

Előszó az első német kiadáshoz

Mit jelent az, tanítani? Rendszeresen
alkalmat adni a tanulónak arra, hogy
sajátmaga jöjjön rá a dolgok nyitjára
(H. Spencer nyomán)

A matematikai irodalomban számos kitűnő és átfogó feladatgyűjtemény, gyakorlatok könyve, áttekintő tankönyv stb. létezik. Ez a könyv véleményünk szerint mind-ezekről céljában, a magába foglalt anyag kiterjedésében és felépítésében, valamint abban a módban, ahogy felhasználását elképzeljük, különbözik. Következésképp ezeket a szempontjainkat valamennyire meg kell magyaráznunk.

*

A könyvnek a fő célja, ami reméljük nem elérhetetlen, hogy a matematika iránt érdeklődő hallgatókat az analízis néhány fontos területéről vett, módszeresen elrendezett feladatok segítségével hozzászoktassa az önálló gondolkodás és kutatás módszereihez és eszközeihez. Úgy terveztük, hogy mind a diák, mind a tanár ki tudja elégíteni az egyéni, aktív tanulás iránti igényét. A diák a könyvet saját olvasmányainak vagy tananyagának a kiegészítésére is használhatja, vagy teljesen önállóan részletesen feldolgozhatja a könyv kiválasztott szakaszait. A tanárnak a könyv gyakorlatok vagy szemináriumok vezetéséhez segédeszközként szolgálhat.

Ez a könyv nem csupán egyszerű feladatgyűjtemény. Legfontosabb vonása az anyag módszeres elrendezése, melynek célja, hogy az olvasót önálló munkára ösztönözze, és hasznos gondolatokat sugalljon neki. Több időt, gondot és aprólékos munkát szenteltünk annak, hogy megtaláljuk az anyag leghatékonyabb bemutatását, mint amennyit a beavatatlan az első pillantásra feltételezne.

A tényyszerű ismeretek közlése számunkra másodlagos szempont. Célunk mindenekelőtt, hogy kialakítsuk az olvasó helyes szemléletét, a gondolkodás egy bizonyos rendszerezettségét, amely a matematikában talán még lényegesebb, mint más tudományágokban.

*

Olyan általános szabályokat, melyek részletesen előírnák a leghasznosabb gondolkodási rendszert, nem ismerünk. Még ha meg is lehetne fogalmazni ilyen szabályokat, akkor sem lennének nagyon hasznosak. A helyes gondolkodási törvények-

nek az elméleti ismeret helyett az embernek a „húsába és vérébe” kell beszívódnia ahhoz, hogy azonnal és ösztönösen használni tudja azokat. Ezért az ember gondolkodási képességének fejlesztésére csak a gondolkodás gyakorlása lehet hasznos. Az érdekes és nehéz problémák önálló megoldása sokkal többet használ az olvasónak, mint az alább következő aforizmák, de kezdetnek ezek sem árthatnak.

Az ember szeretne mindent megérteni: az elszigetelt tényeket egybevetve a vele összefüggő tényekkel, az újonnan felfedezett a már ismerttel való kapcsolatán keresztül, az ismeretlent a megszokotthoz való hasonlóság alapján, a speciális eredményeket általánosítás útján, az általános eredményeket megfelelő specializálás segítségével, az összetett helyzeteket alkotó részekre bontva és a részleteket egy átfogó teljes kép keretébe foglalva.

Van valami hasonlatosság aközött, hogy valaki jól kiismeri magát egy városban, illetve egy tudományágban: tudnia kell, hogy egy tetszőleges adott pontból hogyan juthat el egy másik tetszőleges pontba.* Az illető még jobban tájékozott, ha rögtön ki tudja választani a legkényelmesebb és leggyorsabb utat az egyik pontból a másikba. Ha pedig valaki igazán jól tájékozott, akkor különleges mutatványokra is képes, például úgy utazik, hogy módszeresen elkerül bizonyos tiltott, egyébként szokásos útvonalakat — ilyesmi történik bizonyos axiomatikus vizsgálatokban.

Elszigetelt igazságok megismerése alapján felépített összefüggő elmélet olyan falhoz hasonlít, amelyet kifaragatlan kövekből raktak. Minden új felismerést, akár csak minden követ, jól meg kell forgatni, megvizsgálni minden oldalról, és meg kell próbálni hozzáilleszteni az építményhez minden lehetséges ponton, amíg az új megtalálja helyét a már felállítottak között úgy, hogy a kapcsolódó területek a lehető legnagyobbak, a rések pedig a lehető legkisebbek legyenek, amíg csak az egész szilárd építményt nem alkot.

Két pont egyenest határoz meg. Hasonlóan, sok új eredményt lehet kapni két szélsőséges speciális eset közötti lineáris interpolációnak egy fajtája segítségével.¹ Egy egyenest meghatároz egy pont és egy irány is. Gyakran keletkeznek új eredmények abból is, hogy munkánk iránya szerencsésen egybeesik egy nevezetes speciális esettel. Párhuzamok vonása is értékes módszer, amellyel új eredményeket lehet származtatni.²

Az olyan ötlet, amely csak egyszer használható, csak trükk. Ha többször is fel lehet használni, módszer lesz belőle. A teljes indukciónál a bizonyítandó eredmény és a felhasználható eszközök arányosak, úgy aránylanak egymáshoz, mint $n+1$ aránylik az n -hez. Ezért a bizonyítandó állítás erősítése előnyös lehet, mert ugyanakkor a bizonyításához felhasználható eszközöket is erősítjük. Más esetekben meg azt találjuk, hogy az általánosabb állítást könnyebben lehet bizonyítani a részle-

* Lásd pl. a **92.** és az azzal szomszédos feladatokat a **VI.** részben és a **64.** feladatot a **VIII.** részben.

¹ Lásd pl. a **139.** feladatot az **I.** részben.

² Lásd pl. a **IV.** rész **1.** fejezetének első paragrafusát, különösen a **13.** és **14.** feladatokat.

gesebbnél; ezekben az esetekben az általánosabb állítás megfogalmazása, a lényeg kimelése, a teljes kép felismerése az, ami a bizonyításban a legfontosabb.³

„Qui nimium probat, nihil probat.” (Aki túl sokat bizonyít, semmit sem bizonyít.) Meg kell vizsgálnunk minden bizonyítást abból a szempontból, hogy tényleg minden kimondott feltevést felhasználtunk-e benne. Meg kell próbálnunk ugyanazt a következményt kevesebb feltevésből vagy erősebb következményt ugyanabból a feltételből levezetni, és csak akkor lehetünk elégedettek, amikor valaki olyan ellenpéldákat talált, amelyek megmutatják, hogy elértük a lehetőségek határait.

Mindamellett nem szabad megfeledkeznünk arról, hogy az általánosításnak két fajtája van, a könnyű és az értékes. Az egyik a hígítás útján történik, a másik a sűrítés útján. A hígítás azt jelenti, hogy a húst nagy mennyiségű vízben híg levessé főzzük, a sűrítéssel pedig nagy mennyiségű tápláló anyag eszenciává sűrűsödik. Az olyan fogalmak egységesítése, melyek a szokásos szemlélet szerint egymástól messze esnek, sűrítés. Így például a csoportelméletben vannak olyan sűrített gondolatok, amelyeket korábban az algebrában, számelméletben, geometriában és analízisben szétszórva lehetett megtalálni, és amelyek nagyon különbözőknek tűntek. Hígítással történő általánosítást még könnyebb volna idézni, de ezzel egyesek érzékenységének megsértését kockáztatnánk.

*

Az analízisnek nem minden témaköre alkalmas feladatok számára. Egy olyan gyűjtemény, mely az analízis minden fontosabb területét kimerítően tárgyalná, túlságosan terjedelmes és kényelmetlen lenne. Természetesen, válogatni sokféle-képpen lehet. Mi a legnagyobb súlyt a modern analízis központi területére, a komplex változós függvények elméletére helyeztük. Némileg távol tartottuk magunkat azonban az általános fővonaltól, melyen a szokásos előadások, tankönyvek és feladatgyűjtemények haladnak, és ceteris paribus (egyébként azonos feltételek mellett) azoknak a területeknek adtunk elsőbbséget, melyek személyes érdeklődésünkhöz a legközelebb állnak. Nehezebb és még erősen fejlődő állapotban levő területekről is vettünk fel feladatokat, melyeket ez ideig ritkán vagy egyáltalán nem vettek figyelembe a tankönyvirodalomban. Ezt a tartalomjegyzék részletesebben szemlélteti. Egyes fejezetek a szakemberek számára is használhatók lehetnek. Sehol sem törekedtünk azonban egy monográfia teljességére, mivel az anyag kiválasztását mindig alárendeltük fő célunknak, annak, hogy az anyagot legjobb képességeink szerint olyan elrendezésben tálaljuk, amely az olvasónak vezérfonalat és ötleteket ad.

Az anyag eredete nagyon változatos. Válogattunk a matematikai ismeretek klasszikus tömegéből és újabb tanulmányokból is. Összegyűjtöttünk olyan feladatokat, melyeket részben már különböző folyóiratokban közöltek és részben szóban mondtak el nekünk a szerzőik. Céljainknak megfelelően átalakítottuk, kiegészített-

³ Gyakran előfordul, hogy egy, a feladathoz vagy a szomszédos feladatok egy csoportjához mellékelt útmutatás az eredmény erősítésére vagy általánosítására mutat rá, ami a feladat megoldásához hasznos lehet. Hasonlítsuk össze például az I. rész 1. és 2., 3. és 4., 5. és 7., 6. és 8. feladatait!

tük, átfogalmaztuk és lényegesen kibővítettük az anyagot. Ráadásul, számos eredeti eredményünket itt közöljük először feladatok formájában. Reméljük, így még a szakértők számára is képesek vagyunk valami újat nyújtani.

*

Az anyagot két kötetben rendeztük el. Az elsőben három, alapvetőbb jellegű részt talál az olvasó, a második pedig hat részt ölel fel, melyeket sajátosabb kérdéseknek és alkalmazásoknak szenteltünk.

A kötetek első fele tartalmazza a feladatokat, a második fele pedig azok megoldásait. A feladatokat tartalmazó részben, különösen az egyes fejezetek elején, rövid magyarázat is található az anyag megértéséhez szükséges fogalmak és tételek felidézésére. Egyes feladatokhoz kiinduló ötletet vagy útmutatást is csatoltunk. A megoldások olyan röviden és tömören vannak megfogalmazva, ahogyan csak lehetséges. A nyilvánvaló következtetéseket elhagytuk, mert a feladat komoly megfontolása után világossá kell, hogy váljanak. Kivételes esetekben a megoldást csak vázoljuk, és a megfelelő irodalomra hivatkozunk. Alkalmadtán kiterjesztési lehetőségeket, más alkalmazásokat és megoldatlan kérdéseket is érintettünk.

A részek fejezetekre oszlanak, azok pedig paragrafusokra. Valahányszor magyarázat következik, vagy új gondolatsort vezetünk be, ezt csillaggal jelezzük.

A feladatoknak a fejezetekben és a paragrafusokon belüli elrendezése az a pont, ahol e könyv talán még jobban különbözik a többi általunk ismert hasonló könyvtől, mint az anyag kiválasztásában. A szigorú értelemben vett gyakorló feladatok újonnan tanult tételek és fogalmak alkalmas speciális esetek segítségével való tisztázására, aránylag kis helyet kaptak. Az elszigetelt feladatok ritkák. Az egyes feladatok leginkább feladatok hosszabb sorozataiba vannak belefoglalva, melyek általában egy paragrafust tesznek ki, és amelyeknek felépítésére nagyon sok gondot fordítottunk.

A feladatokat különféle szempontok szerint lehet csoportosítani — a megkívánt előismeretek, a nehézség, az eljárás vagy az eredmény szerint. Mi egyik ilyen szempont mellett sem foglaltunk állást, hanem váltakozó elrendezéseket választottunk, melyek az önálló kutatás során fellépő különböző helyzeteket tükrözik vissza. Az egyik paragrafus például egy módszerrel foglalkozik, melyet az elején elmagyarázunk, és ezt a továbbiakban olyan sok különféle feladat megoldásához alkalmazzuk, amennyihez csak lehet, és így egyre jobban kifejlesztjük. Hasonlóan, egy másik paragrafus egy tétellel foglalkozik, melyet kimondunk (vagy bebizonyítunk, ha ez könnyen és gyorsan megtehető), és azután ezt sokféleképpen alkalmazzuk és specializáljuk. Megint más paragrafust bővülő mintára szerkesztettünk: az általános tétel csak a megelőző speciális esetek és kis, töredékes megjegyzések után jelenik meg, melyek előrevetítik a megoldást vagy a bizonyításához vezetnek. Olykor egy bonyolultabb bizonyítást számos lépésben építünk fel, feladatok sorozatán keresztül; minden feladat maga után von egy segédtelet, a bizonyítás egy független részét vagy valami távlati képet, és így egy szemel alkot a gondolatoknak abban a láncában,

amivel az olvasó végül eléri a bizonyítandó tételt. Néhány paragrafusban lazábban összefűzött „vegyes problémák” vannak. Ezek bonyolultabb alkalmazások segítségével átismétlik az előző anyagot, vagy elszigetelt, önmagukban érdekes eredményeket mutatnak be.

Hébe-hóba négy egymás utáni feladat egy „aránypárt” alkot, amelyben a negyedik ugyanúgy viszonylik a harmadikhoz, mint a második az elsőhöz (általánosítása, ellentettje, alkalmazása). Néhány paragrafust analógiák részletesebb bemutatásának és vizsgálatának szenteltünk.¹ Itt a feladatokat felváltva vettük a két tárgykörből, melyek között a párhuzamot vontuk. Páronként tartoznak egymáshoz, úgy is mondhatnánk, hogy „többszörös arányt” alkotnak. Ez az elrendezés nekünk különösen tanulságosnak tűnik.

*

A könyv úgy is kézbe vehető, hogy az olvasó saját maga vagy a diákjai számára gyakorlási lehetőséget találjon benne, vagy egyszerűen csak olvasás céljából. Mind-egyik esetben elég természetes úton megtalálható az adott célnak megfelelő használati mód.

A részek kezdő fejezetei általában csak kevés előismeretet követelnek. A különböző részek, bár nem teljesen, mégis eléggé függetlenek egymástól, és ugyanannak a résznek a paragrafusai között is gyakran laza a kapcsolat abból a célból, hogy ne kelljen túl szigorúan ragaszkodni a témák adott sorrendjéhez.

Annak az olvasónak, aki meg szeretne oldani egy feladatot, nem csak azt kell megfontolnia, hogy *mi* a kérdés, hanem azt is, hogy *hogyan* és *hol* lett feltéve. Sok feladat, amely még egy képzett diáknak sem engedelmeskedne önmagában, itt előkészítő és magyarázó feladatokkal van körülvéve, és olyan összefüggésben mutatjuk be, hogy némi kitartással és egy kis találékonysággal meg lehet zabolázni. Előfordulnak persze valóban nehéz feladatok minden előkészítés nélkül is. Ezek leginkább egy-egy lazább szerkezetű paragrafusban (vegyes problémák) találhatóak, máskülönben csak elszigetelt feladatként fordulnak elő.

Az útmutatások az olvasó rendelkezésére állnak, de nem célunk azokat az olvasóra erőltetni.

Ha képtelen megoldani a feladatot, nem kell kétségbe esnie. A „szókratészi tanítási módszernek” nem az a célja, hogy az embereket válaszok adására képezze ki, hanem az, hogy kérdések segítségével tanítson. Ha megismételt erőfeszítések maradtak sikertelenek, utána az olvasó a kötet második felében található megoldást nagyobb figyelemmel elemezheti ki, hogy kiemelje azt az elvet, amin tulajdonképpen a megoldás alapszik, megeméssze és maradandóan az emlékezetébe vesse.

A könyvet már megírása közben is gyakran használták középső és felső évfolyamok hallgatói számára tartott gyakorlatok és feladatmegoldó szemináriumok szervezésére. Ilyen alkalmakkor a könnyebb feladatokat a tanteremben beszélték meg, és a hallgatók a válaszokat szóban mondták el, míg a nehezebb feladatokat egy alkal-

¹ Lásd II. rész, 2. fejezet; IV. rész, 1. fejezet, 1. §; V. rész, 1. fejezet, 1. §; VIII. rész, 1. fejezet, 4.§.

masan megválasztott határidőre írásban válaszolták meg. A mintául szolgáló fontosabb feladatokat a tanár oldotta meg. Egy szemeszterben körülbelül egy fejezet anyagát lehetett átvenni. Sok fejezetet ellenőriztünk ezen a módon és részben módosítottunk a szerzett tapasztalatok alapján. Azt hisszük lelkiismeret-furdalás nélkül javasolhatjuk gyakorlatok és szemináriumok szervezésére az általunk követett módszert: nem elszigetelt feladatok, hanem alaposan átgondolt összefüggő feladatsorozatok feladását. Ennek a könyvnek majdnem minden fejezete alkalmazható ilyen tanítás alapjául. Nyilvánvaló, hogy egy kis tanári gondosságra továbbra is szükség van. Különösen házi feladatra, zárthelyi dolgozatra vagy vizsgára tanácsos néhány feladatot rokon feladattal kicserélni.

A mű folyamatos olvasását, amikor minden feladat után közvetlenül elolvassák a megoldást is, csak gyakorlottabb olvasóknak javasolhatjuk. Ez egészében véve nem felel meg a könyv szellemének. Bizonyos fejezetek mégis alkalmasak folyamatos olvasásra és lényegében tananyagként használhatók. Erre a célra azonban az előadás meglehetősen tömény; egy kis gondolkodási időt szándékoztunk hagyni a feladat megfogalmazása és megoldása, valamint az állítás kimondása és bizonyítása között.

*

Ha vállalkozásunk nem sikerült minden tekintetben, akkor két enyhítő körülményre hivatkozhatunk. Először, mivel a mű elgondolása lényegében új, nem volt mintánk, amit követhetünk volna. Másodszor, a különböző fejezetek kiterjedtebb tárgyalása olyan sok helyet, az előadás néhány tekintetben történő tökéletesítése olyan sok időt igényelt volna, hogy veszélyeztetve láttuk az egész elgondolást. A tervezet érdekében hálásak lennének a kritikus olvasónak, ha figyelmünket az esetleges hiányosságokra irányítaná, és így azokat egy későbbi alkalommal meg lehetne szüntetni.

Számos barátunk és kollégánk kiadatlan tételeket tett elérhetővé számunkra, mások a kézirat vagy a levonatok olvasásában segítettek. Hálásan említjük meg név szerint a következőket: *A. Aepli* (Zürich), *P. Bernays* (Göttingen), *A. Cohn* (Berlin), *R. Courant* (Göttingen), *Csillag P.* (Budapest), *Fejér L.* (Budapest), *Fekete M.* (Budapest), *A. Fleck* (Berlin), *F. Gassmann* (Zürich), *Haar A.* (Szeged), *A. Hirsch* (Zürich), *E. Jacobsthal* (Berlin), *L. Kollros* (Zürich), *Kürschák J.* (Budapest), *E. Landau* (Göttingen), *E. Lasker* (Berlin), *K. Löwner* (Berlin), *A. Ostrowski* (Göttingen), *M. Plancherel* (Zürich), *H. Prüfer* (Jéna), *Radó T.* (Szeged), *Riesz M.* (Stockholm), *A. Stoll* (Zürich), *O. Toeplitz* (Kiel), *A. Walter* (Göttingen). Engedélyt kaptunk, hogy *A. Hurwitz*, illetve *Lukács F.* és *Lukács T.* hagyatékából, kiadatlan cikkekből néhány eredményt felhasználjunk. Különösen szeretnénk őszintén megköszönni *T. Carlemannak* (Lund) és *I. Schurnak* értékes feladataikat, valamint *A. Brauernak* és *R. Brauernak* (Berlin), *H. Rademachernak* (Hamburg) és *H. Weylnak* (Zürich) valóban odaadó együttműködésüket. Őszinte köszönet illeti a kiadót is, aki minden tekintetben segített minket a mostani nehéz idők ellenére is.

Zürich és Berlin, 1924. október

Pólya Gy.—Szegő G.