FÜGGELÉK

Egy nevezetes valószínűségszámítási tétel

Már több olyan eset fordult elő, amelyben bizonyos határvalószínűségek szükségszerűen vagy 0-val vagy 1-gyel egyenlők. Például független valószínűségi változókból alkotott sor konvergenciájának valószínűsége csak ezt a két értéket veheti fel[1]. Most több ilyen esetet átfogó tételt bizonyítunk be.

TÉTEL. (A „0 vagy 1"-törvény). *Legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *valamilyen valószínűségi változók,* $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots)$ *pedig az* $x = (x_1, x_2, \ldots)$ *változó olyan Baire-függvénye*[2]*, hogy az*

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots) = 0$$

összefüggésnek az első n $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *változóra vonatkozó feltételes valószínűsége minden* n*-re a*

$$\mathsf{P}\{f(\xi_1, \xi_2, \ldots) = 0\} \tag{1}$$

abszolút valószínűséggel egyenlő. Ezen feltételek mellett az (1) *valószínűség vagy* 0, *vagy* 1.

[1] L. hatodik fejezet, 5. §. Ugyanez fennáll a nagy számok erős törvényében szereplő

$$\mathsf{P}\{\eta_n - d_n \to 0,\ n \to \infty\}$$

valószínűségre is, ha a ξ_n változók teljesen függetlenek.

[2] Baire függvénynek olyan függvényt neveznek, amely polinomokból kiindulva iterált határátmenetekkel a pontonkénti konvergencia értelmében előállítható.

Speciálisan, ennek a tételnek a feltételei teljesülnek, ha a ξ_1, $\xi_2, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek, és véges számú x_n változó megváltozásakor az $f(x)$ függvény értéke nem változik.

BIZONYÍTÁS. Legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$,
és

$$A = \{\omega : f(\xi) = 0\}.$$

Ezzel az eseménnyel együtt tekintsük az összes olyan esemény $\mathfrak{R}$ algebráját, amely a véges számú ξ_n változó között fennálló összefüggések által értelmezhető. Ha a B esemény $\mathfrak{R}$-hez tartozik, akkor a tétel feltételei szerint

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(A). \tag{2}$$

A $\mathsf{P}(A) = 0$ esetre tételünk már be van bizonyítva. Legyen most $\mathsf{P}(A) > 0$. Akkor (2)-ből következik a

$$\mathsf{P}(B \mid A) = \frac{\mathsf{P}(A \mid B)\,\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(A)} = \mathsf{P}(B) \tag{3}$$

képlet.

Így $\mathsf{P}(B)$ és $\mathsf{P}(B \mid A)$ két σ-additív halmazfüggvény, amely $\mathfrak{R}$-en egybeesik, tehát ezek meg kell, hogy egyezzenek az $\mathfrak{R}$ algebra $\sigma(\mathfrak{R})$ Borel bővítésének bármely halmazán is. Ezért speciálisan

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A \mid A) = 1,$$

ami a tételt bizonyítja.

Néhány más esetet, amelyben ismert valószínűségekről azt állíthatjuk, hogy csak a 0 és 1 értékeket veszik fel, P. Lévi tanulmányozott[1].

---

[1] L. ezzel kapcsolatban P. Lévi: *Sur un théorème de A. Khintchine*, Bull. des Sci. Math., 55. kötet (1931), 145–160, II. tétel.