Disztribúciós feladatok

Készítette: Dr. Ábrahám István

Bevezető

Az elosztási, szétosztási feladatok (szállítás, allokáció, stb.) leggazdaságosabb megoldása fontos kérdés.

Célunk lehet legkisebb összköltségre törekvés, vagy a legrövidebb úton, vagy legoptimálisabb idő alatt megvalósuló disztribúciós program.

Sok más területen felhasználhatjuk azokat az eredményeket, amelyeket a szállítási feladat megoldása során kapunk, ezért a módszert szállítási feladattal mutatjuk be.

A probléma felvetése

Példa: Adott két feladó állomás, a tőlük elszállítandó áru mennyisége rendre 70 és 30 egységnyi. 3 rendeltetési hely van, igényeik rendre 30, 20, 50 egységnyi. A feladóhelyek és a rendeltetési állomások között minden esetben lehetséges szállítás.

Az egyes relációkban a szállítási költségek egy egység szállítására vonatkozóan: F_1-ből R_1-be: 1, F_1-ből R_2-be: 4, F_1-ből R_3-ba: 2, valamint: F_2-ből R_1-be: 3, F_2-ből R_2-be: 2, F_2-ből R_3-ba: 1.

Az adatainkat táblázatba foglalhatjuk:

	R_1	R_2	R_3	
F_1	1	4	2	70
F_2	3	2	1	30
	30	20	50	

	R_1	R_2	R_3	
F_1	1	4	2	70
F_2	3	2	1	30
	30	20	50	

A sorok, illetve oszlopok végén a mozgatandó mennyiségek vannak, a táblázat belsejében a szállítási költségek egységnyi szállítandó mennyiségre vonatkozóan.

A szállítási feladat megoldása többféleképpen történhet:

1.) A lineáris programozás szokásos módszereivel.

Matematikai modellt írunk fel a feladathoz, majd az megoldjuk.

2.) A disztribúciós módszerrel

Először előállítunk egy lehetséges disztribúciót („szállítási relációk szétosztását”), majd ezt javítjuk az optimum eléréséig.

A szállítási feladatok megoldására más módszerek is léteznek, kezdve az ötletszerű szervezéstől az összes lehetséges változat kiszámításáig és közülük az optimális kiválasztásáig.

A „más módszerek” többnyire nem optimálisak, illetve időigényesek, így mi a lineáris programozással történő esettel foglalkozunk részletesebben.

A szállítási feladat megoldása szimplex módszerrel

Az előző feladatunk táblázattal:

	R_1	R_2	R_3	
F_1	1	4	2	70
F_2	3	2	1	30
	30	20	50	

Az x_{ij} döntési változó jelentse az egyes relációkban szállításra kerülő árumennyiséget.

Az induló feltétel: $x_{ij} \geq 0$, ahol $1 \leq i \leq 2$ és $1 \leq j \leq 3$.

A feltételi relációkat a szállítandó mennyiségek határozzák meg:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=70$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=30$$
$$x_{11}+x_{21}=30$$
$$x_{12}+x_{22}=20$$
$$x_{13}+x_{23}=50$$

A célunk a szállítás összköltségének minimalizálása:

$$z= x_{11}+4x_{12}+2x_{13}+3x_{21}+2x_{22}+x_{23}\to \min.$$

A feladat szimplex induló táblája:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	b
$\hat{u}_1$	1	1	1	0	0	0	70
$\hat{u}_2$	0	0	0	1	1	1	30
$\hat{u}_3$	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	30
$\hat{u}_4$	0	1	0	0	1	0	20
$\hat{u}_5$	0	0	1	0	0	1	50
z	–1	–4	–2	–3	–2	–1	0
$-\hat{z}$	2	2	2	2	2	2	200

Néhány bázistranszformáció után az optimális megoldás:

	x_{12}	x_{21}	
x_{13}	1	–1	40
x_{23}	–1	1	10
x_{11}	0	1	30
x_{22}	1	0	20
$\hat{u}_5$	0	0	0
z	–1	–3	160

$x_{11}=30$, $x_{13}=40$, $x_{22}=20$, $x_{23}=20$

A többi relációban 0 a szállított mennyiség.

A költség minimuma 160.

Általánosan: F_i jelentse a feladóhelyeket, f_i az elszállítandó áru mennyiségét.
R_j a rendeltetési helyeket, r_j az általuk igényelt árumennyiséget.
($1 \le i \le m$ és $1 \le j \le n$).

A $\underline{C}$ mátrix elemei: az egyes relációkban az egységnyi áru szállításának költségei.

Az $\underline{X}$ mátrix $x_{i\,j}$ elemei: az egyes relációkban szállításra kerülő árumennyiségek.

Az adataink táblázatos alakja:

	R_1	R_2	..	..	R_n	
F_1	c_{11}	c_{12}	..	..	c_{1n}	f_1
F_2	c_{21}	c_{22}	..	..	c_{2n}	f_2
:	..	..	..	..	..	..
:	..	..	..	..	..	..
F_m	c_{m1}	c_{m2}	..	..	c_{mn}	f_m
	r_1	r_2	..	..	r_n	

A matematikai modell: $x_{i\,j} \ge 0 \quad (1 \le i \le m$ és $1 \le j \le n)$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = f_i \qquad (1 \le i \le m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = r_j \qquad (1 \le j \le n)$$

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Feltételeink: a szállítandó és az igényelt mennyiségek összege egyezzen meg (zárt feladat):

$$\sum_{i=1}^{m} f_i = \sum_{j=1}^{n} r_j$$

A cél az összköltség minimuma.

A matematikai modell alapján optimalizálást végezhetünk szimplex módszerrel.

A megoldandó feladat lehet bármilyen elosztási, szétosztási probléma.

Példa: **10 millió forintot elhelyezünk 3 alapba, legyenek ezek a következők: 5 milliót részvénybe, 3 milliót államkötvénybe, 2 milliót lekötött betétbe fektetünk. Négy társaságnál fektetjük be a tőkét, azaz portfoliót hozunk létre. Az egyes társaságoknál 4, 3, 2 és 1 millió forintot helyezünk el. A társaságok adott időszakra az alapokra vonatkozóan adtak a százalékos hozamokat a következő táblázat szerint:**

	A	B	C	D	
I	19	17	20	16	5
II	9,4	9,8	8,9	9,2	3
III	7,8	8	7,2	6,6	2
	4	3	2	1	

(Az A, B, C, D a társaságokat, az I, II, III az alapokat jelentse.)

Hogyan, milyen bontásban helyezzük el a pénzünket, ha a maximális hozam elérése a célunk? (Allokációs feladat.)

Megoldás:

Az x_{ij} jelentse az egyes alapokba valamelyik társaságnál elhelyezett tőkét.

Az induló feltétel: $x_{ij} \geq 0$, ahol $1 \leq i \leq 3$ és $1 \leq j \leq 4$.

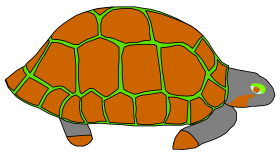
A feltételi relációkat a „peremértékek" határozzák meg:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=5 \qquad x_{11}+x_{21}+x_{31}=4$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=3 \qquad x_{12}+x_{22}+x_{32}=3$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=2 \qquad x_{13}+x_{23}+x_{33}=2$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=1$$

A célunk a hozam maximalizálása:

$$z=0{,}19x_{11}+0{,}17x_{12}+0{,}2x_{13}+0{,}16x_{14}+0{,}094x_{21}+0{,}098x_{22}+0{,}089x_{23}+0{,}092x_{24}+0{,}078x_{31}+$$
$$+0{,}08x_{32}+0{,}072x_{33}+0{,}066x_{34}\rightarrow \max$$

A modell megoldása kézi eszközökkel hosszadalmas.



A disztribúciós módszer

A disztribúciós módszer lényege: felveszünk egy lehetséges induló programot és azt javítjuk az optimumig.

A módszert egy, a kézi megoldásban már közepes nagyságúnak számító feladat megoldásával mutatjuk be, a lehetséges induló táblázat felírásáig.

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	
F_1	6	2	8	7	5	40
F_2	4	3	7	5	9	70
F_3	2	1	3	6	4	60
F_4	5	6	4	8	3	30
	30	60	50	40	20	

F_i a feladó helyeket, R_j a célállomásokat jelenti.

A szállítandó és az igényelt mennyiségek a jobboldali oszlopban, illetve a legalsó sorban találhatók.

A táblázat belsejének $c_{i\,j}$ eleme az i-edik feladóhelyről a j-edik célállomásra történő szállításnál a szállított mennyiség egy egységére eső költséget jelenti.

A feladat zárt, ha a szállítandó és az igényelt mennyiségek összege megegyezik.

(Ahogy ebben az esetben is.)

Az induló program felírása

Az induló program felírásakor célszerű arra törekedni, hogy a költség-mátrix lehető legkisebb elemeire a lehető legnagyobb szállításra kerülő mennyiséget programozzuk.

Ekkor ugyanis viszonylag keveset kell javítanunk az optimum eléréséhez.

Az induló program előállítása

Az induló program felírásakor a minimális költségelemekre a lehetséges maximális mennyiséget programozzuk.

Elnevezés: a költségmátrixnak azt az elemét, amelyre szállítandó mennyiséget programoztunk, kötött elemnek nevezzük.
Szabad elem: amelyre nem programoztunk.

Alapszabály: a kötött elemek számát a kritikus szám határozza meg.

A kritikus szám: az összes állomás számából kivonunk egyet.

A példánkban négy feladóhely és öt célállomás van, a kritikus szám: 9-1=8.

Az adott költségmátrix:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Az induló szállítási program:

$$\begin{array}{ccccc|c} 6 & \boxed{2}^{40} & 8 & 7 & 5 & 40 \\ 4 & 3 & \boxed{7}^{30} & \boxed{5}^{40} & 9 & 70 \\ \boxed{2}^{30} & \boxed{1}^{20} & \boxed{3}^{10} & 6 & 4 & 60 \\ 5 & 6 & \boxed{4}^{10} & 8 & \boxed{3}^{20} & 30 \\ \hline 30 & 60 & 50 & 40 & 20 & \end{array}$$

A keretezett elemekre programoztuk a jobb felső részen lévő mennyiséget.

A szállítás összköltsége: K=700.

Névleges állomások beiktatása

Előfordul, hogy a feladóhelyekről elszállítandó és a célállomások által igényelt mennyiségek nem egyenlők.

Ekkor a megoldási módszerünk alkalmazhatóságához névleges állomást (új sort, vagy új oszlopot) kell beiktatni, amelyre 0 költséggel programozzuk a felesleget, vagy a hiányt.

Példa: **Tekintsük a következő feladatot:**

4	5	3	2	60
2	4	6	5	40
10	20	20	30	

(A sorkezdő helyen lévő feladóhelyeket és az oszlopfőkön a célállomásokat nem írtuk ki.)

A feladóhelyeken összesen 100 egység vár elszállításra, a célállomások összesen 80-at igényeltek.

Beiktatunk egy névleges célállomást, amely 0 költséggel „igényli" a hiányzó 20 egységet:

4	5	3	2	0	60
2	4	6	5	0	40
10	20	20	30	20	

Ez a feladat már „normál" szállítási feladat, a tárgyalt módszerrel kapunk egy lehetséges megoldást:

$$\underline{X}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 30 & 10 \\ 10 & 20 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Gyakorlás

Példa: Adjuk meg **disztribúciós módszerrel** az alábbi táblázattal adott szállítási feladat valamennyi optimális megoldását:

4	1	2	20
4	2	4	12
1	3	3	14
1	2	2	10
11	18	16	

Lehet-e az optimális megoldásban $x_{22}=3$? Ha igen, akkor mennyi a többi változó értéke?

Megoldás: A döntési változó x_{ij}, amely az i-edik feladóhelyről a j-edik célállomásra szállítandó mennyiséget jelöli.

Névleges célállomást kell beiktatni. **A kritikus szám: 7.**

Az induló program (például):

4	$\boxed{1}^{17}$	$\boxed{2}^{3}$	0	20
4	$\boxed{2}^{1}$	4	$\boxed{0}^{11}$	12
$\boxed{1}^{1}$	3	$\boxed{3}^{13}$	0	14
$\boxed{1}^{10}$	2	2	0	10
11	18	16	11	

A program javítása, első optimum:

$$\underline{X}_{01}=\begin{bmatrix} 0 & 17 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 11 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Összköltség: K=65.

Alternatív optimuma van a feladatnak:

$$\underline{X}_{02}=\begin{bmatrix} 0 & 14 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 11 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Az általános megoldás:

$$\underline{X}_0=\lambda\underline{X}_{01}+(1-\lambda)\underline{X}_{02} \quad (0 \le \lambda \le 1)$$

Ha $x_{22}=3$, akkor $\lambda=1/3$, és ekkor:

$$\underline{X}_{0p}=\begin{bmatrix} 0 & 15 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 11 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Tiltótarifák

A szállításoknál gyakran előfordul, hogy két állomás között nincs, vagy megszűnik a szállítási lehetőség, illetve a szállítandó mennyiségekre korlátok vannak.

Disztribúciós megoldásnál azt az esetet tárgyaljuk, amikor egy szállítási viszonylatban „tiltótarifa” van érvényben, azaz nem lehet azon az útvonalon szállítani.

Ha a szállítás költségmátrixában igen nagy költsége van egy elemnek, akkor a disztribúciós megoldás ezt a relációt automatikusan kikerüli.

A módszer: ha valamely relációban nem lehet szállítani, akkor a megfelelő költségelem értéke egy M szám lesz, amely olyan nagy, hogy a megoldási algoritmusunk ezekre a helyekre kötött elemet nem programoz.

Ezután a szokásos módon megoldjuk a feladatot, az adott költségelem biztosan nem lesz kötött hely.

Példa: Az alábbi szállítási feladatban az 1. és a 2. feladótól a teljes készletet el kell szállítani. Az 1. feladó az 1. megrendelőnek nem szállíthat.

	R_1	R_2	R_3	R_4	
F_1	4	3	5	6	40
F_2	3	5	4	7	80
F_3	2	3	5	4	90
	70	70	40	20	

Cél a költség minimum.

Megoldás: A döntési változó x_{ij}, amely az i-edik feladóhelyről a j-edik célállomásra szállítandó mennyiséget jelöli.

Névleges rendeltetési helyet kell beiktatni.

A kritikus szám a névleges állomás miatt: 7.

Az induló program (például):

M	$\boxed{3}^{40}$	5	6	M	40
3	$\boxed{5}^{20}$	$\boxed{4}^{40}$	$\boxed{7}^{20}$	M	80
$\boxed{2}^{70}$	$\boxed{3}^{10}$	5	4	$\boxed{0}^{10}$	90
70	70	40	20	10	

Ha az első feladó az első megrendelőnek nem szállíthat, az azt jelenti, hogy $x_{11}=0$.

Ez akkor következik be, ha a megfelelő költség-elem igen nagy, azaz $c_{11}=M$.

Ha az 1. és 2. feladónál nem maradhat áru, ez akkor teljesül, ha ez a két feladó a névleges állomásnak „nem szállít”: $x_{15}=x_{25}=0$, azaz $c_{15}=c_{25}=M$.

Ezután következhet a program javítása az optimumig, az optimum:

$$\underline{X}_0=\begin{bmatrix} 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 40 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & 0 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$

Az összköltség minimuma: K=630.

A 3. feladónál 10 egység áru marad.

Látható, hogy a program kikerülte a „tiltott” helyeket.

A szállítási feladatok egyszerűen megoldhatók számítógéppel. A tiltótarifák, vagy akár a kapacitáskorlátok is a matematikai modellben könnyen felvehetők.

A fejezet tárgyalását befejeztük.