

Valós analízis előadások I.

Valós analízis előadások I.

Komornik Vilmos

TypoT_EX ◊ Budapest 2003



Ez a könyv az illetékes kuratórium döntése alapján az Oktatási Minisztérium támogatásával a Felsőoktatási Pályázatok Irodája által lebonyolított Tankönyvtámogatási Program keretében jelent meg.

A mű megjelenését az MTA Matematikai Tudományok osztálya is támogatta

© Title of the original French edition: Précis d'analyse réelle, tome I – published by Ellipses – copyright 2001 Édition Marketing S. A.

© Hungarian edition Komornik Vilmos, Typotex, 2003

ISBN 963 9548 20 0 ö

ISBN 963 9548 21 9

Témakör: felsőfokú matematika

Kedves Olvasó! Önre gondoltunk, amikor a könyv előkészítésén munkálkodtunk. Kapcsolatunkat szorosabbra fűzhetjük, ha belép a Typoklubba, ahonnan értesülhet új kiadványainkról, akcióinkról, programjainkról, és amelyet a www.typotex.hu címen érhet el. Honlapunkon megtalálhatja az egyes könyvekhez tartozó hibajegyzéket is, mert sajnos hibák olykor előfordulnak.

Kiadja a Typotex kiadó, az 1795-ben alapított

Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.

Felelős kiadó: Votisky Zsuzsa

Szerkesztette és tördelte: Gerner József

Borítóterv: Tóth Norbert

Terjedelem: 19,3 (A/5) ív

Készült a Naszály Print Kft nyomdájában

Felelős vezető: Hemela Mihályné

A parallelákat azon az úton ne próbáld: tudom én azt az utat is mind végig — megmértem azt a feneketlen éjszakát én, és az életemnek minden világossága, minden öröme kialudt benne — az Istenért kérlek! hagyj békét a paralléláknak — úgy irtózz tőlle, mint akármicsoda feslett társalkodástól, éppen úgy megfoszthat minden idődtől, egészségedtől, csendességedtől s egész életed boldogságától. Az a feneketlen sötétség ezer newtoni óriási tornyokat elnyel. . .

Bolyai Farkas fiához írott leveléből, 1820. április 4.

. . . semmiből egy újj más világot teremtettem. . .

Bolyai János apjához írott leveléből, 1823. november 3.

Előszó

Ez a könyv hat féléves előadás anyagát tartalmazza, amelyeket a szerző matematikus és matematika tanári szakos hallgatók számára tartott a Strasbourg-i Louis Pasteur Egyetemen. Feltételezzük, hogy az olvasó már jártas az egyváltozós klasszikus valós analízisben.

Nagy gondot fordítottunk a tárgyalt kérdések kiválasztására, esztétikus és általános tételek megfogalmazására, rövid és elegáns bizonyítások keresésére, és a tárgyalt anyag egyszerű és pertinens példákkal való illusztrálására. (Lásd a 258. oldali megjegyzéseket is.) Munkánk erősen tükrözi Császár Ákos és Czách László kiváló előadásainak a hatását, amelyeket a szerző az 1970-es években hallgatott az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, illetve általánosabban a Fejér Lipót, Riesz Frigyes, Turán Pál, Erdős Pál és mások által kialakított magyar tradíciót.

A könyv egyik sajátossága, hogy megadjuk a legtöbb fogalom és eredmény eredeti forrását. E dolgozatok a tárgyalt tételeknek gyakran különböző verzióit tartalmazzák, és így egyben a matematikai gondolatok fejlődését is illusztrálják.

A könyv részeinek logikai kapcsolata egyszerű. A bevezető *Topológia* előadásokat rendszeresen felhasználjuk a továbbiakban. A következő négy előadás: *Differenciálszámítás*, *Közelítő módszerek*, *Funkcionálanalízis*, *Integrálszámítás*, lényegében egymástól független, bár az általunk javasolt sorrend pedagógiai szempontból indokoltnak látszik. Végül a befejező *Függvényterek* előadás mintegy szintézise az egész munkának, és valamennyi korábbi előadásra épít. Ez a kötet az első három részt tartalmazza.

Első olvasáskor célszerű kihagyni a csillaggal jelölt részeket. Sok példa és megjegyzés feladatként is tárgyalható.

A x. oldalon felsorolt könyvek tanulmányozása elősegítheti az olvasó általános matematikai kultúrájának a megszilárdítását.

Ezúton mondok köszönetet értékes segítségükért és bátorításukért Corinne Baud-nak, Czách Lászlónak, Christine Disdier-nek, Gerner Józsefnek, Paola Loretinak, Charles-Michel Marle-nak, Patrick Martineznek, Pálffy Péter Pálnak, Philippe Pilibossiannak, Jeannine Saint Jean Paulinnak, Sebestyén Zoltánnak, Simon Lászlónak, Szénássy Barnánénak, Judith Vancosteenoble-nak és Votisky Zsuzsának.

Ezt a kötetet Erdős Pál emlékének ajánlom.

Strasbourg, 2003. május 27.

Tartalom

Előszó	vi
Irodalom	x
1. rész. Topológia	1
1. fejezet. Metrikus terek	3
1.1. Definíciók és példák	3
1.2. Konvergencia, határérték és folytonosság	8
1.3. Teljesség. Egy fixponttétel	15
1.4. Kompaktság	24
2. fejezet. Topologikus terek	34
2.1. Definíciók és példák	34
2.2. Környezetek. Folytonos függvények	39
2.3. Összefüggőség	43
2.4. * Kompaktság	47
2.5. * Hálók konvergenciája	54
3. fejezet. Normált terek	60
3.1. Definíciók és példák	60
3.2. Metrikus és topologikus tulajdonságok	68
3.3. Véges dimenziós normált terek	72
3.4. Folytonos lineáris leképezések	78
3.5. Folytonos lineáris funkcionálok	81
2. rész. Differenciálszámítás	85
4. fejezet. Derivált	87
4.1. Definíciók és elemi tulajdonságok	87
4.2. Közéértéktételek	95
4.3. Az $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ függvények	99
5. fejezet. Magasabb rendű deriváltak	104
5.1. Folytonos multilineáris leképezések	104
5.2. Magasabb rendű deriváltak	108
5.3. Taylor-formula	114
5.4. Lokális szélsőértékek	118

5.5.	Konvex függvények	120
5.6.	Az $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ függvények	125
6.	fejezet. Közönséges differenciálegyenletek	128
6.1.	Vektorértékű függvények integrálja	128
6.2.	Definíciók és példák	130
6.3.	Cauchy–Lipschitz tétel	135
6.4.	Megoldások kiterjesztése. Lineáris egyenletek	139
6.5.	Explicit megoldások	143
7.	fejezet. Implicit függvények és alkalmazásaik	147
7.1.	Implicit függvények	147
7.2.	Lagrange-multiplikátorok	152
7.3.	Spektráltétel	154
7.4.	* Inverz függvény tétel	157
7.5.	* Implicit függvény tétel	161
7.6.	* Lagrange-multiplikátorok. Általános eset	164
7.7.	* Differenciálegyenletek. A kezdeti értéktől való függés	165
3. rész.	Közelítő módszerek	169
8.	fejezet. Interpoláció	171
8.1.	Lagrange-interpoláció	172
8.2.	Hibaminimalizálás. Csebisev-polinomok	174
8.3.	Osztott differenciák. Newton-féle interpolációs formula	177
8.4.	Hermite-interpoláció	179
8.5.	Weierstrass és Fejér tételei	184
8.6.	Spline függvények	188
9.	fejezet. Ortogonális polinomok	191
9.1.	Gram–Schmidt ortogonalizáció	191
9.2.	Ortogonalis polinomok	192
9.3.	Ortogonalis polinomok gyökei	195
10.	fejezet. Numerikus integrálás	199
10.1.	Lagrange-kvadratura	199
10.2.	Newton–Cotes formulák	202
10.3.	Gauss-kvadratura	204
10.4.	Stieltjes és Erdős–Turán tételei	207
10.5.	Euler–Maclaurin formula	209
10.6.	Bernoulli-polinomok és Bernoulli-számok	212

10.7.	Az Euler–Maclaurin formula igazolása	216
10.8.	Trapéz-formula. Romberg módszere	219
11. fejezet.	Gyökök keresése	223
11.1.	* Sturm-sorozatok	223
11.2.	* Polinomok gyökei	225
11.3.	* Descartes-féle jelszabály	227
11.4.	* Householder és Bauer módszere	230
11.5.	* Givens módszere sajátértékek keresésére	233
11.6.	Newton-módszer	234
12. fejezet.	Differenciálegyenletek közelítése	237
12.1.	A megoldások közelítése	237
12.2.	Runge–Kutta módszerek	240
Irodalom	242
Oktatási megjegyzések	258
Tárgymutató	260
Névmutató	264

Irodalom

Hát ő volna az? Persze, hogy ismerem, valamikor a tanítványom volt. Később költő lett: nyilvánvalóan nem volt elég fantáziája ahhoz, hogy matematikus váljék belőle.

D. Hilbert

- [1] M. Aigner és G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, New York, 1999.
- [2] P. Sz. Alexandroff, *A topológia egyszerű alapfogalmai*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971.
- [3] E. T. Bell, *Men of Mathematics*, Simon and Schuster, New York, 1965.
- [4] Benkő Samu, *Bolyai-levelek*, Kriterion, Bukarest, 1975.
- [5] V. G. Boltyanszkij és V. A. Jefremovics, *Szemléletes topológia*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.
- [6] D. Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis*, The Mathematical Association of America, Washington, 1994.
- [7] R. Courant és H. Robbins, *Mi a matematika?*, Gondolat, Budapest, 1966.
- [8] H. S. M. Coxeter és S. L. Greitzer, *Az újra felfedezett geometria*, Gondolat, Budapest, 1977.
- [9] Dávid Lajos, *A két Bolyai élete és munkássága*, Gondolat, Budapest, 1979.
- [10] W. Dunham, *Journey Through Genius. The Great Theorems of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [11] Erdős Pál és Surányi János, *Válogatott fejezetek a számelméletből*, Polygon, Szeged, 1996.
- [12] E. Hairer és G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer, New York, 1996.
- [13] G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1940.
- [14] P. Hoffman, *A prímber. Erdős Pál kalandjai a matematika végtelenjében*, Scolar, Budapest, 1999.
- [15] M. Kac és S. M. Ulam, *Mathematics and Logic*, Dover, New York, 1992.
- [16] A. Y. Khintchine, *Three Pearls of Number Theory*, Graylock, Rochester, 1952.
- [17] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1988.
- [18] Kürschák József, Hajós György, Neukomm Gyula és Surányi János, *Matematikai versenytételek I-IV*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965–1992 és Typotex, Budapest, 1998.
- [19] Laczkovich Miklós, *Sejtés és bizonyítás*, Typotex, Budapest, 1998.
- [20] J. Muir, *Of Men and Numbers. The Story of Great Mathematicians*, Dover, New York, 1996.
- [21] J. Newman (szerk.), *The World of Mathematics I-IV*, Dover, New York, 2000.
- [22] B. Schechter, *Agyam nyitva áll: Erdős Pál matematikai utazásai*, Park Kiadó és Vince Kiadó, Budapest, 1999.
- [23] H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots*, Dover, New York, 1999.
- [24] I. Stewart, *A matematika problémái*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991.
- [25] D. J. Struik, *A matematika rövid története*, Gondolat, Budapest, 1958.
- [26] Weszely Tibor, *Bolyai János matematikai munkássága*, Kriterion, Bukarest, 1981.