

TARTALOM

1. fejezet

- A halmazelmélet elemei 15**
- 1.1. A halmaz fogalma. Halmazműveletek 15
- 1.1.1. Alapvető definíciók 15
- 1.1.2. Halmazműveletek 16
- 1.2. Leképezések. Osztályokra való felbontás 19
- 1.2.1. Halmazok közötti leképezések. A függvény általános fogalma 19
- 1.2.2. Osztályokra való felbontás. Ekvivalenciarelációk 21
- 1.3. Halmazok ekvivalenciája. A halmazok számosságának fogalma 24
- 1.3.1. Véges és végtelen halmazok 24
- 1.3.2. Megszámlálható halmazok 24
- 1.3.3. Halmazok ekvivalenciája 27
- 1.3.4. A valós számok halmaza nem megszámlálható 29
- 1.3.5. A Cantor–Bernstejn-féle tétel 31
- 1.3.6. A halmaz számosságának fogalma 31
- 1.4. Rendezett halmazok. Transzfinit számok 34
- 1.4.1. Parciálisan rendezett halmazok 34
- 1.4.2. Rendezéstartó leképezések 35
- 1.4.3. Rendtípus. Rendezett halmazok 36
- 1.4.4. Rendezett halmazok rendezett összege 37
- 1.4.5. Jólrendezett halmazok. Transzfinit számok 37
- 1.4.6. Rendszámok összehasonlítása 39
- 1.4.7. A kiválasztási axióma; Zermelo tétele és további, ezzel ekvivalens állítások 41
- 1.4.8. Transzfinit indukció 43
- 1.5. Halmazrendszerek 44
- 1.5.1. Halmazgyűrű 44

- 1.5.2. Halmaz-félgűrű 46
 - 1.5.3. Félgűrű által generált gűrű 48
 - 1.5.4. σ -algebrák 49
 - 1.5.5. Halmazrendszerek és leképezések 50
2. fejezet
- Metrikus és topologikus terek 51**
- 2.1. A metrikus tér fogalma 51
 - 2.1.1. Definíció és alapvető példák 51
 - 2.1.2. Folytonos leképezések. Izometria 59
 - 2.2. Konvergencia. Nyílt és zárt halmazok 60
 - 2.2.1. Torlódási pontok. Halmaz lezárása 60
 - 2.2.2. Konvergencia 62
 - 2.2.3. Sűrű halmazok 63
 - 2.2.4. Nyílt és zárt halmazok 63
 - 2.2.5. A számegyenes nyílt és zárt halmazai 65
 - 2.3. Teljes metrikus terek 70
 - 2.3.1. A teljes metrikus terek értelmezése. Példák 70
 - 2.3.2. Az egymásba foglalt gömbökre vonatkozó tétel 73
 - 2.3.3. Baire tétele 74
 - 2.3.4. Metrikus terek teljes burka 75
 - 2.4. A kontrakciós elv és alkalmazásai 78
 - 2.4.1. A kontrakciós elv 78
 - 2.4.2. A kontrakciós elv legegyszerűbb alkalmazásai 79
 - 2.4.3. A differenciálegyenletekre vonatkozó egzisztencia- és unicitási tétel 82
 - 2.4.4. A kontrakciós elv integrálegyenletekre való alkalmazása 85
 - 2.5. Topologikus terek 87
 - 2.5.1. A topologikus tér definíciója. Példák 87
 - 2.5.2. Topológiák összehasonlítása 89
 - 2.5.3. Környezetbázis. Bázis. Megszámlálhatósági axiómák 90
 - 2.5.4. Konvergens szorzatok topologikus térben 94
 - 2.5.5. Folytonos leképezések. Homeomorfizmus 95
 - 2.5.6. Szétválasztási axiómák 97
 - 2.5.7. Topológiák különféle megadási módjai. Metrizálhatóság 101
 - 2.6. Kompaktság 102
 - 2.6.1. A kompaktság fogalma 102
 - 2.6.2. Kompakt terek közötti folytonos leképezések 104
 - 2.7.6. Egyenletes folytonosság. Metrikus kompaktumok folytonos leképezései 117
 - 2.6.4. Sorozatkompaktság 107
 - 2.6.5. Prekompakt halmazok 109
 - 2.7. A kompaktság fogalma metrikus terekben 109

- 2.7.1. Teljesen korlátos halmazok 109
 - 2.7.2. Kompaktság és teljes korlátosság 111
 - 2.7.3. Metrikus terek prekompakt részhalmazai 113
 - 2.7.4. Arzelà tétele 113
 - 2.7.5. Peano tétele 115
 - 2.7.6. Egyenletes folytonosság. Metrikus kompaktumok folytonos leképezései 117
 - 2.7.7. Az Arzelà-tétel általánosítása 118
 - 2.8. Metrikus terek folytonos görbéi 119
3. fejezet
- Normált terek, topologikus vektorterek 123**
- 3.1. Vektorterek 123
 - 3.1.1. A vektortér definíciója. Példák 123
 - 3.1.2. A lineáris függetlenség 125
 - 3.1.3. Alterek 126
 - 3.1.4. Faktortér 127
 - 3.1.5. Lineáris funkcionálok 128
 - 3.1.6. A lineáris funkcionál geometriai jelentése 130
 - 3.2. Konvex halmazok, konvex funkcionálok. A Hahn–Banach-tétel 132
 - 3.2.1. Konvex halmazok és konvex testek 132
 - 3.2.2. Konvex, homogén funkcionálok 134
 - 3.2.3. A Minkowski-funkcionál 136
 - 3.2.4. A Hahn–Banach-tétel 138
 - 3.2.5. Szétválasztási tételek 141
 - 3.3. Normált terek 143
 - 3.3.1. A normált terek definíciója. Példák 143
 - 3.3.2. Normált terek alterei 145
 - 3.3.3. Normált terek faktortere 145
 - 3.4. Euklideszi terek 147
 - 3.4.1. Az euklideszi terek definíciója 147
 - 3.4.2. Példák 149
 - 3.4.3. Ortogonális bázisok létezése, ortogonalizálás 151
 - 3.4.4. A Bessel-féle egyenlőtlenség. Zárt ortogonális rendszerek 153
 - 3.4.5. Teljes euklideszi terek. A Riesz–Fischer-tétel 157
 - 3.4.6. Hilbert-terek. A szeparábilis Hilbert-terek izomorfia-tétele 159
 - 3.4.7. Altér, ortogonális kiegészítő altér, alterek direkt összege 162
 - 3.4.8. Az euklideszi terek jellemző tulajdonságai 166
 - 3.4.9. Komplex euklideszi terek 169
 - 3.5. Topologikus vektorterek 171
 - 3.5.1. Definíció. Példák 171
 - 3.5.2. Lokálisan konvex terek 173
 - 3.5.3. Megszámálhatóan normálható terek 174

4. fejezet

Lineáris funkcionálok és lineáris operátorok 179

- 4.1. Folytonos lineáris funkcionálok 179
 - 4.1.1. Topologikus vektorterek folytonos lineáris funkcionáljai 179
 - 4.1.2. Normált terek lineáris funkcionáljai 180
 - 4.1.3. A normált terekre vonatkozó Hahn–Banach-tétel 184
 - 4.1.4. Megszámálhatóan normálható terek lineáris funkcionáljai 186
- 4.2. Duális tér 187
 - 4.2.1. A duális tér definíciója 187
 - 4.2.2. A duális tér erős topológiája 188
 - 4.2.3. Példák duális terekre 190
 - 4.2.4. A második duális tér 195
- 4.3. Gyenge topológia és gyenge konvergencia 198
 - 4.3.1. Gyenge topológia és gyenge konvergencia topologikus vektorterekben 198
 - 4.3.2. A gyenge konvergencia normált terekben 199
 - 4.3.3. Gyenge topológia és gyenge konvergencia a duális térben 202
 - 4.3.4. A duális tér korlátos részhalmazai 204
- 4.4. Általánosított függvények 207
 - 4.4.1. A függvényfogalom kiterjesztése 207
 - 4.4.2. Az alapfüggvények tere 209
 - 4.4.3. Az általánosított függvények 210
 - 4.4.4. Műveletek az általánosított függvények körében 211
 - 4.4.5. Az alapfüggvények terére vonatkozó megjegyzések 215
 - 4.4.6. A függvények kiszámítása a deriváltjukkal. Differenciálegyenletek az általánosított függvények körében 216
 - 4.4.7. Néhány általánosítás 219
- 4.5. Lineáris operátorok 222
 - 4.5.1. A lineáris operátorok definíciója. Példák 222
 - 4.5.2. Folytonosság és korlátosság 225
 - 4.5.3. Operátorok összege és szorzata 227
 - 4.5.4. Inverz operátor, invertálhatóság 228
 - 4.5.5. Adjungált operátorok 234
 - 4.5.6. Adjungált operátor euklideszi terekben. Önadjungált operátorok 237
 - 4.5.7. Az operátorok spektruma. Rezolvens 238
- 4.6. Kompakt operátorok 241
 - 4.6.1. A kompakt operátorok definíciója. Példák 241
 - 4.6.2. A kompakt operátorok alapvető tulajdonságai 246
 - 4.6.3. Kompakt operátorok sajátértékei 248
 - 4.6.4. A Hilbert-terek kompakt operátorai 249
 - 4.6.5. A H Hilbert-tér kompakt önadjungált operátorai 250

5. fejezet

- Mérték, mérhető függvények, integrál** 255
- 5.1. A síkbeli halmazok mértéke 255
- 5.1.1. Elemi halmazok mértéke 255
- 5.1.2. Lebesgue-mérték a síkon 260
- 5.1.3. Néhány kiegészítés és általánosítás 267
- 5.2. A mérték általános fogalma. A mérték kiterjesztése félgűrűről gyűrűre. Additivitás, σ -additivitás 269
- 5.2.1. A mérték definíciója 269
- 5.2.2. A mérték kiterjesztése félgűrűről az általa generált gyűrűre 270
- 5.2.3. σ -additivitás 272
- 5.3. A mérték Lebesgue-féle kiterjesztése 276
- 5.3.1. Egységelemes gyűrűn értelmezett mérték Lebesgue-féle kiterjesztése 276
- 5.3.2. A mérték kiterjesztése egy egységelem nélküli félgűrűről 279
- 5.3.3. A mérhetőség fogalmának kiterjesztése a σ -véges esetre 281
- 5.3.4. A Jordan-féle kiterjesztési eljárás 284
- 5.4. Mérhető függvények 287
- 5.4.1. A mérhető függvények definíciója és alapvető tulajdonságai 287
- 5.4.2. Mérhető függvényekkel végzett műveletek 289
- 5.4.3. Ekvivalencia 291
- 5.4.4. A majdnem mindenütt való konvergencia 292
- 5.4.5. Jegorov tétele 293
- 5.4.6. A mértékben való konvergencia 294
- 5.4.7. Luzin tétele. A C -tulajdonság 297
- 5.5. A Lebesgue-integrál 298
- 5.5.1. Lépcsős függvények 298
- 5.5.2. Lépcsős függvények Lebesgue-integrálja 299
- 5.5.3. A Lebesgue-integrál általános definíciója véges mértékű halmazok esetében 301
- 5.5.4. A Lebesgue-integrál σ -additivitása és abszolút folytonossága 304
- 5.5.5. A Lebesgue-integrál és a határérték felcserélhetősége 309
- 5.5.6. Végtelen mértékű halmazon vett Lebesgue-integrál 312
- 5.5.7. A Lebesgue-integrálnak a Riemann-integrállal való összehasonlítása 314
- 5.6. Halmazrendszerek és mértékek direkt szorzata. Fubini tétele 317
- 5.6.1. Halmazrendszerek szorzata 317
- 5.6.2. Mértékek szorzata 319
- 5.6.3. A síkbeli Lebesgue-mérték felírása halmazok egydimenziós metszeteinek mértéke segítségével. A Lebesgue-integrál geometriai definíciója 321
- 5.6.4. A Fubini-tétel 324

6. fejezet

**A Lebesgue-féle határozatlan integrál. A differenciálszámítás Lebesgue-féle elmé-
te** 329

- 6.1. Monoton függvények. Az integrál differenciálhatósága a felső határ szerint 330
 - 6.1.1. Monoton függvények alapvető tulajdonságai 330
 - 6.1.2. A monoton függvények differenciálhatósága 333
 - 6.1.3. Az integrál felső határ szerinti deriváltja 341
- 6.2. A korlátos változású függvények 342
- 6.3. A Lebesgue-féle határozatlan integrál 347
- 6.4. Függvények előállítás a deriváltjukkal. Abszolút folytonos függvények 349
- 6.5. A Lebesgue-integrál mint halmazfüggvény. A Radon–Nikodym-féle tétel 359
 - 6.5.1. Előjeles mértékek. A Hahn- és a Jordan-féle felbontás 359
 - 6.5.2. Az előjeles mértékek alaptípusai 362
 - 6.5.3. Abszolút folytonos előjeles mérték. A Radon–Nikodym-féle tétel 363
- 6.6. A Stieltjes-integrál 366
 - 6.6.1. A Stieltjes-mérték 366
 - 6.6.2. A Lebesgue–Stieltjes-integrál 368
 - 6.6.3. A Lebesgue–Stieltjes-integrál néhány valószínűségszámítási alkalmazá-
sa 370
 - 6.6.4. A Riemann–Stieltjes-integrál 372
 - 6.6.5. Az integrál alatti határátmenet Stieltjes-integrálok esetén 375
 - 6.6.6. A folytonos függvények terén értelmezett folytonos lineáris funkcionálok ál-
talános alakja 378

7. fejezet

Az integrálható függvények tere 385

- 7.1. Az L_1 tér 385
 - 7.1.1. Az L_1 tér definíciója és alaptulajdonságai 385
 - 7.1.2. Az L_1 térben mindenütt sűrű halmazok 387
- 7.2. Az L_2 tér 391
 - 7.2.1. Az L_2 tér definíciója és alaptulajdonságai 391
 - 7.2.2. A végtelen mértékű tér esete 394
 - 7.2.3. Az L_2 tér mindenütt sűrű részhalmazai. Izomorfia-tétel 395
 - 7.2.4. A komplex L_2 tér 396
 - 7.2.5. Az átlagos konvergencia és a függvénysorozatok más típusú konvergenciái-
val való kapcsolata 397
- 7.3. Ortogonális rendszerek az L_2 térben. Ortogonális terek 399
 - 7.3.1. A trigonometrikus rendszer. A trigonometrikus sor 399
 - 7.3.2. A $[0, \pi]$ intervallum trigonometrikus rendszerei 402
 - 7.3.3. A Fourier-sor komplex formája 403
 - 7.3.4. A Legendre-polinomok 404

- 7.3.5. Szorzatalakú halmazok ortogonális rendszerei. Többszörös Fourier-sorok 407
- 7.3.6. Súlyfüggvény szerinti ortogonális polinomok 409
- 7.3.7. Ortogonális bázis az $L_2(-\infty, \infty)$ és az $L_2(0, \infty)$ térben 411
- 7.3.8. Diszkrét súly szerinti ortogonális polinomok 412
- 7.3.9. A Haar- és a Rademacher–Walsh-rendszerek 414

8. fejezet

Trigonometrikus sorok. Fourier-transzformált 417

- 8.1. Fourier-sorok konvergenciakritériumai 417
- 8.1.1. Elégséges feltétel Fourier-sor pontbeli konvergenciájára 417
- 8.1.2. Fourier-sorok egyenletes konvergenciájára vonatkozó tételek 424
- 8.2. A Fejér-tétel 427
- 8.2.1. A Fejér-tétel 427
- 8.2.2. A trigonometrikus rendszer teljessége. A Weierstrass-tétel 430
- 8.2.3. A Fejér-tétel általánosítása az L_1 térre 431
- 8.3. A Fourier-integrál 432
- 8.3.1. Az alaptétel 432
- 8.3.2. A Fourier-integrál komplex formája 435
- 8.4. A Fourier-transzformált. A Fourier-transzformált tulajdonságai és alkalmazásai 436
- 8.4.1. A Fourier-transzformált és az inverziós formula 436
- 8.4.2. A Fourier-transzformált alaptulajdonságai 440
- 8.4.3. Az Hermite- és a Laguerre-függvények teljessége 444
- 8.4.4. A gyorsan csökkenő, végtelen sokszor deriválható függvények Fourier-transzformáltja 444
- 8.4.5. Fourier-transzformált és függvények konvolúciója 446
- 8.4.6. A Fourier-transzformált alkalmazása a hővezetési egyenlet megoldására 447
- 8.4.7. Többváltozós függvények Fourier-transzformáltja 449
- 8.5. A Fourier-transzformált az $L_2(-\infty, \infty)$ térben 452
- 8.5.1. A Plancherel-formula 452
- 8.5.2. Az Hermite-függvények 455
- 8.6. A Laplace-transzformált 458
- 8.6.1. A Laplace-transzformált definíciója és alapvető tulajdonságai 458
- 8.6.2. A Laplace-transzformált alkalmazása differenciálegyenletekre (operátormódszer) 460
- 8.7. A Fourier–Stieltjes-transzformált 461
- 8.7.1. A Fourier–Stieltjes-transzformált definíciója 461
- 8.7.2. A Fourier–Stieltjes-transzformált alkalmazása a valószínűségszámításban 463
- 8.8. Az általánosított függvények Fourier-transzformáltja 465

9. fejezet

Lineáris integrálegyenletek 469

- 9.1. Alapvető definíciók. Néhány integrálegyenletre vezető feladat 469
 - 9.1.1. Az integrálegyenletek típusai 469
 - 9.1.2. Integrálegyenletre vezető példák 470
- 9.2. A Fredholm típusú integrálegyenletek 474
 - 9.2.1. A Fredholm típusú integráloperátor 474
 - 9.2.2. Szimmetrikus magú integrálegyenletek 477
 - 9.2.3. A Fredholm-féle tételek. Elfajuló magú integráloperátorok 479
 - 9.2.4. Az általános esetre vonatkozó Fredholm-tételek 481
 - 9.2.5. A Volterra-egyenlet 486
 - 9.2.6. Elsőfajú integrálegyenletek 486
- 9.3. Paraméteres integrálegyenletek. A Fredholm-módszer 487
 - 9.3.1. A Hilbert-tér kompakt operátorainak a spektruma 487
 - 9.3.2. A megoldás előállítása λ szerinti hatványsorral 489

10. fejezet

Differenciálszámítás vektorterekben 493

- 10.1. Differenciálás vektorterekben 493
 - 10.1.1. Erős (Fréchet-féle) differenciál 493
 - 10.1.2. A gyenge (Gateaux-féle) derivált 495
 - 10.1.3. A Lagrange-formula 496
 - 10.1.4. A gyenge és az erős deriválhatóság közötti kapcsolat 497
 - 10.1.5. Funkcionálok deriválhatósága 498
 - 10.1.6. Absztrakt függvények 499
 - 10.1.7. Az integrál 499
 - 10.1.8. Magasabbrendű deriváltak 501
 - 10.1.9. Magasabbrendű differenciálok 504
 - 10.1.10. A Taylor-formula 504
- 10.2. Az implicit függvény tétel és néhány alkalmazása 506
 - 10.2.1. Az implicit függvény tétel 506
 - 10.2.2. A differenciálegyenletek megoldásának a kezdeti feltételektől való füg-
gése 509
 - 10.2.3. Érintőtér. A Ljuszternyik-tétel 510
- 10.3. Extremális feladatok 513
 - 10.3.1. Az extrémum szükséges feltétele 513
 - 10.3.2. A második differenciál. A funkcionál extrémumának elegendő fel-
tétele 517
 - 10.3.3. Feltételes extrémális feladatok 519
- 10.4. A Newton-módszer 522

Függelék	527
Banach-algebrák (V. M. Tyihomirov)	527
F.1. A Banach-algebra definíciója. Példák	527
F.1.1. Banach-algebrák, Banach-algebrák izomorfizmusa	527
F.1.2. Példák Banach-algebrákra	528
F.1.3. Maximális ideálok	530
F.2. A spektrum és a rezolvens	531
F.2.1. Definíciók és példák	531
F.2.2. A spektrum tulajdonságai	532
F.2.3. A spektrálsugár	534
F.3. Néhány előkészítő segédétel	535
F.3.1. Faktoralgebrák	535
F.3.2. Három lemma	536
F.4. Alapvető tételek	537
F.4.1. A folytonos lineáris multiplikatív funkcionálok és a maximális ideálok	537
F.4.2. Az \mathcal{M} halmaz topológiája. Alapvető tételek	539
F.4.3. Wiener tétele. Feladatok	542
Irodalom	547
Tárgymutató	549