BIBLIOGRÁFIAI MEGJEGYZÉSEK

Most bibliográfiai megjegyzések következnek, amelyekben kísérletet teszünk arra, hogy a könyvben szereplő alapvető fogalmak és eredmények történetét nyomon kövessük. Ezek a megjegyzések nem törekednek a teljességre, és gyakran nem az eredeti, nehezen hozzáférhető cikkekre hivatkoznak, hanem inkább tankönyvekre, monográfiákra és összefoglaló jellegű cikkekre, amelyekben könnyebben megtalálhatóak a szükséges eredmények. Ennél bővebb bibliográfiai utalások és történeti megjegyzések szerepelnek például a [80], [52] művekben.

A matematikai statisztika bizonyos alapfogalmai még a múlt század elején születtek meg, Laplace és Gauss nevével vannak ezek kapcsolatban. A múlt század végén Pearson munkájával vette kezdetét ezen tudomány egy intenzív fejlődési periódusa. Ezt A. Wald, A. N. Kolmogorov, J. Neyman, R. A. Fisher munkái alapozták meg. A Szovjetunióban a matematikai statisztika fejlődése mindenekelőtt A. N. Kolmogorov és N. V. Szmirnov nevével van kapcsolatban.

1. Fejezet

2–4. A Glivenko-Cantelli-tételt 1933-ban igazolták (Glivenko nevéhez fűződik a bizonyítás folytonos eloszlás esetén, Cantelli nevéhez az általános eset).

Az 1.2.2. Tétel bizonyítása közel áll a [54] 28. oldalán szereplő bizonyításhoz. Ez speciális esete annak az általánosabb eljárásnak, amely a vizsgált halmazrendszer „végesen approximálhatóságán" alapul. Ez az eljárás teljes alakjában az I. Függelékben szerepel, ahol az 1.4.2. Tételt bizonyítottuk. Ettől független, de hasonló eljárás szerepel [38]-ban. Az iterált logaritmus tételt (1.4.3. Tétel) [45]-ben igazolták.

6. Az $nF_n^*(t)$ eloszlásáról szóló 1.6.1. Tétel és az 1.6.2. Tétel Feller könyvében szerepel. [28] 2. III. Fejezet 3. pont. A II. Függelékben bizonyított tételt, amely szerint $\sqrt{n}(F_n^*(t) - F(t))$ a Brown-hídhoz konvergál, – 1.6.3. Tétel – Donsker [25] igazolta. Az 1.6.3. Tételnek a II. Függelékben megadott bizonyításától kicsit eltérő igazolása található Billingsley [5] könyvében.

7. A $\chi^2(X)$ statisztika határeloszlásáról szóló állítást, amely az 1.7.3. Példában szerepel, először K. Pearson mutatta meg (lásd [18] 454. oldal).

8. Az 1.8.2. Következmény állítása Kolmogorov tételét tartalmazza, az 1.8.3. Következmény pedig Szmirnovét. Ez utóbbi tételben a $\int_0^1 [w^\circ(t)]^2 dt$ statisztika eloszlásának alakja is szerepel, amelyet mi a bonyolultsága miatt nem szerepeltettük (lásd [71]).

10. Az ebben a pontban vizsgált sűrűségfüggvény-becsléseket Parsen [61] és Rosenblatt [67] vezették be. Ezen problémakör eredményeinek áttekintése és bibliográfiája megtalálható Rosenblatt [66] összefoglaló jellegű munkájában és Csencov [20] könyvének 25. pontjában.

2. Fejezet

2. Másfajta paraméteres eloszláscsaládok vannak Wilks [77] könyvében. A rendezett minta elemeinek eloszlását tüzetesen vizsgálta B. V. Gnyedenko. Az eredmények teljes leírását és ezen témakör kiterjedt bibliográfiáját meg lehet találni H. A. David [24] könyvében.

4. Történelmileg a momentum-módszer a becslések konstruálásának első szisztematikus módszere. K. Pearson javasolta 1884-ben.

5. A minimális χ^2 távolság módszerét R. Fisher javasolta 1922-ben.

6. A maximum likelihood módszert speciális esetekben még Gauss alkalmazta. Mint olyan általános módszert, amelynek segítségével becsléseket kaphatunk, 1912-ben R. Fisher javasolta egy rövidke feljegyzésében. Később, 1925-ben, a [32] klasszikus munkában már a m.l.b. aszimptotikus tulajdonságait vizsgálta.

7., 8. A becsések összehasonlítására javasolt eljárások általánosan elfogadottak. A 2.7.3. Lemma bizonyítása [18]-ból származik. A hatásos becslés fogalmát Fisher vezette be, 1922-ben, a [31] munkában.

9., 10. A feltételes várható érték alapvető jelentőségű fogalmát A. N. Kolmogorov vezette be 1933-ban a [48] klasszikus munkában. A feltételes eloszlás tulajdonságait részletesen tanulmányozza [34], [27], [69].

11. A Bayes-féle eljárást még a múlt században széles körben alkalmazta Laplace. Ezt az eljárást Fisher részéről kritika érte, és a jelen század 20-as, 30-as éveiben a súlypont a hatásos becslésekre és az aszimptotikusan hatásos becslésekre tevődött át. Ezután, annak függvényében, hogy egyre inkább sikerült alátámasztani a Bayes-féle hozzáállás alapvető szerepét, megint megnőtt az érdeklődés iránta.

A minimax becslések fogalma a matematikai statisztikába a játékelméleti szemlélettel együtt lépett be – ezt Borel (1921) és J. Neyman (1928) fejlesztették ki. A 2.11.1–2.11.3. Tételt Hodges és Lehmann [39] igazolták.

12. Az elégséges statisztika alapvető fogalmát R. Fisher [31] vezette be 1922-ben. R. Fisher [31] és később J. Neyman talált olyan egyszerű feltételeket, amelyek biztosítják elégséges statisztika létezését, és amelyek alapján meg lehet találni az alakjukat. Ezt a feltételt hívják Neyman–Fisher-féle faktorizációs tételnek – a 2.12.1. Tételben mutattuk ezt be. A Neyman–Fisher tétel szigorú, halmazelméleti bizonyítását csak 1949-ben adta meg Halmos és Savage [37].

13. Az elégséges σ-algebra fogalma tágabb, mint az elégséges statisztikáé. E két fogalom egybeesésének szükséges és elégséges feltételeit tartalmazza [80]. Az elégséges partíció konstrukciója és a 2.13.1. Tétel Lehmann és Scheffé [51] munkájával van összefüggésben, amely a minimális elégséges statisztikák létezésének feltételeivel és megszerkesztésével foglalkozik. Ezen cikk rövid tartalmát meg lehet találni [80]-ban. A 2.13.2. Tétel bizonyítása I. Sz. Boriszov nevéhez fűződik.

14. A 2.14.1. Tételt egymástól függetlenül bizonyította Blackwell [7] (1947), Rao [65] (1945) [63] (1949) és Kolmogorov [47] (1950). A 2.14.3. Tétel Rao [63] (1949) és Blackwell [7] (1947) nevéhez fűződik.

15. Exponenciális eloszlácsaládról már Fisher tett említést, [31]. Ezen eloszláscsalád elméleti jelentőségét a 30-as években ismerték fel – Pittmann, Koopman, Darmois. Az exponenciális eloszláscsaládot néha ez utóbbiak nevével társítják. A 2.15.2. Tételt Lehmann bizonyította. ([52] 183. oldal)

16., 17. A Cramer–Rao-egyenlőtlenséget információs egyenlőtlenségnek is szokták nevezni. Lényegében Fisher nevéhez fűződik [32], habár a most levezetett alakjában Frechet [33] (1943), Rao [64] (1945), Cramer [17] (1946) fedezték fel, egymástól függetlenül.

Az egyenlőtlenség teljesülését megvalósító regularitási regularitási feltételeket a matematikai statisztikai kézikönyvek nem mindig tartalmazzák egészen pontosan. Azokról a feltételekről van szó, amelyek lehetővé teszik, hogy a paraméter szerinti deriválást az integráljel alatt elvégezhessük. Ennek bizonyítása gyakorta problematikus (lásd pl. [80]), vagy teljesen hiányzik (pl. [72]-ben). Számos esetben feltételként mondják ki [72], ezt azonban a gyakorlati feladat során igen kényelmetlenül lehet csak ellenőrizni.

A könyvben tárgyalt regularitási feltételek egyszerűek, habár nem a legáltalánosabbak (lásd [43]). A VI. Függelékben bizonyítottuk, hogy ezen feltételek mellett be lehet deriválni az integráljel alá. A gondolatmenet A. I. Szahanyenko eredményeire épül.

A Cramer–Rao-egyenlőtlenség különböző általánosításait illetően lásd [80], [20]. Az információ fogalmát [32]-ben vezették be (Fisher). A 2.16.1A és 2.17.1. Tételek bizonyítása során a [80], [43] könyvek szerint haladtunk.

18., 19. Az invariancia fogalmának felhasználása Hotellinghez és Pitmanhez fűződik. Az elmélet kidolgozásához jelentősen hozzájárult S. Stein. A 2.18.1. Tétel állításának lényege Pitman munkája. A bizonyítása során a [80], [43] munkákban levő felépítést használtuk fel. A Pitman-becslés minimax tulajdonságát Girschik és Savage bizonyították.

20. Ezen pont eredményeit először a szerző és A. I. Szahanyenko vezették le [13] Élesebb feltételek mellett fennálló egyenlőtlenségeket lehet találni a [36], [19] munkákban.

21. A Kullback–Leibler-féle távolságot a paraméteres esetben Kullback–Leibler-féle információs függvénynek is nevezik. Ugyanehhez a távolságfogalomhoz jutott el, tőlük függetlenül I. N. Szanov, amikor a tapasztalati eloszlás nagy eltéréseinek valószínűségét írta le. Az ötlet, hogy a Hellinger-távolságot széles körben fel lehet használni a likelihoodhányados tulajdonságainak vizsgálatára, Ibragimov és Haszminszkij [43] könyvéből származik. Ezen könyv eredményeire támaszkodik a 23. pont alapvető tételeinek bizonyítása. A 2.21.3. Tétel bizonyítását A. I. Szahanyenko lényegesen leegyszerűsítette.

22. A 2.22.1. Tételt Chapman és Robbins igazolták 1951-ben [16], és Kiefer 1952-ben [46].

23–25. Azon előadások anyaga szerepel itt, amelyeket Ibragimov és Haszminszkij [43] könyvének megjelenése után nagyban tökéletesítettünk. Az alapvető továbbfejleszés a Hellinger-távolság szisztematikus felhasználásával van kapcsolatban – az $\mathsf{E}_\theta Z^{1/2}(u)$ mennyiséget becsültük segítségével. A. I. Szahanyenko javasolta $\int \mathsf{E}_\theta|(Z^{3/4}(u))'|du$ felhasználását a $\sup_u Z(u)$ megbecslésére (2.23.1., 2.23.2. Tétel). A m.l.b. aszimptotikus normalitását és aszimptotikus hatásosságát még Fisher [32] igazolta. Egészen általános feltételek mellett bizonyítja a m.l.b. aszimptotikus normalitását a [43] könyv.

Az aposzteriori sűrűségfüggvény (vagy a likelihood-hányados) aszimptotikus normalitását S. N. Berstein mutatta ki 1927-ben. A 2.25.4. Tétel bizonyítása Bahadur műve [2]. A m.l.b. aszimptotikus minimax és Bayes-tulajdonsága könnyen megkapható a 2.20 pont eredményei alapján. A m.l.b. aszimptotikus Bayes-tulajdonságát korábban csak az apriori eloszlás sűrűségfüggvényére vonatkozó jóval erősebb feltételek mellett igazolták.

A 2.24.1., 2.24.2. Tételek bizonyítását A. I. Szahanyenko javaslatai alapján tökéletesítettük.

26. A függvények szélsőértékének megkeresésére vonatkozó Newton–Ralston-féle numerikus módszer egyik változatát tárgyaljuk itt. Ennek részletesebb tárgyalását lásd [80]-ban. A 3. Példa Rao [63] könyvéből származik.

27. A m.l.b. konzisztenciájának vizsgálata a 30-as, 40-es években kezdődött el Doob [26], Wald [74], Wolfowitz [79] és Cramer [18] munkáival. A [74]-ben a konzisztenciát biztosító alapvető feltételek között szerepel (az (A_μ), (A_c), (A_0) feltételek mellett) az is, hogy az $f_t(x)$ függvény a D_0 osztályba tartozik, és hogy véges az

$$\int \ln f_t^\Delta(x) f_\theta(x)\mu(dx)$$

integrál. A [43] monográfiában olyan feltételek mellett igazolják a konzisztenciát, amelyek a

$$\int \sup_{|u|<\Delta} \left(\sqrt{f_{t+u}(x)} - \sqrt{f_t(x)}\right)^2 \mu(dx) \to 0, \quad \text{ha} \quad \Delta \to 0.$$

konvergenciát használják. A 27.1., 27.2. Tételek és ezek Következményei ennél általánosabbak. A bizonyítás módszere [74]-hez áll közel. Az (A_0) és a 2.27.2. feltétel elegendőségét A. I. Szahanyenko jegyezte meg.

28., 29. Lásd a 23–27. pontok kommentárjait. A 2.28.1. Példa Wan der Waerden [72] könyvéből származik. Az első változathoz képest A. I. Szahanyenko megjegyzései alapján tökéletesíthettük az egyes pontok tartalmát (például hozzátettük még a 2.29.5. Tételt). Ezen változtatások alapján egyszerűsíteni lehetett a 3. Fejezet 13–15. pontjainak az anyagát.

30 A szekvenciális becslésekről részletesebben pl. [80]-ban lehet olvasni.

31., 32. Az első konfidencia-intervallummokkal Laplace-nál találkozhattunk. Még 1812-ben megmutatta, hogy p-re vonatkozóan meg lehet fordítani a p valószínűség és a megfigyelt gyakoriság eltérésének mértékére vonatkozó állítást, és így a p valószínűség lehetséges értékeire kapunk intervallumot. A konfidencia-intervallumok helyes értelmezését (nem véletlen paraméter esetén) 1927-ben adta meg Wilson.

Valós paraméter esetén pontos konfidencia-intervallumok szerkesztésére 1930-ban Fisher [30] javasolt egy általános módszert. A konfidencia-intervallumok általános elméletét Neyman fejlesztette ki 1937–38-ban, és rámutatott a hipotézis-viszgálattal való összefüggésére. A kérdéskör egészen általános modern elméletét Lehmann [52] könyvében lehet megtalálni. Ezt használtuk fel a 3.7. pontban.

A 2.32.1. Tétel és a 2.32.2. Tétel Fisher műve.

3. Fejezet

A statisztikus próbák első önálló alkalmazásával Laplace-nál találkozhatunk (18. század vége). A próbák szisztematikus felhasználása a hipotézisvizsgálatban K. Pearson munkájával kezdődik – ő javasolta 1900-ban a χ^2 próbát. Az első és másodfajú hiba alapvető fogalmát Neyman és Pearson vezette be 1928-ban – [58]. Ugyanezek a szerzők vették észre először az ellenhipotézis szerepét a próbák értelmes megválasztásában. Neyman és Pearson [57] összegző jellegű munkájukban fejlesztették ki az e.l.e.p.-k elméletét.

A hipotézisvizsgálat elméletének szisztematikus tárgyalása szerepel Lehmann [52] könyvében.

1–3. A Neyman–Pearson-féle alaplemmát [57]-ben igazolták. A 3.1.1., 3.1.2. Tételeket Blackwell és Girschik [6] könyvében is meg lehet találni. A 3.2.1 Tételt Lehmann [52] könyve is tartalmazza. A nagy eltérésekről szóló 3.3.1. Tétel Cramer nevéhez fűződik (lásd [11]). Bahadur vezette be a próbák hatásosságának fogalmát, amelynek alapját a próbák minőségének a nagy eltérések valószínűségeivel kapcsolatos becslések képezik. Ezen irány kutatási eredményeinek összefoglalása megtalálható [3]-ban.

A hatásos összetevő szerepét már Fisher észrevette 1925-ben [32]. A későbbiekben a közeli hipotéziseken alapuló megközelítési mód intenzíven fejlődött – LeCam, Roussas, Csibiszov (lásd a 3.14., 3.15 pontok komentárjait).

4. A statisztikai próbák itt tárgyalt fogalma általánosan elfogadott. (Lásd [18], [52].). Az e.l.e.p. fogalmát Neyman és Pearson vezette be [57]. A Bayes-féle megközelítést még Laplace használta a 19. században.

5–8. Ezen pontok alaperedményei Lehmann [52] könyvéből valók. A tárgyalásmódjuk is hasonló ehhez a könyvhöz, azonban annyiban eltér attól, hogy itt Bayes-féle megközelítés az alap, és nem az általánosított Neyman–Pearson-féle lemma (3.5.2. Lemma, lásd még [52]). Ez egyszerűbbé és kerekebbé teszi a felépítését. A konfidencia-tartományok bevezetését illetően lásd a 2.31., 3.32. pontok kommentárjait.

Pl. Grenander [35] könyvében meg lehet találni, hogyan vihetőek át az alaperedmények sztochasztikus folyamatokra.

9. A 3.9.1. Tétel Hodges és Lehmann tétele [39].

10. A likelihoodhányadosnak a matematikai statisztikában betöltött alapvető szerepére már Neyman és Pearson rámutatott [58], [57]. A l.h.p.-val kiterjedt irodalom foglalkozik.

Ezen próba ilyen vagy olyan tulajdonságú aszimptotikus optimalitásának bizonyítására irányuló kísérletek vannak a [1], [74], [60], [77], [40] munkákban.

11. A szekvenciális analízis elméletének kifejlődéséhez nagyban hozzájárult Wald [73]. A fő eredmények legtömörebb összefoglalása – amelyet a jelen könyvben is követtünk – [52]-ben található meg.

12. A Kolmogorov és a ω^2 próba levezetését illetően lásd az 1.8. pontot és a hozzáfűzött kommentárt. A Kolmogorov-próba bizonyos módosításait illetően, melyek az elérhető legnagyobb erét biztosítják – lásd [15]. A Moran-féle próbát [55]-ben javasolták. Ennek erejét közeli hipotézisek esetén [76] és [22] tanulmányozza.

13. A l.h.p. aszimptotikus Bayes-tulajdonságát a szerző igazolta, [9]. A likelihood-hányados próba nullhipotézis melletti határeloszlásáról szóló eredmények Wilks [78] és Wald [75] nevéhez fűződnek (lásd még Wilks [77] könyvét). Az összetett hipotézisnek az átlagolt hipotézissel való felcserélésének ötletét Wald használta. A Bayes-féle próbák aszimptotikus alakját [53] tartalmazza. Lásd még a 28., 29. pontok kommentárjait a 2. Fejezetből.

14., 15. Az aszimptotikusan optimális próbák megszerkesztésével kapcsolatos alapötletek – közeli hipotézisek esetén – Wald [75], LeCam, Roussas (lásd Roussas [68] könyve) és Csibiszov [21] munkáiban lelhetőek fel. Az alapvető eredményeknek a végtelen dimenziós paraméter esetére (sztochasztikus folyamatokra) való átvételének lehetőségeivel kapcsolatban lásd [14]. A 14., 15. pontok felépítése az idézett munkákkal csak halványan függ össze. Wald [75] munkájában szerepel az az eljárás amelynek segítségével az alapvető feladattípusokra vonatkozó optimális próbák megszerkesztése során a kiinduló A feladatot a normális eloszlásra vonatkozó B feladatra lehet redukálni - miként a 14. pontban vizsgáltuk. A $2\ln R_1(X)$ statisztika H_1 hipotézis melletti eloszlására vonatkozó 3.15.4 Tétel állítását meg lehet találni [77]-ben. Lásd még a 2. Fejezet 28., 29. pontjaihoz fűzött kommentárt.

16., 17. A χ^2 próbát K. Pearson javasolta, 1900-ban. Ennek kiterjedt irodalma van (lásd pl. Lancaster [50] speciális monográfiáját). A különféle optimalitási tulajdonságok vizsgálatára vonatkozóan lásd [75], [60], [77], [40] és még mások. A [10], [23] művekben pl. megtalálható, hogy a csoportok számának növelésével hogyan változik a χ^2 próba ereje. A 3.16.1., 3.17.2. Példák Cramer [18] könyvéből származnak, a 3.17.1. Példa Rao [63] könyvéből.

18. Nehéz nyomon követni, hogy a statisztikus döntések stabilitásának tanulmányozása mikor kezdődött el. A legutóbbi kutatások alapját Tukey, Hodges és Lehmann munkái jelentik. Ezen irány átfogó összefoglalása szerepel Huber [42] könyvében.

Az I–IV. táblázatok összehasonlításánál Bolsev és Szmirnov könyvét használtuk.