A lineáris programozás 1

A geometriai megoldás

Készítette: Dr. Ábrahám István

A döntési, gazdasági problémák optimalizálásának jelentős részét lineáris programozással oldjuk meg.

A módszer lényege: az adott feladathoz matematikai modellt veszünk fel,

ebben általában lineáris formulák, egyenlőtlenségek és egyenlőségek szerepelnek,

majd az egyenletrendszerek megoldási algoritmusára alapuló eljárásokkal kiszámoljuk a szóban forgó döntéshez tartozó legjobb változatokat.

A gyakorlatban a megoldáshoz **számítógépet** használnak és a végső döntést általában további **megfontolásokat** (közgazdasági, politikai, stb.) figyelembe véve hozzák.

A matematikai modell felvétele

1. A normál feladat matematikai modellje

A **normál** lineáris programozási (LP) feladat bevezetéséhez tekintsük a következő példát:

Példa: egy üzem **kétféle** terméket készít **3 erőforrás** felhasználásával, amelyek a termékek egy-egy egységébe rendre **3, 4, 2**, illetve **2, 0, 4** mennyiségben épülnek be. Az egyes erőforrás kapacitásokból legfeljebb **18, 16, 24** egységnyi használható fel. A késztermékek egy-egy darabjának ára **4**, illetve **2** pénzegység. Adjuk meg azt a termelési programot, amely megvalósításával a lehető **legnagyobb árbevétel** érhető el!

Megoldás: **célszerű az adatokat táblázatba foglalni.**

Jelölje az erőforrásokat A, B, C, a termékeket I, II. A táblázat:

	I	II	Kapacitás
A	3	2	18
B	4	0	16
C	2	4	24
Ár	4	2	

Az első termékből gyártsunk x_1 darabot, a másodikból x_2-t, ezek lesznek a feladat változói.

Nyilvánvalóan igaz: $x_1, x_2 \geq 0$.

Vektor alakban: $\underline{x}=[\, x_1 \;\; x_2 \,]^* \geq \underline{0}$ *Ez az 1. feltételünk.*

A kapacitáskorlátok figyelembe vétele:

az I. termék minden darabjába az A erőforrásból 3 egységnyi épül be, a gyártásra kerülő x_1 darabhoz tehát $3 \cdot x_1$,

a II. termék minden darabjába az A-ból 2 egységnyi épül be, az x_2 darabhoz: $2 \cdot x_2$.

összesen: $3x_1+2x_2$, ami nem lehet több, mint amennyi rendelkezésre áll:

$$3x_1+2x_2 \leq 18$$

A második erőforrásra hasonló megfontolással adódó feltétel:

$$4x_1+0 \cdot x_2 \leq 16$$

A harmadikra: $$2x_1+4x_2 \leq 24$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket technológiai feltételeknek is nevezzük.

A feladatban a cél a maximális árbevétel.

Az I. termék darabjáért 4 pénzegységet kapunk, az x_1 darabért $4x_1$-et, a II. termékért pedig összesen $2x_2$-t, a cél a $z=4x_1+2x_2$ maximuma.

Ez a célfüggvény

Példában felvetett probléma **matematikai modellje**:

A technológiai feltételek **mátrixaritmetikai** alakban is írhatók: jelöljük a termelés mátrixát $\underline{A}$-val, a jobboldalon lévő számokat $\underline{b}$-vel, esetünkben :

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix}$$

Nyilván: $\underline{b} \geq \underline{0}$.

Felírható:
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix}$$

A **z** függvényt tekinthetjük az $\underline{\mathbf{x}}$ vektorváltozó skalárfüggvényének: $\mathbf{z = f(\underline{x})}$.

A **z** célfüggvény felírható az árvektor: $\mathbf{\underline{c}^*=[\ 4 \ \ 2\ ]}$ és az $\underline{\mathbf{x}}$ skalárszorzataként:

Így a célfüggvény: $\mathbf{z=f(\underline{x})=\underline{c}^* \cdot \underline{x} \rightarrow max.}$

A matematikai modell általánosan:

$\mathbf{\underline{x} \geq \underline{0}}$ **(Induló feltétel)**

$\mathbf{\underline{A} \cdot \underline{x} \leq \underline{b} \quad (\underline{b} \geq \underline{0})}$ **(Korlátozó feltétel)**

$\mathbf{z=\underline{c}^* \cdot \underline{x} \rightarrow max.}$ **(Célfüggvény)**

A **normál LP** feladatokat manuálisan geometriai módszerekkel oldhatjuk meg, vagy **algebrai úton**, az ú.n. szimplex módszerrel.

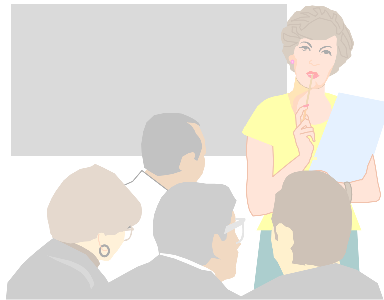
A **gyakorlat** nagy terjedelmű optimumszámítási feladatait **célszoftverekkel**, **gépi úton** oldják meg.

A modellek helyes felállításához, a megoldások során jelentkező speciális esetek megértéséhez hasznos a kisebb terjedelmű feladatok kézi megoldása.

A normál feladat megoldása geometriai módszerrel

A konkrét példában szereplő feladat matematikai modellje:

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$
$$3x_1+2x_2 \leq 18$$
$$4x_1 \leq 16$$
$$2x_1+4x_2 \leq 24$$
$$z=4x_1+2x_2 \rightarrow \max.$$



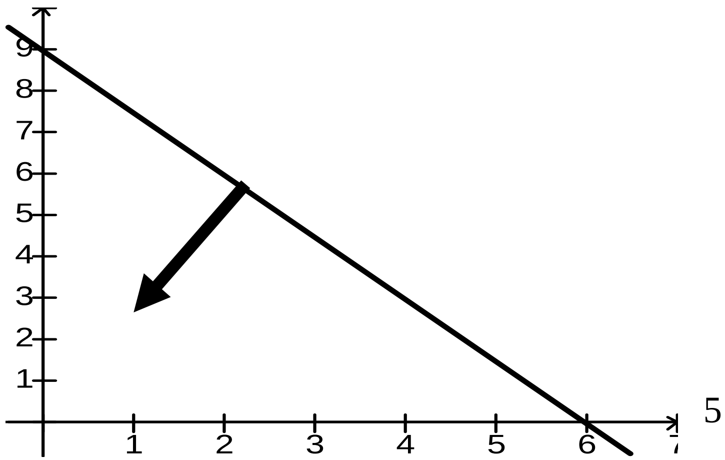
A **normál LP** feladat **feltételeit** és a **célt** koordináta rendszerben ábrázoljuk.

Jelöljük a koordináta rendszer vízszintes tengelyét $\mathbf{x_1}$-gyel, a függőlegest $\mathbf{x_2}$-vel.

Az $\mathbf{x_1,\ x_2 \geq 0}$ feltételnek eleget tevő pontok a koordináta rendszer **I. síknegyedében** találhatók, az ábrázoláskor ezt a részt használjuk.

A $\mathbf{3x_1+2x_2 \leq 18}$ feltétel azokat a pontokat határozza meg, amelyek a $\mathbf{3x_1+2x_2 = 18}$ egyenes határolta félsíkon találhatók.

Az **egyenlőtlenség**nek megfelelő félsíkot legegyszerűbben úgy állapíthatjuk meg, hogy megvizsgáljuk: **egy kiválasztott pont koordinátái** kielégítik-e az egyenlőtlenség feltételét. Ez a pont most legyen (0;0).

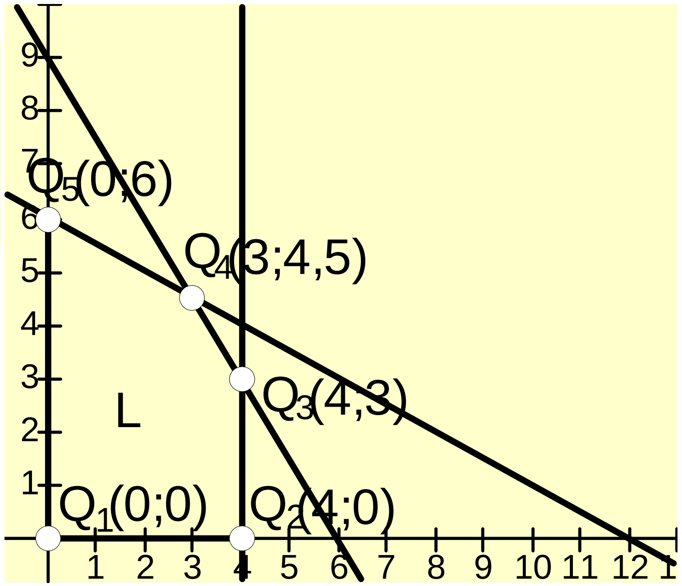


Megjegyzés: Az egyenes többféle módon, esetünkben célszerűen a Salmon féle tengelymetszetes alakkal ábrázolható. A tengelymetszetes alak:

$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1$, ahol az egyenes az $\mathbf{x_1}$ tengelyt **a**-nál, az $\mathbf{x_2}$-t **b**-nél metszi.

Ábrázoljuk a **négy** feltételi egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmazát:

Az **L** halmaz határán lévő **Q_1, Q_2,… ,Q_n** pontokat **extremális pontoknak** nevezzük.

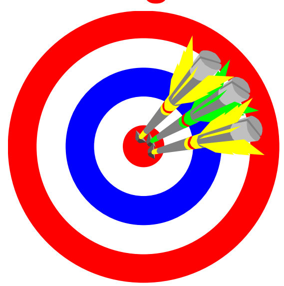


A **Q_i** pontok által meghatározott **L** halmaz pontjai alkotják a lehetséges megoldások halmazát.

Az **extremális pontok** koordinátáinak kiszámolása a megfelelő egyenesek metszéspontjainak meghatározásával történik.

Az **L** halmaz pontjainak koordinátái a feladat lehetséges megoldását adják.

Közülük kell kiválasztani azt (vagy azokat), amelyek a feladat optimális megoldását szolgáltatják. Ehhez a $\mathbf{z=4x_1+2x_2}$ célfüggvényt használjuk fel.



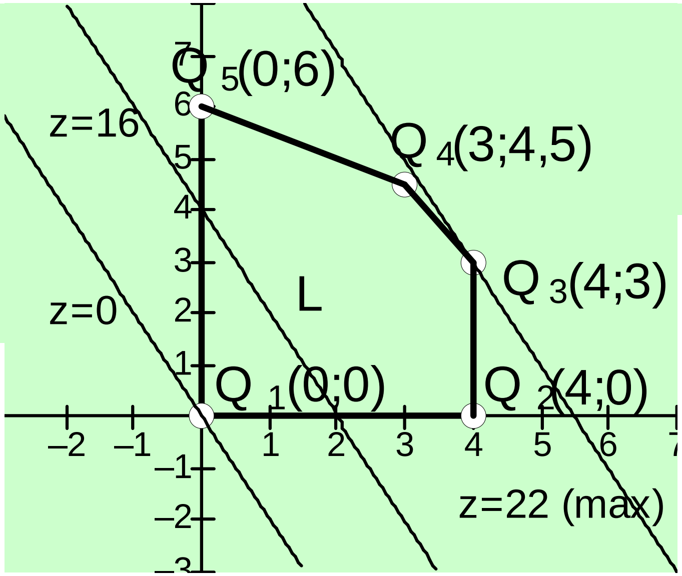
A (kétváltozós) célfüggvény a **z** különböző számértékeihez egymással párhuzamos egyeneseket rendel.

Válasszuk a **z** értékét **0**-nak. A **$0=4x_1+2x_2$**, azaz **$x_2=-2x_1$** egy origón átmenő –2 iránytangensű egyenes, ez a célfüggvények között az **alapegyenes**.

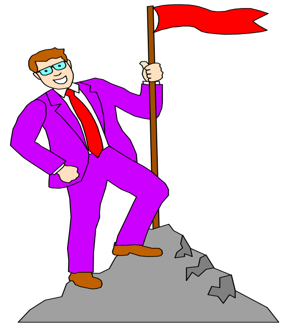
Ha a **z** értékét **növeljük**, az alapegyenessel párhuzamosan „**jobbra felfelé**” tolódnak el az egyenesek, ha **csökkentjük**, akkor „**balra lefelé**” tolódnak el az egyenesek.

Ez **fordítva** is igaz: ha növelni akarjuk a **z** értékét, akkor az alapegyeneshez képest „**jobbra felfelé**” kell eltolni a **z** egyenesét.

A **maximális z** értékhez tartozó egyenesnek még kell, hogy legyen legalább egy közös pontja a lehetséges megoldások halmazával.



Ez a közös pont esetünkben a **$Q_3(4;3)$** pont.



A célfüggvény a **maximális** értéke **22**, ezt az **$x_1=4$** és az **$x_2=3$** esetén veszi fel.

A **kapacitások maradványai**, az ú.n. **eltérésváltozók:** **$u_1=0$**; **$u_2=0$** és **$u_3=4$**.
Tehát: **optimális** akkor lesz a termékszerkezet, ha az első termékből **4**-et, a másodikból **3**-at gyártunk. Maximálisan **22** pénzegység árbevétel érhető el.

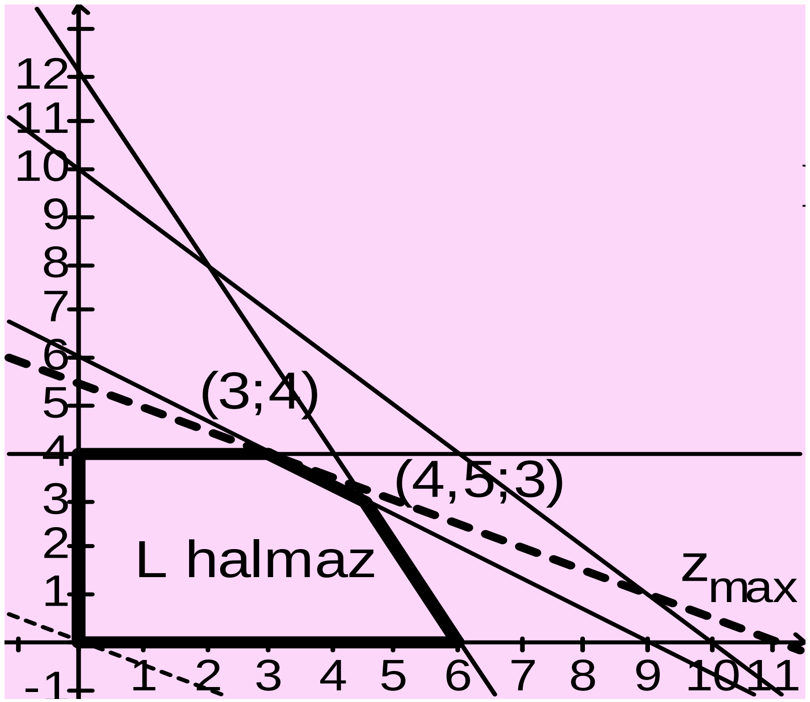
Gyakorló feladat: Egy üzemben 4 erőforrás felhasználásával kétféle terméket állítanak elő. Egy egységnyi termékhez az erőforrásokból **4, 0, 2, 1**, illetve **2, 4, 3, 1** egységet használunk fel. Az erőforrás kapacitás: **240, 160, 180, 100**. Az egyes termékek eladási ára darabonként **20**, illetve **40** pénzegység. Határozzuk meg a maximális árbevételt biztosító termelési programot!

Megoldás: A döntési változók a gyártási darabszámok: $\mathbf{x_1}$ és $\mathbf{x_2}$.

A **matematikai modell**: $x_1, x_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\leq 24 \\ 4x_2 &\leq 16 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ z = 20x_1 + 40x_2 &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Ábrázolás:



Az **optimumok** leolvasása:

$\underline{x}_o = [\ 3\ \ 4\ ]^*$

$\underline{u}_o = [\ 4\ \ 0\ \ 0\ \ 3\ ]^*$

$z_o = 220$.

Az eltérésváltozókat azok az u_i számok adják, amelyek az optimális x_i értéknél „egyenlőséggé teszik” a feltételi egyenlőtlenségeket.

A tiszta minimum feladat és geometriai megoldása

Grafikus úton egyszerűen meg tudunk oldani kétváltozós **minimum** feladatokat.

Elnevezés: a lineáris programozásban **tiszta minimum feladatnak** az

$$\underline{x} \geq \underline{0}$$
$$\underline{A} \cdot \underline{x} \geq \underline{b} \quad (\underline{b} \geq \underline{0})$$
$$z = \underline{c}^* \underline{x} \rightarrow \min.$$

alakban felírt feladatot nevezzük.

Példa: Egy gazdaságban az állatok etetéséhez kétféle takarmány keveréket használnak, amelyeknek egy-egy egységnyi mennyisége az **A**, **B** és **C** tápanyagokból rendre **2, 2, 0** és **1, 4, 4** egységet tartalmaz. Az állatok fejlődéséhez az egyes tápanyagokból legalább **6, 12, 4** egységnyi mennyiségre van szükség. Az egyes takarmány keverékek beszerzési egységárai: **5** és **6** pénzegység. Adjuk meg azt a takarmányozási programot, amely **legkisebb** beszerzési áron megvalósítható!

Megoldás: A feladat változói: az **I**. keverékből vásároljunk x_1-et, a **II**-ból x_2-t.

Készítsünk táblázatot:

	I. (x_1)	II. (x_2)	Kapacitás
A	2	1	6
B	2	4	12
C	0	4	4
Ár	5	6	min

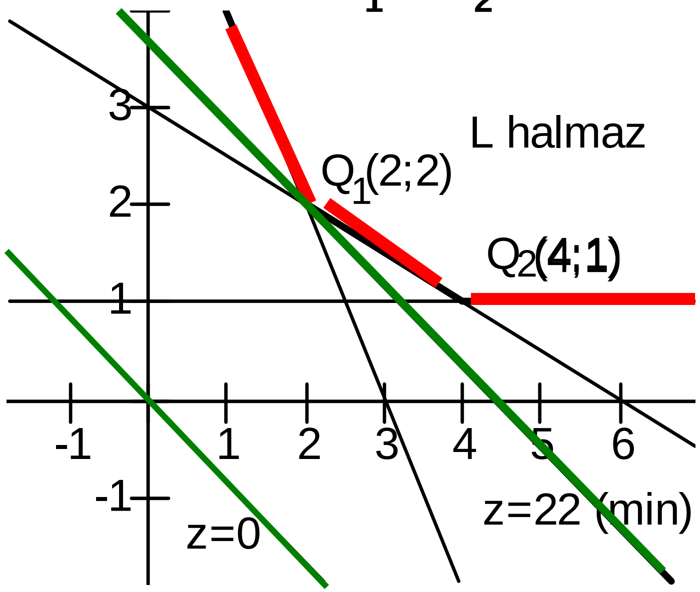
A matematikai modellt a táblázatból egyszerűen felírhatjuk.

A tiszta **minimum** feladatban az egyenlőtlenségek „nagyobb egyenlő” irányúak.

A modell:

$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$2x_1+x_2 \geq 6$$
$$2x_1 +4x_2 \geq 12$$
$$4x_2 \geq 2$$
$$z=5x_1+6x_2 \rightarrow \min.$$

Ábrázoljuk a **feltételeket**, valamint a **célfüggvény alapegyenesét** és **optimumát:**



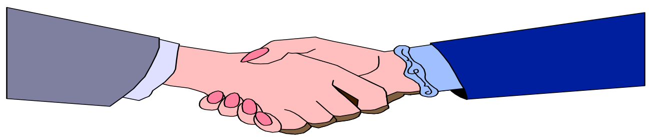
Az **L halmaz** esetünkben nem korlátos.

Az **optimális** célfüggvény egyenesnek az L-lel közös pontjának kell lennie, ehhez most is „emelni” kell az alapegyenest.

Ha elértük az L halmazt az alapegyenessel párhuzamos egyenesekkel, akkor ahhoz az egyeneshez tartozik az **optimum.**

Ez jelen esetben a Q_1 extremális pontban van, azaz **optimális** az $x_1=2$ és az $x_2=2$ érték.

A válaszunk a feladat kérdésére: minimális költségű akkor lesz a takarmányozás, ha mindkét keverékből 2-t vásárolunk. Ekkor a költség 22 pénzegység.



Gyakorló feladat: Három tápanyagból kétféle takarmánykeveréket készítenek, amelyek egy – egy egysége az egyes tápanyagokból **1; 0; 1**, illetve **0; 1; 1** egységnyit tartalmaz. A tápanyagokból legalább **2; 1**, illetve **4** egységnyit fel kell használni. A keverékek egységárai: **4** és **2**. Adjuk meg azt a programot, amely a lehető legkisebb költséggel megvalósítható!

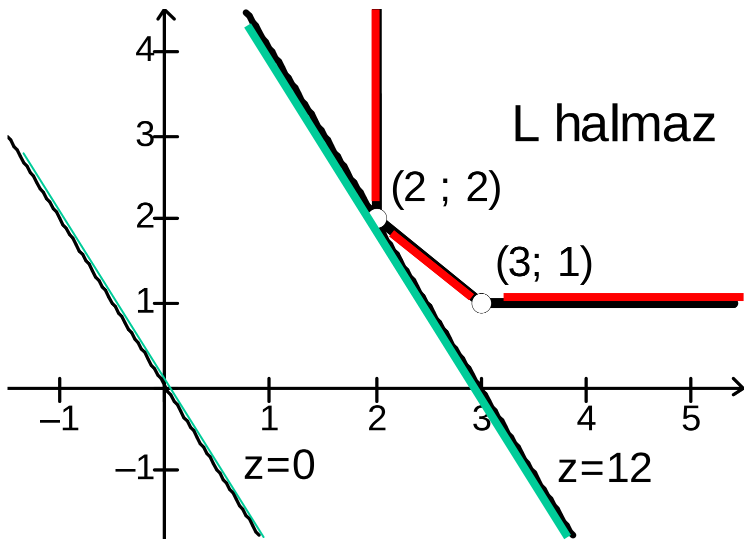
Megoldás: A döntési változók az egyes keverékek darabszámai: x_1 , x_2.

A matematikai modell:

$$x_1 , x_2 \geq 0$$
$$x_1 \geq 2$$
$$x_2 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 \geq 4$$
$$z = 4x_1 + 2x_2 \to \min.$$

Kis gyakorlat után a modell felírásához nem kell feltétlenül táblázatot felvenni.

Ábrázolás:



Az **L** halmaz **nem zárt**.

A **célfüggvény** alapegyenesét eltoljuk addig, hogy legyen közös pontja **L**-lel.

Az **optimális** megoldás: **$\underline{x}_o$=[2 2]*, z_{min}=12.**

Megjegyzés: a kétváltozós feladatoknál **sem szükségszerű**, hogy legyen **szöveges** (gazdasági) **háttere** a felvett matematikai modellnek.

A **feltételek** között lehetnek „≥” és „≤” egyenlőtlenségek egyaránt, és egy **L** halmazon több célfüggvény optimumait is kereshetjük.

Példa: Oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatokat:

$$\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}$$

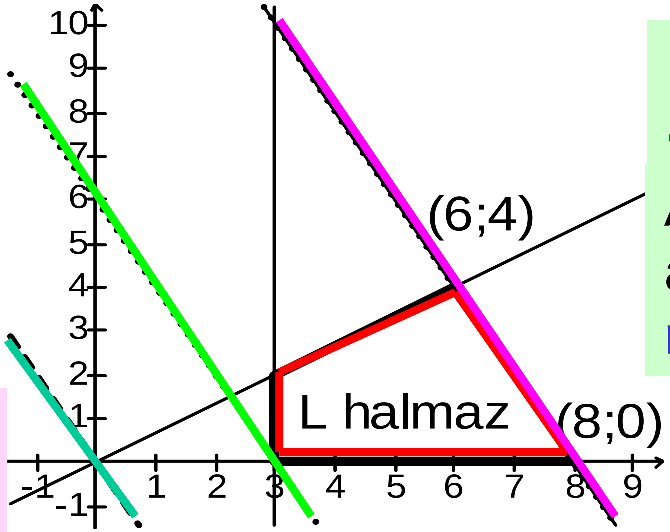
$$2x_1 - 3x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$3x_1 \geq 9$$

$$f(\underline{x}) = 6x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

$$g(\underline{x}) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min.$$



Mindkét **célfüggvény** alapegyenese azonos.

A **minimum cél** esetén azt addig kell mozgatni, hogy **már** elérje **L**-t.

Maximum célnál pedig addig, hogy **még** legyen közös pontja **L**-lel.

Megoldás: az **L** halmaz négyszög, csúcspontjai az **extremális** pontok: **(3;0), (8;0), (6;4), (3;2).**

A **minimum** feladatnál az optimum: $\underline{\mathbf{x}}_o = [\ 3\ \ 0\ ]^*$ $z_o = 6$.

A **maximum** feladatnál az optimális célfüggvény egyenes az **L** halmazzal egy egész szakaszon érintkezik. Ilyen esetben **alternatív optimum** van.

Az alapmegoldások: $\underline{\mathbf{x}}_{o1} = [\ 6\ \ 4\ ]^*$ és $\underline{\mathbf{x}}_{o2} = [\ 8\ \ 0\ ]^*$.

Az általános megoldás: $\underline{\mathbf{x}}_o = \lambda \underline{\mathbf{x}}_{o1} + (1-\lambda)\underline{\mathbf{x}}_{o2}$, **ahol:** $0 \leq \lambda \leq 1$, **és** $z_o = 48$.

Különleges esetek az LP feladatok megoldásánál

A lineáris programozási feladatoknál a matematikai modell felvétele után a grafikus megoldásban először a lehetséges megoldások halmazát adjuk meg.

Ezután a célfüggvény optimumát igyekszünk előállítani.

Mindkét lépésnél találkozunk különleges esetekkel.

1.) Az L halmaz nem állítható elő

Akkor következik be ez az eset, ha a technológiai feltételek ellentmondók, az általuk meghatározott halmazoknak nincs közös részük.

Példa: Ha az egyik feltétel: $\mathbf{2x_1+3x_2 \leq 6.}$

a másik pedig: $\mathbf{2x_1+3x_2 \geq 9.}$

Ez a határoló egyenestől az origó felé eső pontokat jelenti.

Ez az előző határoló egyenessel párhuzamos, de az „a felett” lévő egyenestől az origóval ellenkező irányba eső pontokat adja meg.

A két halmaznak ekkor nyilván **nincs közös eleme**.

A két feltétel közötti ellentmondás „ránézésre” látszik: ugyanaz a mennyiség nem lehet egyszerre 6-nál kisebb és 9-nél nagyobb.

A feladatnak ilyen esetben **nincs megoldása**.

2.) Van lehetséges megoldás, de nincs optimum

Ez az eset például akkor következhet be, ha a lehetséges megoldások halmaza csak alulról korlátos és a feladatban maximum a cél.

Ekkor a célfüggvény alapegyenesének „emelésekor” minden határnál nagyobb értékeket kapunk: a célfüggvényre nincs felső korlát.

Más esetek is lehetségesek, például akkor, ha az L nyitott szögtartomány és a célfüggvény egyenesek a szögtartományba esnek.

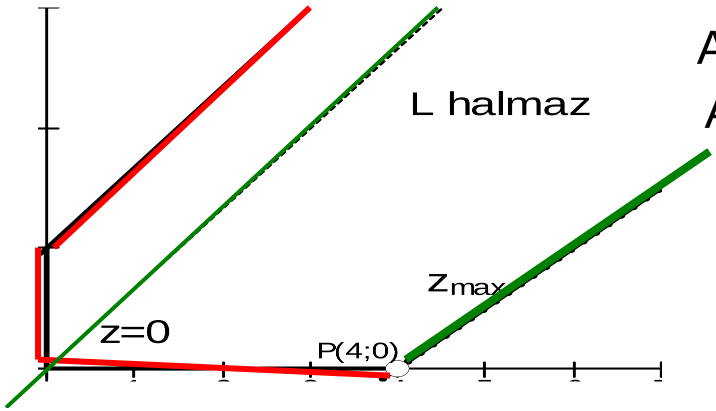
3.) Nem egy optimális megoldás létezik

Előfordul, hogy az optimális megoldást jelentő célfüggvény egyenes a lehetséges megoldások halmazán egy szakasszal, vagy egy félegyenessel esik egybe.

a.) Az optimális megoldást egy szakasz pontjai jelentik

Ekkor a szakasz pontjait a végpontokba mutató vektorok konvex lineáris kombinációjával írhatjuk fel, az általános megoldás: $\underline{x}_o=\lambda\underline{x}_{o1}+(1-\lambda)\underline{x}_{o2}$, ahol $0 \leq \lambda \leq 1$.

b.) Az optimális megoldást egy félegyenes pontjai jelentik. Például:



Az **L** felülről nem korlátos, a célfüggvény: $\mathbf{z=2x_1-4x_2}$

Az optimum: $\mathbf{z_{max}}$ a **P(4;0)** pontból kiinduló félegyenes.

A félegyenes egyenlete:

$$\underline{x}_0=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$ ahol esetünkben $\lambda \geq \mathbf{0}$.

A fejezet tárgyalását befejeztük.