Hivatkozott tételek

Itt felsoroljuk a könyvben ismertnek tekintett tételeket, melyekre csak nevük szerint hivatkozunk a szövegben. A tételek felsorolását a kapcsolódó fejezetek sorrendjében adjuk meg. Mivel az alábbi lista elsősorban referencia célokat szolgál, az egy-egy fejezethez tartozó tételek elnevezésük ábécé szerinti sorrendjében követik egymást, nem pedig valamiféle, a tételek tartalmát is figyelembe vevő, logikai sorrendben.

FÁK

Cayley-tétel:
Az n címkézett ponton megadható különböző fák száma n^{n-2}.

Kruskal-tétel:
Egy élsúlyokkal ellátott összefüggő gráf minimális súlyú feszítőfáját állítja elő a mohó algoritmus, mely a fa éleit egyesével választja ki olyan módon, hogy minden lépésben egy legkisebb súlyú, az addig kiválasztott élekkel kört nem alkotó élt választ ki.

EULER-KÖRÖK

Euler-tétel:
Egy gráfban akkor és csak akkor található Euler-kör (zárt Euler-séta), ha a gráf összefüggő és minden pontjának fokszáma páros. Euler-út (nyílt vagy zárt Euler-séta) pontosan akkor található egy gráfban, ha összefüggő és legfeljebb két páratlan fokszámú csúcsa van.

HAMILTON-KÖRÖK

Chvátal-tétel:
a) Ha egy n csúcsú G egyszerű gráf $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ fokszámaira teljesül, hogy

$$d_k \leq k < n/2 \Rightarrow d_{n-k} \geq n-k,$$

akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

b) Ha a $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ számok nem rendelkeznek a fenti tulajdonsággal, akkor van olyan gráf, mely nem tartalmaz Hamilton-kört és $d'_1 \leq \cdots \leq d'_n$ fokszámaira $d'_i \geq d_i$ teljesül minden i-re.

Dirac-tétel:

Ha egy n csúcsú G egyszerű gráfban minden csúcs fokszáma legalább $n/2$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Ore-tétel:

Ha egy n csúcsú G egyszerű gráfban minden olyan $x,y \in V(G)$ csúcspárra melyek között nem megy él teljesül, hogy $d(x) + d(y) \geq n$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Pósa-tétel:

Ha egy n csúcsú G egyszerű gráf $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ fokszámaira teljesül, hogy minden $k < n/2$ esetén $d_k \geq k+1$, akkor G tartalmaz Hamilton-kört.

Szükséges feltétel Hamilton-kör létezésére:

Ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor G összefüggő és tetszőleges k darab csúcsának elhagyása után legfeljebb k komponensre esik szét.

SÍKBARAJZOLHATÓSÁG

Euler-formula:

Ha egy összefüggő, síkbarajzolható gráf csúcsainak, éleinek és a valamely síkbarajzolásakor létrejövő tartományoknak a száma rendre n, e, illetve t, akkor fennáll az $n+t = e+2$ összefüggés.

Fáry–Wagner-tétel:

Ha G síkbarajzolható egyszerű gráf, akkor létezik olyan síkbarajzolása, melyben minden él egyenes szakasz.

Kuratowski-tétel:

Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmazza részgráfként sem K_5-öt, sem $K_{3,3}$-at, sem ezek valamelyikének soros bővítését.

Wagner-tétel:

Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nincsen benne K_5 vagy $K_{3,3}$ minor.

Whitney tételei:

I. Egy gráfnak akkor és csak akkor van absztrakt duálisa, ha síkbarajzolható.

II. Gyengén izomorf gráfok mindig egymásba vihetők az alábbi három transzformáció véges sokszori, alkalmas sorrendben történő egymás utáni alkalmazásával.

- Két különálló komponens egy-egy pontját azonosítjuk.
- Az előbbi átalakítás inverze, melynek során a gráf egy elvágó pontját elhagyjuk, majd a keletkező komponensekbe az elhagyott pont egy-egy példányát visszahelyezzük. (Amennyiben kettőnél több komponens keletkezett, a második, harmadik, stb., komponensekben az elhagyott pont jelenlévő példányait újra azonosítjuk, ezáltal a gráf komponenseinek száma minden ilyen lépésben pontosan eggyel nő.)
- Először az előző transzformációval analóg átalakítást hajtjuk végre egy elvágó pont helyett egy kételemű $\{x,y\} \subseteq V(G)$ elvágó ponthalmazzal, a keletkező két komponensben az x-nek és y-nak megfelelő pontok legyenek x', x'', illetve y', y''. Ezután a két komponenst x' és y'', valamint x'' és y' azonosításával újra összeillesztjük.

PÁROSÍTÁSOK

Frobenius-tétel:

Egy $G = (A,B,E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$ teljesül.

Gallai-tételek:

I. Hurokélmentes G gráfban fennáll, hogy $\alpha(G)+\tau(G) = |V(G)|$.

II. Izolált pontot nem tartalmazó G gráfban $\nu(G)+\rho(G) = |V(G)|$.

Hall-tétel:

Egy $G = (A,B,E)$ páros gráfban akkor és csak akkor van az A pontosztályt lefedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$ teljesül.

König-tétel:

Páros gráfban $\tau(G) = \nu(G)$.

Tutte-tétel:

Egy G gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha G-ből elhagyva egy tetszőleges $S \subseteq V(G)$ halmaz pontjait, a keletkező $G-S$ gráf páratlan csúcsú komponenseinek száma nem nagyobb $|S|$-nél.

FOLYAMOK, TÖBBSZÖRÖS ÖSSZEFÜGGŐSÉG

Edmonds–Karp-tétel:

Egy (G,s,t,c) hálózatban polinomidőben eljutunk a maximális folyamhoz, ha a javító utakat használó algoritmust alkalmazzuk, és ennek során minden lépésben egy legkevesebb élből álló javító út mentén végezzük a javítást.

Ford–Fulkerson-tétel:

Egy (G,s,t,c) hálózatban elérhető maximális folyam értéke egyenlő az s és t pontokat elválasztó vágások értékének minimumával.

Menger-tétel:

Egy irányított gráf tetszőlegesen kijelölt s és t csúcsa között található éldiszjunkt, s-ből t-be vezető irányított utak maximális száma egyenlő azon élek minimális számával, melyek az összes s-ből t-be vezető irányított utat lefogják.

A fenti állítás irányítatlan gráfra (és ekkor irányítatlan utakra) is igaz. Igaz továbbá mind az irányított, mind az irányítatlan esetben akkor is, ha benne „él” helyett mindenütt „csúcs”-ot írunk, feltéve, hogy nincs a gráfban (s,t) irányított él, illetve $\{s,t\}$ él.

GRÁFOK SZÍNEZÉSE

Brooks-tétel:

Ha egy összefüggő G gráf nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Erős perfekt gráf tétel (Chudnovsky, Robertson, Seymour és Thomas tétele):

Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha feszített részgráfként nem tartalmaz legalább öt hosszúságú (húrnélküli) páratlan kört, vagy ilyennek komplementerét.

(Ld. még *Perfekt gráf tétel*.)

Mycielski-konstrukció:

A $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ csúcshalmazú G gráfhoz a Mycielski-konstrukció az alábbi módon megadható $M(G)$ gráfot rendeli:

$$V(M(G)) = V(G) \cup \{u_i : v_i \in V(G)\} \cup \{z\}$$

$$E(M(G)) = E(G) \cup \{\{u_i, v_j\} : \{v_i, v_j\} \in E(G)\} \cup \{\{u_i, z\} : 1 \leq i \leq n\}.$$

Az $M(G)$ gráf alapvető tulajdonsága, hogy $\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$, miközben $\omega(M(G)) = \omega(G)$.

Mycielski gráfokon általában az egyetlen élből kiindulva megkapható $M(K_2), M(M(K_2)), M(M(M(K_2))), \ldots$ sorozat gráfjait értjük.

Négyszíntétel:

Ha G síkbarajzolható gráf, akkor $\chi(G) \leq 4$.

Perfekt gráf tétel (Lovász tétele):

Egy gráf akkor és csak akkor perfekt, ha a komplementere perfekt.
(Ld. még *Erős perfekt gráf tétel*.)

Vizing-tétel:

Ha G egyszerű gráf, akkor $\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1$.

GRÁFOK MÁTRIXAI

Illeszkedési mátrix rangja:

Egy n csúcsú, hurokélmentes, c komponensből álló irányított gráf illeszkedési mátrixának rangja $n - c$.

BONYOLULTSÁGELMÉLET

Alapvető NP-*teljes problémák* az alábbiak:

Bemenet egy G gráf és eldöntendő, hogy van-e G-ben Hamilton-kör;

Bemenet egy G gráf és eldöntendő, igaz-e, hogy $\chi(G) \leq 3$;

Bemenet egy G gráf és egy k szám, eldöntendő, igaz-e, hogy $\omega(G) \leq k$.