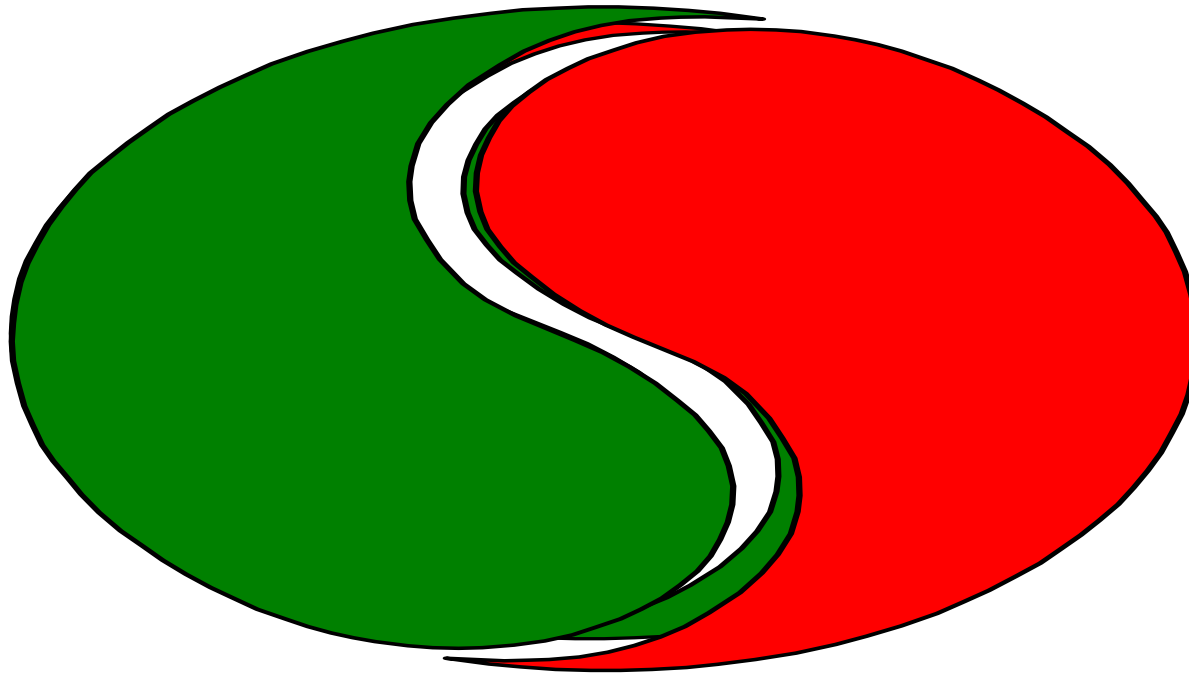


A dualitás elve



Készítette: Dr. Ábrahám István

A dualitás fogalma, alapösszefüggései

Definíció: Adott a lineáris programozás **maximum** feladata:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}} &\geq \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} &\leq \underline{\mathbf{b}} \\ f(\underline{\mathbf{x}}) &= \underline{\mathbf{c}}^* \underline{\mathbf{x}} \rightarrow \max\end{aligned}$$

Ekkor felírható a következő **minimum** feladat:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{y}} &\geq \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{A}}^* \underline{\mathbf{y}} &\geq \underline{\mathbf{c}} \\ g(\underline{\mathbf{y}}) &= \underline{\mathbf{b}}^* \underline{\mathbf{y}} \rightarrow \min\end{aligned}$$

A két feladatot egymás duáljának nevezzük.

A későbbiekben az elsőként felírt feladatot **primál**, a másodikként feírtat **duál** feladatnak nevezzük, tehát a minimum feladat is nevezhető primál feladatnak.

A kanonikus alakok: $\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{u}}=\underline{\mathbf{b}}$ és $\underline{\mathbf{A}}^*\underline{\mathbf{y}}-\underline{\mathbf{w}}=\underline{\mathbf{c}}$

A maximumfeladat eltérésvektorát $\underline{\mathbf{u}}$ -val, a minimumfeladatát $\underline{\mathbf{w}}$ -vel jelöljük.

Tétel: Ha az $\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{0}}$ és $\underline{\mathbf{y}} \geq \underline{\mathbf{0}}$
 $\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{b}}$ és $\underline{\mathbf{A}}^*\underline{\mathbf{y}} \geq \underline{\mathbf{c}}$
 $f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{c}}^*\underline{\mathbf{x}} \rightarrow \max$ és $g(\underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{b}}^*\underline{\mathbf{y}} \rightarrow \min$

feladatpárnál az $\underline{\mathbf{x}}$ és az $\underline{\mathbf{y}}$ lehetséges megoldás, akkor minden esetben igaz:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) \leq g(\underline{\mathbf{y}}).$$

Bizonyítás: A feltételek szerint $\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{b}}$ és $\underline{\mathbf{A}}^*\underline{\mathbf{y}} \geq \underline{\mathbf{c}}$, azaz (transzponálás): $\underline{\mathbf{y}}^*\underline{\mathbf{A}} \geq \underline{\mathbf{c}}^*$.

Az első egyenlőtlenséget balról szorozzuk $\underline{\mathbf{y}}^*$ -gal: $\underline{\mathbf{y}}^*\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{y}}^*\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}}^*\underline{\mathbf{y}} = g(\underline{\mathbf{y}})$.

A második egyenlőtlenséget jobbról szorozzuk $\underline{\mathbf{x}}$ -szel: $\underline{\mathbf{y}}^*\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} \geq \underline{\mathbf{c}}^*\underline{\mathbf{x}} = f(\underline{\mathbf{x}})$.

Látható: $f(\underline{\mathbf{x}}) \leq \underline{\mathbf{y}}^*\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{x}} \leq g(\underline{\mathbf{y}})$.

A tétel következményei:

a.) Ha a primál feladatnak van megoldása és az f célfüggvény nem korlátos felülről, akkor, mivel $g(\underline{y}) \geq f(\underline{x})$, a duál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Hasonlóan: ha a duál feladat g célfüggvénye nem korlátos alulról, akkor a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

b.) Ha a primál feladat f célfüggvényének értéke egy \underline{x}_0 helyen éppen egyenlő a duál feladat g célfüggvényének \underline{y}_0 helyen felvett értékével, akkor $f(\underline{x}_0)$ f -nek maximuma, $g(\underline{y}_0)$ a g -nek minimuma. Ekkor \underline{x}_0 a primál, \underline{y}_0 a duál feladat optimális megoldása.

Optimális megoldásnál tehát a célfüggvény értéke a primál és a duál feladatnál megegyezik.

Feladat: Kétféle terméket készítünk, három erőforrás felhasználásával, amelyekre felső kapacitás korlátok vannak: 140, 150, 12. Az egyes erőforrások beépülése a termékekbe: 20, 10, 2, illetve 10, 25, 0. A késztermékek eladási egységára mindkét esetben 300 pénzegység. Határozzuk meg a legnagyobb eladási árbevételt biztosító termelési programot!

Táblázatot készítünk:

		Termékek		Kapacitás
		I.	II.	
Erőforrások	A	20	10	140
	B	10	25	150
	C	2	0	12
	Ár	300	300	

Az első termékből x_1 darabot, a másodikból x_2 -t készítünk.

A matematikai modell (a táblázatból):

Eröf.	I.(x_1)	II.(x_2)	Kap.
A	20	10	140
B	10	25	150
C	2	0	12
Ár	300	300	

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$20x_1 + 10x_2 \leq 140$$

$$10x_1 + 25x_2 \leq 150$$

$$2x_1 \leq 12$$

$$z = 300x_1 + 300x_2 \rightarrow \max$$

A modellből felírjuk a szimplex induló táblázatot.

A szimplex táblázattal történő megoldás:

B ₀	x ₁	x ₂	b	B ₁	u ₃	x ₂	b	B ₂	u ₃	u ₁	b	B ₃	u ₂	u ₁	b
u ₁	20	10	140	u ₁	-10	10	20	x ₂	-1	1/10	2	x ₂	1/20	-1/40	4
u ₂	10	25	150	u ₂	-5	25	90	u ₂	20	-2,5	40	u ₃	1/20	-1/8	2
u ₃	2	0	12	x ₁	1/2	0	6	x ₁	1/2	0	6	x ₁	-1/40	1/16	5
-z	300	300	0	-z	-150	300	-1800	-z	150	-30	-2400	-z	-15/2	-45/4	-2700

A táblázat felépülését nyomon követhetjük: **generáló elem** választás, **új koordináták** kiszámolása.

Leolvassuk az optimális megoldásokat:

$$\underline{x}_o = [5 \ 4]^* \quad \underline{u}_o = [0 \ 0 \ 2]^* \quad z_o = 2700$$

A felvetett és megoldott problémához duál feladatot rendelhetünk.

A duál probléma megfogalmazása

Emlékeztetőül az eredeti szövegünk:

Feladat: Kétféle terméket készítünk, három erőforrás felhasználásával, amelyekre felső kapacitás korlátok vannak: 140, 150, 12. Az egyes erőforrások beépülése a termékekbe: 20, 10, 2, illetve 10, 25, 0. A késztermékek eladási egységára mindkét esetben 300 pénzegység. Határozzuk meg a legnagyobb eladási árbevételre biztosító termelési programot!

Duál értelmezés: Ha nem kívánunk termelni, hanem a meglévő erőforrásainkat y_1 , y_2 , y_3 egységáron el akarjuk adni, akkor a következő modell vehető fel:

Adatainkat táblázatba írjuk:

Termék \ Erőforr.	I.	II.	Kapacitás
A e.ár: y_1	20	10	140
B e.ár: y_2	10	25	150
C e.ár: y_3	2	0	12
Ár	300	300	

A matematikai modell:

a.) $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

b.) Az első termékben felhasznált erőforrások ára darabonként:

$$20y_1 + 10y_2 + 2y_3 \geq 300$$

Ugyanis ennek a terméknek eladási egységára 300, legalább ennyit szeretnénk kapni érte. Hasonlóan:

$$10y_1 + 25y_2 + 0y_3 \geq 300$$

A vevő összes kiadása vásárlás esetén:

$$140y_1 + 150y_2 + 12y_3$$

c.) $z' = 140y_1 + 150y_2 + 12y_3 \rightarrow \min$

A vevő kiadásai minimalizálására törekszik, tehát:

A szöveges feladathoz tartozó,
elsőként felírt (**primál**)
matematikai modell:

$$a.) x_1, x_2, \geq 0$$

$$b.) 20x_1 + 10x_2 \leq 140$$

$$10x_1 + 25x_2 \leq 150$$

$$2x_1 \leq 12$$

$$c.) z = 300x_1 + 300x_2 \rightarrow \max$$

A feladat **duál** modellje:

$$a.) y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

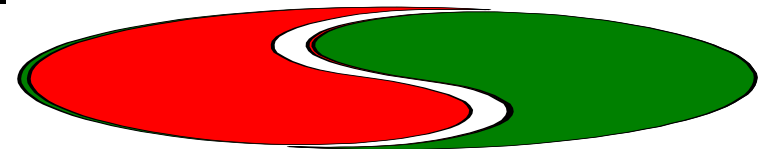
$$b.) 20y_1 + 10y_2 + 2y_3 \geq 300$$

$$10y_1 + 25y_2 \geq 300$$

$$c.) z' = 140y_1 + 150y_2 + 12y_3 \rightarrow \min$$

A primál-duál megnevezés a modell felírásának sorrendjére utal,
az egyik modelltől következik a másik.

Az egyik modelltől a másik felírása
mechanikusan történhet:



A **sorok** helyére **oszlopok** kerülnek, a relációk és a cél „**átfordul**”.

Általánosan : minden LP feladat felírható *primál* és *duál* alakban.

Adott maximum, illetve minimum feladatnál: a **primál** modell **oszlopaiból** lesznek a **duál** modell **sorai**, a **relációjelek megfordulnak** és a **cél** is **ellenkezőjére változik**.

A primál modell optimális szimplex táblázatából **leolvasható** a duál feladat optimuma: ez az **utolsó oszlop helyett az utolsó sorból történik, ellenkező előjellel**.

**Az \underline{x} változók a duál \underline{w} eltérésváltozókkal, az \underline{u} eltérés-
változók az \underline{y} változókkal vannak kapcsolatban.**

Példánknál az optimális táblázat:

B_2	u_2	u_1	b
x_2			4
u_3			2
x_1			5
$-z$	-15/2	-45/4	-2700

A táblázat „közepét” nem kell kitölteni az optimum leolvasásához.

A **primál** optimum:

$$\underline{x}_o = [5 \ 4]^* \quad \underline{u}_o = [0 \ 0 \ 2]^* \quad z_o = 2700.$$

A **duál** optimum:

$$\underline{y}_o = [45/4 \ 15/2 \ 0]^*$$

$$\underline{w}_o = [0 \ 0]^* \quad z_o = 2700.$$



Példa minimumfeladat duáljára:

Egy gazdaságban állatok etetésére kétféle takarmánykeveréket akarnak használni. A keverékek négyféle tápanyagból készülnek, amelyeket 1, 0, 1, 7, illetve 0, 2, 2, 6 mennyiségben tartalmaznak. Az egyes tápanyagokból legalább 2, 4, 10, 42 egységnyi fel kell használni. A takarmánykeverékek egységárai: 200, 300. Az egyes takarmánykeverékekből mennyit szerezzünk be, hogy a lehető legkisebb legyen a beszerzési költség?

Táblázat:

		Keverék		Előírás
		I.	II.	
Tápanyag	A	1	0	2
	B	0	2	4
	C	1	2	10
	D	7	6	42
Ár	200	300		

A (primál) matematikai modell: A duál modell:

a.) $x_1, x_2 \geq 0$

a.) $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$

b.) $1x_1 + 0x_2 \geq 2$

b.) $1y_1 + 0y_2 + 1y_3 + 7y_4 \leq 200$

$2x_2 \geq 4$

$2y_2 + 2y_3 + 6y_4 \leq 300$

$x_1 + 2x_2 \geq 10$

$7x_1 + 6x_2 \geq 42$

c.) $z' = 4y_1 + 4y_2 + 10y_3 + 42y_4 \rightarrow \max$

c.) $z = 200x_1 + 300x_2 \rightarrow \min$

A primál modellben x_1 és x_2 a keverékek mennyiségei.

A duál modellben az y_i értékek a tápanyag egységárai.

Mechanikusan: sorok és oszlopok, relációjelek megcserélődnek, a cél átfordul.

A **primál** modell megoldása szimplex módszerrel hosszadalmas, az eltérésváltozók „kalaposak”, 4 darab v_i változót, valamint másodlagos célfüggvényt kell szerepeltetni.

A **duálfeladat** viszont egyszerű normálfeladat, megoldása:

Az **induló** szimplex tábla:

	y_1	y_2	y_3	y_4	
w_1	1	0	1	7	200
w_2	0	2	2	6	300
$-z'$	2	4	10	42	0

Az **optimális** szimplex tábla:

	y_1	w_2	y_2	w_1	
y_4					12,5
y_3					112,5
$-z'$	-1	-3,5	-3	-3	-1650

Az optimális megoldások („direkt” leolvasás \underline{y} -ra és \underline{w} -re, az alsó sorból \underline{x} -re és \underline{v} -re, és tudjuk: az oszlopfőn lévő változók az optimumnál nullák):

$$\underline{y}_o = [0 \ 0 \ 112,5 \ 12,5]^* \quad z'_o = 1650 \quad \underline{x}_o = [3 \ 3,5]^*$$

$$\underline{w}_o = [0 \ 0]^*$$

$$\underline{u}_o = [1 \ 3 \ 0 \ 0]^*$$

Tehát az első keverékből 3, a másodikból 3,5 beszerzése optimális. 13

A primál-duál feladatpár általánosabb változata

Az általános lineáris programozási feladatot **maximum**, vagy „**tiszta minimum típusú**” modellé alakítjuk és ezután képezzük a duálját.

Példa: Ha $\underline{A}_1 \underline{x} \leq \underline{b}_1$, $\underline{A}_2 \underline{x} \geq \underline{b}_2$ és $\underline{c}^* \underline{x} \rightarrow \max$, akkor a második feltételt szorozzuk -1-gyel és a „maximum” feladatra felírjuk a duálját:

$$\underline{y} \geq \underline{0} \quad (\underline{A}_1 - \underline{A}_2)^* \underline{y} \geq \underline{c} \quad \text{és} \quad (\underline{b}_1 - \underline{b}_2)^* \underline{y} \rightarrow \min.$$

Ha $\underline{A}_1 \underline{x} \leq \underline{b}_1$, $\underline{A}_2 \underline{x} \geq \underline{b}_2$ és $\underline{c}^* \underline{x} \rightarrow \max$, akkor a modellt „tiszta minimum típusú” modellé alakítjuk az első feltételt és a célfüggvényt -1-gyel szorozva, és ezután képezzük a duálját:

$$\underline{y} \geq \underline{0} \quad (-\underline{A}_1 \quad \underline{A}_2)^* \underline{y} \leq \underline{c} \quad \text{és} \quad (-\underline{b}_1 \quad \underline{b}_2)^* \underline{y} \rightarrow \max.$$

Ha a modellben **egyenlőség** is van, akkor az átalakításnál ezt a relációt változatlanul hagyjuk, képezzük a duál modellt és az egyenlőség sorokhoz tartozó duál változókra nem lesz előjelkorlát.

Ha pedig valamelyik változóra nincs előjelkorlát, akkor a duál feladatban a hozzá tartozó feltétel egyenlőség.

A primál-duál feladatpár felvétele

Ha adott a kiinduló LP feladat, akkor azt először a definícióban lévő primál, vagy duál alakra hozzuk.

Példa: Legyen a kiinduló feladat:

$$\begin{array}{ll} x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \text{A második feltételben a relációt megfordítjuk, szorzás -1-gyel.} \\ 3x_1+4x_2-6x_3 \leq 13 & \text{Ekkor a modell: } x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1-5x_2+2x_3 \geq 8 & 3x_1+4x_2-6x_3 \leq 13 \\ z=6x_1+4x_2-7x_3 \rightarrow \max & -x_1+5x_2-2x_3 \leq -8 \\ & z=6x_1+4x_2-7x_3 \rightarrow \max \end{array}$$



Ehhez a definícióban meghatározott módon felírhatjuk a duál alakot:

Eljárhattunk volna úgy is, hogy a célfüggvényt fordítjuk át és az első feltételt. Ekkor a definícióban szereplő duál alak lenne a kiinduló modell.

$$\begin{array}{l} y_1, y_2 \geq 0 \\ 3y_1-y_2 \geq 6 \\ 4y_1+5y_2 \geq 4 \\ -6y_1-2y_2 \geq -7 \\ z=13y_1-8y_2 \rightarrow \min \end{array}$$

A szimplex módszerrel történő megoldáshoz a harmadik feltételt meg kell szorozni -1-gyel.

A feltételek között egyenlőséget tartalmazó modell duálja

Alapelv: az egyenlőséget két egyenlőtlenségre „bontjuk”.

Példa:	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	A második feltétel felírható 2 egyenlőtlenséggel:
	$3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 13$	$4x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 21$ $4x_1 - 5x_2 + 6x_3 \geq 21$
	$4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 21$	A második egyenlőtlenséget szorozzuk -1-gyel:
	$z = 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$	$-4x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq -21$

Így a modellünk:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 13$$

$$4x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 21$$

$$-4x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq -21$$

$$z = 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$$

Az átíráshoz az y_2 változót is 2 részre bontjuk: y_2' és y_2'' . Így:

$$y_1, y_2', y_2'' \geq 0$$

$$3y_1 + 4y_2' - 4y_2'' \geq 2$$

$$2y_1 - 5y_2' + 5y_2'' \geq 7$$

$$-y_1 + 6y_2' - 6y_2'' \geq -3$$

$$z = 13y_1 + 21y_2' - 21y_2'' \rightarrow \min$$

Kiemelés és legyen $y_2' - y_2'' = y_2$. Ekkor, mivel az $y_2' - y_2''$ előjelét nem ismerjük: $y_2 \in \mathbb{R}$.

A duál modell:

$$y_1 \geq 0, \text{ és } y_2 \in \mathbb{R}$$

$$3y_1 + 4y_2 \geq 2$$

$$2y_1 - 5y_2 \geq 7$$

$$-y_1 + 6y_2 \geq -3$$

$$z = 13y_1 + 21y_2 \rightarrow \min$$

Összefoglalva: ha egy LP feladatban valamelyik feltétel **egyenlőség**, akkor a duáljában a neki megfelelő változóra **nincs előjelkorlát**.

Ha pedig valamelyik változóra **nincs előjelkorlát**, akkor a duál feladatban a hozzá tartozó feltétel **egyenlőség**.

Példa: Képezzük a következő primál modell duálját kétféleképpen:

$$\underline{x} \geq 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 31$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 20$$

$$2x_1 - 5x_2 - 7x_3 \geq 15$$

$$z = 2x_1 + 6x_2 - 8x_3 \rightarrow \min$$

A modellt maximum típusúvá alakítjuk:

$$\underline{x} \geq 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 31$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 20$$

$$-2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq -15$$

$$-z = -2x_1 - 6x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

A duál modell:

$$\underline{y} \geq 0$$

$$3y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2$$

$$2y_1 + 4y_2 + 5y_3 \geq -6$$

$$-4y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 8$$

$$z' = 31y_1 + 20y_2 - 15y_3 \rightarrow \min$$

Ha a modellt tiszta minimum típusúvá alakítjuk:

$$\underline{x} \geq 0$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq -31$$

$$x_1 - 4x_2 - x_3 \geq -20$$

$$2x_1 - 5x_2 - 7x_3 \geq 15$$

$$z = 2x_1 + 6x_2 - 8x_3 \rightarrow \min$$

Az ehhez tartozó duál modell:

$$\underline{y} \geq 0$$

$$-3y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2$$

$$-2y_1 - 4y_2 - 5y_3 \leq 6$$

$$4y_1 - y_2 - 7y_3 \leq -8$$

$$z' = -31y_1 - 20y_2 + 15y_3 \rightarrow \max$$

Ha a modellünkben a második feltétel egyenlőség:

$$\underline{x} \geq 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 31$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 20$$

$$2x_1 - 5x_2 - 7x_3 \geq 15$$

$$z = 2x_1 + 6x_2 - 8x_3 \rightarrow \min$$

Ekkor a normál típusú duál modell:

$$y_1, y_3 \geq 0 \text{ és } y_2 \in \mathbb{R}$$

$$3y_1 - y_2 - 2y_3 \geq -2$$

$$2y_1 + 4y_2 + 5y_3 \geq -6$$

$$-4y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 8$$

$$z' = 31y_1 + 20y_2 - 15y_3 \rightarrow \min$$

Gyakorló feladat:

Egy vállalat kétféle terméket gyárt, amelyekbe 3 erőforrásból 11, 8, és 6, valamint 7, 8 és 14 egységnyi épül be. Az erőforrások kapacitásai: 770, 640 és 840. A termékek egységárai: 1 és 2. Ismert még, hogy az első termékből legfeljebb 600 darabot, a másodikból maximálisan 400 darabot lehet eladni. Célunk a maximális árbevétel. Írjuk fel a feladathoz tartozó primál és duál modellt, valamint számoljuk ki a primál és duál optimális megoldásokat!

A modellek:

A **primál** feladat változója legyen a gyártásra kerülő termékek darabszáma.

A **duál** feladat változója legyen az erőforrások egységára.

Primál:

$$\begin{aligned} \underline{x} &\geq \underline{0} \\ 11x_1 + 7x_2 &\leq 770 \\ 8x_1 + 8x_2 &\leq 640 \\ 6x_1 + 14x_2 &\leq 840 \\ x_1 &\leq 600 \\ x_2 &\leq 400 \\ f(\underline{x}) = z &= x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \end{aligned}$$

Duál:

$$\begin{aligned} \underline{y} &\geq \underline{0} \\ 11y_1 + 8y_2 + 6y_3 + y_4 &\geq 1 \\ 7y_1 + 8y_2 + 14y_3 + y_5 &\geq 2 \\ g(\underline{y}) = z' &= 770y_1 + 640y_2 + 840y_3 + 600y_4 + 400y_5 \rightarrow \min \end{aligned}$$

A primál feladat megoldása szimplex módszerrel:

	x_1	x_2			x_1	u_3			u_2	u_3	
u_1	11	7	770	u_1	8	$-7/14$	350	u_1	.	.	70
u_2	8	8	640	u_2	$64/14$	$-8/14$	160	x_1	$14/64$	$-1/8$	35
u_3	6	14	840	x_2	$6/14$	$1/14$	60	x_2	.	.	45
u_4	1	0	600	u_4	1	0	600	u_4	.	.	565
u_5	0	1	400	u_5	$-6/14$	$-1/14$	340	u_5	.	.	355
$-z$	1	2	0	$-z$	$2/14$	$-2/14$	-120	$-z$	$-1/32$	$-1/8$	-125

Az utolsó táblázatban elegendő a legalsó sor és a jobboldali oszlop kitöltése.

Az optimális megoldások:

$$\underline{x}_o = [35 \ 45]^* \quad \underline{u}_o = [70 \ 0 \ 0 \ 565 \ 355]^* \quad z_o = 125$$

$$\underline{y}_o = [0 \ 1/32 \ 1/18 \ 0 \ 0]^* \quad \underline{w}_o = \underline{0}$$

A fejezet tárgyalását befejeztük.