátáit az $f_1(\underline{x})=0$ és $f_2(\underline{x})=0$ egyenletrendszer megoldásával kapjuk.**

Esetünkben: $x_1 + 2x_2 = 0$
$x_2 + 1 = 0$

Az egyenletrendszer megoldása: P(2 ; -1).

Tétel: A feltételeinknek megfelelő HP feladatnak mindig van véges optimuma. Az optimális értéket a célfüggvény az L halmaz csúcspontjában veszi fel.

Ábrázolás:




**A célfüggvény értékei a sugársor egyenesei pólus körüli forgatásával változnak. Legnagyobb értéket az L halmazon az S pontban tapasztaljuk.**

Így az optimum: $\underline{x}_o=[1 ; 1]^*$

A célfüggvény maximuma: 1,5.

**Ha az $f_1(\underline{x})=0$ és $f_2(\underline{x})=0$ egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor a célfüggvénynek megfelelő egyenessereget párhuzamos egyenesek alkotják.**

# Kvadratikus programozás

Kvadratikus programozási feladatban a feltételek elsőfokúak, a célfüggvényben a változó másodfokon is szerepel.

**A lehetséges megoldások halmazából az optimális érték kiválasztása nem egyenes sereg, hanem más gőrbesereg, például koncentrikus körök segítségével történik. Az optimális megoldás általában nem csúcspontja az L halmaznak.**

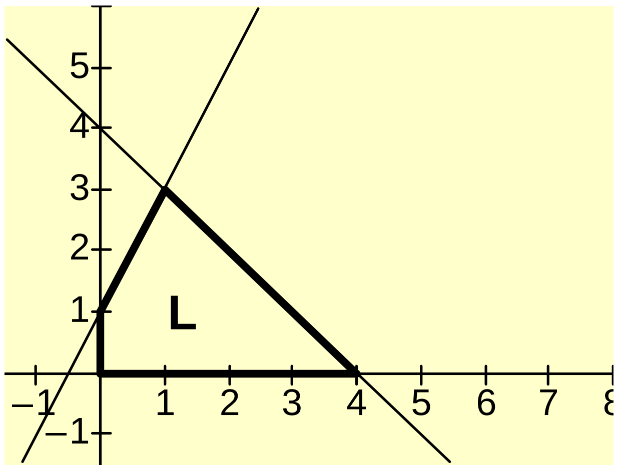
Példa: $x_1, x_2 \geq 0$

$$x_1+x_2 \leq 4$$

$$-2x_1+x_2 \leq 1$$

$$z= 10x_1+6x_2-x_1^2-x_2^2 \rightarrow \max.$$

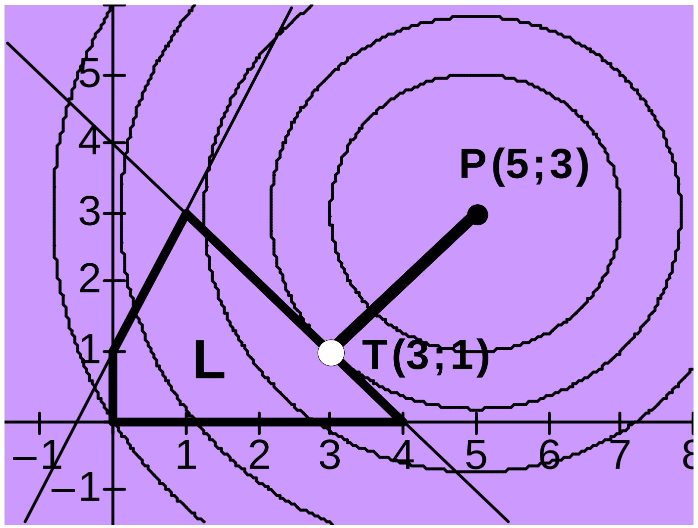
**A lehetséges megoldások halmaza:**




**A z =k egyenlet kört határoz meg, amelyből:**

$$(x_1-5)^2+(x_2-3)^2=34-k$$

**A képlet C(5;3) középpontú köröket jelent.**




$\underline{x}_o= [3\ 1]^*$

$z_o=26$

***A gyakorlati feladatok megoldására megfelelő szoftvereket használnak.***

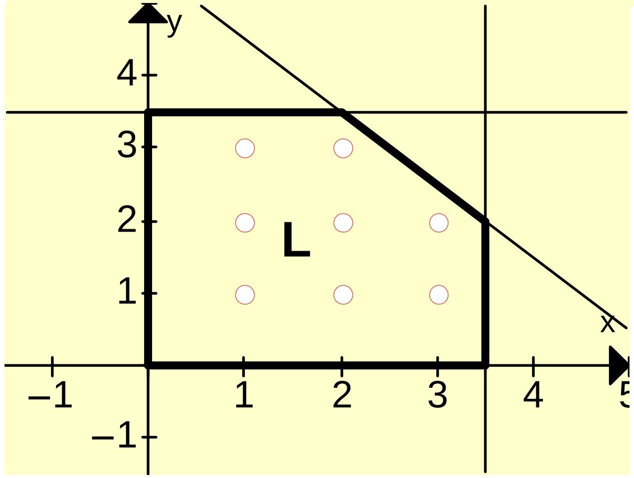
# Integer programozás

***Az optimalizálási problémáknál gyakori, hogy csak egész értékű megoldások jöhetnek szóba. Az integer (egészértékű) programozást ilyenkor alkalmazzuk.***

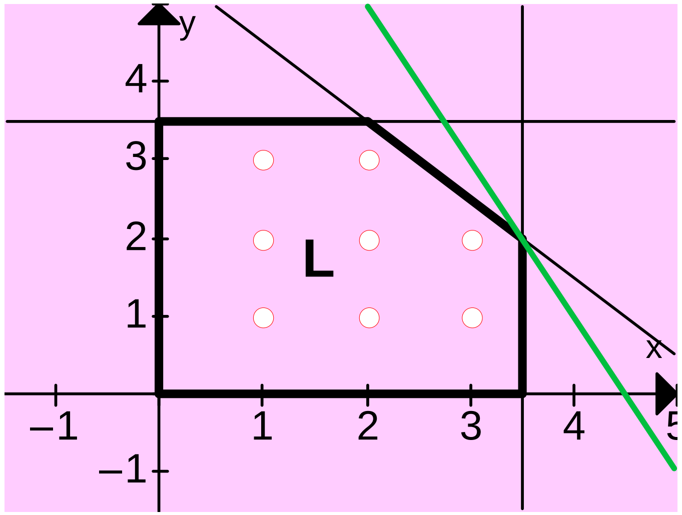
Példa: $x_1, x_2 > 0$; $x_1, x_2$ egész

$$x_1 \leq 3{,}5$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 11$$
$$4x_2 \leq 14$$
$$z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

A lehetséges megoldások a rácspontok L-ben:




Felvesszük az optimális célfüggvény egyenest:




Az induló feltétel miatt az optimum nem a (3,5; 2) pontban van, hanem a célfüggvény egyeneshez legközelebb eső rácspontban.

Így: $x_o = [3 \;\; 2]^*$ és $z_o = 8$.

***A hiperbolikus, a kvadratikus és az integer programozás algebrailag is megoldható.***
***A gyakorlati feladatokat megfelelő szoftverekkel oldják meg.***

# Bináris programozás

A döntési változók csak 0 és 1 értékeket vehetnek fel.

Példa: Egy kőolajmező feltárásán 3 fúrógép dolgozott. A munka befejeztével a 3 gépet egy másik mezőre viszik át. Adottak az áttelepítés költségei az $F_i$ helyekről az $R_j$ helyekre. Egy munkahelyen 1 gép dolgozik.

| | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 4 | 3 | 5 | 1 |
| $F_2$ | 5 | 4 | 7 | 1 |
| $F_3$ | 5 | 6 | 4 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | |

Hogyan telepítsék át a fúrógépeket, ha a cél költség minimalizálása?

Megoldás: Lényegében szállítási feladatról van szó. Az $x_{ij}$ döntési változó értéke 1, ha $F_i$-ről $R_j$-be szállítás történik és 0, ha nem szállítanak.

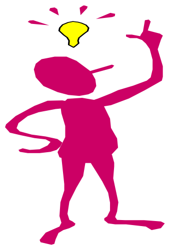
**A modell:** **a.) $x_{ij}$ értéke 0 vagy 1.**

**b.)**

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=1$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=1$$

**c.)** $z= 4x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+\cdots+4x_{33}\rightarrow \min$

*A feladat egyszerűen megoldható akár disztribúciós módszerrel, akár számítógéppel.*



# Többcélú programozás

Gyakran előfordul, hogy az adott feltételekkel felvett modellünkhöz több célfügg-vényt veszünk fel.

***Például pénzügyi, vagy időráfordítást vizsgáló problémáknál sokszor nemcsak a maximum, vagy a minimum érdekel bennünket, hanem mindkettő.***

**Lehetséges esetek**:

1.) A felvett célfüggvényekkel külön-külön optimumokat számolunk és ezek alapján adunk válasz a feladat kérdéseire.

***Ilyen feladatokkal korábbi tanulmányaink során már találkoztunk.***

2.) Ha megadjuk a különböző célfüggvények relatív fontossági súlyát, akkor a célfüggvények konvex lineáris kombinációjával egyetlen célfüggvényt állítunk elő. A feladatot ezzel megoldva kompromisszumos megoldást kapunk.

**(Konvex lineáris kombináció: a fontossági súlyokat „százalékosítjuk” és így állítjuk elő a feladat egyetlen célfüggvényét.)**

3.) Általános eset: előállítjuk az összes célfüggvénynek megfelelő pontok hal-mazát és ezek közül válaszhatjuk ki mérlegelés után a legjobbakat.

***Az általános eset felvétele általában eléggé bonyolult , csak ritkán alkalmazzák. Több célt „összehozni” egy problémára akkor lehet, ha a célok konformábilisek.***

**Példa**: Adott a következő feladat: $\underline{x} \geq \underline{0}$

$$x_1 + x_2 \leq 60$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 80$$
$$x_2 \leq 30$$

$$z_1 = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max.$$
$$z_2 = x_1 \rightarrow \max.$$

A $z_1$ célfüggvénnyel megoldva a feladatot: $\underline{x}_o = [20 \ \ 30]^*$ és $z_{1o} = 190$.

A $z_2$ célfüggvénnyel megoldva a feladatot: $\underline{x}_o = [60 \ \ 0]^*$ és $z_{2o} = 60$.

**Ha az első célfüggvénnyel kifejezett célunkat négyszer olyan fontosnak tartjuk, mint a második célt (azaz 80% és 20% lesznek a súlyok), akkor a konvex lineáris kombinációval előálló kompromisszumos célfüggvény:**

$$z_k = 0{,}8(2x_1 + 5x_2) + 0{,}2x_1 = 1{,}8x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$$

Ezzel a célfüggvénnyel megoldva a feladatot: $\underline{x}_o = [20 \ \ 30]^*$ és $z_o = 156$.

Ha mindkét célunkat egyenlő fontosságúnak vesszük, akkor az optimumok:

$\underline{x}_o = [40 \ \ 20]^*$ és $z_o = 110$.

Egyéb más programozási esetek, formák is ismertek.

A számítógépes programok általában tudnak kezelni olyan feladatokat is, ahol mind a feltételekben, mind a célfüggvényben nemlineáris formulák is vannak.

**A fejezet tárgyalását befejeztük**