Megoldások

5. fejezet

5.1. Közelítés véges összegekkel

1. **(a)** 0,125; **(b)** 0,21875; **(c)** 0,625; **(d)** 2,46875.

3. **(a)** 1,066667; **(b)** 1,283333; **(c)** 2,666667; **(d)** 2,083333.

5. 0,3125; 0,328125.

7. 1,5; 1,574603.

9. **(a)** 87 cm; **(b)** 87 cm.

11. **(a)** 1150 m; **(b)** 1260 m.

13. **(a)** 23,35 m/s^2; **(b)** 14,17 m/s^2.

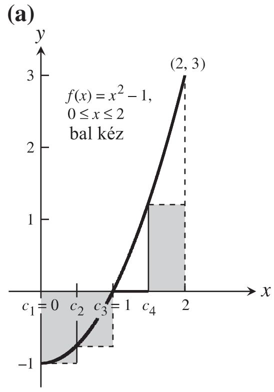
15. $\frac{31}{16}$.

17. 1.

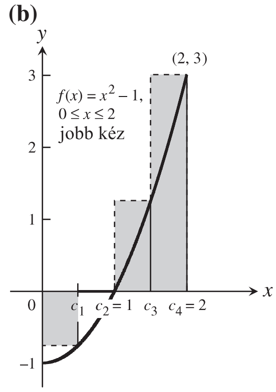
19. **(a)** felső = 3032 liter, alsó = 2172 liter; **(b)** felső = 9452 liter, alsó = 6772 liter; **(c)** $\approx$ 31,22 h, $\approx$ 32,14 h.

21. **(a)** 2; **(b)** $2\sqrt{2} \approx 2{,}828$; **(c)** $8\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 3{,}061$; **(d)** Mindegyik terület kisebb a kör területénél, π-nél. n növekedtével a sokszög területe π-hez tart.

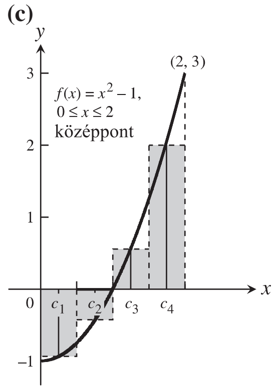
29. **(a)**



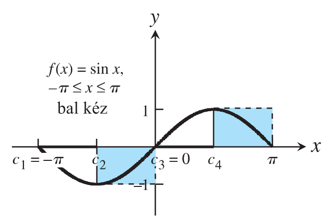
(b)



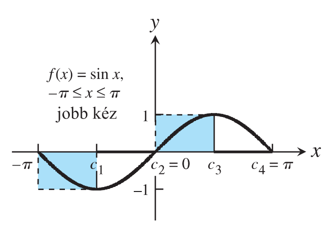
(c)



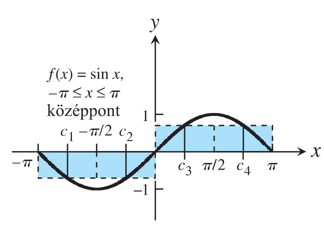
31. **(a)**



(b)



(c)



5.2. Véges összegek határértéke és a szumma jel

1. $\frac{6(1)}{1+1} + \frac{6(2)}{2+1} = 7$

3. $\cos(1)\pi + \cos(2)\pi + \cos(3)\pi + \cos(4)\pi = 0$

5. $\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}-2}{2}$

7. Mindegyik.

9. b.

11. $\sum_{k=1}^{6} k$

13. $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2^k}$

15. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

17. **(a)** -15; **(b)** 1; **(c)** 1; **(d)** -11; **(e)** 16

19. **(a)** 55; **(b)** 385; **(c)** 3025

21. -56.

23. -73.

25. 240.

27. 3376.

33. 1,2. **35.** $\frac{2}{3}+\frac{3n-1}{6n^2}$, $\frac{2}{3}$.

37. $12+\frac{27n+9}{2n^2}$, 12 **39.** $\frac{5}{6}+\frac{6n+1}{6n^2}$, $\frac{5}{6}$

5.3. A határozott integrál

1. $\int_0^2 x^2 dx$ **3.** $\int_{-7}^{5}(x^2-3x)dx$

5. $\int_2^3 \frac{1}{1-x}dx$ **7.** $\int_{-\pi/4}^{0} \sec x dx$

9. **(a)** 0; **(b)** -8; **(c)** -12; **(d)** 10; **(e)** -2; **(f)** 16.

11. **(a)** 5; **(b)** $3\sqrt{3}$; **(c)** -5; **(d)** -5.

13. **(a)** 4; **(b)** -4

15. A terület = 21 egység. **17.** A terület = $9\pi/2$ egység.

19. A terület = 2,5 egység. **21.** A terület = 3 egység.

23. $b^2/4$. **25.** b^2-a^2 **27.** $1/2$ **29.** $3\pi^2/2$

31. $7/3$ **33.** $1/24$ **35.** $3a^2/2$ **37.** $b/3$

39. -14 **41.** 10 **43.** -2 **45.** $-7/4$

47. 7 **49.** 0

51. n számú, $\delta x=b/n$ hosszúságú részintervallummal és a jobb oldali végpontokhoz tartozó függvényértékekkel:

$$\text{Terület} = \int_0^b 3x^2 dx = b^3.$$

53. n számú, $\delta x=b/n$ hosszúságú részintervallummal és a jobb oldali végpontokhoz tartozó függvényértékekkel:

$$\text{Terület} = \int_0^b 2x dx = b^2.$$

55. $f_{\text{átlag}}=0$ **57.** $f_{\text{átlag}}=-2$ **59.** $f_{\text{átlag}}=1$

61. **(a)** $g_{\text{átlag}}=-1/2$; **(b)** $g_{\text{átlag}}=1$; **(c)** $g_{\text{átlag}}=1/4$

63. $a=0$ és $b=1$ esetén lesz a legnagyobb az integrál értéke.

65. Felső korlát = 1, alsó korlát = 1/2.

67. Például: $\int_0^1 \sin(x^2)dx \le \int_0^1 dx = 1$

69. $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b 0dx = 0$

71. Felső korlát = 1/2

5.4. Newton–Leibniz-tétel (az analízis alaptétele)

1. 6 **3.** 8 **5.** 1 **7.** $5/2$ **9.** 2

11. $2\sqrt{3}$ **13.** 0 **15.** $-\pi/4$ **17.** $\frac{2\pi^3}{3}$

19. $-8/3$ **21.** $-3/4$ **23.** $\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}+1$

25. 16 **27.** $(\cos\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ **29.** $4t^5$

31. $\sqrt{1+x^2}$ **33.** $-\frac{1}{2}x^{-1/2}\sin x$ **35.** 1

37. $28/3$ **39.** $1/2$ **41.** $51/4$ **43.** π

45. $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

47. d, mivel $y'=\frac{1}{x}$ és $y(\pi)=\int_\pi^\pi \frac{1}{t}dt-3=-3$

49. b, mivel $y'=\sec x$ és $y(0)=\int_0^0 \sec t dt+4=4$

51. $y=\int_2^x \sec t dt+3$ **53.** $s=\int_{t_0}^t f(x)dx+s_0$

55. $\frac{2}{3}bh$ **57.** 9 §

59. **(a)** $v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}\int_0^t f(x)dx=f(t)\Rightarrow v(5)=f(5)=2$ m/s

(b) $a=df/dt$ negatív, mivel az érintőegyenes meredeksége a $t=5$ pontban negatív.

(c) $s=\int_0^3 f(x)dx=\frac{1}{2}(3)(3)=\frac{9}{2}$ m, mivel az integrál az $y=f(x)$ görbe, az x-tengely és az $x=3$ egyenes által határolt tartomány területe.

(d) $t=6$, miután $t=6$ és $t=9$ között a tartomány az x-tengely alatt helyezkedik el.

(e) $t=4$-nél és $t=7$-nél, mivel ezekben a pontokban az érintő vízszintes.

(f) $t=6$ és $t=9$ között az origó felé tart, mivel ebben az intervallumban a sebesség negatív. $t=0$ és $t=6$ között az origótól elfele, mivel ott a sebesség pozitív.

(g) A jobb vagyis a pozitív oldalon, mert f integrálja 0-tól 9-ig pozitív érték, lévén, hogy nagyobb az x-tengely felett, mint az alatta fekvő terület.

63. $2x-2$ **65.** $-3x+5$

67. **(a)** Igaz. Mivel f folytonos, g az analízis alaptétele értelmében differenciálható.

(b) Igaz. g folytonos, mivel differenciálható.

(c) Igaz, mert $g'(1)=f(1)=0$.

(d) Hamis, mivel $g''(1)=f'(1)>0$.

(e) Igaz, mivel $g'(1)=0$ és $g''(1)=f'(1)>0$.

(f) Hamis: $g''(x)=f'(x)>0$, így g'' sehol sem vált előjelet.

(g) Igaz, mert $g'(1)=f(1)=0$ és $g'(x)=f(x)$ az x-nek növekvő függvénye (mert $f'(x)>0$).

5.5. A határozatlan integrál és a helyettesítési szabály

1. $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$ **3.** $\frac{1}{2}\sec 2t+C$

5. $-(7x-2)^{-4}+C$ **7.** $-6(1-r^3)^{1/2}+C$

9. $\frac{1}{3}(x^{3/2}-1)-\frac{1}{6}\sin(2x^{3/2}-2)+C$

11. **(a)** $-\frac{1}{4}(\text{ctg}^2 2\theta)+C$ **(b)** $-\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta)+C$

13. $-\frac{1}{3}(3-2s)^{3/2}+C$ **15.** $\frac{2}{5}(5s+4)^{1/2}+C$

17. $-\frac{2}{5}(1-\theta^2)^{5/4}+C$ **19.** $-\frac{1}{3}(7-3y^2)^{3/2}+C$

21. $(-2(1+\sqrt{x}))+C$ **23.** $\frac{1}{3}\sin(3z+4)+C$

25. $\frac{1}{3}\text{tg}(3x+2)+C$ **27.** $\frac{1}{2}\sin^6\left(\frac{x}{3}\right)+C$

29. $\left(\frac{r^2}{18}-1\right)^6+C$ **31.** $-\frac{2}{3}\cos(x^{3/2}+1)+C$

33. $\sec\left(v+\frac{\pi}{2}\right)+C$ **35.** $\frac{1}{2\cos(2t+1)}+C$

37. $-\frac{2}{3}(\text{ctg}^3 y)^{1/2}+C$ **39.** $-\sin\left(\frac{1}{t}-1\right)+C$

41. $-\frac{\sin(1/\theta)}{2}+C$ **43.** $\frac{(s^3+2s^2-5s+5)^2}{2}+C$

45. $\frac{1}{16}(1+t^4)^4+C$

47. $\frac{1}{5}(x^2+1)^{5/2}-\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$

49. **(a)** $-\frac{6}{2+\mathrm{tg}^3 x}+C$ **(b)** $-\frac{6}{2+\mathrm{tg}^3 x}+C$

(c) $-\frac{6}{2+\mathrm{tg}^3 x}+C$

51. $\frac{1}{6}\sin\sqrt{3(2r-1)^2+6}+C$

53. $s=\frac{1}{2}(3t^2-1)^4-5$

55. $s=4t-2\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)+9$

57. $s=\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)+100t+1$

59. 6 m

63. **(b)** 339 volt

5.6. Helyettesítés és görbék által közbezárt terület

1. **(a)** $14/3$ **(b)** $2/3$

3. **(a)** $1/2$ **(b)** $-1/2$

5. **(a)** $15/16$ **(b)** 0

7. **(a)** 0 **(b)** $1/8$

9. **(a)** 4 **(b)** 0

11. **(a)** $1/6$ **(b)** $1/2$

13. **(a)** 0 **(b)** 0

15. $2\sqrt{3}$ **17.** $3/4$ **19.** $3^{5/2}-1$ **21.** 3

23. $\pi/3$ **25.** $16/3$ **27.** $2^{5/2}$ **29.** $\pi/2$

31. $128/15$ **33.** $4/3$ **35.** $5/6$ **37.** $38/3$

39. $49/6$ **41.** $32/3$ **43.** $48/5$ **45.** $8/3$

47. 8 **49.** $5/3$ (Három metszéspont van.)

51. 18 **53.** $243/8$ **55.** $8/3$ **57.** 2

59. $104/15$ **61.** $56/15$ **63.** 4 **65.** $\frac{4}{3}-\frac{4}{\pi}$

67. $\pi/2$ **69.** 2 **71.** $1/2$ **73.** 1

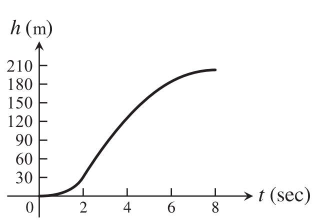
75. **(a)** $(\pm\sqrt{c},c)$ **(b)** $c=4^{2/3}$ **(c)** $c=4^{2/3}$

77. $11/3$ **79.** $3/4$ **81.** Egyik sem.

83. $F(6)-F(2)$ **85.** **(a)** -3 **(b)** 3 **87.** $I=a/2$

Gyakorló feladatok

1. **(a)** Kb. 205 m **(b)**



3. **(a)** $-1/2$ **(b)** 31 **(c)** 13 **(d)** 0

5. $\int_1^5(2x-1)^{-1/2}dx=2$ **7.** $\int_{-\pi}^{0}\cos\frac{x}{2}dx=2$

9. **(a)** 4 **(b)** 2 **(c)** -2

(d) -2π **(e)** $8/5$

11. $8/3$ **13.** 62 **15.** 1

17. $1/6$ **19.** 18 **21.** $9/8$

23. $\frac{\pi^2}{32}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$ **25.** 4 **27.** $\frac{8\sqrt{2}-7}{6}$

29. Minimum: -4, maximum: 0, terület 27/4.

31. $6/5$ **35.** $y=\int_5^x\left(\frac{\sin t}{t}\right)dt-3$

37. $-4(\cos x)^{1/2}+C$ **39.** $\theta^2+\theta+\sin(2\theta+1)+C$

41. $\frac{t^3}{3}+\frac{4}{t}+C$ **43.** $-\frac{1}{3}\cos(2t^{3/2})+C$ **45.** 16

47. 2 **49.** 1 **51.** 8 **53.** $27\sqrt{3}/160$

55. $\pi/2$ **57.** $\sqrt{3}$ **59.** $6\sqrt{3}-2\pi$ **61.** -1

63. 2 **65.** -2 **67.** 1 **69.** $\sqrt{2}-1$

71. **(a)** b **(b)** b **75.** $25°$F **77.** $\sqrt{2+\cos^3 x}$

79. $\frac{-6}{3+x^4}$ **81.** Igen **83.** $-\sqrt{1+x^2}$

85. Alsó becsléssel a költség ≈ 10710 dollár.

87. 600; 18,00 dollár **89.** 300; 6,00 dollár

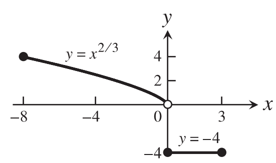
Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. **(a)** Igen **(b)** Nem

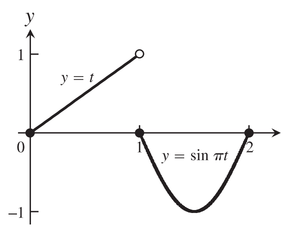
5. **(a)** $1/4$ **(b)** $\sqrt[3]{12}$

7. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **9.** $y=x^3+2x-4$

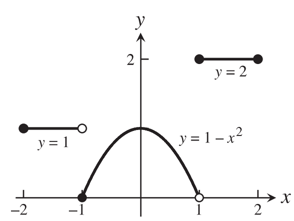
11. $36/6$



13. $\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}$



15. $13/3$



17. $1/2$ **19.** $2/x$ **21.** $\frac{\sin 4y}{\sqrt{y}}-\frac{\sin y}{2\sqrt{y}}$

23. $1/6$ **25.** $\int_0^1 f(x)dx$

29. **(a)** 0 **(b)** -1

(c) $-\pi$ **(d)** $x=1$

(e) $y=2x+2-\pi$ **(f)** $x=-1, x=2$

(g) $[-2\pi,0]$

6. fejezet

6.1. Szeletelés és tengely körüli forgatás

1. **(a)** $A(x) = \pi(1-x^2)$ **(b)** $A(x) = 4(1-x^2)$
(c) $A(x) = 2(1-x^2)$ **(d)** $A(x) = \sqrt{3}(1-x^2)$

3. 16
5. $\frac{16}{3}$
7. **(a)** $2\sqrt{3}$; **(b)** 8
9. 8π
11. **(a)** s^2h; **(b)** s^2h
13. $\frac{2\pi}{3}$
15. $4-\pi$
17. $\frac{32\pi}{5}$
19. 36π
21. π
23. $\pi\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-\frac{11}{3}\right)$
25. 2π
27. 2π
29. 3π
31. $\pi^2-2\pi$
33. $\frac{2\pi}{3}$
35. $\frac{117\pi}{5}$
37. $\pi(\pi-2)$
39. $\frac{4\pi}{3}$
41. 8π
43. $\frac{7\pi}{6}$

45. **(a)** 8π; **(b)** $\frac{32\pi}{5}$; **(c)** $\frac{8\pi}{3}$; **(d)** $\frac{224\pi}{15}$

47. **(a)** $\frac{16\pi}{5}$; **(b)** $\frac{56\pi}{15}$; **(c)** $\frac{64\pi}{15}$

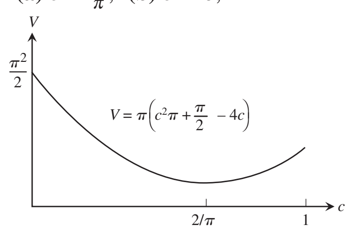
49. $V = 2a^2b\pi$

51. **(a)** $V = \frac{\pi h^2(3a-h)}{3}$; **(b)** $\frac{1}{120\pi}$ m/s

55. $V = 3308 \text{cm}^3$

57. **(a)** $c = \frac{2}{\pi}$; **(b)** $c = 0$;

(c)



6.2. Térfogatszámítás hengerhéj-módszerrel

1. 6π
3. 2π
5. $\frac{14\pi}{3}$
7. 8π
9. $\frac{5\pi}{6}$
11. $\frac{7\pi}{15}$
13. **(b)** 4π
15. $\frac{16\pi}{15}\left(3\sqrt{2}+5\right)$
17. $\frac{8\pi}{3}$
19. $\frac{4\pi}{3}$
21. $\frac{16\pi}{3}$

23. **(a)** $\frac{6\pi}{5}$; **(b)** $\frac{4\pi}{5}$; **(c)** 2π; **(d)** 2π

25. **(a)** Az x-tengely körül: $V = \frac{2\pi}{15}$; az y-tengely körül: $V = \frac{\pi}{6}$;
(b) Az x-tengely körül: $V = \frac{2\pi}{15}$; az y-tengely körül: $V = \frac{\pi}{6}$

27. **(a)** $\frac{5\pi}{3}$; **(b)** $\frac{4\pi}{3}$; **(c)** 2π; **(d)** $\frac{2\pi}{3}$

29. **(a)** $\frac{4\pi}{15}$; **(b)** $\frac{7\pi}{30}$

31. **(a)** $\frac{24\pi}{5}$; **(b)** $\frac{48\pi}{5}$

33. **(a)** $\frac{9\pi}{16}$; **(b)** $\frac{9\pi}{16}$

35. Korong: 2 integrál; gyűrű: 2 integrál; héj: integrál

6.3. Síkgörbék hossza

1. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$
3. 7
5. $\frac{21}{2}$
7. 12
9. $\frac{53}{6}$
11. $\frac{123}{32}$
13. $\frac{99}{8}$
15. 2

17. **(a)** $\int_{-1}^{2}\sqrt{1+4x^2}\,dx$; **(c)** $\approx 6{,}13$

19. **(a)** $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 y}\,dy$; **(c)** $\approx 3{,}82$

21. **(a)** $\int_{-1}^{3}\sqrt{1+(y+1)^2}\,dy$; **(c)** $\approx 9{,}29$

23. **(a)** $\int_{0}^{\pi/6}\sec x\,dx$; **(c)** $\approx 0{,}55$

25. Igen, $f(x) = \pm x + C$, ahol C valamilyen valós szám.

27. **(a)** $y = \sqrt{x}$ $(1,1)$ és $(4,2)$ között. **(b)** Csak egy. Ismerjük a függvény deriváltját és a függvényértéket egy x értékre.

29. **(a)** π; **(b)** π

6.4. Tehetetlenségi nyomaték és tömegközéppont

1. 1,2 m
3. $(L/4, L/4)$
5. $M_0 = 8$, $M = 8$, $\bar{x} = 1$

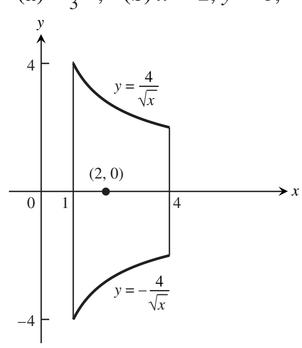
7. $M_0 = 15/2$, $M = 9/2$, $\bar{x} = 5/3$

9. $M_0 = 73/6$, $M = 5$, $\bar{x} = 73/30$

11. $M_0 = 3$, $M = 3$, $\bar{x} = 1$
13. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 12/5$
15. $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = -3/5$
17. $\bar{x} = 16/105$, $\bar{y} = 8/15$
19. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \pi/8$
21. $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = -2/5$
23. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{4-\pi}$
25. $\bar{x} = 3/2$, $\bar{y} = 1/2$

27. **(a)** $\frac{224\pi}{3}$; **(b)** $\bar{x} = 2$, $\bar{y} = 0$;

(c)



31. $\bar{x} = \bar{y} = 1/3$
33. $\bar{x} = a/3$, $\bar{y} = b/3$
35. $13\delta/6$
37. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{a\pi}{4}$

6.5. Forgásfelületek és Papposz tételei

1. **(a)** $2\pi\int_0^{\pi/4}\operatorname{tg}x\sqrt{1+\sec^4 x}\,dx$; **(c)** $\approx 3{,}84$

3. **(a)** $2\pi\int_1^2\frac{1}{y}\sqrt{1+y^{-4}}\,dy$; **(c)** $\approx 5{,}02$

5. **(a)** $2\pi\int_1^4(3-\sqrt{x})^2\sqrt{1+(1-3x^{-1/2})^2}\,dx$; **(c)** $\approx 63{,}37$

7. **(a)** $2\pi\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^y\operatorname{tg}t\,dt\right)\sec y\,dy$; **(c)** $\approx 2{,}08$

9. $4\pi\sqrt{5}$ **11.** $3\pi\sqrt{5}$

13. $98\pi/81$ **15.** 2π

17. $\pi(\sqrt{8}-1)/9$ **19.** $35\pi\sqrt{5}/3$

21. $253\pi/20$

25. $2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx$

27. Minden színből 226,2 litert kell rendelni.

31. $5\sqrt{2}\pi$ **33.** $8\pi^2$

35. $52\pi/3$ **37.** $3\pi\sqrt{5}$

41. $V=32\pi$, $S=32\sqrt{2}\pi$ **43.** $4\pi^2$

45. $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{2a}{\pi}$ **47.** $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{4b}{3\pi}$

49. $\sqrt{2}\pi a^3(4+3\pi)/6$ **51.** $\frac{2a^3}{3}$

6.6. Munka

1. 400 N·m **3.** 4 cm, 0,08 N/m

5. **(a)** 166 667 N/m, **(b)** 8,39 J és 33,33 J

7. 780 J **9.** 81000 J

13. 960 J

15. **(a)** 1944000 J **(b)** kb. 1 óra 5 perc
(c) A felső felének kiszivattyúzása 486000 J.

17. 152472 J **19.** 12723450 J

21. **(a)** 172243 J **(b)** 304943 J

23. 15 073 100,75 J **27.** 123 J

29. 96,5 J **31.** 139,3 J

33. **(a)** $r(y)=18-\sqrt{15^2-(y-110)^2}$, $110\le y\le 125$ m
(b) $\Delta V\approx\pi[18-\sqrt{225-(y-110)^2}]^2\Delta y$
(c) $W=8{,}208\cdot 10^7$ J

35. 0,682825 J **37.** $5{,}144\times 10^{10}$ J

6.7. A folyadék nyomása és a folyadékra ható erők

1. kb. 270 kN **3.** kb. 450 kN

5. **(a)** kb. 186,7 kN **(b)** kb. 191,5 kN

7. kb. 5,6 kN **9.** kb. 6,667 kN

11. **(a)** 403,2 N **(b)** 1,013 m

13. $30{,}7\ \mathrm{m}^3$ **15.** $wb/2$

17. Nem. A mozgatható vég 1,44 méternyit mozdul el az alatt az idő alatt, amíg a tartály megtelik.

19. 10,45 N ill. 17,11 N

21. **(a)** 17,778 kN **(b)** 41,3 cm-rel **(c)** Nem

Gyakorló feladatok

1. $\frac{9\pi}{280}$ **3.** π^2 **5.** $\frac{72\pi}{35}$

7. **(a)** 2π **(b)** π **(c)** $12\pi/5$ **(d)** $26\pi/5$

9. **(a)** 8π **(b)** $1088\pi/15$ **(c)** $512\pi/15$

11. $\pi(3\sqrt{3}-\pi)/3$

13. **(a)** $16\pi/15$ **(b)** $8\pi/5$ **(c)** $8\pi/3$ **(d)** $32\pi/5$

15. $28\pi/3\ \mathrm{m}^3$ **17.** $\frac{10}{3}$

19. $\frac{285}{8}$ **21.** 10

23. $\frac{9\pi}{2}$ **25.** $\bar{x}=0$, $\bar{y}=8/5$

27. $\bar{x}=3/2$, $\bar{y}=12/5$ **29.** $\bar{x}=9/5$, $\bar{y}=11/10$

31. $28\pi\sqrt{2}/3$ **33.** 4π

35. $76\pi/3$ **37.** 4640 J

39. 15 J, 60 J **41.** 298,57 kJ

43. 96,38 kJ, kb. 4 perc **45.** 106,667 kN

47. 12,672 kN **49.** $216w_1+360w_2$

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. $f(x)=\sqrt{\frac{2x-a}{\pi}}$

3. $f(x)=\sqrt{C^2-1}\,x+a$, ahol $C\ge 1$

5. $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\frac{n}{2n+1}$, $(0,1/2)$

9. **(a)** $\bar{x}=\bar{y}=4(a^2+ab+b^2)/(3\pi(a+b))$
(b) $(2a/\pi, 2a/\pi)$

11. $28/3$ **13.** $\frac{4h\sqrt{3mh}}{3}$ **15.** 10080 N

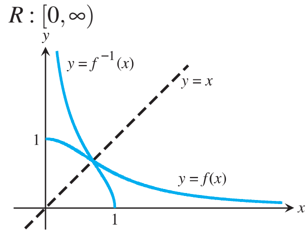
17. **(a)** $2h/3$ **(b)** $(6a^2+8ah+3h^2)/(6a+4h)$

7. fejezet

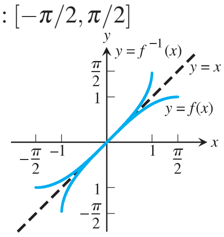
7.1. Inverz függvény deriváltja

1. Injektív **3.** Nem injektív **5.** Injektív

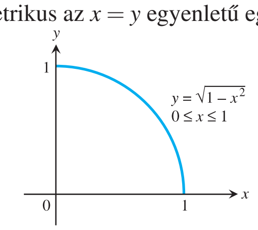
7. $D:(0;1]$, $R:[0,\infty)$



9. $D:[-1;1]$, $R:[-\pi/2,\pi/2]$



11. **(a)** Szimmetrikus az $x = y$ egyenletű egyenesre.



13. $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ **15.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

17. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

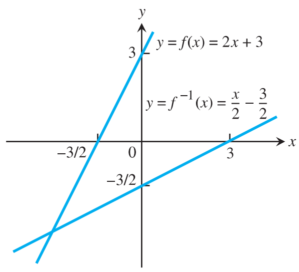
19. $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$; $D : (-\infty, \infty)$; $R : (-\infty, \infty)$

21. $f^{-1}(x) = 5\sqrt{x-1}$; $D : (-\infty, \infty)$; $R : (-\infty, \infty)$

23. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $D : (0, \infty)$; $R : (0, \infty)$

25. **(a)** $f^{-1}(x) = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2}$

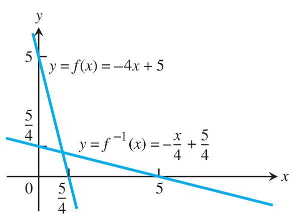
(b)



(c) 2, 1/2

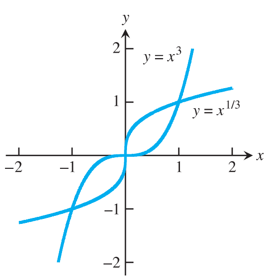
27. **(a)** $f^{-1}(x) = -\dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{4}$

(b)



(c) -4, $-1/4$

29. **(b)**



(c) Az $(1, 1)$ pontban f meredeksége 3, g meredeksége $1/3$; a $(-1, -1)$ pontban f meredeksége 3, g meredeksége $1/3$.

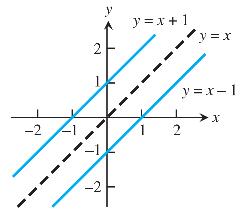
(d) az $y = x^3$ egyenletű görbe érintője az $x = 0$ helyen az $y = 0$ egyenletű egyenes; $y = \sqrt[3]{x}$ érintője az $x = 0$ helyen az $x = 0$ egyenletű egyenes.

31. $1/9$ **33.** 3

35. **(a)** $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{m}x$

(b) Az f^{-1} függvény grafikonja az origón átmenő $1/m$ meredekségű egyenes.

37. **(a)**



(b) $f^{-1}(x) = x - b$. Az f^{-1} függvény grafikonja párhuzamos f grafikonjával; a két egyenes az $x = y$ egyenletű egyenes ellenkező partjain helyezkedik el, attól egyenlő távolságra.

(c) A grafikonok párhuzamos, az $x = y$ egyenletű egyenes ellenkező partjain, attól egyenlő távolságra elhelyezkedő egyenesek.

41. Növekvő, és így injektív; $df^{-1}/dx = \dfrac{1}{9}x^{-2/3}$.

43. Csökkenő, és így injektív; $df^{-1}/dx = -\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$.

7.2. A természetes logaritmusfüggvény

1. **(a)** $\ln 3 - 2\ln 2$ **(b)** $2(\ln 2 - \ln 3)$

(c) $-\ln 2$ **(d)** $\dfrac{2}{3}\ln 3$

(e) $\ln 3 + \dfrac{1}{2}\ln 2$ **(f)** $\dfrac{1}{2}(3\ln 3 - \ln 2)$

3. **(a)** $\ln 5$ **(b)** $\ln(x-3)$ **(c)** $\ln t^2$

5. $1/x$ **7.** $2/t$ **9.** $-1/x$

11. $\dfrac{1}{\theta+1}$ **13.** $3/x$ **15.** $2\ln t + (\ln t)^2$

17. $x^3 \ln x$ **19.** $\dfrac{1-\ln t}{t^2}$ **21.** $\dfrac{1}{x(1+\ln x)^2}$

23. $\dfrac{1}{x\ln x}$ **25.** $2\cos(\ln\theta)$ **27.** $-\dfrac{3x+2}{2x(x+1)}$

29. $\dfrac{2}{t(1-\ln t)^2}$ **31.** $\dfrac{\operatorname{tg}(\ln\theta)}{\theta}$ **33.** $\dfrac{10x}{x^2+1} + \dfrac{1}{2(1-x)}$

35. $2x\ln|x| - x\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{2}}$ **37.** $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$

39. $\ln|y^2 - 25| + C$ **41.** $\ln 3$

43. $(\ln 2)^2$ **45.** $\dfrac{1}{\ln 4}$ **47.** $\ln|6 + 3\operatorname{tg} t| + C$

49. $\ln 2$ **51.** $\ln 27$ **53.** $\ln(1+\sqrt{x}) + C$

55. $\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{x(x+1)}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}$

57. $\left(\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\dfrac{t}{t+1}}\left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}(t+1)^{3/2}}$

59. $\sqrt{\theta+3}\sin\theta\left(\dfrac{1}{2(\theta+3)} + \operatorname{ctg}\theta\right)$

61. $t(t+1)(t+2)\left[\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{t+2}\right] = 3t^2 + 6t + 2$

63. $\dfrac{\theta+5}{\theta\cos\theta}\left[\dfrac{1}{\theta+5} - \dfrac{1}{\theta} + \operatorname{tg}\theta\right]$

65. $\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{2}{3(x+1)}\right]$

67. $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x-2)}{x^2+1}}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

69. **(a)** Maximum az $x=0$ helyen 0; minimum az $x=\pi/3$ helyen $-\ln 2$.

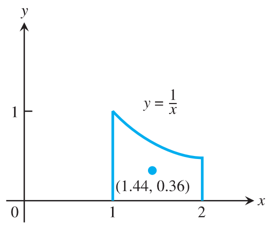
(b) Maximum az $x=1$ helyen 1; minimum az $x=1/2$ és $x=2$ helyeken $\cos(\ln 2)$.

71. $\ln 16$ **73.** $4\pi\ln 4$ **75.** $\pi\ln 16$

77. **(a)** $6+\ln 2$ **(b)** $8+\ln 9$

79. **(a)** $\bar{x}\approx 1{,}44$; $\bar{y}\approx 0{,}36$

(b)



81. $y=x+\ln|x|+2$ **83.** **(b)** 0,00469

7.3. Az exponenciális függvény

1. **(a)** 7,2 **(b)** $\dfrac{1}{x^2}$ **(c)** $\dfrac{x}{y}$

3. **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** $-x^x-y^2$

5. e^{2t+4} **7.** $e^{5t}+40$ **9.** $y=2xe^x+1$

11. **(a)** $k=\ln 2$ **(b)** $k=(1/10)\ln 2$

(c) $k=1\,000\ln a$

13. **(a)** $t=-10\ln 3$ **(b)** $t=-\dfrac{\ln 2}{k}$

(c) $t=\dfrac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}2}$

15. $4(\ln x)^2$ **17.** $-5e^{-5x}$

19. $-7e^{5-7x}$ **21.** xe^x

23. x^2e^x **25.** $2e^{\theta}\cos\theta$

27. $2\theta e^{-\theta^2}\sin\left(e^{-\theta^2}\right)$ **29.** $\dfrac{1-t}{t}$

31. $1/(1+e^{\theta})$ **33.** $e^{\cos t}(1-t\sin t)$

35. $(\sin x)/x$ **37.** $\dfrac{ye^y\cos x}{1-ye^y\sin x}$

39. $\dfrac{2e^{2x}-\cos(x+3y)}{3\cos(x+3y)}$ **41.** $\dfrac{1}{3}e^{3x}-5e^{-x}+C$

43. 1 **45.** $8e^{x+1}+C$

47. 2 **49.** $2e^{\sqrt{r}}+C$

51. $-e^{-t^2}+C$ **53.** $-e^{1/x}+C$

55. e **57.** $\dfrac{1}{\pi}e^{\sec \pi t}+C$

59. 1 **61.** $\ln(1+e^r)+C$

63. $y=1-\cos(e^t-2)$ **65.** $y=2(e^{-x}+x)-1$

67. Maximum az $x=0$ helyen 1; minimum az $x=\ln 2$ helyen $2-\ln 2$.

69. Abszolút maximum az $x=1/\sqrt{e}$ helyen $1/(2e)$.

71. 2 **73.** $y=e^{x/2}-1$

75. **(a)** $\dfrac{d}{dx}(x\ln x-x+C)=x\cdot\dfrac{1}{x}+\ln x-1+0=\ln x$

(b) $\dfrac{1}{e-1}$

77. **(b)** $|\text{hiba}|\approx 0{,}02140$ **79.** 2,71828183

7.4. Az a^x és a $\log_a x$ függvények

1. **(a)** 7 **(b)** $\sqrt{2}$ **(c)** 75

(d) 2 **(e)** 0,5 **(f)** -1

3. **(a)** $\sqrt{x}$ **(b)** x^2 **(c)** $\sin x$

5. **(a)** $\dfrac{\ln 3}{\ln 2}$ **(b)** 3 **(c)** 2

7. $x=12$ **9.** $x=3$ vagy $x=2$

11. $2^x\ln x$ **13.** $\left(\dfrac{\ln 5}{2\sqrt{s}}\right)5^{\sqrt{s}}$

15. $\pi x^{\pi-1}$ **17.** $-\sqrt{2}\cos\theta^{\sqrt{2}-1}\sin\theta$

19. $7^{\sec\theta}(\ln 7)^2(\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta)$ **21.** $(3\cos 3t)(2^{\sin 3t})\ln 2$

23. $\dfrac{1}{\theta\ln 2}$ **25.** $\dfrac{3}{x\ln 4}$

27. $\dfrac{2(\ln r)}{r(\ln 2)(\ln 4)}$ **29.** $\dfrac{-2}{(x+1)(x-1)}$

31. $\sin(\log_7\theta)+\dfrac{1}{\ln 7}\cos(\log_7\theta)$

33. $\dfrac{1}{\ln 5}$ **35.** $\dfrac{1}{t}(\log_2 3)3^{\log_2 t}$ **37.** $\dfrac{1}{t}$

39. $(x+1)^x\left(\dfrac{x}{x+1}+\ln(x+1)\right)$

41. $(\sqrt{t})^t\left(\dfrac{\ln t}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$ **43.** $(\sin x)^x(\ln\sin x+x\,\mathrm{ctg}\,x)$

45. $(x^{\ln x})\left(\dfrac{\ln x^2}{x}\right)$ **47.** $\dfrac{5^x}{\ln 5}+C$

49. $\dfrac{1}{2\ln 2}$ **51.** $\dfrac{1}{\ln 2}$

53. $\dfrac{6}{\ln 7}$ **55.** 32 760

57. $\dfrac{3x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1}+C$ **59.** $3^{\sqrt{2}+1}$

61. $\dfrac{1}{\ln 10}\left(\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right)+C$ **63.** $2(\ln 2)^2$

65. $\dfrac{3\ln 2}{2}$ **67.** $\ln 10$

69. $(\ln 10)\ln|\ln x|+C$ **71.** $\ln(\ln x)$, $x>1$

73. $-\ln x$ **75.** $2\ln 5$

77. $[10^{-7{,}44}, 10^{-7{,}37}]$ **79.** $k=10$

81. **(a)** 10^{-7} **(b)** 7 **(c)** 1 : 1

83. $x\approx 0{,}76666$

85. **(a)** $L(x)=1+(\ln 2)x\approx 0{,}69x+1$

87. **(a)** 1,89279 **(b)** $-0{,}35621$

(c) 0,94575 **(d)** $-2{,}80735$

(e) 5,29595 **(f)** 0,97041

(g) $-1{,}03972$ **(h)** $-1{,}61181$

7.5. Exponenciális ütemű változások

1. **(a)** $-0{,}00001$ **(b)** 10 536 év **(c)** 82%

3. 54,88 g **5.** kb. 18 m

7. $2{,}8147498 \cdot 10^{14}$

9. **(a)** 8 év **(b)** 32,02 év

11. 15,28 év

13. **(a)** $A_0 e^{0,2}$ **(b)** 17,33 év; 27,47 év

15. 4,50% **17.** 0,585 nap

21. **(a)** 17,5 perc **(b)** 13,26 perc

23. -3°C **25.** kb. 6659 év **27.** 41 éves

7.6. Relatív növekedési ütem

1. **(a)** lassabban **(b)** lassabban
(c) lassabban **(d)** gyorsabban
(e) lassabban **(f)** lassabban
(g) ugyanolyan ütemben **(h)** lassabban

3. **(a)** ugyanolyan ütemben **(b)** gyorsabban
(c) ugyanolyan ütemben **(d)** ugyanolyan ütemben
(e) lassabban **(f)** gyorsabban
(g) lassabban **(h)** ugyanolyan ütemben

5. **(a)** ugyanolyan ütemben **(b)** ugyanolyan ütemben
(c) ugyanolyan ütemben **(d)** gyorsabban
(e) gyorsabban **(f)** ugyanolyan ütemben
(g) lassabban **(h)** gyorsabban

7. d, a, c, b

9. **(a)** hamis **(b)** hamis **(c)** igaz
(d) igaz **(e)** igaz **(f)** igaz
(g) hamis **(h)** igaz

13. Ha f fokszáma nem nagyobb, mint g-é.

15. 1, 1

21. **(b)** $\ln(e^{17\,000\,000}) = 17\,000\,000 < (e^{17\cdot 10^6})^{1/10^6} = e^{17} \approx$ $\approx 24\,154\,952{,}75$,

(c) $x \approx 3{,}4306311 \cdot 10^{15}$,

(d) az $x \approx 3{,}4306311 \cdot 10^{15}$ helyen metszik egymást.

23. **(a)** Az algoritmusnak $O(n \log_2 n)$ lépésre van szüksége.

25. Szekvenciális keresésnél akár egymillió lépés, bináris keresés esetében legfeljebb 20.

7.7. Inverz trigonometrikus függvények

1. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $-\pi/3$ **(c)** $\pi/6$

3. **(a)** $-\pi/6$ **(b)** $\pi/4$ **(c)** $-\pi/3$

5. **(a)** $\pi/3$ **(b)** $3\pi/4$ **(c)** $\pi/6$

7. **(a)** $3\pi/4$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $2\pi/3$

9. **(a)** $\pi/4$ **(b)** $-\pi/3$ **(c)** $\pi/6$

11. **(a)** $3\pi/4$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $2\pi/3$

13. $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, $\sec\alpha = \frac{13}{12}$, $\csc\alpha = \frac{13}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$

15. $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2$, $\csc\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$

17. $1/\sqrt{2}$ **19.** $-1/\sqrt{3}$

21. $\frac{4+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ **23.** 1

25. $-\sqrt{2}$ **27.** $\pi/6$

29. $\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$ **31.** $\sqrt{9y^2-1}$

33. $\sqrt{1-x^2}$ **35.** $\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$

37. $\frac{\sqrt{9-4y^2}}{3}$ **39.** $\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$

41. $\pi/2$ **43.** $\pi/2$

45. $\pi/2$ **47.** 0

49. $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ **51.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$

53. $\frac{1}{|2s+1|\sqrt{s^2+s}}$ **55.** $\frac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}}$

57. $\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$ **59.** $\frac{-1}{2\sqrt{t}(1+t)}$

61. $\frac{1}{(\operatorname{tg}^{-1}x)(1+x^2)}$

63. $\frac{-e^t}{|e^t|\sqrt{(e^t)^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{e^{2t}-1}}$

65. $\frac{-2s^n}{\sqrt{1-s^2}}$ **67.** 0

69. $\arcsin x$ **71.** $\arcsin\frac{x}{7}+C$

73. $\frac{1}{\sqrt{17}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{17}}+C$ **75.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsec}\left|\frac{5x}{\sqrt{2}}\right|$

77. $2\pi/3$ **79.** $\pi/16$

81. $-\pi/12$ **83.** $\frac{3}{2}\arcsin 2(r-1)+C$

85. $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C$ **87.** $\frac{1}{4}\operatorname{arcsec}\left|\frac{2x-1}{2}\right|+C$

89. π **91.** $\pi/12$

93. $\frac{1}{2}\arcsin y^2+C$ **95.** $\arcsin(x-2)+C$

97. π

99. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y-1}{2}\right)+C$

101. 2π

103. $\operatorname{arcsec}|x+1|+C$

105. $e^{\arcsin x}$

107. $\frac{1}{3}\left(\arcsin(x)^3\right)+C$

109. $\ln|\operatorname{arctg} y|+C$

111. $\sqrt{3}-1$

113. 5

115. 2

121. $y=\arcsin x$

123. $\operatorname{arcsec} x+\frac{2\pi}{3},\quad x>1$

127. $\theta=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\approx 54{,}7^\circ$

133. **(a)** Értelmezve van: létezik szög, amelynek tangense 2,

(b) nincs értelmezve: nincs olyan szög, amelynek koszinusza 2.

135. **(a)** Nincs értelmezve: nincs olyan szög, amelynek szekánsa 0,

(b) nincs értelmezve: nincs olyan szög, amelynek szinusza $\sqrt{2}$.

137. $\sqrt{5}$ m.

139. Igen, $\arcsin x$ és $-\arccos x$ a $\pi/2$ konstansban különbözik.

147. $\pi^2/2$

149. **(a)** $\pi^2/2$ **(b)** 2π

151. **(a)** 0,84107 **(b)** −0,72973 **(c)** 0,46365

153. **(a)** Értelmezési tartomány: az összes valós szám a $\frac{\pi}{2}+k\pi$ alakúak kivételével (k egész szám); értékkészlet: $-\pi/2<y<\pi/2$,

(b) D: $-\infty<x<\infty$; R: $-\infty<y<\infty$.

155. **(a)** D: $-\infty<x<\infty$; R: $0\le y\le\pi$,

(b) D: $-1\le x\le 1$; R: $-1\le y\le 1$.

157. A grafikonok azonosak.

7.8. Hiperbolikus függvények

1. $\operatorname{ch} x=5/4$, $\operatorname{th} x=-3/5$, $\operatorname{cth} x=-5/3$, $\operatorname{sech} x=4/5$, $\operatorname{csch} x=-4/3$

3. $\operatorname{sh} x=8/15$, $\operatorname{th} x=8/17$, $\operatorname{cth} x=17/8$, $\operatorname{sech} x=15/17$, $\operatorname{csch} x=15/8$

5. $x+\frac{1}{x}$

7. e^{5x}

9. e^{4x}

13. $2\operatorname{ch}\frac{x}{3}$

15. $\operatorname{sech}^2\sqrt{t}+\frac{\operatorname{th}\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

17. $\operatorname{cth} z$

19. $(\ln\operatorname{sech}\theta)(\operatorname{sech}\theta\operatorname{th}\theta)$

21. $\operatorname{th}^3 v$

23. 2

25. $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$

27. $\frac{1}{1+\theta}-\operatorname{arth}\theta$

29. $\frac{1}{2\sqrt{t}}-\operatorname{arch}\sqrt{t}$

31. $-\operatorname{arsech} x$

33. $\frac{\ln 2}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2\theta}}}$

35. $|\sec x|$

41. $\frac{\operatorname{ch} 2x}{2}+C$

43. $12\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}-\ln 3\right)+C$

45. $7\ln|e^{x/7}+e^{-x/7}|+C$

47. $\operatorname{th}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$

49. $-2\operatorname{sech}\sqrt{t}+C$

51. $\ln\frac{5}{2}$

53. $\frac{3}{32}+\ln 2$

55. $e-e^{-1}$

57. 3/4

59. $\frac{3}{8}+\ln\sqrt{2}$

61. $\ln(2/3)$

63. $\frac{-\ln 3}{2}$

65. $\ln 3$

67. **(a)** $\operatorname{arsh}\sqrt{3}$ **(b)** $\ln(\sqrt{3}+2)$

69. **(a)** $\operatorname{arcth} 2-\operatorname{arcth}(5/4)$ **(b)** $\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$

71. **(a)** $-\operatorname{arsech}\frac{12}{13}+\operatorname{arsech}\frac{4}{5}$

(b) $-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-(12/13)^2}}{12/13}\right)+\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-(4/5)^2}}{4/5}\right)=$

$=-\ln\frac{3}{2}+\ln 2=\ln\frac{4}{3}$

73. **(a)** 0 **(b)** 0

75. **(b)** (i) $f(x)=\frac{2f(x)}{2}+0=f(x)$

(ii) $f(x)=0+\frac{2f(x)}{2}=f(x)$

77. **(b)** $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ **(c)** 196,3 km/h

79. $y=\operatorname{arsech} x-\sqrt{1-x^2}$

81. 2π

83. $\frac{6}{5}$

85. $16\pi\ln 6+\frac{455\pi}{9}$

89. **(c)** $a\approx 0{,}108738$ **(d)** 275 N

Gyakorló feladatok

1. $-2e^{-x/5}$

3. xe^{4x}

5. $\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}=2\operatorname{ctg}\theta$

7. $\frac{2}{(\ln 2)x}$

9. $-8^{-t}\ln 8$

11. $18x^{2,6}$

13. $(x+2)^{x+2}(\ln(x+2)+1)$

15. $-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

17. $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$

19. $\operatorname{arctg} t+\frac{t}{1+t^2}-\frac{1}{2t}$

21. $\frac{1-z}{\sqrt{z^2-1}}+\operatorname{arcsec} z$

23. -1

25. $\frac{2(x^2+1)}{\sqrt{\cos 2x}}\left[\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{tg} 2x\right]$

27. $5\left[\frac{(t+1)(t-1)}{(t-2)(t+3)}\right]^5\left[\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+3}\right]$

29. $\frac{1}{\sqrt{\theta}}(\sin\theta)^{\sqrt{\theta}}\left(\frac{\ln\sqrt{\sin\theta}}{2}+\theta\operatorname{ctg}\theta\right)$

31. $-\cos e^x+C$

33. $\operatorname{tg}(e^x-7)+C$

35. $e^{\operatorname{tg} x}+C$

37. $\frac{-\ln 7}{3}$

39. $\ln 8$

41. $\ln(9/25)$

43. $-[\ln|\cos(\ln v)|]+C$ **45.** $-\dfrac{1}{2}(\ln x)^{-2}+C$

47. $-\mathrm{ctg}(1+\ln r)+C$ **49.** $\dfrac{1}{2\ln 3}3^{x^2}+C$

51. $3\ln 7$ **53.** $15/16+\ln 2$

55. $e-1$ **57.** $1/6$ **59.** $9/14$

61. $\dfrac{1}{3}\left[(\ln 4)^3-(\ln 2)^3\right]$ vagy $\dfrac{7}{3}(\ln 2)^3$

63. $\dfrac{9\ln 2}{4}$ **65.** π **67.** $\pi/\sqrt{3}$

69. $\operatorname{arcsec}|2y|+C$ **71.** $\pi/12$

73. $\arcsin(x+1)+C$ **75.** $\pi/2$

77. $\dfrac{1}{3}\operatorname{arcsec}\left(\dfrac{t+1}{3}\right)+C$ **79.** $y=\dfrac{\ln 2}{\ln(3/2)}$

81. $y=\ln x-\ln 3$ **83.** $y=\dfrac{1}{1-e^x}$

85. $\ln 10$ **87.** $\ln 2$ **89.** 5

91. $-\infty$ **93.** 1 **95.** e^3

97. **(a)** ugyanolyan ütemben **(b)** ugyanolyan ütemben
(c) gyorsabban **(d)** gyorsabban
(e) ugyanolyan ütemben **(f)** ugyanolyan ütemben

99. **(a)** igaz **(b)** hamis
(c) hamis **(d)** igaz
(e) igaz **(f)** igaz

101. $1/3$

103. Abszolút maximum az $x=e/2$ helyen 0; abszolút minimum az $x=0{,}5$ helyen $-0{,}5$.

105. 1 **107.** $1/e$ m/s

109. $1/\sqrt{2}$ egység hosszú, $1/\sqrt{e}$ egység magas; $A=1/\sqrt{2e}\approx$ $\approx 0{,}43$ területegység.

111. $\ln 5x-\ln 3x=\ln(5/3)$ **113.** $1/2$

115. **(a)** Abszolút maximum az $x=e^2$ helyen $2/e$, inflexiós pont: $(e^{8/3},(8/3)e^{-4/3})$; konvex az $(e^{8/3},\infty)$, konkáv a $(0,e^{8/3})$ intervallumon.

(b) Abszolút maximum az $x=0$ helyen 1; inflexiós pontok: $(\pm 1/\sqrt{2},1/\sqrt{e})$, konvex a $(-\infty,-1/\sqrt{2})\cup(1/\sqrt{2},\infty)$ halmazon, konkáv a $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ intervallumon.

(c) Abszolút maximum az $x=0$ helyen 1; inflexiós pont: $(1,2/e)$; konvex az $(1,\infty)$, konkáv a $(-\infty,1)$ intervallumon.

117. 18 935 év **119.** $20(5-\sqrt{17})$ m

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. $\pi/2$ **3.** $1/\sqrt{e}$ **5.** $\ln 2$

7. **(a)** 1 **(b)** $\pi/2$ **(c)** π

9. $\dfrac{1}{\ln 2}$, $\dfrac{1}{2\ln 2}$, $2:1$ **11.** $x=2$

13. $2/17$ **21.** $\bar{x}=\dfrac{\ln 4}{\pi}$, $\bar{y}=0$ **25.** **(b)** $61°$

8. fejezet

8.1. Egyszerű integrációs formulák

1. $2\sqrt{8x^2+1}+C$ **3.** $2(\sin v)^{3/2}+C$

5. $\ln 5$ **7.** $2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$

9. $-\dfrac{1}{7}\ln|\sin(3-7x)|+C$

11. $-\ln|\csc(e^\theta+1)+\mathrm{ctg}(e^\theta+1)|+C$

13. $3\ln\left|\sec\dfrac{t}{3}+\mathrm{tg}\,\dfrac{t}{3}\right|+C$

15. $-\ln|\csc(s-\pi)+\mathrm{ctg}(s-\pi)|+C$

17. 1 **19.** $e^{\mathrm{tg}\,v}+C$ **21.** $\dfrac{3^{(x+1)}}{\ln 3}+C$

23. $\dfrac{2^{\sqrt{w}}}{\ln 2}+C$ **25.** $3\,\mathrm{arctg}\,3u+C$ **27.** $\pi/18$

29. $\arcsin s^2+C$ **31.** $6\operatorname{arcsec}|5x|+C$ **33.** $\mathrm{arctg}\,e^x+C$

35. $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ **37.** 2π **39.** $\arcsin(t-2)+C$

41. $\operatorname{arcsec}|x+1|+C$, ha $|x+1|>1$

43. $\mathrm{tg}\,x-2\ln|\csc x+\mathrm{ctg}\,x|-\mathrm{ctg}\,x-x+C$

45. $x+\sin 2x+C$ **47.** $x-\ln|x+1|+C$

49. $7+\ln 8$ **51.** $2t^2-t+2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{t}{2}+C$

53. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$ **55.** $\sqrt{2}$

57. $\mathrm{tg}\,x-\sec x+C$ **59.** $\ln|1+\sin\theta|+C$

61. $\mathrm{ctg}\,x+x+\csc x+C$ **63.** 4

65. $\sqrt{2}$ **67.** 2

69. $\ln\left|\sqrt{2}+1\right|-\ln\left|\sqrt{2}-1\right|$ **71.** $4-\dfrac{\pi}{2}$

73. $-\ln|\csc(\sin\theta)+\mathrm{ctg}(\sin\theta)|+C$

75. $\ln|\sin x|+\ln|\cos x|+C$ **77.** $12\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{y}\right)+C$

79. $\operatorname{arcsec}\left|\dfrac{x-1}{7}\right|+C$ **81.** $\ln|\sec(\mathrm{tg}\,t)|+C$

83. **(a)** $\sin\theta-\dfrac{1}{3}\sin^3\theta+C$

(b) $\sin\theta-\dfrac{2}{3}\sin^3\theta+\dfrac{1}{5}\sin^5\theta+C$

(c) $$\int\cos^9\theta\,d\theta=\int\cos^8\theta(\cos\theta)\,d\theta=$$
$$=\int(1-\sin^2\theta)^4(\cos\theta)\,d\theta$$

85. **(a)** $$\int\mathrm{tg}^3\,\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\,\theta-\int\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta=$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\,\theta+\ln|\cos\theta|+C$$

(b) $$\int\mathrm{tg}^5\,\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\mathrm{tg}^4\,\theta-\int\mathrm{tg}^3\,\theta\,d\theta$$

(c) $$\int\mathrm{tg}^7\,\theta\,d\theta=\frac{1}{6}\mathrm{tg}^6\,\theta-\int\mathrm{tg}^5\,\theta\,d\theta$$

(d) $$\int\mathrm{tg}^{2k+1}\,\theta\,d\theta=\frac{1}{2k}\mathrm{tg}^{2k}\,\theta-\int\mathrm{tg}^{2k-1}\,\theta\,d\theta$$

87. $2\sqrt{2}-\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$ **89.** π^2

91. $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ **93.** $\bar{x}=0,\quad \bar{y}=\dfrac{1}{\ln\left(2\sqrt{2}+3\right)}$

8.2. Parciális integrálás

1. $-2x\cos(x/2)+4\sin(x/2)+C$

3. $t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C$ **5.** $\ln 4-\dfrac{3}{4}$

7. $y\operatorname{arctg} y-\ln\sqrt{1+y^2}+C$ **9.** $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|+C$

11. $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$ **13.** $(x^2-7x+7)e^x+C$

15. $(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-120)e^x+C$

17. $\dfrac{\pi^2-4}{8}$ **19.** $\dfrac{5\pi-3\sqrt{3}}{9}$

21. $\dfrac{1}{2}\left(-e^\theta\cos\theta+e^\theta\sin\theta\right)+C$

23. $\dfrac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C$

25. $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{3s+9}e^{\sqrt{3s+9}}-e^{\sqrt{3s+9}}\right)+C$

27. $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2-\dfrac{\pi^2}{18}$

29. $\dfrac{1}{2}\Big(-x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)\Big)+C$

31. **(a)** π **(b)** 3π **(c)** 5π **(d)** $(2n+1)\pi)$

33. $2\pi(1-\ln 2)$ **35.** **(a)** $\pi(\pi-2)$ **(b)** 2π

37. $\dfrac{1}{2\pi}(1-e^{-2\pi})$ **39.** $u=x^n,\ dv=\cos x\,dx$

41. $u=x^n,\ dv=e^{ax}\,dx$

43. $x\arcsin x+\cos(\arcsin x)+C$

45. $x\operatorname{arcsec} x-\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$ **47.** igen

49. **(a)** $x\operatorname{arsh} x-\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)+C$ **(b)** $x\operatorname{arsh} x-(1+x^2)^{1/2}+C$

8.3. Racionális törtfüggvények integrálása parciális törtekre bontással

1. $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x-2}$ **3.** $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2}$

5. $\dfrac{-2}{z}+\dfrac{-1}{z^2}+\dfrac{2}{z-1}$ **7.** $1+\dfrac{17}{t-3}+\dfrac{-12}{t-2}$

9. $\dfrac{1}{2}\left(\ln|1+x|-\ln|1-x|\right)+C$

11. $\dfrac{1}{7}\ln\left|(x+6)^2(x-1)^5\right|+C$ **13.** $(\ln 15)/2$

15. $-\dfrac{1}{2}\ln|t|+\dfrac{1}{6}\ln|t+2|+\dfrac{1}{3}\ln|t-1|+C$

17. $3\ln 2-2$ **19.** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|-\dfrac{x}{2(x^2-1)}+C$

21. $(\pi+2\ln 2)/8$ **23.** $\operatorname{arctg} y-\dfrac{1}{y^2+1}+C$

25. $-(s-1)^{-2}+(s-1)^{-1}+\operatorname{arctg} s+C$

27. $\dfrac{-1}{\theta^2+2\theta+2}+\ln(\theta^2+2\theta+2)-\operatorname{arctg}(\theta+1)+C$

29. $x^2+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|+C$

31. $9x+2\ln|x|+\dfrac{1}{x}+7\ln|x-1|+C$

33. $\dfrac{y^2}{2}-\ln|y|+\dfrac{1}{2}\ln(1+y^2)+C$

35. $\ln\left(\dfrac{e^t+1}{e^t+2}\right)+C$ **37.** $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{\sin y-2}{\sin y+3}\right|+C$

39. $\dfrac{(\operatorname{arctg} 2x)^2}{4}-3\ln|x-2|+\dfrac{6}{x-2}+C$

41. $x=\ln|t-2|-\ln|t-1|+\ln 2$

43. $x=\dfrac{6t}{t+2}-1$ **45.** $3\pi\ln 25$ **47.** 1,10

49. **(a)** $x=\dfrac{1000e^{4t}}{499+e^{4t}}$ **(b)** 1,55 nap

51. **(a)** $\dfrac{22}{7}-\pi$ **(b)** 0,04%
(c) a terület kisebb mint 0,003

8.4. Trigonometrikus integrálok

1. $8/15$ **3.** $4/3$ **5.** $16/35$ **7.** 3π

9. π **11.** 2 **13.** 1 **15.** 4

17. 2 **19.** $2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ **21.** $\sqrt{2}$

23. $2\sqrt{3}+\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ **25.** $4/3$

27. $4/3$ **29.** $2(1-\ln 2)$ **31.** $\dfrac{4}{3}-\ln\sqrt{3}$

33. $-6/5$ **35.** π **37.** 0

39. $\dfrac{2\pi\left(\left(9\sqrt[3]{4}+1\right)^{3/2}-1\right)}{27}$ **41.** $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

43. $\pi^2/2$

8.5. Trigonometrikus helyettesítések

1. $\ln\left|\sqrt{9+y^2}+y\right|+C$ **3.** $\pi/4$

5. $\pi/6$ **7.** $\dfrac{25}{2}\arcsin\dfrac{t}{5}+\dfrac{t\sqrt{25-t^2}}{2}+C$

9. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{2x}{7}+\dfrac{\sqrt{4x^2-49}}{7}\right|+C$

11. $7\left(\dfrac{\sqrt{y^2-49}}{7}-\operatorname{arcsec}\dfrac{y}{7}\right)+C$

13. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$ **15.** $\dfrac{1}{3}(x^2+4)^{3/2}-4\sqrt{x^2+4}+C$

17. $\dfrac{-2\sqrt{4-w^2}}{w}+C$ **19.** $4\sqrt{3}-4\pi/3$

21. $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}+C$ **23.** $-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5+C$

25. $2\,\mathrm{arctg}\,2x+\dfrac{4x}{(4x^2+1)}+C$ **27.** $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^3+C$

29. $\ln 9-\ln\left(1+\sqrt{10}\right)$ **31.** $\pi/6$

33. $\mathrm{arcsec}\,x+C$ **35.** $\sqrt{x^2-1}+C$

37. $y=2\left(\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2}-\mathrm{arcsec}\,\dfrac{x}{2}\right)$

39. $y=\dfrac{3}{2}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2}-\dfrac{3\pi}{8}$ **41.** $3\pi/4$

43. $\dfrac{2}{1-\mathrm{tg}(x/2)}+C$ **45.** 1

47. $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$ **49.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\mathrm{tg}(t/2)+1-\sqrt{2}}{\mathrm{tg}(t/2)+1+\sqrt{2}}\right|+C$

51. $\ln\left|\dfrac{1+\mathrm{tg}(\theta/2)}{1-\mathrm{tg}(\theta/2)}\right|+C$

8.6. Integrál táblázatok és matematikai programcsomagok

1. $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x-3}{3}}\right)+C$

3. $\sqrt{x-2}\left(\dfrac{2(x-2)}{3}+4\right)+C$

5. $\dfrac{(2x-3)^{3/2}(x+1)}{5}+C$

7. $\dfrac{-\sqrt{9-4x}}{x}-\dfrac{2}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{9-4x}-3}{\sqrt{9-4x}+3}\right|+C$

9. $\dfrac{(x+2)(2x-6)\sqrt{4x-x^2}}{6}+4\arcsin\left(\dfrac{x-2}{2}\right)+C$

11. $-\dfrac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{7+x^2}}{x}\right|+C$

13. $\sqrt{4-x^2}-2\ln\left|\dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C$

15. $\dfrac{p}{2}\sqrt{25-p^2}+\dfrac{25}{2}\arcsin\dfrac{p}{5}+C$

17. $2\arcsin\dfrac{r}{2}-\dfrac{1}{2}r\sqrt{4-r^2}+C$

19. $-\dfrac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{3}\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)\right)+C$

21. $\dfrac{e^{2t}}{13}(2\cos 3t+3\sin 3t)+C$

23. $\dfrac{x^2}{2}\arccos x+\dfrac{1}{4}\arcsin x-\dfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$

25. $\dfrac{s}{18(9-s^2)}+\dfrac{1}{108}\ln\left|\dfrac{s+3}{s-3}\right|+C$

27. $-\dfrac{\sqrt{4x+9}}{x}+\dfrac{2}{3}\ln\left|\dfrac{\sqrt{4x+9}-3}{\sqrt{4x+9}+3}\right|+C$

29. $2\sqrt{3t-4}-4\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{3t-4}{4}}+C$

31. $\dfrac{x^3}{3}\,\mathrm{arctg}\,x-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$

33. $-\dfrac{\cos 5x}{10}-\dfrac{\cos x}{2}+C$

35. $8\left(\dfrac{\sin(7t/2)}{7}-\dfrac{\sin(9t/2)}{9}\right)+C$

37. $6\sin(\theta/12)+\dfrac{6}{7}\sin(7\theta/12)+C$

39. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x+C$

41. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C$

43. $\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+C$

45. $\sqrt{1-\sin^2 t}-\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\right|+C$

47. $\ln\left|\ln y+\sqrt{3+(\ln y)^2}\right|+C$

49. $\ln\left|3r+\sqrt{9r^2-1}\right|+C$

51. $x\arccos\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\arcsin\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C$

53. $-\dfrac{\sin^4 2x\cos 2x}{10}-\dfrac{2\sin^2 2x\cos 2x}{15}-\dfrac{4\cos 2x}{15}+C$

55. $\dfrac{\cos^3 2\pi t\sin 2\pi t}{\pi}+\dfrac{3}{2}\dfrac{\cos 2\pi t\sin 2\pi t}{\pi}+3t+C$

57. $\dfrac{\sin^3 2\theta\cos^2 2\theta}{10}+\dfrac{\sin^3 2\theta}{15}+C$

59. $\dfrac{2}{3}\,\mathrm{tg}^3\,t+C$ **61.** $\mathrm{tg}^2\,2x-2\ln|\sec 2x|+C$

63. $8\left(-\dfrac{1}{3}\,\mathrm{ctg}^3\,t+\mathrm{ctg}\,t+t\right)+C$

65. $\dfrac{(\sec\pi x)(\mathrm{tg}\,\pi x)}{\pi}+\dfrac{1}{\pi}\ln|\sec\pi x+\mathrm{tg}\,\pi x|+C$

67. $\dfrac{\sec^2 3x\,\mathrm{tg}\,3x}{3}+\dfrac{2}{3}\,\mathrm{tg}\,3x+C$

69. $\dfrac{-\csc^3 x\,\mathrm{ctg}\,x}{4}-\dfrac{3\csc x\,\mathrm{ctg}\,x}{8}-\dfrac{3}{8}\ln|\csc x+\mathrm{ctg}\,x|+C$

71. $4x^4(\ln x)^2-2x^4(\ln x)+\dfrac{x^2}{2}+C$

73. $\dfrac{e^{3x}}{9}(3x-1)+C$

75. $2x^3e^{x/2}-12x^2e^{x/2}+96e^{x/2}\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+C$

77. $\dfrac{x^2 2^x}{\ln 2}-\dfrac{2}{\ln 2}\left(\dfrac{x2^x}{\ln 2}-\dfrac{2^x}{(\ln 2)^2}\right)+C$

79. $\dfrac{x\pi^x}{\ln\pi}-\dfrac{\pi^x}{(\ln\pi)^2}+C$

81. $\dfrac{1}{2}\left[\sec(e^t-1)\,\mathrm{tg}(e^t-1)+\ln|\sec(e^t-1)+\mathrm{tg}(e^t-1)|\right]+C$

83. $\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$ **85.** $\pi/3$

87. $\dfrac{1}{120}\,\mathrm{sh}^4\,3x\,\mathrm{ch}\,3x-\dfrac{1}{90}\,\mathrm{sh}^2\,3x\,\mathrm{ch}\,3x+\dfrac{1}{45}\,\mathrm{ch}\,3x+C$

89. $\dfrac{x^2}{3}\,\mathrm{sh}\,3x-\dfrac{2x}{9}\,\mathrm{ch}\,3x+\dfrac{2}{27}\,\mathrm{sh}\,3x+C$

91. $-\dfrac{1}{7\,\mathrm{ch}^7 x}+C$

101. $2\pi\sqrt{3}+\pi\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

103. $\bar{x}=4/3,\ \bar{y}=\ln\sqrt{2}$

105. 7,62 **107.** $\pi/8$ **111.** $\pi/4$

8.7. Numerikus integrálás

1. **I:** **(a)** 1,5; 0 **(b)** 1,5; 0 **(c)** 0%
II: **(a)** 1,5; 0 **(b)** 1,5; 0 **(c)** 0%

3. **I:** **(a)** 2,75; 0,08 **(b)** 2,67; 0,08 **(c)** $0{,}0312\approx 3\%$
II: **(a)** 2,67; 0 **(b)** 2,67; 0 **(c)** 0%

5. **I:** **(a)** 6,25; 0,5 **(b)** 6; 0,25 **(c)** $0{,}0417\approx 4\%$
II: **(a)** 6; 0 **(b)** 6; 0 **(c)** 0%

7. **I:** **(a)** 0,509; 0,03125 **(b)** 0,5; 0,009 **(c)** $0{,}018\approx 2\%$
II: **(a)** 0,5; 0,002604 **(b)** 0,5; 0,0004 **(c)** 0%

9. **I:** **(a)** 1,8961; 0,161 **(b)** 2; 0,1039 **(c)** $0{,}052\approx 5\%$
II: **(a)** 2,0045; 0,0066 **(b)** 2; 0,00454 **(c)** 0%

11. **(a)** 0,31929 **(b)** 0,32812 **(c)** 1/3, 0,01404, 0,00521

13. **(a)** 1,95643 **(b)** 2,00421 **(c)** 2, 0,04357, −0,00421

15. **(a)** 1 **(b)** 2 **17.** **(a)** 116 **(b)** 2

19. **(a)** 283 **(b)** 2 **21.** **(a)** 71 **(b)** 10

23. **(a)** 76 **(b)** 12 **25.** **(a)** 82 **(b)** 8

27. 3615 m^3 **29.** 0,9785 mérföld ≈ 1575 méter

31. 3,405 méter

33. **(a)** $\approx 0{,}00021$ **(b)** $\approx 1{,}37079$ **(c)** $\approx 0{,}015\%$

35. **(a)** 3,11571 **(b)** 0,02588
(c) $M=3{,}11$-el $|E_T|\le(\pi^3/1200)(3{,}11)<0{,}081$

39. 1,08943 **41.** 0,82812

43. **(a)** $T_{10}\approx 1{,}983523538$, $T_{100}\approx 1{,}999835504$, $T_{1000}\approx 1{,}999998355$

(b)

n	$\lvert E_T\rvert = 2-T_n$
10	$1{,}6476462\cdot 10^{-2}$
100	$1{,}64496\cdot 10^{-4}$
1000	$1{,}645\cdot 10^{-6}$

(c) $|E_{10n}|\approx 10^{-2}|E_n|$

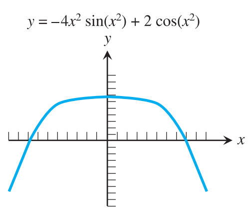
(d) $b-a=\pi,\ h^2=\dfrac{\pi^2}{n^2},\ M=1$

$$|E_n|\le\frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi^2}{n^2}\right)=\frac{\pi^3}{12n^2}$$

$$|E_{10n}|\le\frac{\pi^3}{12(10n)^2}=10^{-2}|E_n|$$

45. **(a)** $f''(x)=2\cos(x^2)-4x^2\sin(x^2)$

(b)



(c) A grafikonról leolvasható, hogy $-3\le f''(x)\le 2$, ha $-1\le x\le 1$.

(d) $|E_T|\le\dfrac{1-(-1)}{12}(\Delta x^2)(3)=\dfrac{\Delta x^2}{2}$

(e) $|E_T|\le\dfrac{\Delta x^2}{2}\le\dfrac{0{,}1^2}{2}<0{,}01$ **(f)** $n\ge 20$

47. **(a)** 0,023, 0,016, 0,015, 0,021, 0,032, 0,048, 0,070, 0,093, 0,107, 0,107, 0,093, 0,064, 0,032 (m^2)

(b) $\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^6 (C(y))^2\,dy$

(c) $\approx 0{,}347$ m^3

(d) $\approx 0{,}3479$ m^3. A Simpson-formulával számolt eredmény pontosabb, mint a trapézformulával számolt. Mivel $\Delta x=0{,}05$ m, a Simpson-formula hibája $\Delta x^4=0{,}00000625$, a trapézformuláé $\Delta x^2=0{,}0025$ nagyságrendű.

49. **(a)** $\approx 5{,}870$ **(b)** $|E_T|\le 0{,}0032$

51. 63,21 cm **53.** 14,4 **55.** 54,9

8.8. Improprius integrálok

1. $\pi/2$ **3.** 2 **5.** 6 **7.** $\pi/2$

9. $\ln 3$ **11.** $\ln 4$ **13.** 0 **15.** $\sqrt{3}$

17. π **19.** $\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$ **21.** -1 **23.** 1

25. $-1/4$ **27.** $\pi/2$ **29.** $\pi/3$ **31.** 6

33. $\ln 2$ **35.** divergens **37.** konvergens

39. konvergens **41.** konvergens **43.** divergens

45. konvergens **47.** konvergens **49.** divergens

51. konvergens **53.** konvergens **55.** divergens

57. konvergens **59.** divergens **61.** konvergens

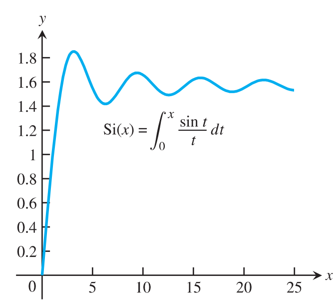
63. konvergens

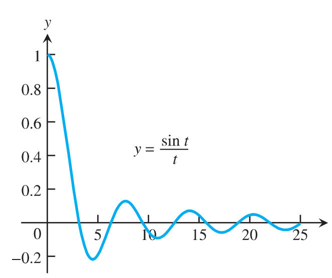
65. **(a)** $p<1$ esetén konvergens
(b) $p>1$ esetén konvergens

67. 1 **69.** 2π **71.** $\ln 2$

73. **(b)** $\approx 0{,}88621$

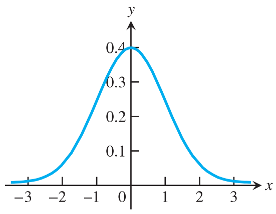
75. **(a)**





(b) $\pi/2$

77. **(a)**



(b) $\approx 0{,}683$, $\approx 0{,}954$, $\approx 0{,}997$

81. divergens

83. konvergens

85. konvergens

87. divergens

Gyakorló feladatok

1. $\frac{1}{12}(4x^2-9)^{3/2}+C$

3. $\frac{(2x+1)^{5/2}}{10}-\frac{(2x+1)^{3/2}}{6}+C$

5. $\frac{\sqrt{8x^2+1}}{8}+C$

7. $\frac{1}{2}\ln(25+y^2)+C$

9. $\frac{-\sqrt{9-4t^4}}{8}+C$

11. $\frac{9}{25}(z^{5/3}+1)^{5/3}+C$

13. $-\frac{1}{2(1-\cos 2\theta)}+C$

15. $-\frac{1}{4}\ln|3+4\cos t|+C$

17. $-\frac{1}{2}e^{\cos 2x}+C$

19. $-\frac{1}{3}\cos^3(e^\theta)+C$

21. $\frac{2^{x-1}}{\ln 2}+C$

23. $\ln|\ln v|+C$

25. $\ln|2+\operatorname{arctg} x|+C$

27. $\arcsin 2x+C$

29. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3t}{4}+C$

31. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C$

33. $\frac{1}{5}\operatorname{arcsec}\left|\frac{5x}{4}\right|+C$

35. $\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

37. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{y-2}{2}\right)+C$

39. $\operatorname{arcsec}|x-1|+C$

41. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$

43. $\frac{2}{3}\cos^3\frac{\theta}{2}-2\cos\frac{\theta}{2}+C$

45. $\frac{\operatorname{tg}^2(2t)}{4}-\frac{1}{2}\ln|\sec 2t|+C$

47. $-\frac{1}{2}\ln|\csc(2x)+\operatorname{ctg}(2x)|+C$

49. $\ln\sqrt{2}$

51. 2

53. $2\sqrt{2}$

55. $x-2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$

57. $x+x^2+2\ln|2x-1|+C$

59. $\ln(y^2+4)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}+C$

61. $-\sqrt{4-t^2}+2\arcsin\frac{t}{2}+C$

63. $x-\operatorname{tg} x+\sec x+C$

65. $-\frac{1}{3}\ln|\sec(5-3x)+\operatorname{tg}(5-3x)|+C$

67. $4\ln\left|\sin\frac{x}{4}\right|+C$

69. $-2\left(\frac{(\sqrt{1-x})^3}{3}-\frac{(\sqrt{1-x})^5}{5}\right)+C$

71. $\frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2+1}+\ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right|\right)+C$

73. $\ln\left|y+\sqrt{25+y^2}\right|+C$

75. $\frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}+C$

77. $\frac{\arcsin x}{2}-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$

79. $\ln\left|\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right|+C$

81. $\sqrt{w^2-1}-\operatorname{arcsec} w+C$

83. $(x+1)(\ln(x+1))-(x+1)+C$

85. $x\operatorname{arctg} 3x-\frac{1}{6}\ln(1+9x^2)+C$

87. $(x+1)^2e^x-2(x+1)e^x+2e^x+C$

89. $\frac{2e^x\sin 2x}{5}+\frac{e^x\cos 2x}{5}+C$

91. $2\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$

93. $\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$

95. $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+2}\right|+C$

97. $4\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+4\operatorname{arctg} x+C$

99. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{(v-2)^5(v+2)}{v^6}\right|+C$

101. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t-\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+C$

103. $\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C$

105. $\frac{x^2}{2}-\frac{9}{2}\ln|x+3|+\frac{3}{2}\ln|x+1|+C$

107. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$

109. $\ln|1-e^{-s}|+C$

111. $-\sqrt{16-y^2}+C$

113. $-\frac{1}{2}\ln|4-x^2|+C$

115. $\ln\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+C$

117. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|+C$

119. $-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+C$

121. $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}+C$

123. $\frac{\cos\theta}{2}-\frac{\cos 11\theta}{22}+C$

125. $4\sqrt{1-\cos(t/2)}+C$

127. legalább 16

129. $T=\pi$, $S=\pi$

131. $-3{,}9°\mathrm{C}$

133. **(a)** 9,075 liter, **(b)** 8,349 l/100km

135. $\pi/2$

137. 6

139. $\ln 3$

141. 2

143. $\pi/6$

145. divergens

147. divergens

149. konvergens

151. $\frac{2x^{3/2}}{3}-x+2\sqrt{x}-2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)+C$

153. $\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2+C$

155. $\arcsin(x+1)+C$

157. $\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|+C$

159. $-2\operatorname{ctg}x-\ln|\csc x+\operatorname{ctg}x|+\csc x+C$

161. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+v}{3-v}\right|+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{v}{3}+C$

163. $\frac{\theta\sin(2\theta+1)}{2}+\frac{\cos(2\theta+1)}{4}+C$

165. $\frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$

167. $-\cos\left(2\sqrt{x}\right)+C$

169. $-\ln|\csc 2y+\operatorname{ctg}2y|+C$

171. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+C$

173. $-\sqrt{4-(r+2)^2}+C$

175. $\frac{1}{4}\sec^2\theta+C$

177. $\frac{\sqrt{2}}{2}+C$

179. $2\left(\frac{\left(\sqrt{2-x}\right)^3}{3}-2\sqrt{2-x}\right)+C$

181. $\operatorname{arctg}(y-1)+C$

183. $\frac{1}{3}\ln|\sec\theta^3|+C$

185. $\frac{1}{4}\ln|z|-\frac{1}{4z}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\ln(z^2+4)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{2}\right)+C$

187. $-\frac{1}{4}\sqrt{9-4t^2}+C$

189. $\ln|\sin\theta|-\frac{1}{2}\ln(1+\sin^2\theta)+C$

191. $\ln|\sec\sqrt{y}|+C$

193. $-\theta\ln\left|\frac{\theta+2}{\theta-2}\right|+C$

195. $x+C$

197. $-\frac{\cos x}{2}+C$

199. $\ln(1+e^t)+C$

201. $1/4$

203. $\ln|\ln\sin v|+C$

205. $\frac{2}{3}x^{3/2}+C$

207. $-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}(\cos 5t)+C$

209. $\frac{1}{3}\left(\frac{27^{3\theta+1}}{\ln 27}\right)+C$

211. $2\sqrt{r}-2\ln\left(1+\sqrt{r}\right)+C$

213. $\ln\left|\frac{y}{y+2}\right|+\frac{2}{y}-\frac{2}{y^2}+C$

215. $4\operatorname{arcsec}\frac{7m}{2}+C$

217. $\frac{\sqrt{8}-1}{6}$

219. $\frac{\pi}{2}(3b-a)+2$

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. $x(\arcsin x)^2+2(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}-2x+C$

3. $\frac{x^2\arcsin x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}-\arcsin x}{4}+C$

5. $\frac{\ln|\sec 2\theta+\operatorname{tg}2\theta|+2\theta}{4}+C$

7. $\frac{1}{2}\left(\ln\left(t-\sqrt{1-t^2}\right)-\arcsin t\right)+C$

9. $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right|+\frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(x+1)+\operatorname{arctg}(x-1))+C$

11. 0

13. $\ln 4-1$

15. 1

17. $32\pi/35$

19. 2π

21. **(a)** π **(b)** $\pi(2e-5)$

23. **(b)** $\pi\left(\frac{8(\ln 2)^2}{3}-\frac{16(\ln 2)}{9}+\frac{16}{27}\right)$

25. $\left(\frac{e^2+1}{4},\ \frac{e-2}{2}\right)$

27. $\sqrt{1+e^2}-\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^2}}{e}+\frac{1}{e}\right)-\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

29. 6

31. $y=\sqrt{x},\quad 0\le x\le 4$

33. **(b)** 1

37. $a=\frac{1}{2},\quad -\frac{\ln 2}{4}$

39. $\frac{1}{2}<p\le 1$

41. $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C$

43. $\frac{\cos x\sin 3x-3\sin x\cos 3x}{8}+C$

45. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$

47. $x\ln(ax)-x+C$

9.fejezet

9.1. Iránymező és szétválasztható változójú differenciálegyenletek

9. $\frac{2}{3}y^{3/2}-x^{1/2}=C$

11. $e^y-e^x=C$

13. $-x+2\operatorname{tg}\sqrt{y}=C$

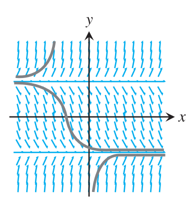
15. $e^{-y}+2e^{\sqrt{x}}=C$

17. $y=\sin(x^2+C)$

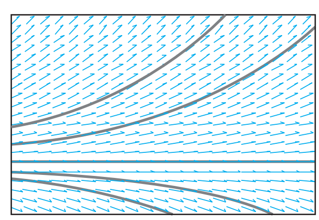
19. (d)

21. (a)

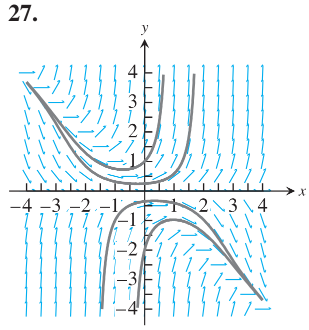
23.



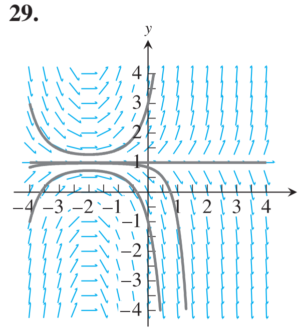
25.



27.



29.



9.2. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

1. $y=\frac{e^x+C}{x}$, $x>0$ **3.** $y=\frac{C-\cos x}{x^3}$, $x>0$

5. $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}$, $x>0$ **7.** $y=\frac{1}{2}xe^{x/2}+Ce^{x/2}$

9. $y=x(\ln x)^2+Cx$

11. $s=\frac{t^3}{3(t-1)^4}-\frac{t}{(t-1)^4}+\frac{C}{(t-1)^4}$

13. $r=(\csc\theta)(\ln|\sec\theta|+C)$, $0<\theta<\pi/2$

15. $y=\frac{3}{2}-q\frac{1}{2}e^{-2t}$ **17.** $y=-\frac{1}{\theta}\cos\theta+\frac{\pi}{2\theta}$

19. $y=6e^{x^2}-\frac{e^{x^2}}{x+1}$ **21.** $y=y_0e^{kt}$

23. **(b)** helyes, **(a)** nem.

25. **(a)** 5kg/perc **(b)** $400+4t$liter **(c)** $\frac{16y}{400+4t}$
(d) $y'=5-\frac{4y}{100+t}$, $y(0)=25$; $y=100t-\frac{75\cdot 100^4}{(100+t)^4}$
(e) $y(25)=94{,}28$

27. 27,78 perc **29.** $t=\frac{L}{R}\ln 2$

31. **(a)** $i=\frac{V}{R}-\frac{V}{R}e^{-3}\approx 0{,}95\frac{V}{R}$ amper **(b)** 86%

33. $y=\frac{1}{1+Ce^{-x}}$ **35.** $y^3=1+Cx^{-3}$

9.3. Euler-módszer

1. $y_{pontos}=\frac{x}{2}-\frac{4}{x}$, $y_1=-0{,}25$, $y_2=0{,}3$, $y_3=0{,}75$

3. $y_{pontos}=3e^{x(x+2)}$, $y_1=4{,}2$, $y_2=6{,}216$, $y_3=9{,}697$

5. $y_{pontos}=e^{x^2}+1$, $y_1=2{,}0$, $y_2=2{,}0202$, $y_3=2{,}0618$

7. $y\approx 2{,}48832$, a pontos érték e.

9. $y\approx -0{,}2272$, a pontos érték $1/(1-2\sqrt{5})\approx -0{,}2880$

11.

x	z	y-Runge–Kutta	y-pontos	Hiba
0	1	3	3	0
0,2	4,2	4,608	4,658122	0,050122
0,4	6,81984	7,623475	7,835089	0,211614
0,6	11,89262	13,56369	14,27646	0,712777

13. Az Euler-módszer eredménye $y\approx 3{,}45835$; a pontos megoldás $y=1+e\approx 3{,}71828$.

15. $y\approx 1{,}5000$; a pontos megoldás 1,5275.

17. **(a)** $y=\frac{-1}{x^2-2x+2}$, $y(3)=-0{,}2$

(b) $-0{,}1851$; hiba $\approx 0{,}0149$

(c) $-0{,}1929$; hiba $\approx 0{,}0071$

(d) $-0{,}1965$; hiba $\approx 0{,}0035$

19. A pontos megoldás $y=\frac{1}{x^2-2x+2}$, így $y(3)=-0{,}2$. A közelítéshez legyen $z_n=y_{n-1}+2y_{n-1}(x_{n-1}-1)dx$, és $y_n=y_{n-1}+(y_{n-1}^2(x_{n-1}-1)+z_n^2(x_n^2-1))dx$, a kezdeti feltételek: $x_0=2$, $y_0=-\frac{1}{2}$. Használjunk kalkulátort vagy számítógépet az (a)–(d) pontok megválaszolásához.

(a) $-0{,}2024$; hiba $\approx 0{,}0024$

(b) $-0{,}2005$; hiba $\approx 0{,}0005$

(c) $-0{,}2001$; hiba $\approx 0{,}0001$

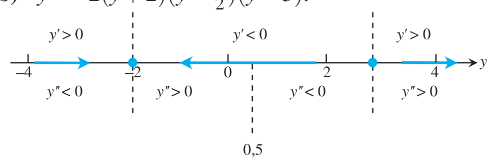
(d) Minden esetben, ha a lépésköz felére csökken, a hiba körülbelül negyedelődik.

9.4. Autonóm differenciálegyenletek grafikus megoldása

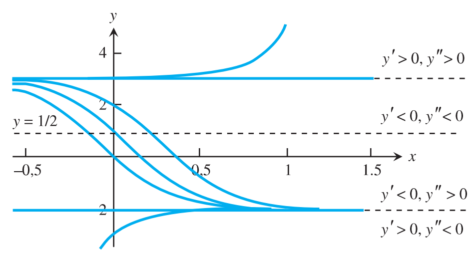
1. $y'=(y+2)(y-3)$

(a) $y=-2$ stabil egyensúlyi érték, $y=3$ instabil egyensúlyi érték,

(b) $y''=2(y+2)(y-\frac{1}{2})(y-3)$.



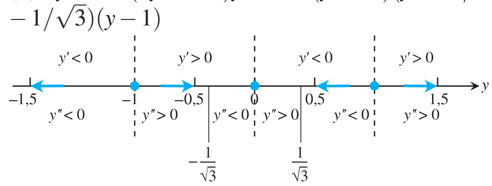
(c)



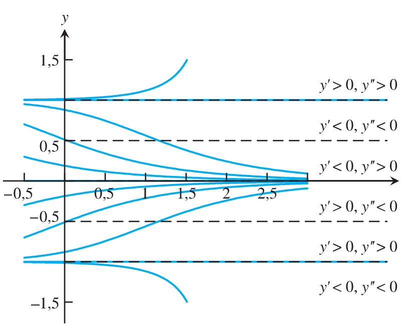
3. $y'=y^3-y=(y+1)y(y-1)$

(a) $y=-1$ és $y=1$ instabil egyensúlyi értékek, $y=0$ pedig stabil egyensúlyi érték.

(b) $y''=(3y^2-1)y'=3(y+1)(y+1/\sqrt{3})y(y-1/\sqrt{3})(y-1)$



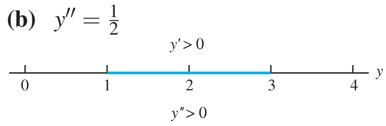
(c)



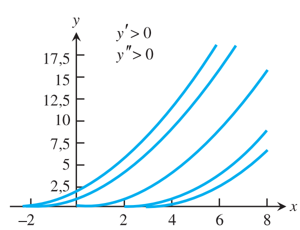
5. $y'=\sqrt{y}$, $y>0$

(a) Nincs egyensúlyi érték.

(b) $y''=\frac{1}{2}$



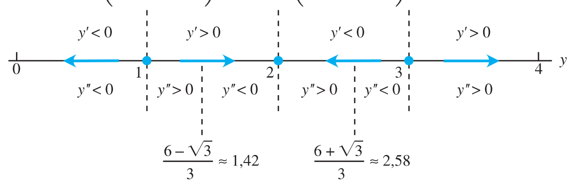
(c)



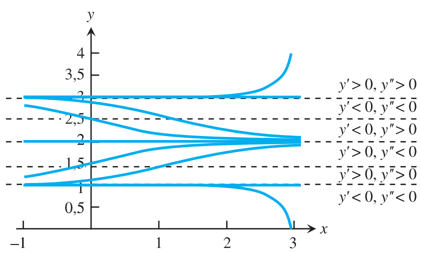
7. $y' = (y-1)(y-2)(y-3)$

(a) $y=1$ és $y=3$ instabil egyensúlyi értékek, $y=2$ stabil egyensúlyi érték.

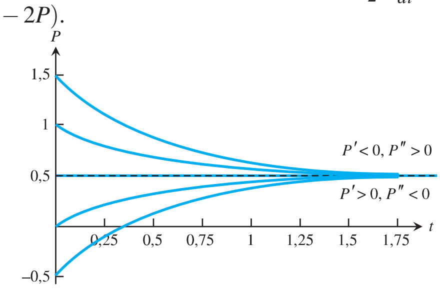
(b) $y'' = (3y^2-12y+11)(y-1)(y-2)(y-3) =$
$= (y-1)\left(y-\frac{6-\sqrt{3}}{3}\right)(y-2)\left(y-\frac{6+\sqrt{3}}{3}\right)(y-3)$



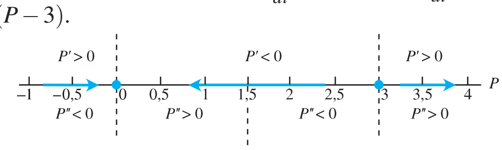
(c)

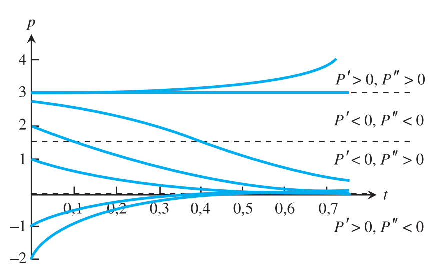


9. $\frac{dP}{dt} = 1-2P$ stabil egyensúlyi értéke $P=\frac{1}{2}$; $\frac{d^2P}{dt^2} = -2\frac{dP}{dt} =$ $= -2(1-2P)$.

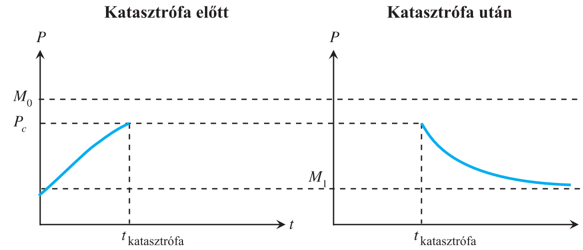


11. $\frac{dP}{dt} = 2P(P-3)$, ennek stabil egyensúlyi értéke $P=0$ és instabil egyensúlyi értéke $P=3$; $\frac{d^2P}{dt^2} = 2(2P-3)\frac{dP}{dt} = 4P(2P-$ $-3)(P-3)$.



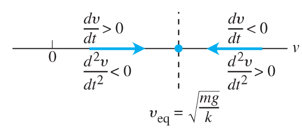


13. A katasztrófa előtt a populáció logisztikus növekedést mutat, és $P(t)$ M_0 felé növekszik, ami a stabil egyensúlyi érték. A katasztrófa után a populáció logisztikusan csökken, és $P(t)$ M_1 felé csökken, ami az új stabil egyensúlyi érték.

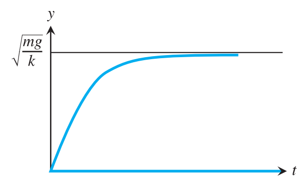


15. $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$, $g,k,m > 0$ és $v(t) \geq 0$
Egyensúlyi érték: $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2 = 0$, azaz $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$
Konkavitás: $\frac{d^2}{dt^2}v = -2\left(\frac{k}{m}v\right)\left(g - \frac{k}{m}v^2\right)$

(a)



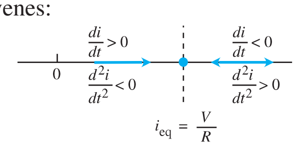
(b)



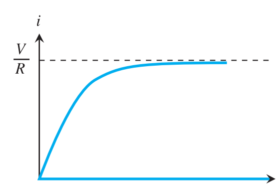
(c) $v_{végső} = \sqrt{\frac{800}{0{,}27}} \approx 54{,}43m/s\approx 196$km/h

17. $F = F_p - F_r$; $ma = 25 - 5|v|$, $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(25-5|v|)$. A sebesség maximális, amikor $\frac{dv}{dt} = 0$, ill. $v=5$.

19. A fázisegyenes:



Ha a kapcsolót $t=0$-nál zárjuk, akkor $i(0)=0$, és a megoldás alakja:



Amint $t \to \infty$, $i(t) \to i_{\text{állandósult érték}} = \frac{V}{R}$.

9.5. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazásai

1. **(a)** 168,5 m **(b)** 41,13 s

3. $s(t) = 4{,}91(1 - e^{-(22{,}36/39{,}92)t})$

5. **(a)** $P(t) = \frac{150}{1+24e^{-0{,}225t}}$

(b) Kb. 17,21 hét; Kb. 21,28 hét.

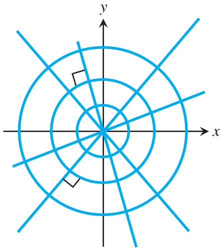
7. **(a)** $y(t) = \frac{8\times10^7}{1+4e^{-0{,}71t}}$, így $y(1) \approx 2{,}69671 \times 10^7$kg

(b) $t \approx 1{,}95253$ év.

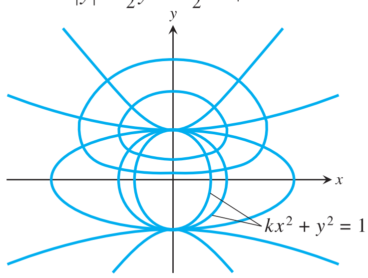
9. **(a)** $y = 2e^t - 1$ **(b)** $y(t) = \frac{400}{1+199e^{-200t}}$

11. **(a)** $P(t) = \frac{P_0}{1-kP_0t}$ **(b)** Függőleges aszimptota $t = \frac{1}{kP_0}$

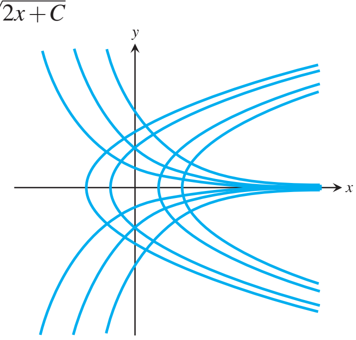
13. $x^2 + y^2 = C$



15. $\ln|y| - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$



17. $y = \pm\sqrt{2x+C}$



Gyakorló feladatok

1. $y = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+C}{2}\right)\right)^2$

3. $y^2 = \arcsin(2\,\mathrm{tg}\,x + C)$

5. $y = -\ln\left(C - \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x-2)^{3/2}\right)$

7. $\mathrm{tg}\,y = -x\sin x - \cos x + C$

9. $(y+1)e^{-y} = -\ln|x| + C$

11. $y = C\frac{x-1}{x}$

13. $y = \frac{x^4}{4}e^{x/2} + Ce^{x/2}$

15. $y = \frac{x^2-2x+C}{2x^2}$

17. $y = \frac{e^{-x}+C}{1+e^x}$

19. $xy + y^3 = C$

21. $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$

23. $y = \frac{2x^3+3x^2+6}{6(x+1)^2}$

25. $y = \frac{1}{3}(1 - 4e^{-x^2})$

27. $y = 4x - 4\sqrt{x} + 1$

29. $y = e^x(3x^3 - 3x^2)$

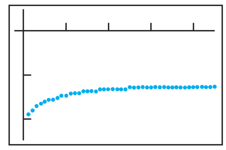
31.

x	y
0	0
0,1	0,1000
0,2	0,2095
0,3	0,3285
0,4	0,4568
0,5	0,5946
0,6	0,7418
0,7	0,8986
0,8	1,0649
0,9	1,2411
1,0	1,4273

x	y
1,1	1,6241
1,2	1,8319
1,3	2,0513
1,4	2,2832
1,5	2,5285
1,6	2,7884
1,7	3,0643
1,8	3,3579
1,9	3,6709
2,0	4,0057

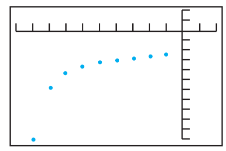
33. $y(3) \approx 0{,}9063$

35. **(a)**



[−0.2, 4.5] x [−2.5, 0.5]

(b) Megjegyezzük, hogy egy kis intervallumot választunk x értékeire, mert y értékei nagyon gyorsan csökkennek, és a kalkulátorunk nem tudja kezelni ezeket az értékeket $x \le -1$ esetén. (Azért, mert az analitikus megoldás $y = -2 + \ln(2 - e^{-x})$, aminek függőleges aszimptotája van $x = -\ln 2 \approx -0{,}69$. Tehát az Euler approximáció félrevezető, hibás értékeket ad, ha $x < \ln 2$).



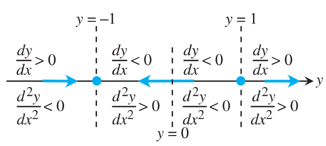
[−1, 0.2] x [−10, 2]

37. $y_{pontos} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$; $y(2) \approx 0{,}4$; a pontos érték $\frac{1}{2}$

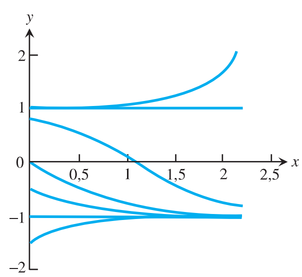
39. $y_{pontos} = -e^{(x^2-1)}/2$; $y(2) \approx -3{,}4192$; a pontos érték $-e^{3/2} \approx -4{,}4817$.

41. **(a)** $y = -1$ stabil, és $y = 1$ instabil.

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y\frac{dy}{dx} = 2y(y^2 - 1)$



(c)



Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. **(a)** $y = c + (y_0 - c)e^{-k(A/V)t}$

(b) Az egyensúlyi érték megoldás $y_\infty = c$.

3. 0,232%