Megoldások

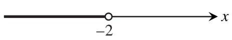
1. fejezet

1.1. A valós számok és a valós számegyenes

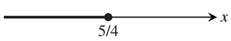
1. $0,\overline{1}$; $0,\overline{2}$; $0,\overline{3}$; $0,\overline{8}$; $0,\overline{9}$ vagy 1.

3. **(a)** nem feltétlenül igaz; **(b)** igaz; **(c)** igaz; **(d)** igaz; **(e)** igaz; **(f)** igaz; **(g)** igaz; **(h)** igaz.

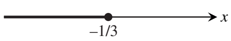
5. $x < -2$



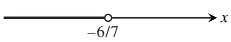
7. $x \leq \frac{5}{4}$



9. $x \leq -\frac{1}{3}$



11. $x < -\frac{6}{7}$



13. ± 3 **15.** $-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2}$ **17.** $\frac{7}{6}, \frac{25}{6}$

19. $-2 < x < 2$

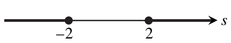
21. $-2 \leq t \leq 4$

23. $1 < y < \frac{11}{3}$

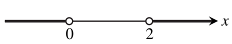
25. $0 \leq z \leq 10$

27. $\frac{2}{7} < x < \frac{2}{5}$ vagy $\frac{10}{35} < x < \frac{14}{35}$

29. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$



31. $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$



33. $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

35. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ **37.** $(-3, -2) \cup (2, 3)$

39. $(-1, 3)$ **41.** $(0, 1)$

43. $a \geq 0$; tetszőleges negatív valós szám

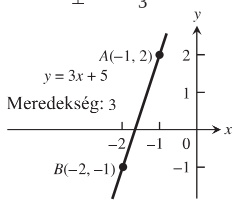
47. $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

1.2. Egyenesek, körök és parabolák

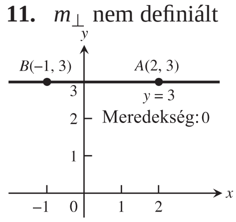
1. $2,\ -4;\ 2\sqrt{5}$ **3.** $-4,9,\ 0;\ 4,9$ **5.** Egységkör.

7. Az origó középpontú, $\sqrt{3}$ sugarú kör(vonal) és a kör belseje.

9. $m_\perp = -\frac{1}{3}$



11. $m_\perp$ nem definiált



13. **(a)** $x = -1$, **(b)** $y = 4/3$ **15.** **(a)** $x = 0$, **(b)** $y = -\sqrt{2}$

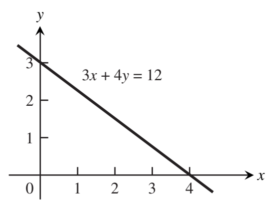
17. $y = -x$ **19.** $y = -\frac{x}{5} + \frac{23}{5}$

21. $y = -\frac{5}{4}x + 6$ **23.** $y = -9$

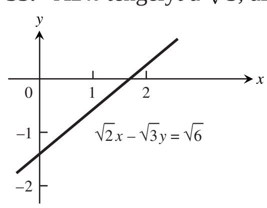
25. $y = 4x + 4$ **27.** $y = -\frac{2}{5}x + 1$

29. $y = -\frac{x}{2} + 12$

31. Az x-tengelyt a 4, az y-tengelyt a 3 helyen metszi.



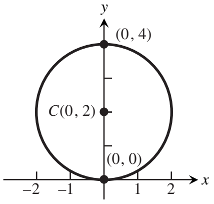
33. Az x-tengelyt a $\sqrt{3}$, az y-tengelyt a $-\sqrt{2}$ helyen metszi.



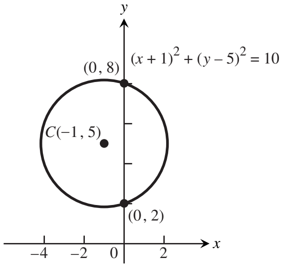
35. Igen. Az egyenesek merőlegesek, mivel meredekségük ($-A/B$, illetve B/A) egymás reciprokának ellentettjei.

37. $(3, -3)$ **39.** $(-2, -9)$

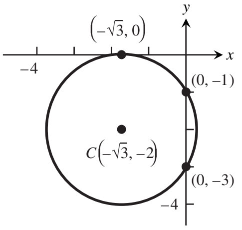
41. $x^2+(y-2)^2=4$



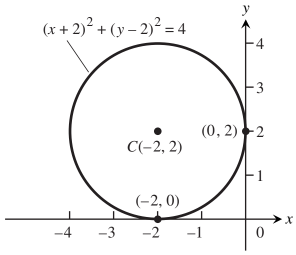
43. $(x+1)^2+(y-5)^2=10$



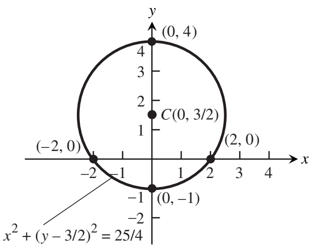
45. $(x+\sqrt{3})^2+(y+2)^2=4$



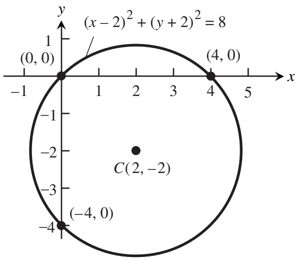
47. $(x+2)^2+(y-2)^2=4$



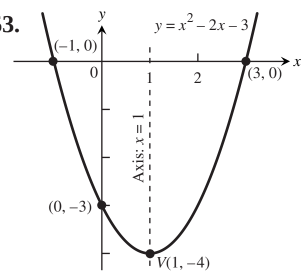
49. $x^2+(y-3/2)^2=25/4$



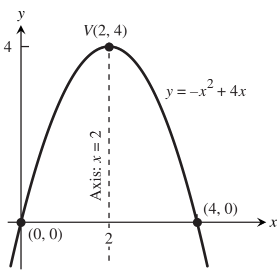
51. $(x-2)^2+(y+2)^2=8$



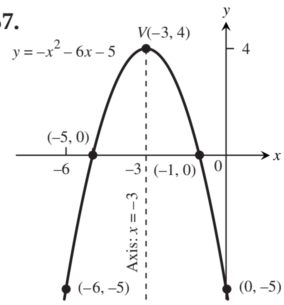
53.



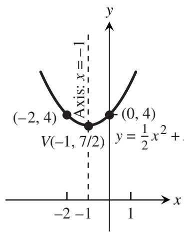
55.



57.



59.



61. A $\sqrt{7}$ sugarú, origó középpontú kör külső pontjai.

63. A 2 sugarú, $(1,0)$ középpontú kör(vonal) a belsejével együtt.

65. Az $x^2+y^2=1$ és az $x^2+y^2=4$ körök közötti gyűrű (az origótól 1-nél távolabb, de 2-nél közelebb eső pontok halmaza).

67. A $(0,-3)$ középpontú, 3 sugarú kör azon belső pontjai, amelyek az $y=-3$ egyenletű egyenes fölött helyezkednek el.

69. $(x+2)^2+(y-1)^2<6$

71. $x^2+y^2\le 2,\quad x\ge 1$

73. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

75. $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

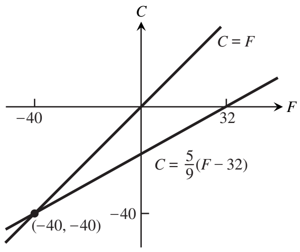
77. $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{3}\right)$

79. $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

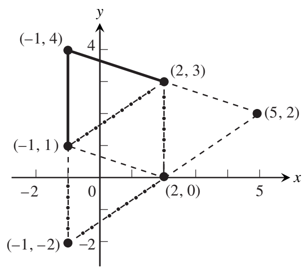
81. **(a)** $\approx -2,5$ fok/inch; **(b)** $\approx -16,1$ fok/inch; **(c)** $\approx -8,3$ fok/inch

83. 5,97 atm

85. Igen: $C=F=-40°$.



91.



93. $k=-8,\quad k=1/2$

1.3. Függvények és grafikonok

1. $D=(-\infty,\infty),\quad R=[1,\infty)$

3. $D=(0,\infty),\quad R=(0,\infty)$

5. $D=[-2,2],\quad R=[0,2]$

7. **(a)** Bizonyos x-értékekhez két y-érték tartozik, nem függvény.

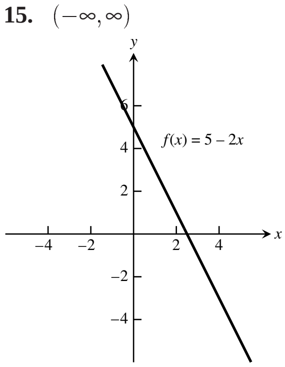
(b) Minden x-hez egyetlen y tartozik, függvény.

9. **(a)** Nem; **(b)** Nem; **(c)** Nem; **(d)** $(0,1]$

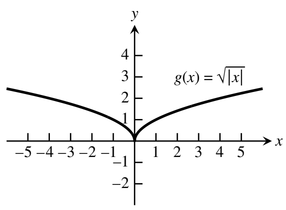
11. $A=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2,\quad p=3x$

13. $x=\frac{d}{\sqrt{3}};\quad A=2d^2;\quad V=\frac{d^3}{3\sqrt{3}}$

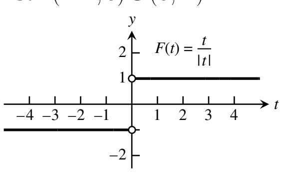
15. $(-\infty,\infty)$



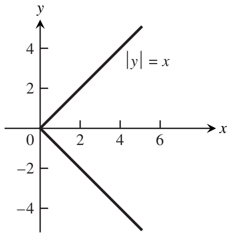
17. $(-\infty,\infty)$



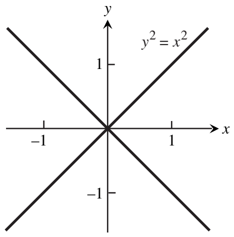
19. $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$



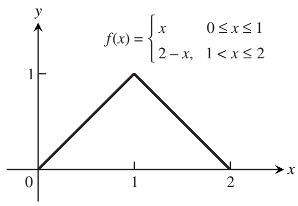
21. **(a)** Minden pozitív x-hez két y tartozik.



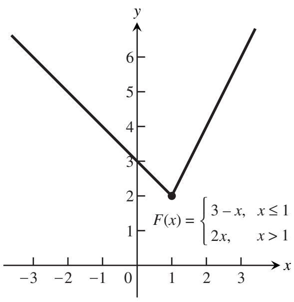
(b) Minden nemnulla x-hez két különböző y tartozik.



23.



25.



27. **(a)** $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ -x+2, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \\ 2, & 2 \le x < 3 \\ 0, & 3 \le x \le 4 \end{cases}$

29. **(a)** $f(x) = \begin{cases} -x, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & 1 < x < 3 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & -2 \le x \le 0 \\ -2x+2, & 0 < x \le 1 \\ -1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$

31. **(a)** $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

33. **(a)** $0 \le x < 1$; **(b)** $-1 < x \le 0$

35. Igen.

37. $V = x(14-2x)(22-2x)$

39. **(a)** A kör eredeti, 8π hosszúságú kerületéből egy x hosszúságú részt távolítottunk el.

(b) $r = \frac{8\pi - x}{2\pi} = 4 - \frac{x}{2\pi}$

(c) $h = \sqrt{16 - r^2} = \frac{\sqrt{16\pi x - x^2}}{2\pi}$

(d) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{(8\pi - x)^2 \sqrt{16\pi x - x^2}}{24\pi^2}$

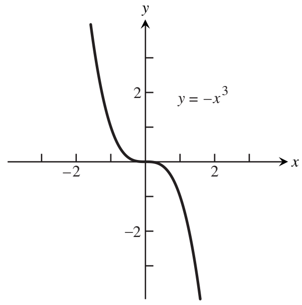
1.4. Alapvető függvénytípusok és matematikai modellek

1. **(a)** Lineáris, algebrai, elsőfokú polinomfüggvény; **(b)** hatványfüggvény, algebrai függvény ; **(c)** racionális, algebrai függvény ; **(d)** exponenciális függvény.

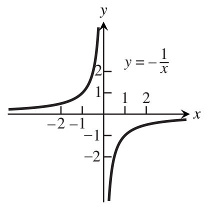
3. **(a)** Racionális algebrai függvény; **(b)** algebrai függvény; **(c)** trigonometrikus függvény; **(d)** logaritmusfüggvény.

5. **(a)** h; **(b)** f; **(c)** g

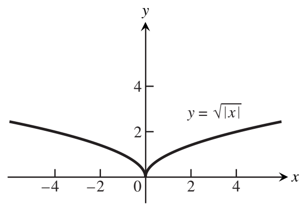
7. Szimmetrikus az origóra; csökkenő, ha $-\infty < x < \infty$.



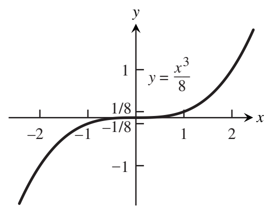
9. Szimmetrikus az origóra; növekvő, ha $-\infty < x < 0$, $0 < x < \infty$



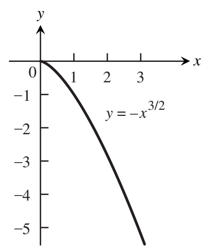
11. Szimmetrikus az y-tengelyre; csökkenő, ha $-\infty < x \le 0$, és növekvő, ha $0 \le x < \infty$.



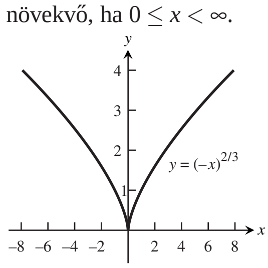
13. Szimmetrikus az origóra; növekvő, ha $-\infty < x < \infty$.



15. Nincs szimmetria; csökkenő, ha $0 \le x < \infty$



17. Szimmetrikus az y-tengelyre; csökkenő, ha $-\infty < x \le 0$, és növekvő, ha $0 \le x < \infty$.

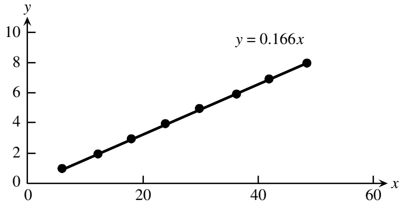


19. Páros. **21.** Páros. **23.** Páratlan. **25.** Páros.

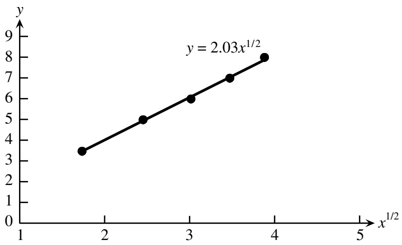
27. Nem páros és nem is páratlan.

29. Nem páros és nem is páratlan.

31. **(a)** A grafikon szerint y arányos x-szel, az arányossági tényező hozzávetőlegesen 0,166.

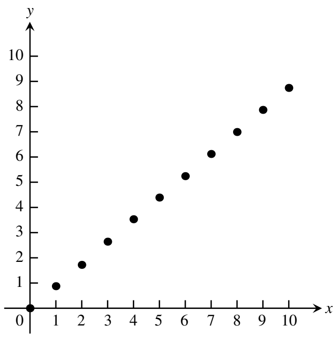


(b) A grafikon szerint az y mennyiség arányos $\sqrt{x}$-szel, az arányossági tényező körülbelül 2,03.



33. **(a)** $k \approx 0,21$; **(b)** $k \approx 4,76$

35. **(a)**



(b) $k \approx 0,87$

(c) Ha $y = 0,87x$ és $x = 13$, akkor $y = 11,31$.

1.5. Függvényműveletek és függvénytranszformációk

1. $D_f: -\infty < x < \infty$; $D_g: x \geq 1$; $R_f: -\infty < y < \infty$; $R_g: y \geq 0$; $D_{f+g} = D_{f\cdot g} = D_g$; $R_{f+g}: y \geq 1$; $R_{f\cdot g}: y \geq 0$.

3. $D_f: -\infty < x < \infty$; $D_g: -\infty < x < \infty$; $R_f: y = 2$; $R_g: y \geq 1$; $D_{f/g}: -\infty < x < \infty$; $R_{f/g}: 0 < y \leq 2$; $D_{g/f}: -\infty < x < \infty$; $R_{g/f}: y \geq 1/2$.

5. **(a)** 2; **(b)** 22; **(c)** x^2+2; **(d)** $x^2+10x+22$; **(e)** 5; **(f)** -2; **(g)** $x+10$; **(h)** x^4-6x^2+6.

7. **(a)** $\frac{4}{x^2}-5$; **(b)** $\frac{4}{x^2}-5$; **(c)** $\left(\frac{4}{x}-5\right)^2$; **(d)** $\left(\frac{1}{4x-5}\right)^2$; **(e)** $\frac{1}{4x^2-5}$; **(f)** $\frac{1}{(4x-5)^2}$.

9. **(a)** $f(g(x))$; **(b)** $j(g(x))$; **(c)** $g(g(x))$; **(d)** $j(j(x))$; **(e)** $g(h(f(x)))$; **(f)** $h(j(f(x)))$.

11.

	$g(x)$	$f(x)$	$f\circ g(x)$
(a)	$x-7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
(b)	$x+2$	$3x$	$3x+6$
(c)	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(d)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
(e)	$\frac{1}{x-1}$	$1+\frac{1}{x}$	x
(f)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

13. **(a)** $f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x}+1}$, $g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

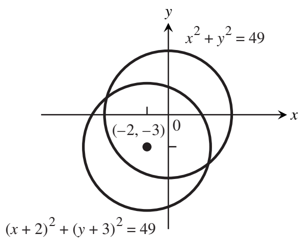
(b) $D_{f\circ g} = (0,\infty)$, $D_{g\circ f} = (-1,\infty)$

(c) $R_{f\circ g} = (1,\infty)$, $R_{g\circ f} = (0,\infty)$

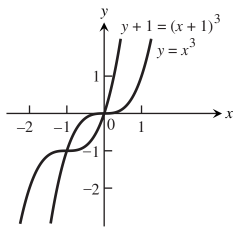
15. **(a)** $y = -(x+7)^2$; **(b)** $y = -(x-4)^2$.

17. **(a)** 4; **(b)** 1; **(c)** 2; **(d)** 3.

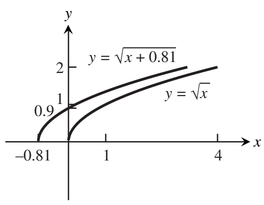
19. $(x+2)^2+(y+3)^2 = 49$



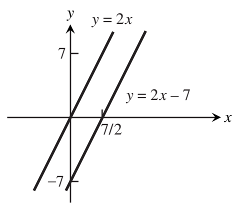
21. $y+1 = (x+1)^3$



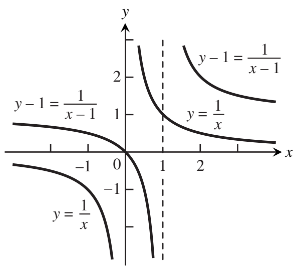
23. $y = \sqrt{x+0,81}$



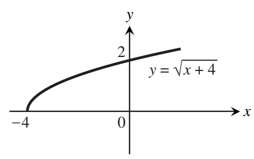
25. $y = 2x$



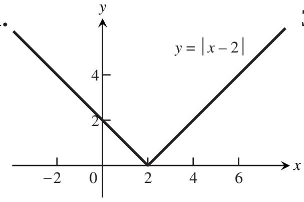
27. $y-1 = \frac{1}{x-1}$



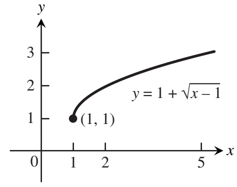
29.



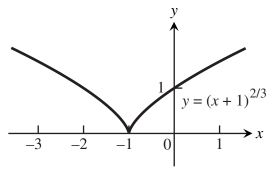
31.



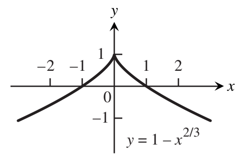
33.



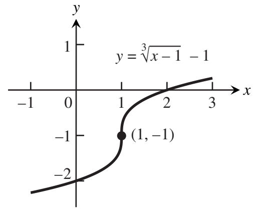
35.



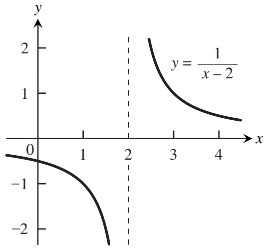
37.



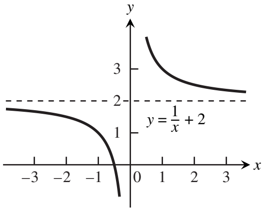
39.



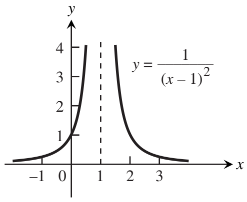
41.



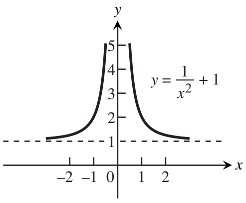
43.



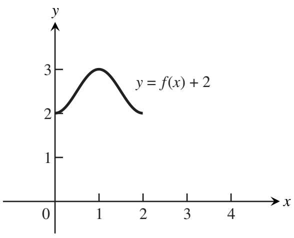
45.



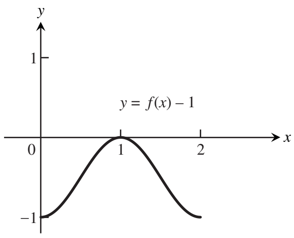
47.



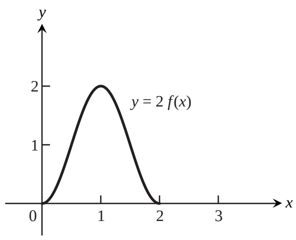
49. **(a)** $D = [0,2]$, $R = [2,3]$



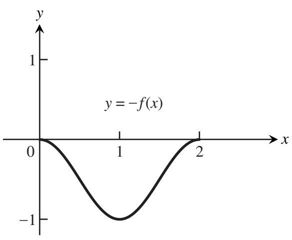
(b) $D = [0,2]$, $R = [-1,0]$



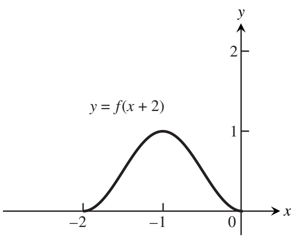
(c) $D = [0,2]$, $R = [0,2]$



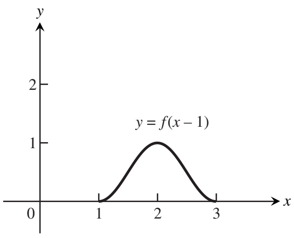
(d) $D = [0,2]$, $R = [-1,0]$



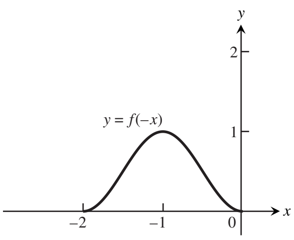
(e) $D = [-2,0]$, $R = [0,1]$



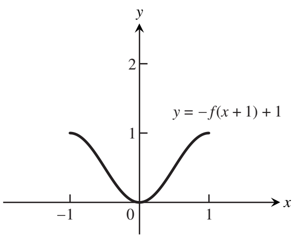
(f) $D = [1,3]$, $R = [0,1]$



(g) $D = [-2,0]$, $R = [0,1]$



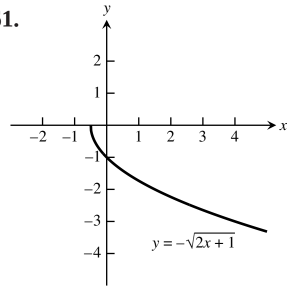
(h) $D = [-1,1]$, $R = [0,1]$



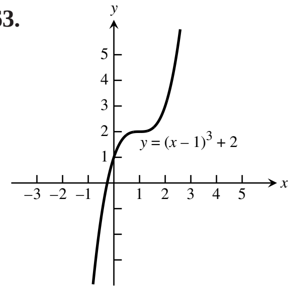
51. $y = 3x^2 - 3$ **53.** $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2}$ **55.** $y = \sqrt{4x+1}$

57. $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ **59.** $y = 1 - 27x^3$

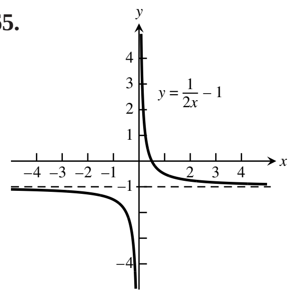
61.



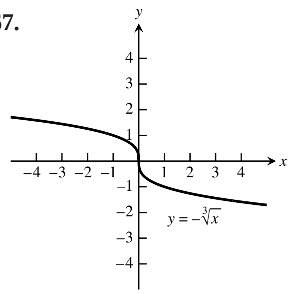
63.



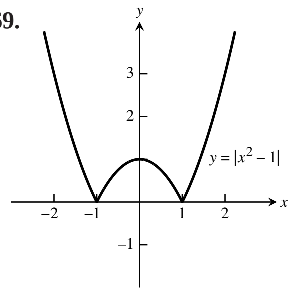
65.



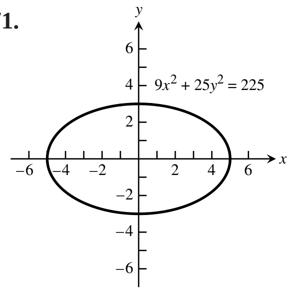
67.



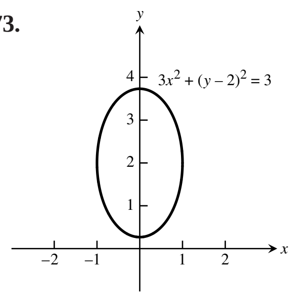
69.



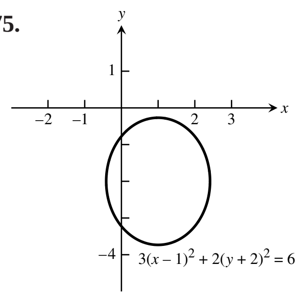
71.



73.



75.



77. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$; a középpont: $(-4,3)$
A főtengely a $(-8,3)$ és a $(0,3)$ pontokat összekötő szakasz.

79. **(a)** Páratlan; **(b)** páratlan; **(c)** páratlan; **(d)** páros; **(e)** páros; **(f)** páros; **(g)** páros; **(h)** páros; **(i)** páratlan.

1.6. Trigonometrikus függvények

1. **(a)** 8π; m **(b)** $\frac{55\pi}{9}$ m. **3.** 8,4 cm

5. n.d. – nem definiált

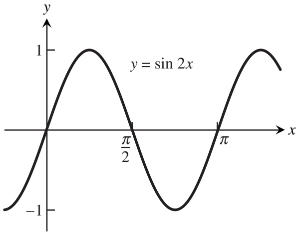
θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	0	$\pi/2$	$3\pi/4$
$\sin\theta$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\operatorname{tg}\theta$	0	$\sqrt{3}$	0	n.d.	-1
$\operatorname{ctg}\theta$	n.d.	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	n.d.	0	-1
$\sec\theta$	-1	-2	1	n.d.	$-\sqrt{2}$
$\csc\theta$	n.d.	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	n.d.	1	$\sqrt{2}$

7. $\cos x = -4/5$; $\operatorname{tg} x = -3/4$.

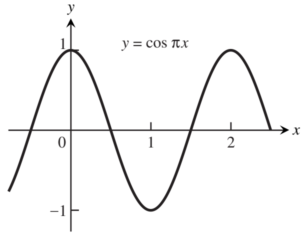
9. $\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$; $\operatorname{tg} x = -\sqrt{8}$.

11. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

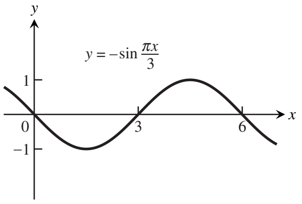
13. A periódus π.



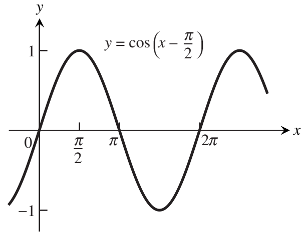
15. A periódus 2.



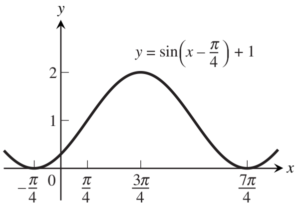
17. A periódus 6.



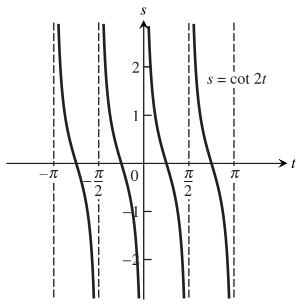
19. A periódus 2π.



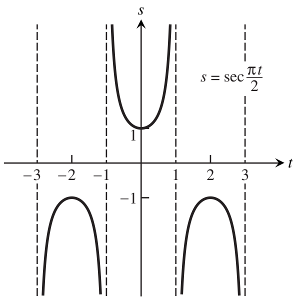
21. A periódus 2π.



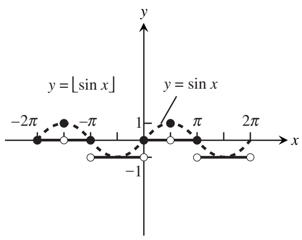
23. A periódus $\pi/2$; szimmetrikus az origóra.



25. A periódus 4, szimmetrikus az y-tengelyre.



29. $D = (-\infty, \infty)$ $R: y = -1, 0, 1$



39. $-\cos x$

41. $-\cos x$

43. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

45. $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

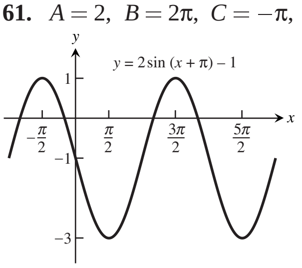
47. $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

49. $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

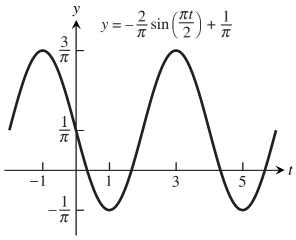
55. $c = \sqrt{7} \approx 2{,}646$

59. $a = 1{,}464$

61. $A = 2$, $B = 2\pi$, $C = -\pi$, $D = -1$.



63. $A = -\frac{2}{\pi}$, $B = 4$, $C = 0$, $D = \frac{1}{\pi}$.



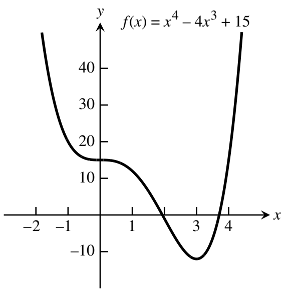
65. **(a)** 37; **(b)** 365; **(c)** jobbra 101; **(d)** fölfelé 25.

1.7. Grafikus módszerek

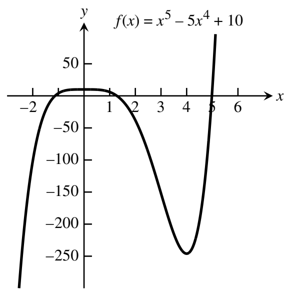
1. **(d)**

3. **(d)**

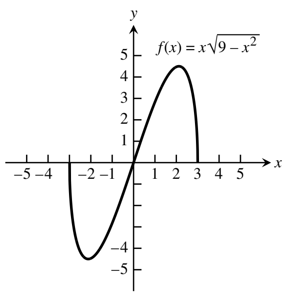
5. $[-3,5] \times [-15,40]$



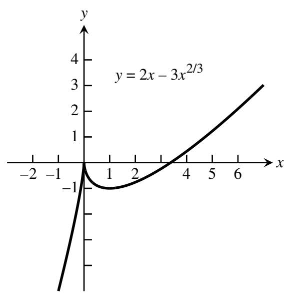
7. $[-3,6] \times [-250,50]$



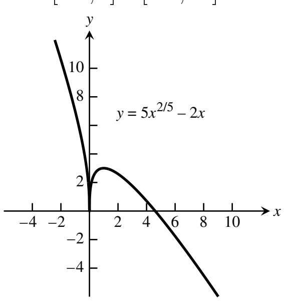
9. $[-3,3] \times [-6,6]$



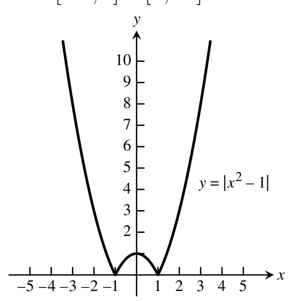
11. $[-2,6] \times [-5,4]$



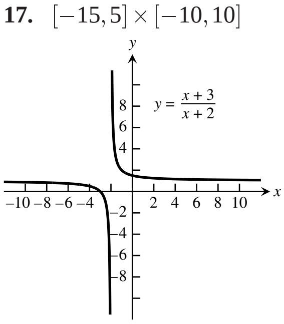
13. $[-2,8] \times [-5,10]$



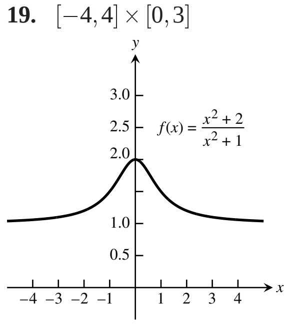
15. $[-3,3] \times [0,10]$



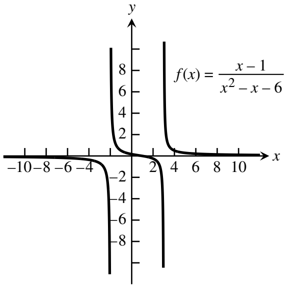
17. $[-15,5] \times [-10,10]$



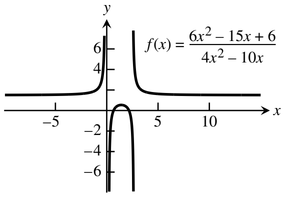
19. $[-4,4] \times [0,3]$



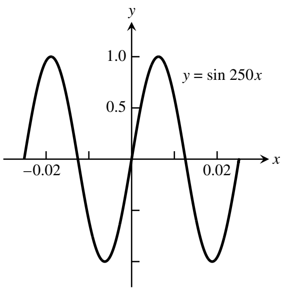
21. $[-10,10]\times[-6,6]$



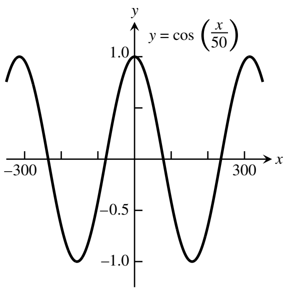
23. $[-6,6]\times[-6,6]$



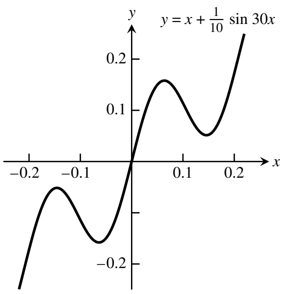
25. $[-\frac{\pi}{125},\frac{\pi}{125}]\times$
$\times[-1,25;1,25]$



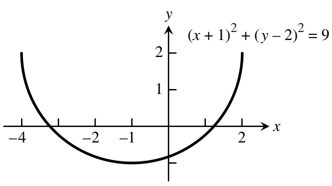
27. $[-100\pi,100\pi]\times$
$\times[-1,25;1,25]$



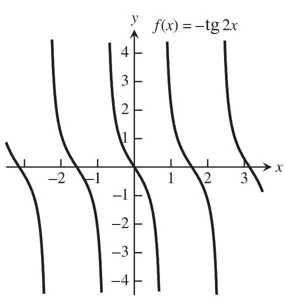
29. $[-\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{15}]\times[-0,25;0,25]$



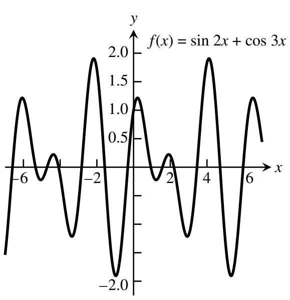
31.



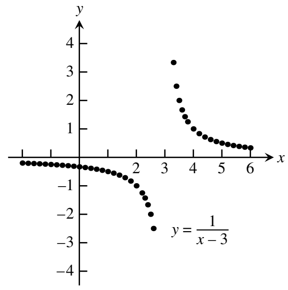
33.



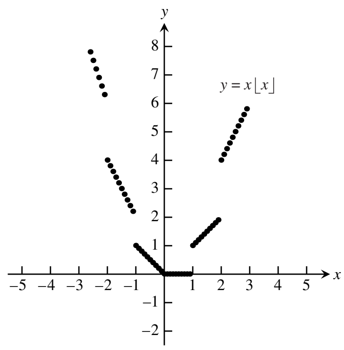
35.



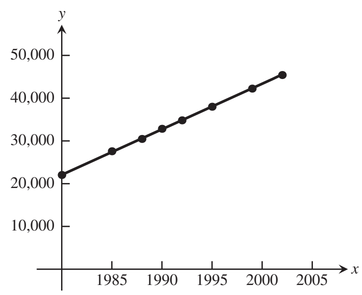
37.



39.

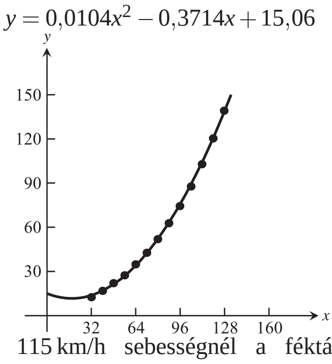


41. **(a)** $y=1059,14x-2\,074\,972,23$
(b) $m=1059,14$, ennyivel nő évente a fizetés.
(c)

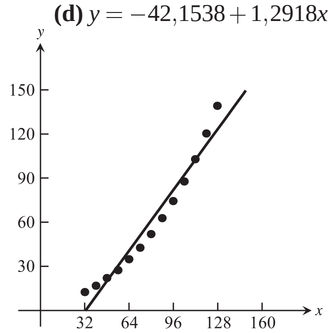


(d) 53 899,17 dollár

43. **(a)** $y=0{,}0104x^2-0{,}3714x+15{,}06$
(b)



(c) 115 km/h sebességnél a féktávolság hozzávetőleg 109,89 m; 136 km/h sebességnél körülbelül 156,91 m.
(d) $y=-42{,}1538+1{,}2918x$

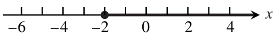


115 km/h sebességnél a féktávolság körülbelül 106,40 m; 136 km/h sebességnél körülbelül 133,53 m.

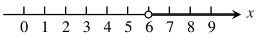
A másodfokú regressziós függvény illeszkedik jobban az adatokra.

Gyakorló feladatok

1. $x \geq -2$



3. $x > 6$



5. $-8,\ 6$ **7.** $x < -1$ vagy $x > 5$

9. $(0, 11)$ **11.** Nincs két egyenlő hosszú oldal; nincs két merőleges oldal.

13. $y = 3x - 9$ **15.** $x = 0$ **17.** $y = 2$

19. $y = -3x + 3$ **21.** $y = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$ **23.** $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

25. $A = \pi r^2$, $C = 2\pi r$, $A = \frac{C^2}{4\pi}$ **27.** $x = \operatorname{tg}\theta$, $y = \operatorname{tg}^2\theta$

29. Origó **31.** Egyik sem **33.** Páros

35. Páros **37.** Páratlan **39.** Egyik sem

41. **(a)** Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$; **(b)** értékkészlet: $[-2, \infty)$.

43. **(a)** Értelmezési tartomány: $[-4, 4]$; **(b)** értékkészlet: $[0, 4]$.

45. **(a)** Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$; **(b)** értékkészlet: $(-3, \infty)$.

47. **(a)** Értelmezési tartomány: $\mathbb{R}$; **(b)** értékkészlet: $[-3, 1]$.

49. **(a)** Értelmezési tartomány: $(3, \infty)$; **(b)** értékkészlet: $\mathbb{R}$.

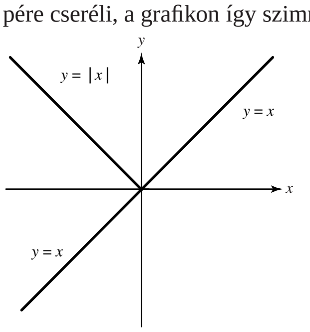
51. **(a)** Értelmezési tartomány: $[-4, 4]$; **(b)** értékkészlet $[0, 2]$.

53. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

55. **(a)** 1; **(b)** $\frac{1}{\sqrt{2{,}5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$; **(c)** x, $x \neq 0$; **(d)** $\frac{1}{\sqrt{1/\sqrt{x+2}+2}}$.

57. **(a)** $(f \circ g)(x) = -x$, $x \geq -2$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
(b) $D_{f\circ g} = [-2, \infty)$, $D_{g\circ f} = [-2, 2]$.
(c) $R_{f\circ g} = (-\infty, 2]$, $R_{g\circ f} = [0, 2]$.

59. A grafikon $x < 0$ részét az x-tengelyre vonatkozó tükörképére cseréli, a grafikon így szimmetrikus lesz az y-tengelyre.



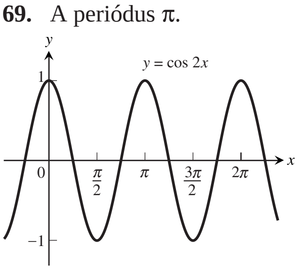
61. Nem változtatja meg.

63. A grafikon $x > 0$ feletti részének tükörképét is hozzáveszi, a grafikon így szimmetrikus lesz az y-tengelyre.

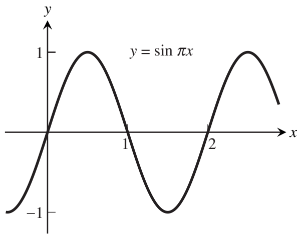
65. Az $y < 0$ részt tükrözi az x-tengelyre.

67. Az $y < 0$ részt tükrözi az x-tengelyre.

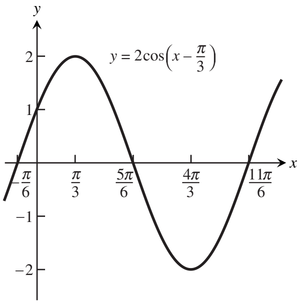
69. A periódus π.



71. A periódus 2.



73.



75. **(a)** $a = 1$, $b = \sqrt{3}$; **(b)** $a = 2\sqrt{3}/3$, $c = 4\sqrt{3}/3$.

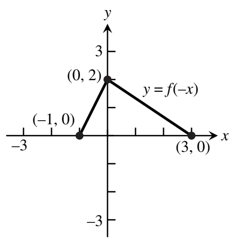
77. **(a)** $a = \frac{b}{\operatorname{tg} B}$; **(b)** $c = \frac{a}{\sin A}$.

79. $\approx 16{,}98$ m

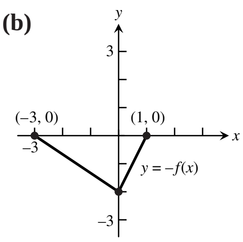
81. **(b)** 4π

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

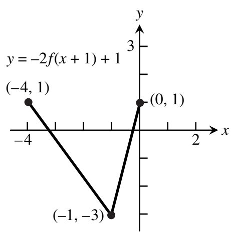
1. **(a)**



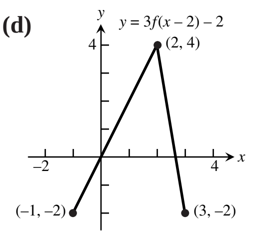
(b)



(c)



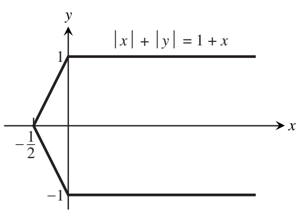
(d)



3. Igen. Példák: $f(x) = 1/x$ és $g(x) = 1/x$; $f(x) = 2x$ és $g(x) = x/2$; $f(x) = e^x$ és $g(x) = \ln x$.

5. Ha $f(x)$ páratlan, akkor $g(x) = f(x) - 2$ nem páratlan; $g(x)$ nem is páros, kivéve, ha minden x-re $f(x) = 0$. Ha $f(x)$ páros, akkor $g(x) = f(x) - 2$ is az.

7.



9. $\sqrt{2}$ **11.** $3/4$ **13.** $3\sqrt{15}/16$ **27.** $-4 < m < 0$

2. fejezet

2.1. Változási sebesség, a határérték szemléletes fogalma

1. **(a)** Nem létezik. Amint x jobbról tart 1-hez, a $g(x)$ függvényértékek 0-hoz tartanak, ha pedig x balról közelíti az 1-et, akkor a $g(x)$ függvényértékek is 1-hez tartanak. Nincs tehát *egyetlen* olyan szám, amelyhez a $g(x)$ függvényértékek tetszőlegesen közel kerülnének, amint $x \to 1$.

(b) 1 **(c)** 0

3. **(a)** Igaz; **(b)** igaz; **(c)** hamis; **(d)** hamis; **(e)** hamis; **(f)** igaz.

5. Amint x balról tart 0-hoz, $x/|x|$ értékei -1-hez közelítenek, ha viszont x jobbról tart 0-hoz, akkor $x/|x|$ 1-hez közelít. Nincs tehát *egyetlen* olyan L szám, amelyhez a függvényértékek tetszőlegesen közel kerülnének, amint $x \to 0$.

7. Semmit.

9. Nem; nem; nem.

11. **(a)** $f(x) = (x^2-9)/(x+3)$

x	$-3{,}1$	$-3{,}01$	$-3{,}001$	$-3{,}0001$	$-3{,}00001$	$-3{,}000001$
$f(x)$	$-6{,}1$	$-6{,}01$	$-6{,}0001$	$-6{,}00001$	$-6{,}00001$	$-6{,}000001$

x	$-2{,}9$	$-2{,}99$	$-2{,}999$	$-2{,}9999$	$-2{,}99999$	$-2{,}999999$
$f(x)$	$-5{,}9$	$-5{,}99$	$-5{,}999$	$-5{,}9999$	$-5{,}99999$	$-5{,}999999$

(c) $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = -6$

13. **(a)** $G(x) = (x+6)/(x^2+4x-12)$

x	$-5{,}9$	$-5{,}99$	$-5{,}999$
$G(x)$	$-0{,}126582$	$-0{,}1251564$	$-0{,}1250156$

x	$-5{,}9999$	$-5{,}99999$	$-5{,}999999$
$G(x)$	$-0{,}1250015$	$-0{,}1250001$	$-0{,}1250000$

x	$-6{,}1$	$-6{,}01$	$-6{,}001$
$G(x)$	$-0{,}123456$	$-0{,}124843$	$-0{,}124984$

x	$-6{,}0001$	$-6{,}00001$	$-6{,}000001$
$G(x)$	$-0{,}124998$	$-0{,}124999$	-124999

(c) $\lim\limits_{x\to-6} G(x) = -1/8 = -0{,}125$

15. **(a)** $f(x) = (x^2-1)/(|x|-1)$

x	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}001$	$-1{,}0001$	$-1{,}00001$	$-1{,}000001$
$f(x)$	$2{,}1$	$2{,}01$	$2{,}001$	$2{,}0001$	$2{,}00001$	$2{,}00001$

x	$-0{,}9$	$-0{,}99$	$-0{,}999$	$-0{,}9999$	$-0{,}99999$	$-0{,}999999$
$f(x)$	$1{,}9$	$1{,}99$	$1{,}999$	$1{,}9999$	$1{,}99999$	$1{,}999999$

(c) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 2$

17. **(a)** $g(\theta) = \sin\theta/\theta$

θ	$0{,}1$	$0{,}01$	$0{,}001$	$0{,}0001$
$g(\theta)$	$0{,}998334$	$0{,}999983$	$0{,}999999$	$0{,}999999$

θ	$0{,}00001$	$0{,}000001$
$g(\theta)$	$0{,}999999$	$0{,}999999$

θ	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	$-0{,}0001$
$g(\theta)$	$0{,}998334$	$0{,}999983$	$0{,}999999$	$0{,}999999$

θ	$-0{,}00001$	$-0{,}000001$
$g(\theta)$	$0{,}999999$	$0{,}999999$

$\lim\limits_{\theta\to0} g(\theta) = 1$

19. **(a)** $f(x) = x^{1/(1-x)}$

x	0,9	0,99	0,999	0,9999	0,99999	0,999999
$f(x)$	0,348678	0,366032	0,367695	0,367861	0,367877	0,367879

x	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	1,000001
$f(x)$	0,385543	0,369711	0,368063	0,367897	0,367881	0,367878

$\lim\limits_{x\to1} f(x) \approx 0{,}36788$

21. 4 **23.** 0 **25.** 9 **27.** $\pi/2$

29. **(a)** 19; **(b)** 1. **31.** **(a)** $-\frac{4}{\pi}$; **(b)** $-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$. **33.** 1

35. [Ha az Olvasó megoldása nem pontosan ilyen, abban a nyomda ördöge is hibás lehet.]

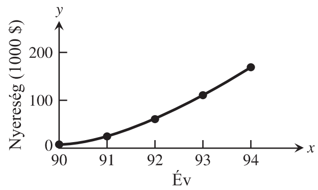
(a)

PQ_1	PQ_2	PQ_3	PQ_4
43	46	49	50

[A sebességet m/s egységben mérve.]

(b) ≈ 50 m/s vagy 180 km/h

37. **(a)**



(b) $\approx 56\,000$ dollár/év

(c) $\approx 42\,000$ dollár/év

39. **(a)** 0,414213, 0,449489, $(\sqrt{1+h}-1)/h$;

(b) $g(x) = \sqrt{x}$.

$1+h$	1,1	1,01	1,001	1,0001
$\sqrt{1+h}$	1,04880	1,004987	1,0004998	1,0000499
$(\sqrt{1+h}-1)/h$	0,4880	0,4987	0,4998	0,499

$1+h$	1,00001	1,000001
$\sqrt{1+h}$	1,000005	1,0000005
$(\sqrt{1+h}-1)/h$	0,5	0,5

(c) 0,5;

(d) 0,5

2.2. Határértékek kiszámítása

1. -9 **3.** 4 **5.** -8 **7.** 5/8

9. 5/2 **11.** 27 **13.** 16 **15.** 3/2

17. 3/2 **19.** 1/10 **21.** -7 **23.** 3/2

25. $-1/2$ **27.** 4/3 **29.** 1/6 **31.** 4

33. 1/2 **35.** 3/2

37. **(a)** Hányados; **(b)** különbség és hatvány;
(c) Összeg, konstanssal való szorzás.

39. **(a)** -10; **(b)** -20; **(c)** -1; **(d)** 5/7

41. **(a)** 4; **(b)** -21; **(c)** -12; **(d)** $-7/3$

43. 2 **45.** 3 **47.** $1/(2\sqrt{7})$ **49.** $\sqrt{5}$

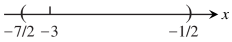
51. **(a)** A határérték 1.

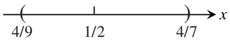
53. $c = 0,\ 1,\ -1$; a határérték a 0 helyen $c = 0$, $c = \pm1$ esetén pedig 1.

55. 7 **57.** **(a)** 5; **(b)** 5.

2.3. A határérték precíz definíciója

1. $\delta = 2$ 

3. $\delta = 1/2$ 

5. $\delta = 1/18$ 

7. $\delta = 0,1$ **9.** $\delta = 7/16$

11. $\delta = \sqrt{5} - 2$ **13.** $\delta = 0,36$

15. $(3,99; 4,01)$, $\delta = 0,01$ **17.** $(-0,19; 0,21)$, $\delta = 0,19$

19. $(3,15)$, $\delta = 5$ **21.** $(10/3, 5)$, $\delta = 2/3$

23. $(-\sqrt{4,5}, -\sqrt{3,5})$, $\delta = \sqrt{4,5} - 2 \approx 0,12$

25. $(\sqrt{15}, \sqrt{17})$, $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0,12$

27. $\left(2 - \frac{0,03}{m}, 2 + \frac{0,03}{m}\right)$, $\delta = \frac{0,03}{m}$

29. $\left(\frac{1}{2} - \frac{c}{m}, \frac{c}{m} + \frac{1}{2}\right)$, $\delta = \frac{c}{m}$

31. $L = -3$, $\delta = 0,01$ **33.** $L = 4$, $\delta = 0,05$

35. $L = 4$, $\delta = 0,75$

55. $[3,384; 3,387]$ A biztonság kedvéért a bal oldali végpontot fölfelé, a jobb oldalit lefelé kerekítettük.

59. Nem létezik a határérték, amint $x \to 3$.

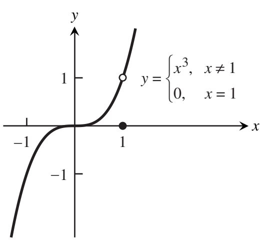
2.4. Jobb és bal oldali határérték. Határérték a végtelenben

1. **(a)** Igaz; **(b)** igaz; **(c)** hamis; **(d)** igaz; **(e)** igaz; **(f)** igaz; **(g)** hamis; **(h)** hamis; **(i)** hamis; **(j)** hamis; **(k)** igaz; **(l)** hamis.

3. **(a)** 2,1; **(b)** nem, $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to^-} f(x)$; **(c)** 3,3; **(d)** igen, 3.

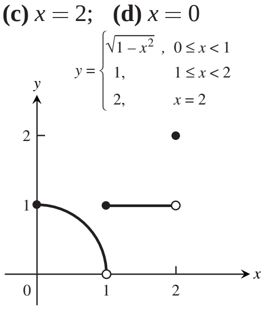
5. **(a)** Nem; **(b)** igen, 0; **(c)** nem.

7. **(a)**



(b) 1, 1; **(c)** igen, 1.

9. **(a)** $D: 0 \leq x \leq 2$; $R: 0 < y \leq 1$ és $y = 2$; **(b)** $(0,1) \cup (1,2)$; **(c)** $x = 2$; **(d)** $x = 0$



11. $\sqrt{3}$ **13.** 1 **15.** $2/\sqrt{5}$ **17.** **(a)** 1; **(b)** -1.

19. **(a)** 1; **(b)** 2/3. **21.** 1 **23.** 3/4 **25.** 2

27. 1/2 **29.** 2 **31.** 1 **33.** 1/2 **35.** 3/8

37. **(a)** -3; **(b)** -3. **39.** **(a)** 1/2; **(b)** 1/2.

41. **(a)** $-5/3$; **(b)** $-5/3$. **43.** 0 **45.** -1

47. **(a)** 2/5; **(b)** 2/5. **49.** **(a)** 0; **(b)** 0.

51. **(a)** 7; **(b)** 7. **53.** **(a)** 0; **(b)** 0.

55. **(a)** $-2/3$; **(b)** $-2/3$. **57.** 0 **59.** 1

61. ∞ **69.** 1 **73.** $\delta = \varepsilon^2$, $\lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} = 0$.

77. **(a)** 400; **(b)** 399; **(c)** a határérték nem létezik

79. 1 **81.** 3/2 **83.** 3

2.5. Végtelen határértékek és függőleges aszimptoták

1. ∞ **3.** $-\infty$ **5.** $-\infty$ **7.** ∞

9. **(a)** ∞; **(b)** $-\infty$ **11.** ∞ **13.** ∞ **15.** $-\infty$

17. **(a)** ∞; **(b)** $-\infty$; **(c)** $-\infty$; **(d)** ∞

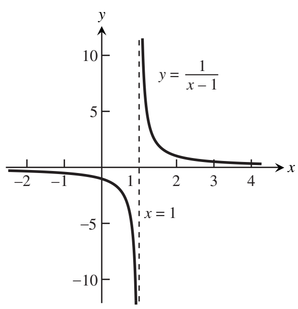
19. **(a)** $-\infty$; **(b)** ∞; **(c)** 0; **(d)** 3/2

21. **(a)** $-\infty$; **(b)** 1/4; **(c)** 1/4; **(d)** 1/4; **(e)** $-\infty$ lesz

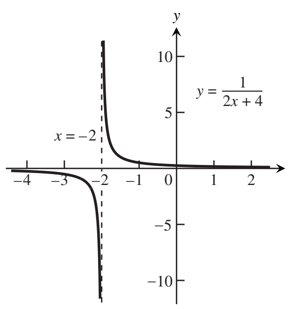
23. **(a)** $-\infty$; **(b)** ∞

25. **(a)** ∞; **(b)** ∞; **(c)** ∞; **(d)** ∞

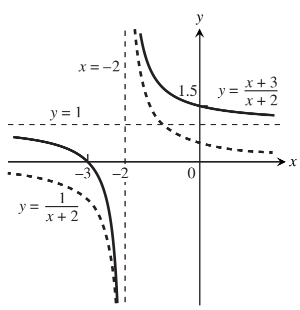
27.



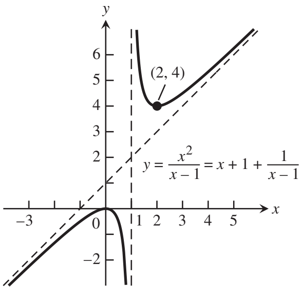
29.



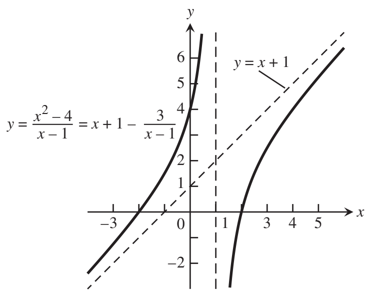
31.



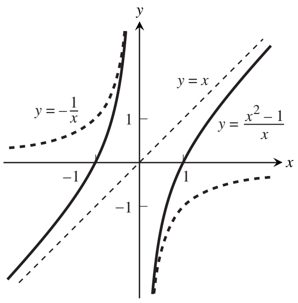
33.



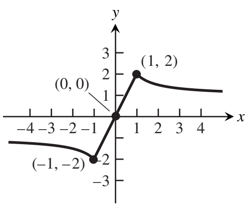
35.



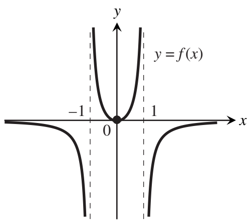
37.



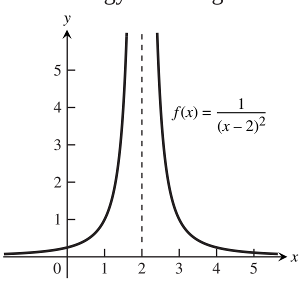
39. Íme egy lehetőség:



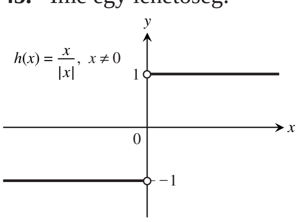
41. Íme egy lehetőség:



43. Íme egy lehetőség:



45. Íme egy lehetőség:



51. **(a)** Minden pozitív B valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden x esetén

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > B.$$

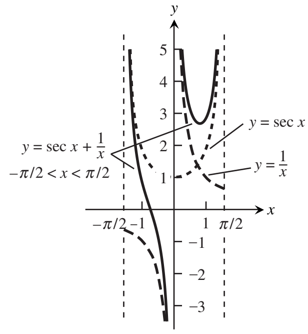
(b) Minden negatív $-B$ valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden x esetén

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -B.$$

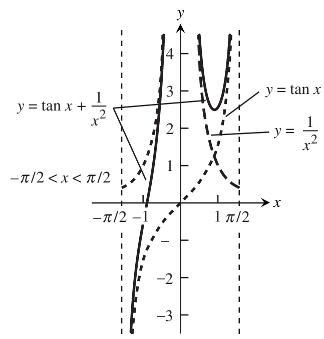
(c) Minden negatív $-B$ valós számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden x esetén

$$x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -B.$$

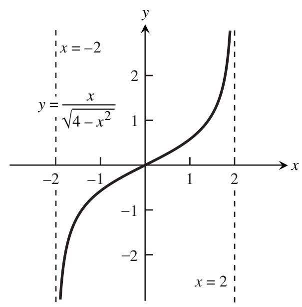
57.



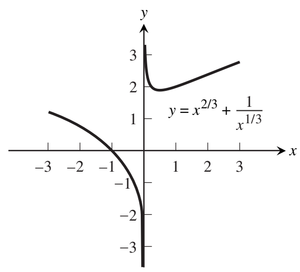
59.



61.



63.



2.6. Folytonosság

1. Nem, az $x = 2$ helyen nem folytonos, mert értelmezve sincs.

3. Folytonos.

5. **(a)** Igen; **(b)** igen; **(c)** igen; **(d)** igen.

7. **(a)** Nem; **(b)** nem.

9. 0

11. 1, nem megszüntethető; 0, megszüntethető.

13. Az $x=2$ kivételével mindenütt.

15. Az $x=1$ és az $x=3$ kivételével mindenütt.

17. Mindenütt.

19. Az $x=0$ kivételével mindenütt.

21. Az $x=n\pi/2$ helyek kivételével (ahol n tetszőleges egész szám) mindenütt.

23. Az $x=n\pi/2$ helyek kivételével (ahol n tetszőleges páratlan egész szám) mindenütt.

25. Minden $x\geq -3/2$ esetén. **27.** Mindenütt.

29. 0; az $x=\pi$ helyen folytonos.

31. 1; az $y=1$ helyen folytonos.

33. $\sqrt{2}/2$; a $t=0$ helyen folytonos.

35. $g(3)=6$ **37.** $f(1)=3/2$ **39.** $a=4/3$

63. $x\approx 1,8794,\ -1,5321,\ -0,3473$ **65.** $x\approx 1,7549$

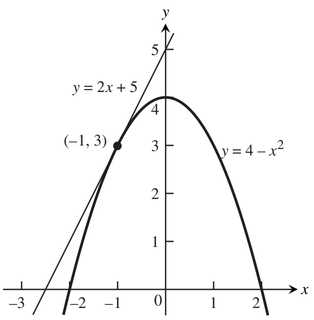
67. $x\approx 3,5156$ **69.** $x\approx 0,7391$

2.7. Érintő és derivált

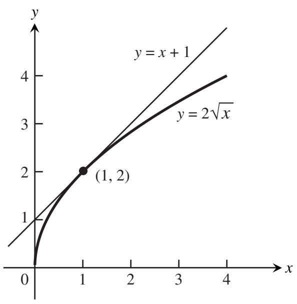
1. $P_1: m_1=1;\ \ P_2: m_2=5.$

3. $P_1: m_1=5/2;\ \ P_2: m_2=-1/2.$

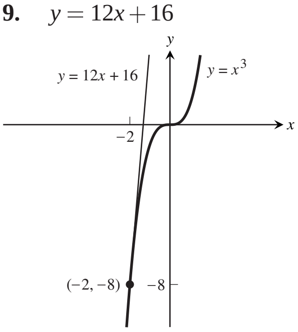
5. $y=2x+5$



7. $y=x+1$



9. $y=12x+16$



11. $m=4;\ \ y-5=4(x-2).$

13. $m=-2;\ \ y-3=-2(x-3).$

15. $m=12;\ \ y-8=12(t-2).$

17. $m=\frac{1}{4};\ \ y-2=\frac{1}{4}(x-4).$

19. $m=-10$ **21.** $m=-1/4$ **23.** $(-2,-5)$

25. $y=-(x+1),\ y=-(x-3).$ **27.** 19,6 m/s

29. 6π **31.** Igen. **33.** Igen.

35. **(a)** Sehol sem.

37. **(a)** Az $x=0$ helyen.

39. **(a)** Sehol sem.

41. **(a)** Az $x=1$ helyen.

43. **(a)** Az $x=0$ helyen.

Gyakorló feladatok

1.
$x=-1$: $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=1$, így $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=1=f(-1)$, f tehát folytonos az $x=-1$ helyen.
$x=0$: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$, így $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$, mivel azonban $f(0)\neq 0$, f nem folytonos az $x=0$ helyen; a szakadás megszűnik, ha az $f(0)$ függvényértéket 0-nak definiáljuk.
$x=1$: $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-1$, viszont $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=1$, emiatt $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ nem létezik; f-nek nem megszüntethető szakadása van az $x=1$ helyen.

3. **(a)** -21; **(b)** 49; **(c)** 0; **(d)** 1;
(e) 1; **(f)** 7; **(g)** -7; **(h)** $-\frac{1}{7}$.

5. 4

7. **(a)** $(-\infty,\infty)$; **(b)** $[0,\infty)$; **(c)** $(-\infty,0)$ és $(0,\infty)$; **(d)** $(0,\infty)$.

9. **(a)** Nem létezik; **(b)** 0.

11. $\frac{1}{2}$ **13.** $2x$ **15.** $-\frac{1}{4}$ **17.** 2 **19.** 0

21. $\frac{2}{5}$ **23.** 0 **25.** $-\infty$ **27.** 0 **29.** 1

31. Egyikben sem; a $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ és a $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ határérték nem létezik.

37. 1,324717957

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

3. 0; csak a bal oldali határértéket lehetett vizsgálni, mert a függvény $v>c$ esetén nincs értelmezve.

5. $18{,}23<t<23{,}77$; legfeljebb 2,77°C fokkal.

13. **(a)** B; **(b)** A; **(c)** A; **(d)** A.

21. **(a)** $\lim\limits_{a\to0} r_+(a)=0,5,\quad \lim\limits_{a\to-1^+} r_+(a)=1.$
(b) $\lim\limits_{a\to0} r_-(a)$ nem létezik, $\quad\lim\limits_{a\to-1^+} r_-(a)=1.$

25. 0 **27.** 1 **29.** 4

3. fejezet

3.1. A deriváltfüggvény

1. $-2x,\ 6,\ 0,\ -2$

3. $-\frac{2}{t^2},\ 2,\ -\frac{1}{4},\ -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

5. $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}},\ \frac{3}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2\sqrt{2}}$

7. $6x^2$

9. $\frac{2}{(2t+1)^2}$

11. $\frac{-1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$

13. $1-\frac{9}{x^2},\ 0$

15. $3t^2-2t,\ 5$

17. $\frac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}},\ y-4=-\frac{1}{2}(x-6)$

19. 6

21. 1/8

23. $\frac{-1}{(x+2)^2}$

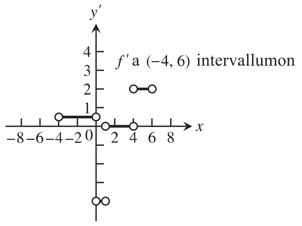
25. $\frac{-1}{(x-1)^2}$

27. b

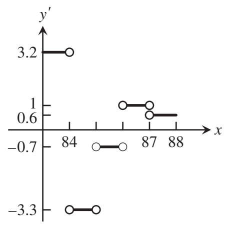
29. d

31. **(a)** $x=0,\ 1,\ 4$

(b)



33.



35. Mivel $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1$, de $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0$, az $f(x)$ függvény nem differenciálható az $x=0$ helyen.

37. Mivel $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=2$, de $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=1/2$, az $f(x)$ függvény nem differenciálható az $x=1$ helyen.

39. **(a)** $-3\le x\le 2$; **(b)** nincs ilyen ; **(c)** nincs ilyen.

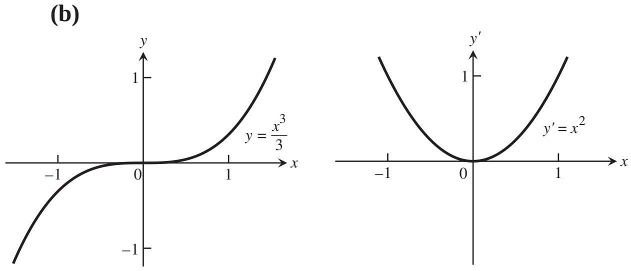
41. **(a)** $-3\le x<0,\ 0<x\le 3$; **(b)** nincs ilyen; **(c)** $x=0$.

43. **(a)** $-1\le x<0,\ 0<x\le 2$; **(b)** $x=0$; **(c)** nincs ilyen.

45. **(a)** $y'=-2x$; **(c)** $x<0,\ x=0,\ x>0$; **(d)** $-\infty<x<0$, $0<x<\infty$.

47. **(a)** $y'=x^2$

(b)



(c) $x\ne 0,\ x=0$, nincs ilyen.
(d) $-\infty<x<\infty$, nincs ilyen.

49. $y'=3x^2$ sohasem negatív.

51. Igen, az $y+16=-(x-3)$ egyenletű egyenes a $(3,-16)$ pontbeli érintő.

53. Nem, az $y=\lfloor x\rfloor$ függvényre a deriváltra vonatkozó Bolzano-tétel nem igaz.

55. Igen, $(-f)'(x)=-(f'(x))$.

57. Ha $g(t)=mt$ és $h(t)=t$, akkor $\lim\limits_{t\to 0}\frac{g(t)}{h(t)}=m$, általában nem 0.

3.2. Deriválási szabályok

1. $\frac{dy}{dx}=-2x,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-2$

3. $\frac{ds}{dt}=15t^2-15t^4,\quad \frac{d^2s}{dt^2}=30t-60t^3$

5. $\frac{dy}{dx}=4x^2-1,\quad \frac{d^2y}{d^2}=8x$

7. $\frac{dw}{dz}=-\frac{6}{z^3}+\frac{1}{z^2},\quad \frac{d^2w}{dx^2}=\frac{18}{z^4}-\frac{2}{z^3}$

9. $\frac{dy}{dx}=12x-10+10x^{-3},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=12-30x^{-4}$

11. $\frac{dr}{ds}=\frac{-2}{3s^3}+\frac{5}{2s^2},\quad \frac{d^2r}{ds^2}=\frac{2}{s^4}-\frac{5}{s^3}$

13. $y'=-5x^4+12x^2-2x-3$

15. $y'=3x^2+10x+2-\frac{1}{x^2}$

17. $y'=\frac{-19}{(3x-2)^2}$

19. $g'(x)=\frac{x^2+x+4}{(x+0{,}5)^2}$

21. $\frac{dv}{dt}=\frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$

23. $f'(s)=\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2}$

25. $v'=-\frac{1}{x^2}+2x^{-3/2}$

27. $y'=\frac{-4x^3-3x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

29. $y'=2x^3-3x-1,\quad y''=6x^2-3,\quad y'''=12x,\quad y^{(4)}=12$, $y^{(n)}=0$ minden $n\ge 5$ esetén.

31. $y'=2x-7x^{-2},\quad y''=2+14x^{-3}$

33. $\frac{dr}{d\theta}=3\theta^{-4},\quad \frac{d^2r}{d\theta^2}=-12\theta^{-5}$

35. $\frac{dw}{dz}=-z^{-2}-1,\quad \frac{d^2w}{dz^2}=2z^{-3}$

37. $\frac{dp}{dq}=\frac{1}{6}q+\frac{1}{6}q^{-3}+q^{-5},\quad \frac{d^2p}{dq^2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}q^{-4}-5q^{-6}$

39. **(a)** 13; **(b)** −7; **(c)** 7/25; **(d)** 20.

41. **(a)** $y=-\frac{x}{8}+\frac{5}{4}$; **(b)** $m=-4$ a $(0,1)$ pontban; **(c)** $y=8x-15,\ y=8x+17$.

43. $y=4x,\ y=2.$

45. $a=1,\ b=1,\ c=0.$

47. **(a)** $y=2x+2$; **(c)** $(2,6)$

49. $P'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+2a_2x+a_1$

51. A konstanssal való szorzás a szorzatszabály speciális esete.

53. **(a)** $\frac{d}{dx}(uvw)=uvw'+uv'w+u'vw$
(b) $\frac{d}{dx}(u_1u_2u_3u_4)=u_1u_2u_3u_4'+u_1u_2u_3'u_4+u_1u_2'u_3u_4+u_1'u_2u_3u_4$
(c) $\frac{d}{dx}(u_1\cdots u_n)=u_1\cdot u_2\cdots u_{n-1}u_n'+u_1\cdot u_2\cdots u_{n-1}'u_n+\ldots$ $\ldots+u_1\cdot u_2'\cdots u_{n-1}u_n+u_1'\cdot u_2\cdots u_{n-1}u_n$

55. $\frac{dP}{dV}=-\frac{nRT}{(V-nb)^2}+\frac{2an^2}{V^3}$

3.3. A derivált mint változási sebesség

1. **(a)** -2 m, -1 m/s; **(b)** 3 m/s, 1 m/s, 2 m/s^2, 2 m/s^2; **(c)** irányváltás: $t = 3/2$ s.

3. **(a)** -9 m, -3 m/s; **(b)** 3 m/s, 12 m/s, 6 m/s^2, -12 m/s^2; **(c)** irányváltás nincs.

5. **(a)** -20 m, -5 m/s; **(b)** 45 m/s, 1/5 m/s, 140 m/s^2, 4/25 m/s^2; **(c)** irányváltás nincs.

7. **(a)** $a(1) = -6$ m/s^2, $a(3) = 6$ m/s^2; **(b)** $v(2) = 3$ m/s; **(c)** 6 m.

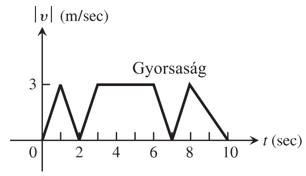
9. Mars: $\approx 7,5$ s Jupiter: $\approx 1,2$ s.

11. $g_s = 0,75$ m/s^2

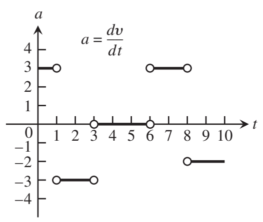
13. **(a)** $v = -9,8t$, $|v| = 9,8t$ m/s, $a = -9,8$ m/s^2; **(b)** $t \approx 3,3$ s; **(c)** $v \approx -32,6$ m/s

15. **(a)** $t = 2$, $t = 7$; **(b)** $3 \le t \le 6$

(c)



(d)



17. **(a)** 57 m/s; **(b)** 2 s; **(c)** 8 s; **(d)** 10,8 s, 27 m/s; **(e)** 2,8 s; **(f)** a gyorsulás 2 s elteltével a legnagyobb; **(g)** a 2 s és a 10,8 s között állandó, $-9,8$ m/s^2 a gyorsulás.

19. **(a)** 4/7 s, 280 cm/s; **(b)** 560 cm/s, 980 cm/s^2; **(c)** 29,75 villanás/s.

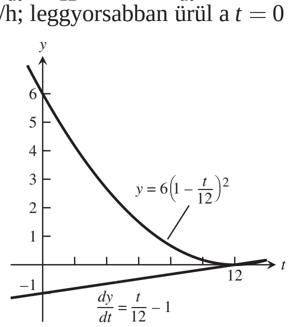
21. C: helyzet, A: sebesség, B: gyorsulás

23. **(a)** 110 dollár/gép; **(b)** 80 dollár; **(c)** 79,90 dollár

25. **(a)** $b'(0) = 10^4$ baktérium/h; **(b)** $b'(5) = 0$ baktérium/h; **(c)** $b'(10) = 10^{-4}$ baktérium/h.

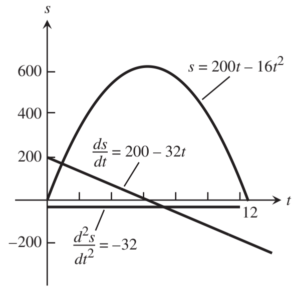
27. **(a)** $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{12} - 1$; **(b)** $\frac{dy}{dt}$ leglassabban ürül a $t = 12$ időpontbeli 0 m/h; leggyorsabban ürül a $t = 0$ időpontban -1 m/h.

(c)



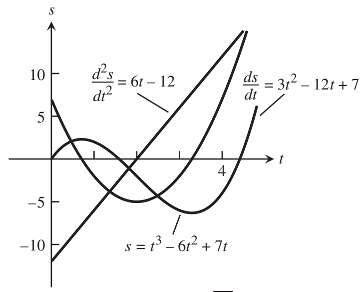
29. $t = 25$ s, $D = \frac{6250}{9}$ m

31.



(a) $v = 0$ a $t = 6,25$ s időpontban; **(b)** $v > 0$, amikor $0 \le t \le 6,25$ (a test lefelé halad), $v < 0$, amikor $6,25 < t \le 12,25$ (a test fölfelé halad) ; **(c)** irányváltoztatás a $t = 6,25$ s időpontban; **(d)** a sebesség növekszik a $(6,25; 12,5]$ intervallumban, csökken a $[0; 6,25)$ intervallumban; **(e)** a test sebessége a $t = 0$ s és a $t = 12,25$ s időpontokban a legnagyobb (200 ft/s), legkisebb a sebessége a $t = 6,25$ s időpontban (0 ft/s); **(f)** a $t = 6,25$ s pillanatban van a test legtávolabb a kiindulóponttól ($s = 625$ m-re).

33.



(a) $v = 0$ a $t = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{3}$ s időpontokban; **(b)** $v < 0$, amikor $\frac{6-\sqrt{15}}{3} < t < \frac{6+\sqrt{15}}{3}$ (a test balra halad), $v > 0$, amikor $0 \le t < \frac{6-\sqrt{15}}{3}$ vagy $\frac{6+\sqrt{15}}{3} < t \le 4$ (a test jobbra halad) ; **(c)** irányváltoztatás a $t = \frac{6\pm\sqrt{15}}{3}$ s időpontokban; **(d)** a sebesség növekszik a $\left(\frac{6-\sqrt{15}}{3}, 2\right) \cup \left(\frac{6+\sqrt{15}}{3}, 4\right]$ intervallumokban, csökken a $\left[0, \frac{6-\sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(2, \frac{6+\sqrt{15}}{3}\right)$ intervallumokban; **(e)** a test sebessége a $t = 0$ s és a $t = 4$ s időpontokban a legnagyobb (7 hosszegység/s), legkisebb a sebesség a $t = \frac{6\pm\sqrt{15}}{3}$ s időpontokban; **(f)** a $t = \frac{6-\sqrt{15}}{3}$ s pillanatban van a test legtávolabb a kiindulóponttól ($s = -6,303$ hosszegységre).

35. **(a)** 135 s; **(b)** az átlagsebesség: $\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{5-0}{73-0} = \frac{5}{73} \approx 0,068$ furlong/s; **(c)** a centrált differenciálhányadossal (l. a 3.4. alfejezet 53. feladatát) a sebesség $\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{4-2}{59-33} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13} \approx 0,077$ furlong/s; **(d)** a leggyorsabban az utolsó furlongon szaladt a ló, mivel ezt tette meg legrövdebb idő (11 s) alatt; **(e)** a gyorsulás az első furlongon a legnagyobb.

3.4. A trigonometrikus függvények deriváltja.

1. $-10 - 3\sin x$

3. $-\csc x \operatorname{ctg} x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

5. 0

7. $\frac{-\csc^2 x}{(1+\operatorname{ctg} x)^2}$

9. $4 \operatorname{tg} x \sec x - \csc^2 x$

11. $x^2 \cos x$

13. $\sec^2 t - 1$

15. $\frac{-2\csc t \operatorname{ctg} t}{(1-\csc t)^2}$

17. $-\theta(\theta\cos\theta + 2\sin\theta)$

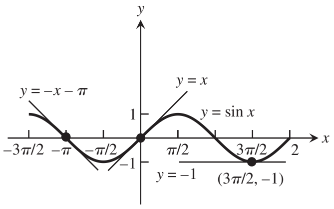
19. $\sec\theta\csc\theta(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{ctg}\theta) = \sec^2\theta - \csc^2\theta$

21. $\sec^2 q$

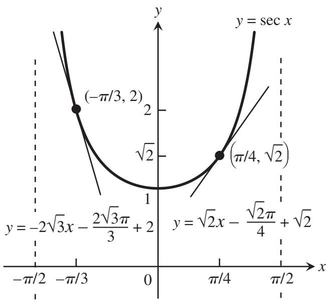
23. $\sec^2 q$

25. **(a)** $2\csc^3 x - \csc x$; **(b)** $2\sec^3 x - \sec x$.

27.



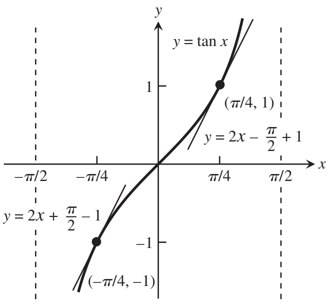
29.



31. Igen, az $x = \pi$ helyen

33. Nem.

35. $\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$; $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$



37. **(a)** $y = -x + \pi/2 + 2$; **(b)** $y = 4 - \sqrt{3}$.

39. 0 **41.** -1 **43.** 0

45. $-\sqrt{2}$ m/s, $\sqrt{2}$ m/s, $\sqrt{2}$ m/s^2, $\sqrt{2}$ m/s^3

47. $c = 9$ **49.** $\sin x$

3.5. A láncszabály. Paraméteres egyenletek

1. $12x^3$ **3.** $3\cos(3x+1)$

5. $-\sin(\sin x)\cos x$ **7.** $10\sec^2(10x-5)$

9. Ha $u = (2x+1)$ és $y = u^5$, akkor $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 2 = 10(2x+1)^4$.

11. Ha $u = (1 - (x/7))$ és $y = u^{-7}$, akkor $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -7u^{-8} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-8}$.

13. Ha $u = ((x^2/8) + x - (1/x))$ és $y = u^4$, akkor $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 4u^3 \cdot \left(\frac{x}{4} + 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 4\left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^3 \left(\frac{x}{4} + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

15. Ha $u = \operatorname{tg} x$ és $y = \sec u$, akkor $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (\sec u \operatorname{tg} u)(\sec^2 u) = \sec(\operatorname{tg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)\sec^2 x$.

17. Ha $u = \sin x$ és $y = u^3$, akkor $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2\cos x = 3\sin^2 x(\cos x)$.

19. $-\frac{1}{2\sqrt{3-t}}$ **21.** $\frac{4}{\pi}(\cos 3t - \sin 5t)$

23. $\frac{\csc\theta}{\operatorname{ctg}\theta + \csc\theta)}$

25. $2x\sin^4 x + 4x^2\sin^3 x\cos x + \cos^{-2} x + 2x\cos^{-3} x\sin x$

27. $(3x-2)^6 - \frac{1}{x^3\left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^2}$

29. $\frac{(4x+3)^3(4x+7)}{(x+1)^4}$

31. $\sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x}) + \operatorname{tg}(2\sqrt{x})$

33. $\frac{2\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}$

35. $\frac{dr}{d\theta} = -2\sin(\theta^2)\sin 2\theta + 2\theta\cos(2\theta)\cos(\theta^2)$

37. $\frac{dq}{dt} = \left(\frac{t+2}{2(t+1)^{3/2}}\right)\cos\left(\frac{t}{\sqrt{t+1}}\right)$

39. $2\pi\sin(\pi t - 2)\cos(\pi t - 2)$

41. $\frac{8\sin(2t)}{(1+\cos 2t)^5}$

43. $-2\cos(\cos(2t-5))(\sin(2t-5))$

45. $\left(1 + \operatorname{tg}^4\left(\frac{t}{12}\right)\right)^2 \left(\operatorname{tg}^3\left(\frac{t}{12}\right)\sec^2\left(\frac{t}{12}\right)\right)$

47. $-\frac{t\sin(t^2)}{\sqrt{1+\cos(t^2)}}$

49. $\frac{6}{x^3}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

51. $2\csc^2(3x-1)\operatorname{ctg}(3x-1)$

53. $5/2$ **55.** $-\pi/4$

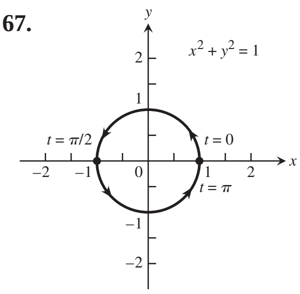
57. 0

59. **(a)** $2/3$; **(b)** $2\pi + 5$; **(c)** $15 - 8\pi$; **(d)** $37/6$; **(e)** -1; **(f)** $\sqrt{2}/24$; **(g)** $5/32$; **(h)** $-5/(3\sqrt{17})$.

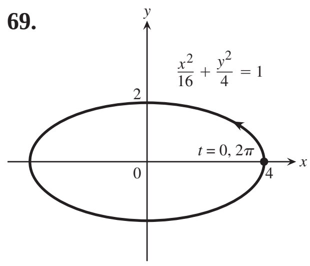
61. 5 **63.** **(a)** 1; **(b)** 1.

65. **(a)** $y = \pi x + 2 - \pi$; **(b)** $\pi/2$.

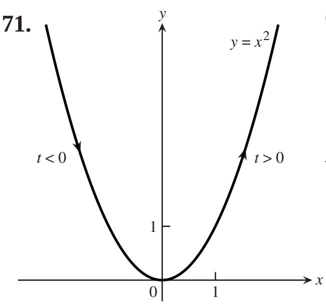
67.



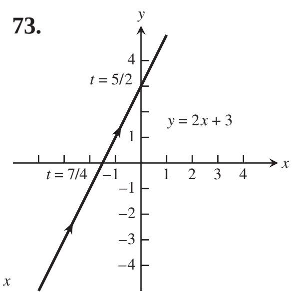
69.



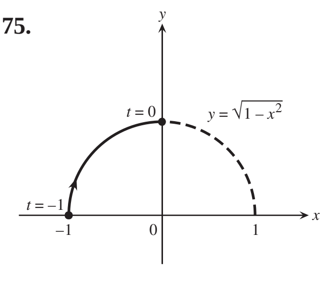
71.



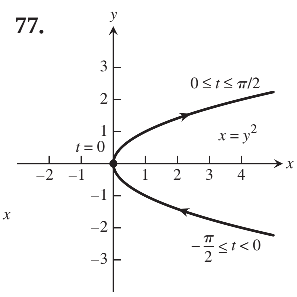
73.



75.



77.



79. **(a)** $x = a\cos t,\ y = -a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$
(b) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$
(c) $x = a\cos t,\ y = -a\sin t,\ 0 \le t \le 24\pi$
(d) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 4\pi$

81. Egy lehetséges válasz: $x = -1 + 5t,\ y = -3 + 4t,\ 0 \le t \le 1$.

83. Egy lehetséges válasz: $x = t^2 + 1,\ y = t,\ t \le 0$.

85. Egy lehetséges válasz: $x = 2 - 3t,\ y = 3 - 4t,\ t \ge 0$.

87. $y = -x + 2,\ \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\pi/4} = -\sqrt{2}$

89. $y = x + \frac{1}{4},\ \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1/4} = -2$

91. $y = x - 4,\ \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=-1} = \frac{1}{2}$

93. $y = 2,\ \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\pi/2} = -1$

95. A sebességet, a gyorsulást és a „lökést” rendre 2-vel, 4-gyel, illetve 8-cal szorozza.

97. $v(6) = \frac{2}{5}$ m/s, $a(6) = -\frac{4}{125}$ m/s^2

107. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $y = 2x$, amikor $t = 0$, $y = -2x$, amikor $t = \pi$.

3.6. Implicit függvény deriváltja

1. $\frac{9}{4}x^{5/4}$

3. $\frac{2^{1/3}}{3x^{2/3}}$

5. $\frac{7}{2(x+6)^{1/2}}$

7. $-(2x+5)^{-3/2}$

9. $\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}$

11. $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{7}t^{-5/7}$

13. $\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}(2t+5)^{-5/3}\cos[(2t+5)^{-2/3}]$

15. $f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$

17. $h'(\theta) = -\frac{2}{3}(\sin 2\theta)(1 + \cos 2\theta)^{-2/3}$

19. $\frac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

21. $\frac{1-2y}{2x+2y-1}$

23. $\frac{-2x^3+3x^2y-xy^2+x}{x^2y-x^3+y}$

25. $\frac{1}{y(x+1)^2}$

27. $\cos^2 y$

29. $\frac{-\cos^2(xy)-y}{x}$

31. $\frac{-y^2}{y\sin\left(\frac{1}{y}\right)-\cos\left(\frac{1}{y}\right)+xy}$

33. $-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$

35. $\frac{-r}{\theta}$

37. $y' = -\frac{x}{y},\ y'' = \frac{-y^2-x^2}{y^3}$

39. $y' = \frac{x+1}{y},\ y'' = \frac{y^2-(x+1)^2}{y^3}$

41. $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1},\ y'' = \frac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

43. -2

45. $(-2,1): m = -1,\ (-2,-1): m = 1$

47. **(a)** $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$; **(b)** $y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$.

49. **(a)** $y = 3x + 6$; **(b)** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$.

51. **(a)** $y = \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$; **(b)** $y = -\frac{7}{6}x - \frac{7}{6}$.

53. **(a)** $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$; **(b)** $y = \frac{2}{\pi}x - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$.

55. **(a)** $y = 2\pi x - 2\pi$; **(b)** $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$.

57. A $(-\sqrt{7}, 0)$ és a $(\sqrt{7}, 0)$ pont; a meredekség -2.

59. A $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontban $m = -1$, a $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ pontban $m = \sqrt{3}$.

61. $(-3,2): m = -\frac{27}{8}$; $(-3,-2): m = \frac{27}{8}$; $(3,2): m = \frac{27}{8}$; $(3,-2): m = -\frac{27}{8}$.

63. 0

65. -6

67. **(a)** Hamis; **(b)** igaz; **(c)** igaz; **(d)** igaz.

69. $(3,-1)$

73. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3+2xy}{x^2+3xy^2},\ \frac{dx}{dy} = -\frac{x^2+3xy^2}{y^3+2xy},\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$

3.7. Kapcsolt deriváltak

1. $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$

3. **(a)** $\frac{dV}{dt} = \pi r^2\frac{dh}{dt}$; **(b)** $\frac{dV}{dt} = 2\pi hr\frac{dr}{dt}$;
(c) $\frac{dV}{dt} = \pi r^2\frac{dh}{dt} + 2\pi hr\frac{dr}{dt}$.

5. **(a)** 1 V/s; **(b)** $-\frac{1}{3}$ A/s; **(c)** $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{V}{I}\frac{dI}{dt}\right)$;
(d) 3/2 Ω/s, R növekszik.

7. **(a)** $\frac{dS}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt}$
(b) $\frac{dS}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dy}{dt}$
(c) $\frac{dS}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$

9. **(a)** $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$
(b) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{da}{dt}$
(c) $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{da}{dt} + \frac{1}{2}a\sin\theta\frac{db}{dt}$

11. **(a)** 14 cm^2/s, növekszik; **(b)** 0 cm/s, állandó;
(c) -14/13 cm/s, csökken.

13. **(a)** $-3,6$ m/s; **(b)** $-5,355$ m^2/s; **(c)** -1 rad/s.

15. 4 m/s

17. **(a)** $\frac{dh}{dt} = 11,19$ cm/min; **(b)** $\frac{dr}{dt} = 14,92$ cm/min.

19. **(a)** $\frac{-1}{24\pi}$ m/min; **(b)** $r = \sqrt{26y - y^2}$ m;
(c) $\frac{dr}{dt} = -\frac{5}{288\pi}$ m/min

21. 0,5 m/min, 10π m^2/min

23. 2,25 m/s

25. Növekszik, percenként 466/1681 literrel.

27. 1 rad/s

29. -5 m/s

31. $-48,98$ m/s

33. $\frac{5}{72\pi}$ cm/min, $\frac{10}{3}$ cm^2/min

35. 18 cm/min

37. **(a)** $\approx -2,61$ m/s
(b) $d\theta_1/dt \approx -0,12$ rad/s, $d\theta_2/dt \approx 0,12$ rad/s
(b) $d\theta_1/dt \approx -0,17$ rad/s, $d\theta_2/dt \approx 0,17$ rad/s

3.8. Linearizáció és differenciálok

1. $L(x) = 10x - 13$ **3.** $L(x) = 2$

5. $2x$ **7.** -5 **9.** $\frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$

11. **(a)** $L(x) = x$; **(b)** $L(x) = \pi - x$.

13. **(a)** $L(x) = 1$; **(b)** $L(x) = 2 - 2\sqrt{3}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

15. $f(0) = 1$; továbbá $f'(x) = k(1+x)^{k-1}$, így $f'(0) = k$. Az $x = 0$ helyen vett linearizáció ennélfogva $L(x) = 1 + kx$.

17. **(a)** 1,01; **(b)** 1,003. **19.** $\left(3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}}\right) dx$

21. $\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}dx$ **23.** $\frac{1-y}{3\sqrt{y}+x}dx$

25. $\frac{5}{2\sqrt{x}}\cos(5\sqrt{x})dx$ **27.** $(4x^2)\sec^2\left(\frac{x^3}{3}\right) dx$

29. $\frac{3}{\sqrt{x}}(\csc(1-2\sqrt{x})\,\mathrm{ctg}\,(1-2\sqrt{x}))dx$

31. **(a)** 0,41; **(b)** 0,4; **(c)** 0,1.

33. **(a)** 0,231; **(b)** 0,2; **(c)** 0,031.

35. **(a)** $-1/3$; **(b)** $-2/5$; **(c)** $1/15$.

37. $dV = 4\pi r_0^2 dr$ **39.** $dS = 12x_0 dx$

41. $dV = 2\pi r_0 h dr$ **43.** **(a)** $0{,}08\pi\ \mathrm{m}^2$; **(b)** 2.%

45. $V \approx 9270\ \mathrm{cm}^3$ **47.** $\frac{1}{3}$%

49. 0,05%

51. Az arány 37,87; eszerint tehát a gravitációs gyorsulás megváltozásának a Holdon körülbelül 38-szor akkora hatása van, mint egy ugyanakkora mennyiséggel való változásnak a Földön.

53. 3% **55.** 3%

59. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sqrt{1+0}}{1+\left(\frac{0}{2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$

65. $0{,}07c$

Gyakorló feladatok

1. $5x^4 - 0{,}25x + 0{,}25$ **3.** $3x(x-2)$

5. $2(x+1)(2x^2+4x+1)$

7. $3(\theta^2 + \sec\theta + 1)^2(2\theta + \sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta)$

9. $\frac{1}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})^2}$ **11.** $2\sec^2 x\,\mathrm{tg}\,x$

13. $8\cos^3(1-2t)\sin(1-2t)$ **15.** $5(\sec t)(\sec t + \mathrm{tg}\,t)^5$

17. $\frac{\theta\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2\theta\sin\theta}}$ **19.** $\frac{\cos\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}}$

21. $x\csc\left(\frac{2}{x}\right) + \csc\left(\frac{2}{x}\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{2}{x}\right)$

23. $\frac{1}{2}x^{1/2}\sec(2x)^2\left[16\,\mathrm{tg}\,(2x)^2 - x^{-2}\right]$

25. $-10x\csc^2(x)^2$

27. $8x^3\sin(2x^2)\cos(2x^2) + 2x\sin^2(2x^2)$

29. $\frac{-(t+1)}{8t^3}$ **31.** $\frac{1-x}{(x+1)^3}$

33. $\frac{-1}{2x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}}$ **35.** $\frac{-2\sin\theta}{(\cos\theta-1)^2}$

37. $3\sqrt{2x+1}$ **39.** $-9\left[\frac{5x+\cos 2x}{(5x^2+\sin 2x)^{5/2}}\right]$

41. $-\frac{y+2}{x+3}$ **43.** $\frac{-3x^2-4y+2}{4x-4y^{1/3}}$

45. $-\frac{y}{x}$ **47.** $\frac{1}{2y(x+1)^2}$

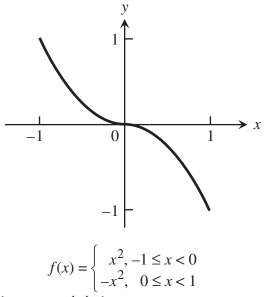
49. $\frac{dp}{dq} = \frac{6q-4p}{3p^2+4q}$ **51.** $\frac{dr}{ds} = (2r-1)(\mathrm{tg}\,2s)$

53. **(a)** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^3-2x^4}{y^5}$; **(b)** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2xy^2-1}{x^4y^3}$.

55. **(a)** 7; **(b)** -2; **(c)** $5/12$; **(d)** $1/4$; **(e)** 12; **(f)** $9/2$; **(g)** $3/4$.

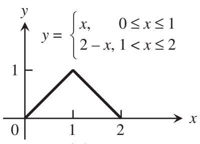
57. 0 **59.** $\sqrt{3}$ **61.** $-\frac{1}{2}$ **63.** $\frac{-2}{(2t+1)^2}$

65. **(a)**



(b) igen; **(c)** igen.

67. **(a)**



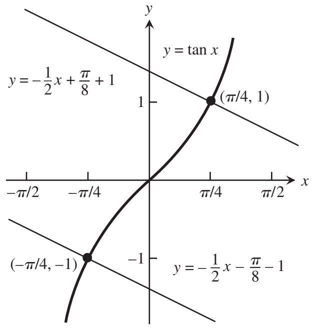
(b) igen; **(c)** nem.

69. $\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$ és $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

71. $(-1, 27)$ és $(2, 0)$

73. **(a)** $(-2, 16)$, $(3, 11)$; **(b)** $(0, 20)$, $(1, 7)$

75.



77. $\frac{1}{4}$ **79.** 4

81. Érintő: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$; normális: $y = 4x - 2$.

83. Érintő: $y = 2x - 4$; normális: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

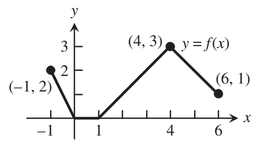
85. Érintő: $y = -\frac{5}{4}x + 6$; normális: $y = \frac{4}{5}x - \frac{11}{5}$.

87. $(1, 1): m = -\frac{1}{2}$; $(1, -1): m$ nem értelmezett.

89. $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$.

91. B az f, A az f' grafikonja.

93.



95. **(a)** $(0, 0)$; **(b)** 1700 nyúl, $\approx$ 1400 nyúl.

97. -1 **99.** $1/2$ **101.** 4 **103.** 1

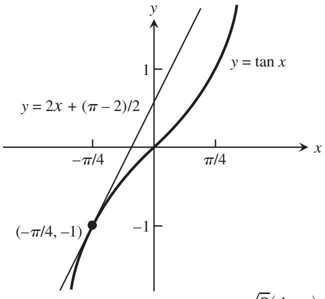
107. **(a)** $\frac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\frac{dr}{dt}$
(b) $\frac{dS}{dt} = 2\pi r\frac{dh}{dt}$
(c) $\frac{dS}{dt} = (4\pi r + 2\pi h)\frac{dr}{dt} + 2\pi r\frac{dh}{dt}$
(d) $\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{2r+h}\frac{dh}{dt}$

109. $-40\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ **111.** $0,02\Omega/\mathrm{s}$ **113.** 22 m/s

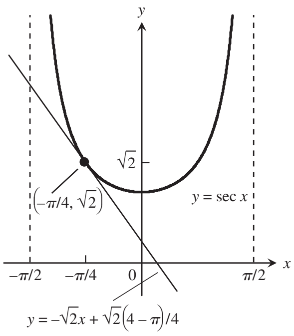
115. (a) $r \approx 0,4h$; **(b)** $8,42$ cm/min.

117. (a) $\frac{3}{5}$ km/h vagy 600 m/s; **(b)** $\frac{18}{\pi}$ rpm (ford/min).

119. (a) $L(x) = 2x + \frac{\pi-2}{2}$



(b) $L(x) = -\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}(4-\pi)}{4}$



121. $L(x) = 1,5x + 0,5$

123. $dS = \frac{\pi r h_0}{\sqrt{r^2+h_0^2}} dh$

125. (a) 4%; **(b)**8%; **(c)** 12%.

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

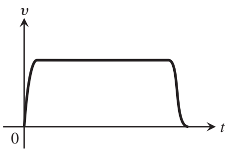
1. **(a)** $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$; $2\cos 2\theta = 2\sin\theta(-\sin\theta) + \cos\theta(2\cos\theta)$;
$2\cos 2\theta = -2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta$; $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
(b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$; $-2\sin 2\theta = 2\cos\theta(-\sin\theta) - 2\sin\theta(\cos\theta)$;
$\sin 2\theta = \cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta$; $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

3. **(a)** $a = 1$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{2}$; **(b)** $b = \cos a$, $c = \sin a$.

5. $h = -4$, $k = \frac{9}{2}$, $a = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

7. **(a)** $0,09y$; **(b)** évente 1%-kal növekszik.

9. Egy lehetséges válasz:



11. **(a)** 2,04 s, **(b)** 12,5 s, 125 m.

15. **(a)** $m = -\frac{b}{\pi}$; **(b)** $m = -1$, $b = \pi$.

17. **(a)** $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{9}{4}$

19. f páratlan $\Rightarrow f'$ páros

23. h' az $x = 0$ helyen értelmezve van, de nem folytonos; k' értelmezve van *és* folytonos is az $x = 0$ helyen

27. **(a)** 24,85 cm; **(b)** 0,002 s; **(c)** körülbelül 2,92 percet késik naponta

4. fejezet

4.1. Függvény szélsőértékei

1. Abszolút minimum $x = c_2$-ben, abszolút maximum $x = b$-ben.

3. Abszolút maximum $x = c$-ben, abszolút minimum nincs.

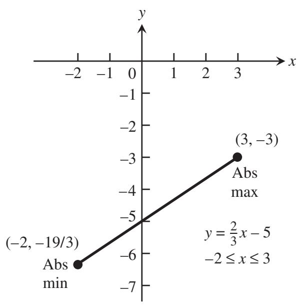
5. Abszolút minimum $x = a$-ban, abszolút maximum $x = c$-ben.

7. Lokális minimum $(-1,0)$-ban, lokális maximum $(1,0)$-ban.

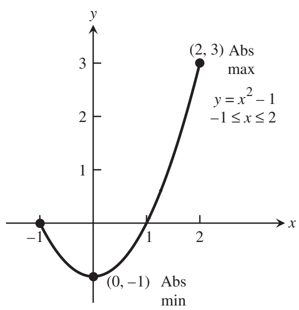
9. Maximum a $(0,5)$ pontban.

11. **(c)** **13.** **(d)**

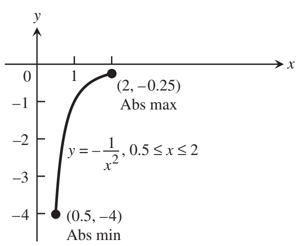
15. Abszolút maximum: -3; abszolút minimum: $-19/3$.



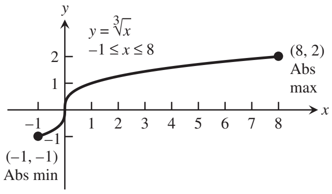
17. Abszolút maximum: 3; abszolút minimum: -1.



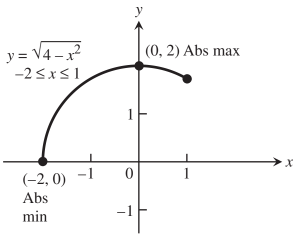
19. Abszolút maximum: -0.25; abszolút minimum: -4.



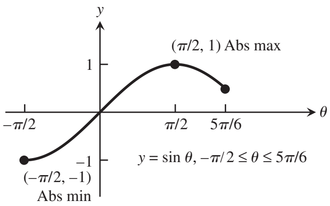
21. Abszolút maximum: 2; abszolút minimum: -1.



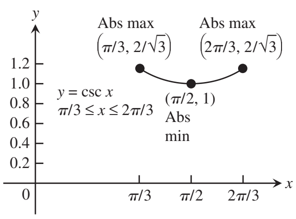
23. Abszolút maximum: 2; abszolút minimum: 0.



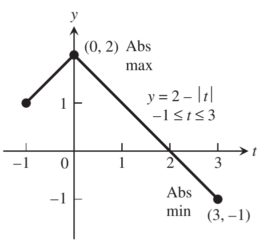
25. Abszolút maximum: 1; abszolút minimum: -1.



27. Abszolút maximum: $2/\sqrt{3}$; abszolút minimum: 1.



29. Abszolút maximum: 2; abszolút minimum: -1.



31. Növekvő a $(0,8)$, csökkenő a $(-1,0)$ intervallumban; abszolút maximum az $x=8$ helyen, értéke 16; abszolút minimum az $x=0$ helyen, értéke 0.

33. Növekvő a $(-32,1)$ intervallumban; abszolút maximum a $\theta=1$ helyen, értéke 1; abszolút minimum a $\theta=-32$ helyen, értéke -8.

35. A minimumérték 1 az $x=2$ pontban.

37. Lokális maximum a $(-2,17)$ pontban; lokális minimum a $\left(\frac{4}{3},-\frac{41}{27}\right)$ pontban.

39. A minimumérték 0 az $x=-1$ és $x=1$ pontban.

41. Lokális minimum van a $(0,1)$ pontban.

43. A maximumérték $\frac{1}{2}$ az $x=1$ pontban; a minimumérték $-\frac{1}{2}$ az $x=-1$ pontban.

45.

kritikus pont	**derivált**	**szélsőérték**	**érték**
$x=-\frac{4}{5}$	0	lokális max.	$\frac{12}{25}10^{1/3}=1.034$
$x=0$	nincs ért.	lokális min.	0

47.

kritikus pont	**derivált**	**szélsőérték**	**érték**
$x=-2$	nincs értelmezve	lokális maximum	0
$x=-\sqrt{2}$	0	minimum	-2
$x=\sqrt{2}$	0	maximum	2
$x=2$	nincs értelmezve	lokális minimum	0

49.

kritikus pont	**derivált**	**szélsőérték**	**érték**
$x=1$	nincs értelmezve	minimum	2

51.

kritikus pont	**derivált**	**szélsőérték**	**érték**
$x=-1$	0	maximum	5
$x=1$	nincs értelmezve	lokális minimum	1
$x=3$	0	maximum	5

53. **(a)** Nem.

(b) A derivált értelmezve van, és nem nulla, ha $x\neq 2$. Továbbá $f(2)=0$ és $f(x)>0$ ha $x\neq 2$.

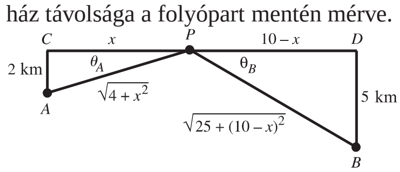
(c) Nem, mert $(-\infty,\infty)$ nem zárt intervallum.

(d) A válasz ugyanaz, mint **(a)**-ban és **(b)**-ben, csak 2-t *a*-val kell helyettesíteni.

55. **(a)** $C(x)=0,3\sqrt{16+x^2}+0,2(9-x)$ millió dollár, ahol $0\le x\le 9$ km. Az építési költségek akkor lesznek minimálisak, ha a csővezeték az A ponttól 3,58 km távolságra lévő B pontban ér partot, s azután a part mentén halad az olajfinomítóig.

(b) A vízalatti csővezeték kilométerenkénti p költsége elvben akár végtelen nagy is lehet, ami a csővezeték lehető legrövidebb úton való partravezetését indokolja (azaz x_c legyen nulla). $p>0,218864$ esetén mégis van olyan x_c érték a $(0,9)$ intervallumban, amely minimumot ad C-re. Ezt úgy lehet bizonyítani, hogy megvizsgáljuk $C''(x_c)=\frac{16p}{(16+x_c^2)^{3/2}}$-t, ami $p>0$ esetén mindig pozitív lesz.

57. A csővezeték hossza: $L(x)=\sqrt{4+x^2}+\sqrt{25+(10-x)^2}$, $0\le x\le 10$. $x=\frac{20}{7}\approx 2,857$ km, ahol x az A város és a szivattyúház távolsága a folyópart mentén mérve.



59. **(a)** A maximumérték 144 $x=2$-re.

(b) A doboz legnagyobb térfogata 144 térfogategység, s ezt az értéket akkor veszi fel, ha $x=2$.

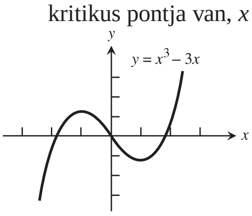
61. A lehető legnagyobb terület $A\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)=\frac{25}{4}$ cm^2.

63. $\frac{v_0^2}{2g}+s_0$.

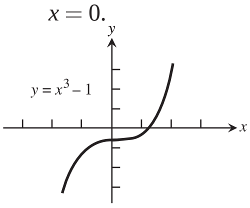
65. Igen.

67. $-c$-ben g-nek lokális maximuma van.

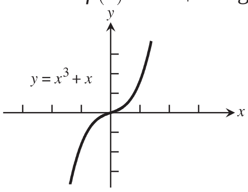
69. **(a)** $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ másodfokú függvény, tehát 0, 1 vagy 2 zérushelye van, és ezeken a helyeken lehetnek f-nek kritikus pontjai. Példák: Az $f(x) = x^3 - 3x$ függvénynek két kritikus pontja van, $x = -1$ és $x = 1$



Az $f(x) = x^3 - 1$ függvénynek egy kritikus pontja van, $x = 0$.



Az $f(x) = x^3 + x$ függvénynek nincs kritikus pontja.



(b) Kettő vagy egy.

71. A maximum értéke 11 az $x = 5$-nél; a minimum értéke a $[-3, 2]$ intervallumon -5; lokális maximum a $(-5, 9)$ pont.

73. A maximum értéke 5 a $[3, \infty)$ intervallumon; a minimum értéke a $(-\infty, -2]$ intervallumon -5.

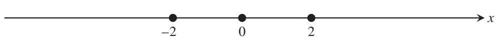
4.2. A középértéktétel

1. 1/2 **3.** 1

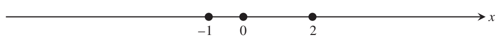
5. Nem teljesíti; f nem differenciálható az értelmezési tartomány $x = 0$ belső pontjában.

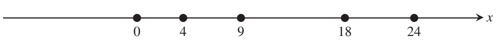
7. Teljesíti.

11. **(a)**

i) 

ii) 

iii) 

iv) 

23. Igen.

25. **(a)** 4; **(b)** 3; **(c)** 3.

27. **(a)** $\frac{x^2}{2} + C$; **(b)** $\frac{x^3}{3} + C$; **(c)** $\frac{x^4}{4} + C$.

29. **(a)** $\frac{1}{x} + C$; **(b)** $x + \frac{1}{x} + C$; **(c)** $5x - \frac{1}{x} + C$.

31. **(a)** $= -\frac{1}{2}\cos 2t + C$; **(b)** $2\sin\frac{t}{2} + C$; **(c)** $-\frac{1}{2}\cos 2t + 2\sin\frac{t}{2} + C$.

33. $f(x) = x^2 - x$ **35.** $r(\theta) = 8\theta + \operatorname{ctg}\theta - 2\pi - 1$

37. $s = 4{,}9t^2 + 5t + 10$ **39.** $s = \frac{1 - \cos(\pi t)}{\pi}$

41. $s = 16t^2 + 20t + 5$ **43.** $s = \sin(2t) - 3$

45. Ha a hőmérő hőmérséklete a t időpontban $T(t)$, akkor $T(0) = -19°\mathrm{C}$ és $T(14) = 100°\mathrm{C}$. A középértéktétel alapján létezik olyan $0 < t_0 < 14$, amelyre $\frac{T(14) - T(0)}{14 - 0} = 8{,}5°\mathrm{C/s} = T'(t_0)$, azaz ebben a $t = t_0$ időpillanatban éppen ezzel a sebességgel emelkedett a higanyszint a hőmérőben.

47. Mivel az átlagsebesség 14,167 km/h volt, a középértéktétel szerint legalább egy alkalommal ezzel a sebességgel kellett haladnia a hajónak.

51. A középértéktétel következménye szerint

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2\left(\frac{a-b}{ab}\right) = a - b \Rightarrow c = \sqrt{ab}.$$

55. A Bolzano-tétel szerint a és b között $f(x)$-nek legalább egyszer nullának kell lennie. Tegyük fel, hogy $f(x)$ a és b között kétszer veszi fel a nulla értéket. Akkor a középértéktétel szerint $f(x)$ két zérushelye között $f'(x)$-nek legalább egyszer nullának kellene lennie, ez viszont nem teljesülhet, mert ezen az intervallumon $f'(x) \neq 0$. Így $f(x)$ a és b között egyszer és csak egyszer lesz nulla.

61. $1{,}09999 \leq f(0{,}1) \leq 1{,}1$

4.3. Monoton függvények és az első derivált teszt

1. **(a)** 0, 1; **(b)** a $(-\infty, 0)$ és $(1, \infty)$ intervallumokban növekvő, $(0, 1)$-ben csökkenő; **(c)** Lokális maximum $x = 0$-ban, lokális minimum $x = 1$-ben.

3. **(a)** -2, 1; **(b)** a $(-2, 1)$ és $(1, \infty)$ intervallumokban növekvő, $(-\infty, -2)$-ben csökkenő; **(c)** lokális maximuma nincs, lokális minimum $x = -2$-ben.

5. **(a)** -2, 1, 3; **(b)** a $(-2, 1)$ és $(3, \infty)$ intervallumokban növekvő, $(-\infty, -2)$ és $(1, 3)$ intervallumokban csökkenő; **(c)** lokális maximum $x = 1$-ben, lokális minimum $x = -2$-ben és $x = 3$-ban.

7. **(a)** -2, 0; **(b)** a $(-\infty, -2)$ és $(0, \infty)$ intervallumokban növekvő, $(-2, 0)$-ban csökkenő; **(c)** lokális maximum $x = -2$-ben, lokális minimum $x = 0$-ban.

9. **(a)** a $-\infty, -1{,}5)$ intervallumban növekvő, a $(-1{,}5, \infty)$ intervallumban csökkenő; **(b)** a lokális maximum értéke $5{,}25$ és ezt $t = -1{,}5$-ben veszi fel; **(c)** abszolút maximum: $5{,}25$ és ezt $t = -1{,}5$-ben veszi fel.

11. **(a)** Csökkenő $(-\infty, 0)$-ban, növekvő $(0, 4/3)$-ban, csökkenő a $(4/3, \infty)$-ben; **(b)** lokális minimum $x = 0$-ban, értéke 32/37; lokális maximum az $x = 4/3$ helyen, értéke 32/27; **(c)** nincs abszolút szélsőértéke.

13. **(a)** Csökkenő $(-\infty, 0)$-ban, növekvő $(0, 1/2)$-ban, csökkenő $(1/2, \infty)$-ben; **(b)** lokális minimum $\theta = 1/2$-ben, értéke 1/4; lokális maximum a $\theta = 1/2$ helyen, értéke $1/4$; **(c)** nincs abszolút szélsőérték.

15. Növekvő $(-\infty, \infty)$-ben, sehol sem csökkenő; **(b)** nincs lokális szélsőértéke; **(c)** nincs abszolút szélsőértéke.

17. Növekvő a $(-2, 0)$ és $(2, \infty)$ intervallumokon, csökkenő a $(-\infty, -2)$ és $(0, 2)$ intervallumokon; **(b)** a lokális maximum 16, ezt $x = 0$-ban veszi fel, a lokális minimum 0, ezt $x = \pm 2$-ben veszi fel; **(c)** nincs abszolút maximum; az abszolút minimum 0, ezt $x = \pm 2$-ben veszi fel.

19. **(a)** Növekvő $(-\infty, -1)$-ben, csökkenő $(-1, 0)$-ben, növekvő $(0, 1)$-ben, csökkenő $(1, \infty)$-ben; **(b)** lokális maximum

±1-ben, értéke 0,5, lokális minimum $x = 0$-ban, értéke 0; **(c)** abszolút maximum $x = \pm1$-ben, értéke 1/2; abszolút minimum nincs.

21. **(a)** Csökkenő $(-2\sqrt{2}, -2)$-n, növekvő $(-2, 2)$-n, csökkenő $(2, 2\sqrt{2})$-n; **(b)** lokális minimum: $g(-2) = -4$, $g(2\sqrt{2}) = 0$; lokális maximum: $g(-2\sqrt{2}) = 0$, $g(2) = 4$; **(c)** abszolút maximum $x = 2$-ben, értéke 4; abszolút minimum $x = -2$-ben, értéke -4.

23. **(a)** Növekvő $(-\infty, 1)$-ben, csökkenő, ha $1 < x < 2$, csökkenő, ha $2 < x < 3$, szakadása van $x = 2$-ben, növekvő $(3, \infty)$-ben; **(b)** lokális minimum $x = 3$-ban, $(3, 6)$, lokális maximum $x = 1$-ben, $(1, 2)$ **(c)** abszolút szélsőértéke nincs.

25. **(a)** Növekvő $(-2, 0)$-ban és $(0, \infty)$-ben, csökkenő $(-\infty, -2)$-ben; **(b)** lokális minimum: $-6\sqrt[3]{2}$ az $x = -2$ helyen; **(c)** nincs abszolút maximum; abszolút minimum: $-6\sqrt[3]{2}$ az $x = -2$ helyen.

27. **(a)** Növekvő $(-\infty, -2/\sqrt{7})$-ben és $(2/\sqrt{7}, \infty)$-ben, csökkenő $(-2/\sqrt{7}, 0)$-ban és $(0, 2/\sqrt{7})$-ben; **(b)** lokális maximum: $24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx 3,12$ $x = -2/\sqrt{7}$-ben; lokális minimum: $-24\sqrt[3]{2}/7^{7/6} \approx -3,12$ $x = 2/\sqrt{7}$-ben; **(c)** abszolút szélsőérték nincs.

29. **(a)** Lokális maximum: 1 $x = 1$-ben; lokális minimum: 0 $x = 2$-ben; **(b)** abszolút maximum: 1 az $x = 1$ helyen; nincs abszolút minimum.

31. **(a)** Lokális maximum: 1 $x = 1$-ben; lokális minimum: 0 $x = 2$-ben; **(b)** nincs abszolút maximum; abszolút minimum: 0 az $x = 2$ helyen.

33. **(a)** Lokális maximum: -9 $t = -3$-ban és 16 $t = 2$-ben; lokális minimum: -16 $t = -2$-ben; **(b)** abszolút maximum: 16 a $t = 2$ helyen, abszolút minimum nincs.

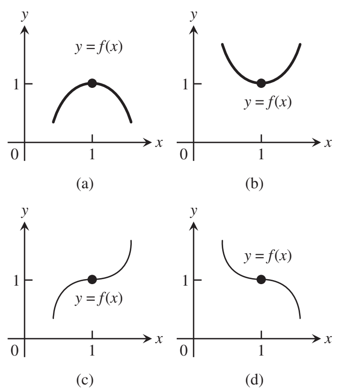
35. **(a)** Lokális minimum: 0 $x = 0$-ban; **(b)** abszolút maximum nincs; abszolút minimum: 0 az $x = 0$ helyen.

37. **(a)** Lokális minimum: $(\pi/3) - \sqrt{3}$ $x = 2\pi/3$-ban; lokális maximum: 0 az $x = 0$ helyen; lokális maximum: π $x = 2\pi$-ben.

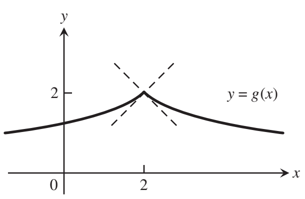
39. **(a)** Lokális minimum: 0 az $x = \pi/4$-ben.

41. Lokális maximum: 3 $\theta = 0$-ban; lokális minimum: -3 a $\theta = 2\pi$-ben.

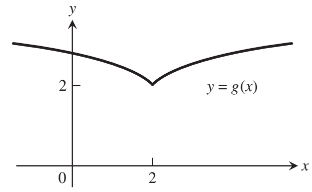
43.



45. **(a)**



(b)



47. Növekvő.

4.4. Konvexitás és a függvénygörbe felrajzolása

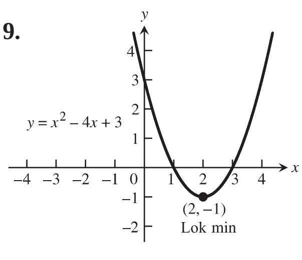
1. Lokális maximum: 3/2 az $x = -1$-ben, lokális minimum: -3 az $x = 2$-ben, inflexiós pont: $(1/2, -3/4)$, emelkedik $(-\infty, -1)$-en és $(2, \infty)$-n, esik $(-1, 2)$-n, konvex $(1/2, \infty)$-n, konkáv $(-\infty, 1/2)$-en.

3. Lokális maximum: 3/4 az $x = 0$-ban, lokális minimum: 0 az $x = \pm1$-ben, inflexiós pontok $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$-ben és $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$-ben, emelkedik $(-1, 0)$-n és $(1, \infty)$-n, esik $(-\infty, -1)$-en és $(0, 1)$-en, konvex $(-\infty, -\sqrt{3})$-n és $(\sqrt{3}, \infty)$-n, konkáv $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$-n.

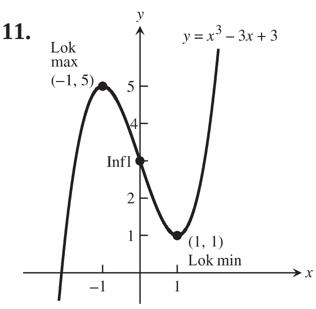
5. Lokális maximum: $-2\pi/3 + \sqrt{3}/2$ az $x = -2\pi/3$-ban; $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ az $x = \frac{\pi}{3}$-ban, lokális minimum: $-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ az $x = -\frac{\pi}{3}$-ban, $2\pi/3 - \sqrt{3}/2$ az $x = \frac{2\pi}{3}$-ban, inflexiós pontok: $(-\pi/2, -\pi/2)$, $(0, 0)$ és $(\pi/2, \pi/2)$, emelkedik $(-\pi/3, \pi/3)$-ban, esik $(-2\pi/3, -\pi/3)$-ban és $(\pi/3, 2\pi/3)$-ban, konvex $(-\pi/2, 0)$-ban és $(\pi/2, 2\pi/3)$-ban, konkáv $(-2\pi/3, -\pi/2)$-ben és $(0, \pi/2)$-ben.

7. Lokális maximum: 1 az $x = -\frac{\pi}{2}$-ben és $x = \frac{\pi}{2}$-ben, 0 az $x = -2\pi$-ben és $x = 2\pi$-ben; lokális minimum: -1 az $x = -\frac{3\pi}{2}$-ben és $x = \frac{3\pi}{2}$-ben, 0 az $x = 0$-ban, inflexiós pontok: $(-\pi, 0)$ és $(\pi, 0)$, emelkedik $(-3\pi/2, -\pi/2)$-n, $(0, \pi/2)$-n és $(3\pi/2, 2\pi)$-n, esik $(-2\pi, -3\pi/2)$-n, $(-\pi/2, 0)$-n és $(\pi/2, 3\pi/2)$-n, konvex $(-2\pi, -\pi)$-n és $(\pi, 2\pi)$-n, konkáv $(-\pi, \pi)$-n.

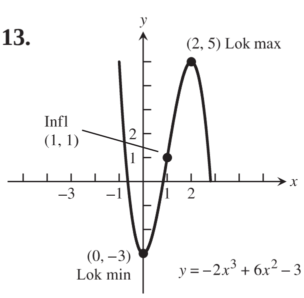
9.



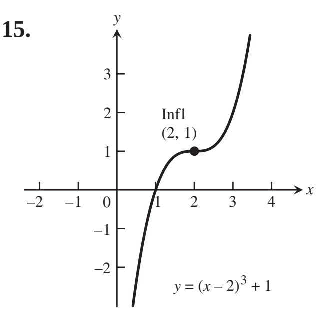
11.



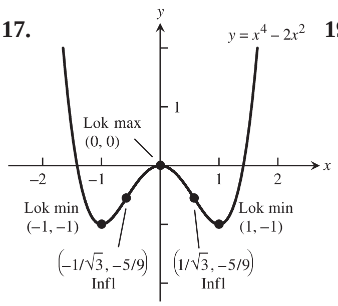
13.



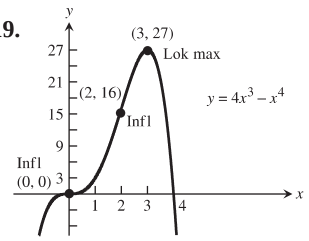
15.



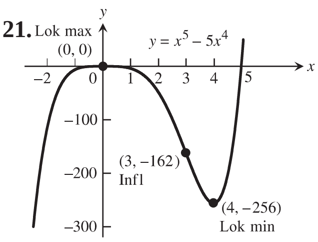
17.



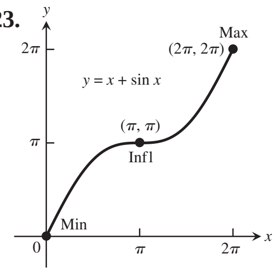
19.



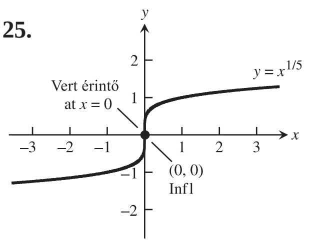
21.



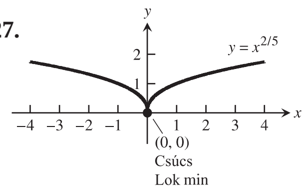
23.



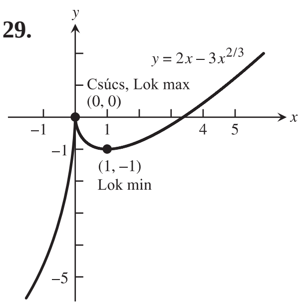
25.



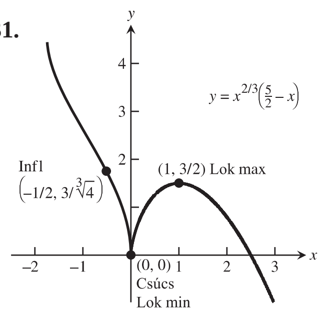
27.



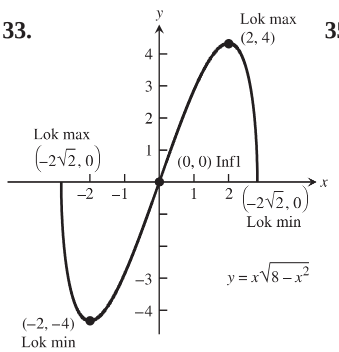
29.



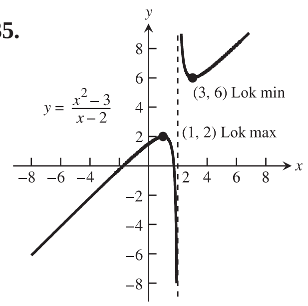
31.



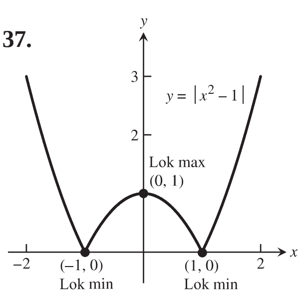
33.



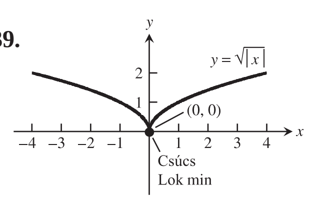
35.



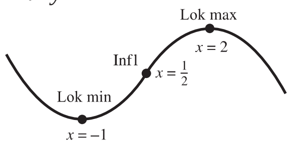
37.



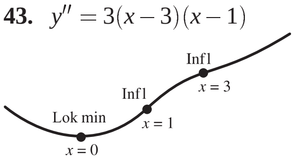
39.



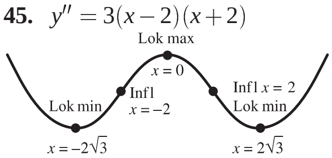
41. $y'' = 1 - 2x$



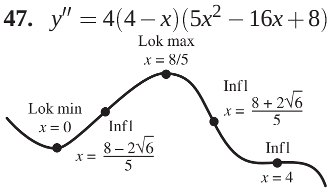
43. $y'' = 3(x-3)(x-1)$



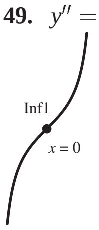
45. $y'' = 3(x-2)(x+2)$



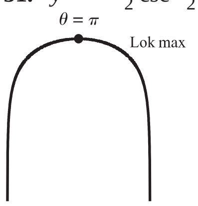
47. $y'' = 4(4-x)(5x^2 - 16x + 8)$



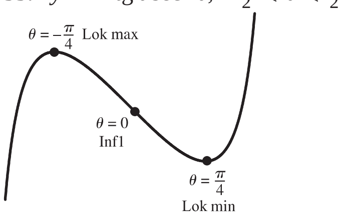
49. $y'' = 2\sec^2 x \operatorname{tg} x$



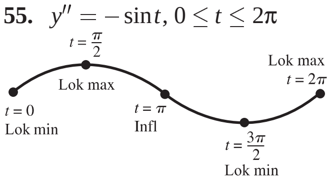
51. $y'' = -\frac{1}{2}\csc^2\frac{\theta}{2},\ 0 < \theta < 2\pi$



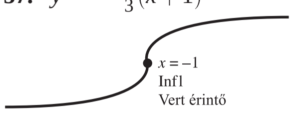
53. $y'' = 2\operatorname{tg}\theta\sec^2\theta,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$



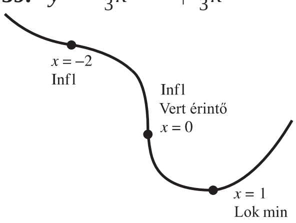
55. $y'' = -\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$



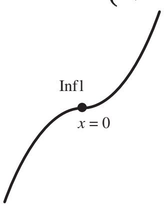
57. $y'' = -\frac{2}{3}(x+1)^{-5/3}$



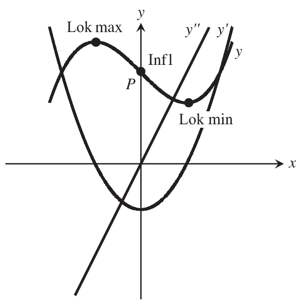
59. $y'' = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{3}x^{-5/3}$



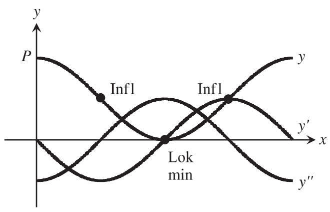
61. $y'' = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$



63.



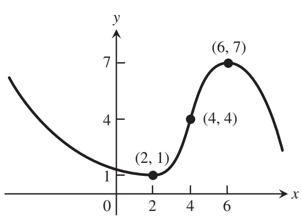
65.



67.

pont	y'	y''
P	–	+
Q	+	0
R	+	–
S	0	–
T	–	–

69.



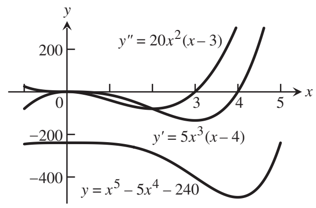
73. ≈ 60 ezer egység.

75. Lokális minimum $x = 2$-nél, inflexiós pont $x = 1$-nél és $x = 5/3$-nál.

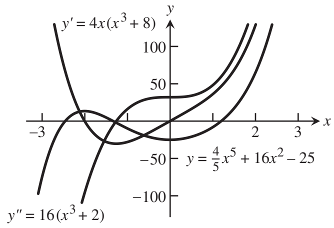
79. $b = -3$

81. **(a)** $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ **(b)** konvex, ha $a > 0$, konkáv, ha $a < 0$.

85. y' és y'' zérushelyei y szélsőérték-, illetve inflexiós helyei. Inflexiós pont van $x = 3$-ban, lokális maximum $x = 0$-ban, lokális minimum $x = 4$-ben.



87. y' és y'' zérushelyei y szélsőérték-, illetve inflexiós helyei. Inflexiós pont van $x = -\sqrt[3]{2}$-ben, lokális maximum $x = -2$-ben, lokális minimum $x = 0$-ban.



91. **(b)** $f'(x) = 3x^2 + k$; $-12k$; pozitív, ha $k < 0$, negatív, ha $k > 0$, 0, ha $k = 0$; f'-nek két zérushelye van, ha $k < 0$, egy zérushelye van, ha $k = 0$ és nincs zérushelye, ha $k > 0$; azaz k előjele szabja meg a lokális szélsőértékek számát.

93. Csúcsos, mert $\lim_{x\to 0^-} = \infty$ és $\lim_{x\to 0^+} = -\infty$.

95. Igen, y' grafikonja metszi az x-tengelyt $x = -3$ közelében, ezért y érintője vízszintes $x = -3$ közelében.

4.5. Alkalmazott optimalizációs problémák

1. 16 cm; 4×4 cm.

3. **(a)** $(x, 1-x)$

5. $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}$ dm, $\frac{2450}{27}$ dm^3.

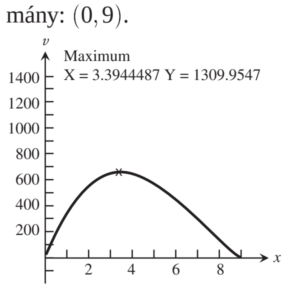
7. 80 000 m^2; 400 m-szer 200 m.

9. **(a)** A tartály optimális mérete: az alapél 10 m, a mélység 5 m.

(b) Adott falvastagság esetén a felületet minimalizálva a súlyára is a minimális értéket kapjuk. Az acéllemez vastagságát más igények szabják meg, például a szerkezeti követelmények.

11. 9×18 dm **13.** $\frac{\pi}{2}$. **15.** $h : r = 8 : \pi$.

17. **(a)** $V(x) = 2x(24-2x)(18-2x)$ **(b)** Az értelmezési tartomány: $(0, 9)$.

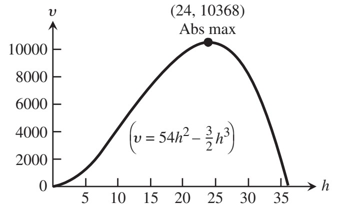


(c) A maximális térfogat $\approx 1309{,}95$ cm^3, amikor $x \approx 3{,}39$ cm. **(d)** $V'(x) = 24x^2 - 336x + 864$, így a kritikus pont $x = 7 - \sqrt{13}$, ami megerősíti a feladat **(c)** részének eredményét. **(e)** $x = 2$ cm vagy $x = 5$ cm.

19. $\approx 2418{,}40$ cm^3

21. **(a)** $h = 24$, $w = 18$

(b)



23. Ha r a félgömb sugara, h a henger magassága és V a térfogata, akkor $r = \left(\frac{3V}{8\pi}\right)^{1/3}$ és $h = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{1/3}$.

25. **(b)** $x = \frac{51}{8}$. **(c)** $L \approx 11$ cm.

27. sugár $\sqrt{2}$ m, magasság 1 m, térfogat $\frac{2\pi}{3}$ m^3.

31. **(a)** $v(0) = 30$ m/s **(b)** 82 m, ha $t = 3{,}06$ s **(c)** Amikor $s = 0$, akkor a sebesség $v(7,1) = -39{,}6$ m/s.

33. $\approx 14{,}18$ méter

35. **(a)** $\approx 15 \times 26$ cm

37. **(a)** $10\pi \approx 31{,}42$ cm/s; ha $t = 0{,}5$ s, 1,5 s, 2,5 s, 3,5 s; $s = 0$, a gyorsulás 0. **(b)** A nyugalmi helyzettől 10 cm-re; a sebesség 0.

39. **(a)** $s = ((21 - 21t)^2 + 169t^2)^{1/2}$ **(b)** 21 km/h, 5,4 km/h **(c)** Nem.

41. $x = \frac{a}{2}$, $v = \frac{ka^2}{4}$.

43. $\frac{c}{2} + 50$.

45. **(a)** $\sqrt{\frac{2km}{h}}$ **(b)** $\sqrt{\frac{2km}{h}}$

49. **(a)** A bútorasztalosnak px egységnyi anyagot kell rendelnie, hogy az kitartson a következő szállítmányig.

(c) Az átlagos napi költség $= \frac{\left(d + \frac{ps}{2}x^2\right)}{x} = \frac{d}{x} + \frac{ps}{x}x$; $x^* = \sqrt{\frac{2d}{ps}}$; $px^* = \sqrt{\frac{2pd}{s}}$ ad minimumot.

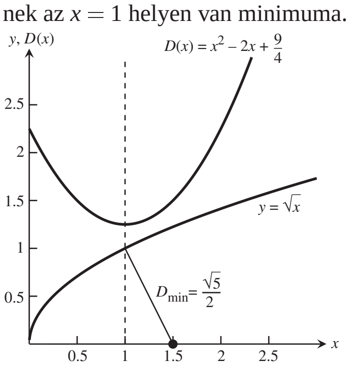
(d) Az egyenes és a hiperbola akkor metszi egymást, amikor $\frac{d}{x} = \frac{ps}{2}x$. $x > 0$-ra $x_{\text{metszéspont}} = \sqrt{\frac{2d}{ps}} = x^*$. Az átlagos napi költség akkor lesz minimális, amikor a szállítás napi költsége és a raktározás napi költsége egyenlő egymással.

51. $M = \frac{C}{2}$

57. **(a)** $y = -1$

59. **(a)** A minimális távolság $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(b) Az $y = \sqrt{x}$ görbe grafikonjának $(1,1)$ pontja van legközelebb a $(3/2, 0)$ ponthoz, azaz a $D(x)$ távolságnégyzetfüggvénynek az $x = 1$ helyen van minimuma.



61. **(a)** $V(x) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2\pi a - x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{a^2 - \left(\frac{2\pi a - x}{2\pi}\right)^2}$

(b) Ha $a = 4$: $r = \frac{4\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$; ha $a = 5$: $r = \frac{5\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$; ha $a = 6$: $r = 2\sqrt{6}$, $h = 2\sqrt{3}$; ha $a = 8$: $r = \frac{8\sqrt{6}}{3}$, $h = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

(c) Mivel $r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ és $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, hányadosuk: $\frac{r}{h} = \sqrt{2}$.

4.6. Határozatlan alakok és a L'Hospital-szabály

1. $\frac{1}{4}$. **3.** $\frac{5}{7}$. **5.** $\frac{1}{2}$. **7.** 0. **9.** 1. **11.** $\sqrt{2}$. **13.** $+1$. **15.** -1. **17.** $\frac{1}{2}$. **19.** 3. **21.** na **23.** $-\frac{1}{2}$. **25.** 0. **27.** 3. **29.** 1. **31.** **(b)** helyes, **(a)** nem. **33.** $c = \frac{27}{10}$. **35.** -1.

4.7. A Newton-módszer

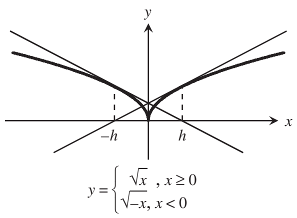
1. $x_2 = -\frac{5}{3}, \frac{13}{21}$.

3. $x_2 = -\frac{51}{31}, \frac{5763}{4945}$.

5. $x_2 = \frac{2387}{2000}$.

7. x és minden további approximáció is egyenlő x_0-lal.

9.



11. Az $y = x^3$ és $y = 3x + 1$ vagy az $y = x^3 - 3x$ és az $y = 1$ görbék metszéspontjai ugyanazokat az x értékeket szolgáltatják, mint a feladat (i) részének gyökei vagy (iv) részének megoldásai.

15. 1,165561185.

17. **(a)** Kettő. **(b)** 0,35003501505249 és $-1{,}0261731615301$.

19. $\pm 1{,}3065629648764$, $\pm 0{,}5411961001462$.

21. $x \approx 0{,}45$.

23. A gyök 1,17951.

25. **(a)** $x_0 = -2$-re vagy $x_0 = -0{,}8$-ra $x_i \to -1$.
(b) $x_0 = -0{,}5$-re vagy $x_0 = -0{,}25$-re $x_i \to 0$.
(c) $x_0 = 0{,}8$-ra vagy $x_0 = 2$-re $x_i \to 1$.
(d) $x_0 = -\sqrt{21}/7$-re vagy $x_0 = \sqrt{21}/7$-re a Newton-módszer nem konvergál. x_i értéke hol $-\sqrt{21}/7$, hol $\sqrt{21}/7$ lesz.

27. A válasz a gép sebességétől függ.

29. 2,45; 0,000245.

4.8. Primitív függvények

1. **(a)** x^2 **(b)** $\frac{x^3}{3}$ **(c)** $\frac{x^3}{3} - x^2 + x$

3. **(a)** x^{-3} **(b)** $-\frac{1}{3}x^{-3}$ **(c)** $-\frac{1}{3}x^{-3} + x^2 + 3x$

5. **(a)** $-\frac{1}{x}$ **(b)** $-\frac{5}{x}$ **(c)** $2x + \frac{5}{x}$

7. **(a)** $\sqrt{x^3}$ **(b)** $\sqrt{x}$ **(c)** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x}$

9. **(a)** $x^{2/3}$ **(b)** $x^{1/3}$ **(c)** $x^{-1/3}$

11. **(a)** $\cos(\pi x)$ **(b)** $-3\cos x$ **(c)** $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + \cos(3x)$

13. **(a)** $\operatorname{tg} x$ **(b)** $2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right)$ **(c)** $-\frac{2}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}\right)$

15. **(a)** $-\csc x$ **(b)** $\frac{1}{5}\csc(5x)$ **(c)** $2\csc\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

17. $\frac{x^2}{2} + x + C$

19. $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$

21. $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

23. $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$

25. $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

27. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$

29. $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$ **31.** $x^2 + \frac{2}{x} + C$

33. $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$ **35.** $-2\sin t + C$

37. $-21\cos\frac{\theta}{3} + C$ **39.** $3\,\mathrm{ctg}\,x + C$

41. $-\frac{1}{2}\csc\theta + C$ **43.** $3\sec x - 2\,\mathrm{tg}\,x + C$

45. $-\frac{1}{2}\cos 2x + \mathrm{ctg}\,x + C$ **47.** $\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C$

49. $\mathrm{tg}\,\theta + C$ **51.** $-\mathrm{ctg}\,x - x + C$

53. $-\cos\theta - \theta + C$

61. **(a)** Hibás: $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\sin x + C\right) = \frac{2x}{2}\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x = x\sin x + \frac{x^2}{2}\cos x.$

(b) Hibás: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + C) = -\cos x + x\sin x.$

(c) Helyes: $\frac{d}{dx}(-x\cos x + \sin x + C) = -\cos x + x\sin x + \cos x = x\sin x.$

63. **(a)** Hibás: $\frac{d}{dx}\left(\frac{(2x+1)^3}{3} + C\right) = \frac{3(2x+1)^2(2)}{3} = 2(2x+1)^2.$

(b) Hibás: $\frac{d}{dx}((2x+1)^2 + C) = 3(2x+1)^2(2) = 6(2x+1)^2.$

(c) Helyes: $\frac{d}{dx}((2x+1)^3 + C) = 6(2x+1)^2.$

65. (b)

67. $y = x^2 - 7x + 10$ **69.** $y = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}$

71. $y = 9x^{1/3} + 4$ **73.** $s = t + \sin t + 4$

75. $r = \cos(\pi\theta) - 1$ **77.** $v = \frac{1}{2}\sec t + \frac{1}{2}$

79. $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$ **81.** $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$

83. $y = x^3 - 4x^2 + 5$ **85.** $y = -\sin t + \cos t + t^3 - 1$

87. $y = 2x^{3/2} - 50$ **89.** $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$

91. $y = -\sin x - \cos x - 2$

93. **(a)** **(i)** 33,2 egység, (ii) 33,2 egység, (iii) 33,2 egység; **(b)** igaz.

95. $t = 25/k,\ k = 4,17$

97. **(a)** $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2}$ **(b)** $s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

101. **(a)** $-\sqrt{x} + C$ **(b)** $x + C$ **(c)** $\sqrt{x} + C$ **(d)** $-x + C$ **(e)** $x - \sqrt{x} + C$ **(f)** $-x - \sqrt{x} + C$

Gyakorló feladatok

1. Nem.

3. Minimum nincs; abszolút maximum: $f(1) = 16$; kritikus pontok: $x = 1$ és $11/3$.

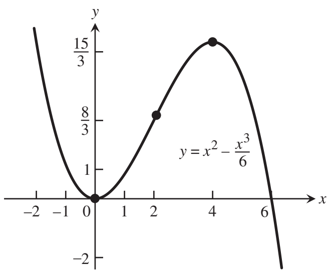
5. Igen, kivéve $x = 0$-nál. **7.** Nem.

11. **(b)** Egy. **13.** **(b)** 0,8555996772

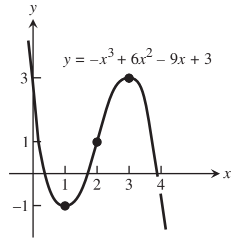
19. A globális minimumérték $\frac{1}{2}$ az $x = 2$ helyen.

21. **(a)** $t = 0,\ 6,\ 12$ **(b)** $t = 3,\ 9$ **(c)** $6 < t < 12$ **(d)** $0 < t < 6,\ 12 < t < 14.$

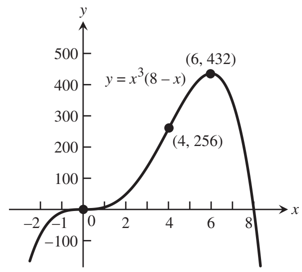
23.



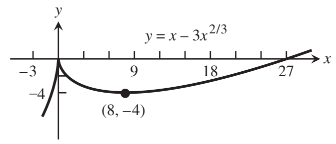
25.



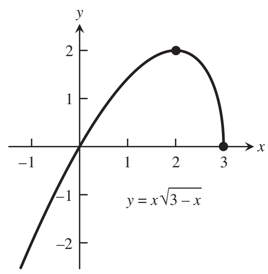
27.



29.

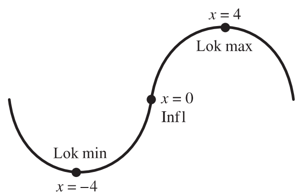


31.



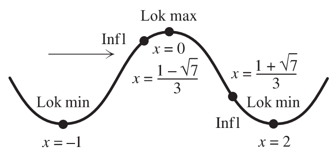
33. **(a)** Lokális maximum $x = 4$-nél, lokális minimum $x = -4$-nél, inflexiós pont $x = 0$-nál.

(b)



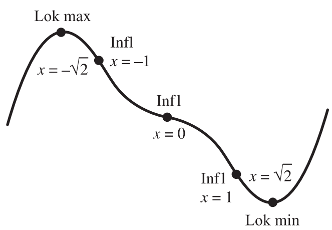
35. **(a)** Lokális maximum $x = 0$-nál, lokális minimum $x = -1$-nél és $x = 2$-nél, inflexiós pontok $x = (1 \pm \sqrt{7})/3$-nál.

(b)

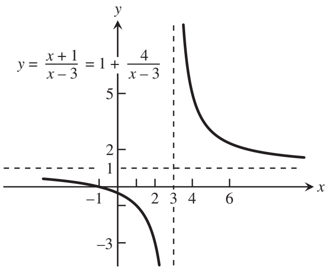


37. **(a)** Lokális maximum $x = -\sqrt{2}$-nél, lokális minimum $x = \sqrt{2}$-nél, inflexiós pont $x = \pm 1$-nél és $x = 0$-nál.

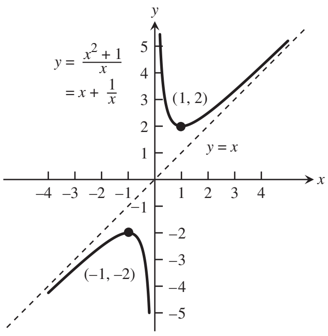
(b)



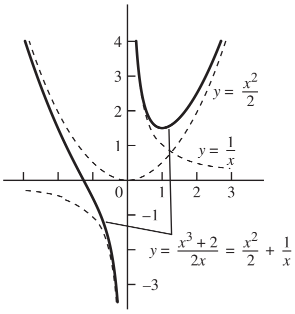
43.



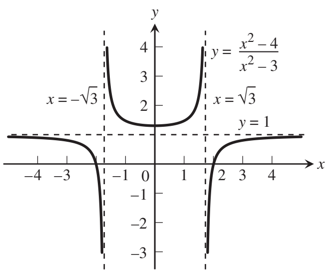
45.



47.



49.



51. 5 **53.** 0 **55.** 1 **57.** 3/7

59. 0 **61.** 1 **63.** **(a)** 0, 36 **(b)** 18, 18

65. 54 területegység.

67. magasság = 2, sugár = $\sqrt{2}$

69. $x = (5-\sqrt{5})$-szer 100 $\approx$ 276 gumi, $y = 2(5-\sqrt{5})$-ször 100 $\approx$ 553 gumi.

71. A méretek: az alap 6×12 cm, a magasság 2 cm; a maximális térfogat 144 cm^3.

73. $x_5 = 2{,}195823345$ **75.** $\frac{x^4}{4} + \frac{5}{2}x^2 - 7x + C$

77. $2t^{3/2} - \frac{4}{t} + C$ **79.** $-\frac{1}{r+5} + C$

81. $(\theta^2+1)^{3/2} + C$ **83.** $\frac{1}{3}(1+x^4)^{3/4} + C$

85. $10\operatorname{tg}\frac{s}{10} + C$ **87.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\csc\sqrt{2}\theta + C$

89. $\frac{1}{2}x - \sin\frac{x}{2} + C$ **91.** $y = x - \frac{1}{x} - 1$

93. $r = 4t^{5/2} + 4t^{3/2} - 8t$

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. Ezen az intervallumon a függvény állandó.

3. Szélsőértékek nem lehetnek egy nyílt intervallum végpontjaiban.

5. **(a)** Lokális minimum $x = -1$-nél, inflexiós pont $x = 0$-nál és $x = 2$-nél. **(b)** Lokális maximum van $x = 0$-ban, lokális minimum van $x = -1$-ben és $x = 2$-ben, inflexiós pont van $x = \frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$-nél.

9. Nem. **11.** $a = 1,\ b = 0,\ c = 1$

13. Igen.

15. $y = h/2$-nél fúrjuk a lyukat!

17. $r = \frac{RH}{2(H-R)}$ $H > 2R$-re és $r = R$ ha $H \le 2R$

19. **(a)** $\frac{10}{3}$; **(b)** $\frac{5}{3}$; **(c)** $\frac{1}{2}$; **(d)** 0; **(e)** $-\frac{1}{2}$; **(f)** 1; **(g)** $\frac{1}{2}$; **(h)** 3.

21. **(a)** $\frac{c-b}{2e}$; **(b)** $\frac{c+b}{2}$; **(c)** $\frac{b^2-2bc+c^2+4ae}{4e}$; **(d)** $\frac{c+b+t}{2}$.

23. $m_0 = 1 - \frac{1}{q}$, $m_1 = \frac{1}{q}$

25. **(a)** $k = -10{,}41$ m/s^2 **(b)** 21,47 m

27. Igen, $y = x + C$. **29.** $v_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}b^{3/4}$

Függelék

F.5. Algebrai, geometriai és trigonometriai összefüggések

1. **(a)** $(14, 8)$; **(b)** $(-1, 8)$; **(c)** $(0, 5)$

3. **(a)** A z pont valós tengelyre való tükrözésével; **(b)** a z pont képzetes tengelyre való tükrözésével ; **(c)** a z pont valós tengelyre tükrözésének és a megfelelő helyvektor $1/|z|^2$ arányú nyújtásának egymásutánjával

5. **(a)** az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű kör(vonal) pontjai; **(b)** az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű kör belső pontjai; **(c)** az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű kör külső pontjai

7. Az 1 sugarú, $(-1, 0)$ középpontú kör(vonal) pontjai

9. Az $y = -x$ egyenletű egyenes pontjai

11. $4e^{2\pi i/3}$ **13.** $1e^{2\pi i/3}$

15. $\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$

17. $1,\ -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **19.** $2i,\ -\sqrt{3} - i,\ \sqrt{3} - i$

21. $\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **23.** $1 \pm \sqrt{3}i,\ -1 \pm \sqrt{3}i$