Bevezetés a játékelméletbe

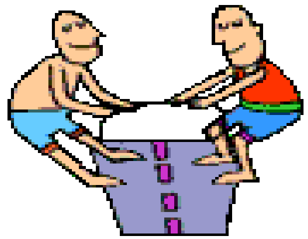
Kétszemélyes zérusösszegű mátrixjáték, optimális stratégia

Készítette: Dr. Ábrahám István

A játékelmélet a 20. század közepén alakult ki. (Neumann J., O. Morgenstern).

Gyakran előfordul, hogy kettő vagy több ellentétes érdekeltségű döntéshozó egyidejűleg akar elérni bizonyos célokat.

A folyamat modellezhető az ú.n. mátrixjátékkal.



Kétszemélyes zérusösszegű mátrixjáték

Példa: Adott egy $\underline{P}=[p_{ij}]$ valós számokból álló mátrix. Két játékos, A és B a következő játékot játsza: az A játékos kijelöli a mátrix i-edik sorát, a B tőle függetlenül kiválasztja a mátrix j-edik oszlopát és ekkor B fizet A-nak p_{ij} pénzegységet.

Legyen például:

$$\underline{P}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A $\underline{P}$ mátrixot fizetési mátrixnak nevezzük.

Ha például az A a második sort, a B a harmadik oszlopot jelöli ki, akkor B fizet a sorjátékosnak 2 pénzegységet. Ha egy másik esetben az A a negyedik sort jelöli ki, a B pedig az első oszlopot, akkor a sorjátékos -1 pénzt „fizet” az oszlopjátékosnak, azaz ekkor a B kap A-tól 1 pénzt.

Cél: a játékosok optimális stratégiájának meghatározása.

Megjegyzés: Előfordulhat, hogy valamelyik résztvevő nem természetes személy, hanem például egy árucikk iránti kereslet valószínűsége, vagy az időjárás eseményei.

Mindegyik játékban az A nyeresége megegyezik a B veszteségével, így a két játékos nyereségének, illetve veszteségének összege nullával egyenlő.

A játékosok a sorokat, illetve oszlopokat két alapelv szerint jelölik ki:

1.) Azokat a sorokat, illetve oszlopokat részesítik előnyben a kijelöléskor, azaz nagyobb valószínűséggel úgy választanak, amely alapján a nyereségük várható értéke a lehető legnagyobb.

2.) Az egyes sorokat, illetve oszlopokat véletlenszerűen, tehát nem valamilyen kiismerhető rendszer szerint kell kiválasztaniuk.

A játékosok stratégiáját kifejezhetjük azokkal a valószínűségekkel, amelyekkel a sorokat, illetve oszlopokat kiválasztják.

Az A játékos az egyes sorokat $x_1, x_2, \ldots, x_m$ valószínűséggel, a B az oszlopokat $y_1, y_2, \ldots, y_n$ valószínűséggel választja ki.

Vektor alakban:

$\underline{x}=[x_1, x_2, \ldots, x_m]^*$

$\underline{y}^*=[y_1, y_2, \ldots, y_n]$

Mind az A, mind a B a játékban biztosan választ, azaz az egyes valószínűségek összege mindkét játékos esetén 1, tehát **$\underline{1}^* \cdot \underline{x}=1$ és $\underline{y}^* \cdot \underline{1}=1$**.

A lehetséges stratégiák, a játék várható értéke

Tiszta stratégia: Ha a játékos mindig ugyanazt a sort, vagy oszlopot választja:

$$\underline{x}=\underline{e}_i \quad (i=1, 2, ...,m), \text{ vagy } \underline{y}^*=\underline{e}_j^* \quad (j=1, 2, ...,n),$$

Példa: Legyen a fizetési mátrix a következő:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

A sorok minimális értékei: 4, 1, 5. Ezek közül a legnagyobb a 3. sorban van, tehát ha a sor-játékos stratégiája $\underline{x}=[0\ \ 0\ \ 1]^*=\underline{e}_3$, akkor B bármely oszlopválasztásánál legalább 5 pénz-egység lesz a nyereménye.

Az oszlopok maximális értékei: 6, 5, 9. Közülük a legkisebb a 2. oszlopban található. Ha tehát az oszlopjátékos stratégiája: $\underline{y}^*=[0\ \ 1\ \ 0]=\underline{e}_2^*$, akkor az A bármely sorválasztásánál legfeljebb 5 pénzegység lesz a vesztesége.

Elnevezés: Ha egy fizetési mátrixban a sorminimumok legnagyobb értéke megegyezik az oszlopmaximumok legkisebb értékével, akkor a játéknak ***nyeregpontja*** van.

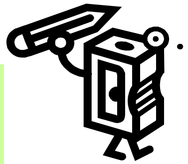
Definíció: Ha egy mátrixjátéknak nyeregpontja van, akkor a nyeregpont szám-értékét a ***játék értékének*** nevezzük.

A példában adott játék értéke tehát 5.

Kevert stratégia: az x_i és az y_j értékei nemcsak 0 és 1 lehetnek.

A játék várható értéke adott stratégiák esetén

Particionáljuk az adott $\underline{P}$ fizetési mátrixot sorvektorokra, jelentse például a $\underline{p_i}$* sorvektor a mátrix i-edik sorát.



Ha az A játékos ezt a sort választja, akkor az adott játszmában a nyereségének várható értéke:

$$p_{i1}\cdot y_1+p_{i2}\cdot y_2+\ldots+p_{in}\cdot y_n=\underline{p_i}^*\cdot\underline{y},$$ **mert az oszlopokat a B játékos y_j valószínűséggel választja**

Az i-edik sort viszont az A játékos x_i valószínűséggel választja ki, így az *adott játék várható értéke*:

$$x_1\cdot\underline{p_1}^*\cdot\underline{y}+x_2\cdot\underline{p_2}^*\cdot\underline{y}+\ldots+x_m\cdot\underline{p_m}^*\cdot\underline{y}=(x_1\cdot\underline{p_1}^*+x_2\cdot\underline{p_2}^*+\ldots+x_m\cdot\underline{p_m}^*)\cdot\underline{y}=\underline{x}^*\cdot\underline{P}\cdot\underline{y}=M$$

A fenti zárójelben lévő kifejezés az $\underline{x}$* sorvektor és a $\underline{P}$ mátrix szorzata.

A játék **M** várható értéke azt fejezi ki, hogy sok játék átlagában az A játékos mennyit nyer játékonként a B-től.

Az M értéke a fizetési mátrix szerkezetének függvényében lehet negatív is, ekkor a B nyer pénz az A-tól.

Példa: Számoljuk ki a játék várható értékét, ha

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

és $\underline{x}$=[1/6 1/3 1/3 1/6]*, $\underline{y}$*=[1/3 0 2/3].

Képletünk szerint: **M=$\underline{x}$*·$\underline{P}$·$\underline{y}$.** A mátrixműveleteket végrehajtva: **M=19/18**.

Eredményünk azt jelenti, hogy sok játék átlagában a fenti adatok mellett az A játékos nyeresége 19/18 pénzegység.

Tétel: A játék várható értéke a $\underline{P}$ mátrix legkisebb és legnagyobb értékei között található, azaz:

$$\min p_{ij} \le \underline{x}^* \cdot \underline{P} \cdot \underline{y} \le \max p_{ij}.$$

A tétel igazának belátása nyilvánvaló, hiszen ha mindkét játékos rendre a legkisebb, illetve legnagyobb mátrixelemre játszik, akkor a játék értéke ezt a két értéket veszi fel, sem kisebb, sem nagyobb érték nem fordulhat elő.

Például ha fenti $\underline{P}$ mátrixnál a sorjátékos stratégiája: $\underline{x}$=[0 0 1 0]*, az oszlopjátékosé: $\underline{y}$*=[1 0 0], ekkor minden játéknál a harmadik sor első eleme kerül kiválasztásra, ez a mátrix maximális eleme, tehát ekkor M=5..

Hasonlóan megfelelő stratégiákkal kiválasztható a játék minimális várható értéke: M = –1.

Az optimális stratégia

Egy mátrixjátékot különféle stratégiákkal kellően sokszor eljátszva észrevehető, hogy létezik valamilyen egyensúlyi állapot, eljuthatunk optimális stratégiákhoz.

Definíció: A $\underline{P}$ mátrix által meghatározott játék akkor megoldható, ha bármely lehetséges $\underline{\mathbf{x}}$ és $\underline{\mathbf{y}}^*$ stratégia esetén létezik olyan $\underline{\mathbf{x}}_o$ és $\underline{\mathbf{y}}_o^*$ stratégia, amire fennáll:

$$\underline{\mathbf{x}}^* \cdot \underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{y}}_o \leq \mathbf{V} \leq \underline{\mathbf{x}}_o^* \cdot \underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{y}}.$$

A V számot a játék értékének nevezzük.

A definícióból következik, hogy az $\underline{x}_o$ stratégiát játszó A játékos nyeresége bármelyik játék-ban, B tetszőleges stratégiája esetén is legalább V-vel lesz egyenlő.

Hasonlóan: B vesztesége az $\underline{y}_o^*$ stratégiát alkalmazva legfeljebb V értékű lehet.

Az $\underline{x}_o$ és $\underline{y}_o^*$ stratégiákat a két játékos *optimális stratégiájának* nevezzük.

A definícióban lévő egyenlőtlenségnek akkor is fenn kell állnia, ha mindkét játékos a saját optimális stratégiáját követi, azaz:

$$\underline{\mathbf{x}}_o^* \cdot \underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{y}}_o \leq \mathbf{V} \leq \underline{\mathbf{x}}_o^* \cdot \underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{y}}_o.$$

Következésképpen: ha a játék megoldható, akkor a *játék értéke*:

$$\mathbf{V} = \underline{\mathbf{x}}_o^* \cdot \underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{y}}_o.$$

Megjegyzés: mindig elérhető, hogy az optimális stratégiákat olyan fizetési mátrixra határozzuk meg, amelynek elemei között nincsenek negatív számok.

Ugyanis arra a <u>Q</u> mátrixra, amely a <u>P</u>-ből úgy keletkezik, hogy a <u>P</u> minden eleméhez ugyanazt a k pozitív számot adjuk hozzá, az optimális stratégiák változatlanok maradnak.

A <u>Q</u> által meghatározott játék értékét úgy kapjuk meg, hogy a <u>P</u> játék értékéhez a k számot hozzáadjuk.

Tétel: Minden fizetési mátrix által meghatározott játéknak van megoldása.

A játékelméletnek ezt az egyik legfontosabb állítását Neumann János bizonyította, a tételt Neumann tételnek is nevezik. Az állítás igazolását nem részletezzük.

A kétszemélyes zérusösszegű mátrixjáték optimális megoldása

A <u>P</u> fizetési mátrix által meghatározott játékban az A játékos optimális stratégiájára veszünk fel matematikai modellt.

A modell megoldásával duál optimumként megkapjuk a B játékos optimális stratégiáját is.

Az A játékos minden stratégiájára fennáll az *induló feltétel*: $\underline{x} \geq \underline{0}$, hiszen az $\underline{\mathbf{x}}$ vektor elemei valószínűségek.

A *korlátozó feltételek* között nyilvánvaló: $x_1+x_2+\ldots+x_m=1$.

Tudjuk, hogy az A játékos minden esetben valamelyik sort kiválasztja.

A játék megoldhatóságára felvett definíciónk jobboldala szerint:

$$\mathbf{V \le \underline{x}_o^* \cdot \underline{P} \cdot \underline{y}.}$$

Az összefüggés a B játékos minden lehetséges stratégiája esetén érvényes, így akkor is, ha $\underline{y}=\underline{e}_j$ (j=1, 2,…,n)

Ilyenkor tehát az egységvektorok jelentik a B stratégiáját.

$$\mathbf{V \le \underline{x}_o^* \cdot \underline{P} \cdot \underline{e}_1} \qquad \mathbf{V \le \underline{x}_o^* \cdot \underline{P} \cdot \underline{e}_2} \qquad \mathbf{\ldots\ldots} \qquad \mathbf{V \le \underline{x}_o^* \cdot \underline{P} \cdot \underline{e}_n}$$

Az n egyenlőtlenség összevont alakban:

$$\mathbf{V \cdot \underline{1}^* \le \underline{x}_o^* \cdot \underline{P} \cdot (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots \underline{e}_n)}$$

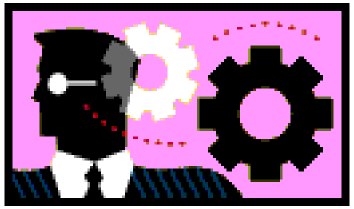
A zárójelben egy egységmátrix oszlopvektorokra paticionált alakja van, így:

$$\mathbf{V \cdot \underline{1}^* \le \underline{x}_o^* \cdot \underline{P}}$$

A mátrixszorzásra vonatkozó szabályt ($(\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}})^* = \underline{\mathbf{A}}^* \cdot \underline{\mathbf{B}}^*$) felhasználva:

$$\mathbf{\underline{1} \cdot V \le \underline{P}^* \cdot \underline{x}_o.}$$

Ez a korlátozó feltétel írható $\mathbf{\underline{1} \cdot V - \underline{P}^* \cdot \underline{x}_o \le \underline{0}}$ alakban is.



A matematikai modell *célfüggvényeként* a V maximális értékét keressük:

$$z=V\rightarrow max.$$

A lineáris programozási modell az optimális stratégia kiszámolására:

$$\underline{x}\geq\underline{0}$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_m=1$$
$$\underline{1}\cdot V\leq\underline{P}^*\cdot\underline{x}_o, \text{ vagy más alakban: } \underline{1}\cdot V-\underline{P}^*\cdot\underline{x}_o\leq\underline{0}$$
$$z=V\rightarrow max.$$

A P fizetési mátrixú kétszemélyes zérusösszegű mátrixban az optimális stratégiákat és a játék értékét a modell megoldásával kapjuk.

A modell megoldása történhet a szokásos módon az Excel, vagy a Lingo felhasználásával.

Példa: Adott a P fizetési mátrix, határozzuk meg az A sorjátékos és a B oszlopjátékos optimális stratégiáját és a játék értékét:

$$\underline{P}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

A konkrét esetre felírjuk a a matematikai modellt:

Az induló feltétel: $x_1,\ x_2 \ge 0$

A korlátozó feltételek: $x_1+x_2=1$

Az $\underline{\mathbf{1}}\cdot\mathbf{V}-\underline{\mathbf{P}}^{*}\cdot\underline{\mathbf{x}}_{o}\le\underline{\mathbf{0}}$ relációnak megfelelő sorok:

$$V-2x_1-3x_2\le 0$$
$$V-4x_1-x_2\le 0$$
$$V-6x_1-5x_2\le 0$$

A célfüggvény: $z=V\rightarrow \max.$

Excel induló tábla:

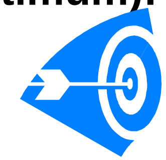
	V	x1	x2			
F1	0	1	1	0	<>	1
F2	1	-2	-3	0	<=	0
F3	1	-4	-1	0	<=	0
F4	1	-6	-5	0	<=	0
V	1	0	0	0		
mo	0	0	0			max

Az induló táblázatban a V-t is természetesen változóként kezeljük. Az optimalizálást a Solverrel a szokásos módon végezzük el, az eredmény:

Az A játékos optimális stratégiája:
$\underline{x}$=[0.5 0,5]*, a játék értéke: **V=2,5**.

Az oszlopjátékos (B) optimális stratégiája az Érzékenység jelentésből adódik (duál optimum):

$\underline{y}^*$=[0,75 0,25 0]



A Lingoval történő megoldáskor nem kötelező a matematikai modell klasszikus alakjának használata, tehát a korlátozó feltételeket felvehetjük az $\underline{1}\cdot V\le\underline{P}^*\cdot\underline{x}_o$ formában is. A megoldás természetesen megegyezik az Excel eredményével.

A fejezet tárgyalását befejeztük.