A. függelék
Laplace-transzformáció és alkalmazásai

Tételezzük fel hogy az $f(t), t \in [0,\infty)$ egy olyan függvény, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

$$\int_0^\infty |f(t)|dt < \infty, \quad \exists A, \alpha \in \mathbb{R}, \quad lim_{t\to\infty} f(t)Ae^{\alpha t} = 0.$$

Jelölje $\mathcal{L}$ azt az integrál transzformációt , amely az $f(t)$ függvényhez egy $F(s), s \in \mathbb{C}$ függvényt rendel, azaz $\mathcal{L} : f(t) \to F(s)$, ahol

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad s \in \mathbb{C}. \tag{A.1}$$

Az $F(s)$ komplex változós függvény pozitív valós, azaz $F(s) = \bar{F}(s)$.

A *Laplace*-transzformáció inverzét a következőképp definiáljuk : $\mathcal{L}^{-1}$: $F(s) \to f(t)$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds, \quad t \in [0,\infty). \tag{A.2}$$

A (A.1) és (A.2) összefüggésekkel definiált transzformációpárt *Laplace*- és *inverz Laplace*-transzformációnak nevezzük, és az $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, illetve $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ szimbólumokkal jelöljük.

A *Laplace*-transzformáció lineáris, azaz időfüggvények lineáris kombinációját *Laplace*-transzformáltjaik lineáris kombinációjába képezi le. Legyen

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s), \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \\ = \alpha_1 F_1(s) + \alpha_2 F_2(s).$$

További fontos tulajdonságok, amelyeket a lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletek megoldásánál (az LTI-rendszerek időbeli viselkedésének analízisében) használunk fel, a következők:

1. Egy $f(t)$ függvény idő szerinti deriváltját *Laplace*-transzformáltja s-el való szorzatába képezi le: $\mathcal{L}\{\frac{d}{dt} f(t)\} = sF(s) - f(o)$.
2. Egy $f(t)$ függvény idő szerinti integrálját *Laplace*-transzformáltja $\frac{1}{s}$-el való szorzatába képezi le: $\mathcal{L}\{\int\limits_0^\infty f(t)dt\} = \frac{1}{s}F(s)$.
3. Az $f(t)$ és $g(t)$ függvények konvolúcióját *Laplace*-transzformáltjuk szorzatába képezi le:

$$\mathcal{L}\{\int_0^\infty g(t-\tau) f(\tau) d\tau\} = G(s)F(s).$$

Az alábbiakban néhány példák mutatunk a *Laplace*-transzformáció közvetlen kiszámítására.

A.14. PÉLDA. *Legyen $f(t) = \delta(t)$ a Dirac-deltafüggvény. Ekkor*

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st}|_0 = 1.$$

A.15. PÉLDA. *Legyen $f(t) = 1(t)$ az egységugrás függvény. Ekkor*

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s} - \lim_{t\to 0} \frac{e^{-st}}{-s} = \frac{1}{s}.$$

A.16. PÉLDA. *Legyen $f(t) = e^{at}$. A Laplace-transzformált:*

$$\mathcal{L}\{e^{at}(t)\} = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}.$$

A.17. PÉLDA. *Vizsgáljuk a $f(t) = e^{i\omega t}$ függvényt.*

$$\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} = \int_0^\infty e^{i\omega t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-i\omega)t} dt = \left[\frac{e^{-(s-i\omega)t}}{-(s-i\omega)} \right]_0^\infty = \frac{1}{s-i\omega}$$
$$= \frac{s+i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} + i\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \mathcal{L}\{cos\omega t\} + i\mathcal{L}\{sin\omega t\}.$$

A.18. PÉLDA. *A deriválásra vonatkozó szabályok alkalmazásával kapjuk az alábbi függvények Laplace-transzformáltjait:*

Legyen $f(t) = t1(t)$ az egységsebességugrás-függvény. Ha $f(t) = t, t > 0$, akkor $\frac{dt}{dt} = 1$, $t > 0$, és mivel $\mathcal{L}\{\frac{d}{dt} f(t)\} = sF(s) - f(0)$, $f(0-) = 0$, következik, hogy $\frac{1}{s} = s\mathcal{L}\{t1(t)\}$, amiből kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}\{t1(t)\} = \frac{1}{s^2}.$$

Hasonlóképp kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}\{t^2 1(t)\} = \frac{2}{s^3}.$$

Általában pedig

$$\mathcal{L}\{t^n 1(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Eltolási tételek

Legyen

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Re}\{s\} > \alpha.$$

Legyen $a \in \mathcal{C}$, amelyre $\mathrm{Re}\{s-a\} > \alpha$. Ekkor

$$F(s-a) = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t} dt$$
$$= \int_0^\infty f(t)e^{-st}e^{at} dt = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha egy $f(t)$ függvényt e^{at}-vel szorzunk, akkor a *Laplace*-transzformáltján a-val való eltolást kell elvégezni.

A.19. PÉLDA. *Vizsgáljuk a $f(t) = 1(t-\tau)$ függvény Laplace-transzformált-ját:*

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \int_{\tau}^{\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{\tau}^{\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s} - \lim_{t\to\tau} \frac{e^{-st}}{-s} = \frac{1}{s} e^{-s\tau}.$$

A.20. PÉLDA.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\cos\omega t\} &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} \cos\omega t\, dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-(\alpha+s-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-(\alpha+s+i\omega)t} dt \\
&= \left[\frac{\frac{1}{2} e^{-(\alpha+s-i\omega)t}}{-(\alpha+s-i\omega)}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{\frac{1}{2} e^{-(\alpha+s+i\omega)t}}{-(\alpha+s+i\omega)}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{\alpha+s-i\omega} + \frac{\frac{1}{2}}{\alpha+s+i\omega} = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

Ha egy $f(t)$ függvényen végzünk eltolást az időtengely mentén τ idővel jobbra, akkor hasonlóan belátható, hogy *Laplace*-transzformáltját az $e^{-s\tau}$ függvénnyel kell szorozni:

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau} F(s).$$

Kezdetiérték- és végértéktételek

Belátható, hogy az idő- és operátorfüggvények s tartománybeli kezdeti és ún. végértékei között fennállnak az alábbi összefüggések:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s),$$
$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Ezek a tételek igen hasznosak a *Laplace*–inverz *Laplace*-transzformációk számításánál az eredmények ellenőrzése szempontjából.

Az inverz *Laplace*-transzformáció kiszámítása

Az inverz *Laplace*-transzformációt az alábbi improprius integrállal definiáltuk:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) e^{st} ds, \quad t \in [0, \infty).$$

Legyenek az $F(s)$ függvénynek egyszeres pólusai: $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, és legyen $\sigma > \mathrm{Re}\{p_i\}, i = 1, \ldots, n$. Ekkor a fenti improprius integrált helyettesíthetjük egy olyan zárt görbe menti integrállal, amelyet a képzetes tengellyel párhuzamos, attól balra σ távolságra haladó egyenes és egy R sugarú félkör alkot. Az $F(s)$ pólusai ezen a zárt görbén belül helyezkednek el. Belátható, hogy az e^{st} függvény pólusai mind a jobb félsíkra esnek. Ha $R \to \infty$, akkor az integrált az ún. rezidumtétellel számíthatjuk ki:

$$f(t) = \sum_{p_i \in \mathcal{P}} Res_{p_i} F(s) e^{st} = \sum_{i=1}^{n} \lim_{s \to p_i} (s - p_i) F(s) e^{st}.$$

Ha az $F(s)$ racionális törtfüggvény, azaz

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{\Pi_{j=1}^{m} (s - z_i)}{\Pi_{i=1}^{n} (s - p_i)},$$

ahol $\mathcal{Z} = \{z_1, \ldots, z_m\}$ a zérusok, $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ pedig a pólusok, akkor az előző összefüggés alapján

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{s \to p_i} (s - p_i) F(s) e^{st} = \sum_{i=1}^{n} \lim_{s \to p_i} \frac{b(s)}{\frac{a(s)}{(s - p_i)}} e^{st},$$

ahol az

$$a'(s) = \lim_{s \to p_i} \frac{a(s)}{(s - p_i)}$$

határérték az $a(s)$ polinom deriváltja az $s = p_i$ helyen. Ezzel megkaptuk az ún. *kifejtési tételt*, amely szerint egyszeres pólusokra az $F(s)$ függvény inverz *Laplace*-transzformáltja :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b(s)}{a'(s)} e^{st}|_{s = p_i},$$

ahol $a'(s)$ az $a(s)$ polinom s szerinti deriváltja.

A.21. PÉLDA. *Legyen* $F(s) = \frac{1}{s-a}$. *Az* $F(s)$ *pólusa* $p = a$, $b(s) = 1$, $a(s) = s - a$, $a'(s) = 1$. *A kifejtési tétellel:*

$$f(t) = \lim_{s \to a} e^{st} = e^{at}.$$

Az inverz *Laplace*-transzformált kiszámítása parciális törtekre bontással

Egyszeres pólusok esetén az $F(s)$ függvényt parciális törtekre bonthatjuk:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s - p_i},$$

ahol $R_i, i = 1, \ldots, n$ az $F(s)$ rezidumai a $p_i, i = 1, \ldots, n$ helyeken. Ekkor az inverz *Laplace*-transzformált egyszerű összeg alakban írható:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{s \to p_i} (s - p_i) \frac{R_i}{s - p_i} e^{st} = \sum_{i=1}^{n} R_i e^{p_i t}.$$

A.22. PÉLDA. $F(s) = \frac{5}{s+2}$, $f(t) = 5e^{-2t}$

A.23. PÉLDA. $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+5)}$, $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-5t}$

A.24. PÉLDA. $F(s) = \frac{s+3}{(s+1-5i)(s+1+5i)}$

$$\begin{aligned} f(t) = & \lim_{s \to -1+5i} (s + 1 - 5i) \frac{s+3}{(s+1-5i)(s+1+5i)} e^{st} + \\ & \lim_{s \to -1-5i} (s + 1 + 5i) \frac{s+3}{(s+1-5i)(s+1+5i)} e^{st} \\ & = 0.2ie^{-t}(e^{-5it} - e^{5it}) + 0.5e^{-t}(e^{5it} + e^{-5it}) \\ & = 0.4e^{-t} sin(5t) + e^{-t} cos(5t). \end{aligned}$$

A gyakran használt *Laplace*-transzformációs összefüggések az A.1. táblázatban találhatók.

A.1. táblázat. Gyakran használt *Laplace*-transzformációs összefüggések

Laplace-transzformált, $\mathcal{L}(s)$	Időfüggvény, $f(t)$, $t \in [0,\infty)$
1	$\delta(t)$
$e^{-s\tau}$	$\delta(t-\tau)$
$\frac{1}{s}$	$1(t)$
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$
$\frac{s}{1+\beta s}$	$\frac{1}{\beta}\delta(t)-\frac{1}{\beta^2}e^{-\frac{1}{\beta}t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
$\frac{\alpha}{s(s+\alpha)}$	$1-e^{-\alpha t}$
$\frac{\alpha}{s(s-\alpha)}$	$-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}(1+\alpha t)e^{-\alpha t}$
$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}e^{-\alpha t}+\frac{\beta}{\beta-\alpha}e^{-\beta t}$
$\frac{s+A}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{A-\alpha}{\beta-\alpha}e^{-\alpha t}+\frac{A-\beta}{\alpha-\beta}e^{-\beta t}$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2}$	$(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$	$-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}t+\frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}te^{-\alpha t}-\frac{1}{\alpha^2}e^{-\alpha t}$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2(s+\beta)}$	$-\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}e^{-\alpha t}+\frac{1}{\beta-\alpha}te^{-\alpha t}+\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}e^{-\beta t}$
$\frac{s}{(s+\alpha)^2(s+\beta)}$	$\frac{\beta}{(\beta-\alpha)^2}e^{-\alpha t}+\frac{\alpha}{\alpha-\beta}te^{-\alpha t}-\frac{\beta}{(\alpha-\beta)^2}e^{-\beta t}$
$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)}e^{-\alpha t}+\frac{1}{\beta(\beta-\alpha)}e^{-\beta t}+\frac{1}{(\alpha\beta)}$
$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\frac{e^{-\beta t}}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}+\frac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
$\frac{s+A}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{(A-\alpha)e^{-\alpha t}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\frac{(A-\beta)e^{-\beta t}}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}+\frac{(A-\gamma)e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$
$\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}sin\omega t$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$cos\omega t$
$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^2}(1-cos\omega t)$
$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$	$\frac{1}{\omega^3}(\omega t-sin\omega t)$
$\frac{1}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}e^{-\alpha t}sin\omega t$
$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$	$e^{-\alpha t}cos\omega t$

B. függelék
Fourier-transzformáció és alkalmazásai

Tételezzük fel, hogy az $f(t), t \in [0,\infty)$ olyan függvény, amely mind abszolút, mind négyzetesen integrálható:

$$\int_0^\infty |f(t)|dt < \infty, \quad \int_0^\infty |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Ekkor azt az $\mathcal{F}$ integráltranszformációt, amely az $f(t)$ függvényhez egy $F(i\omega), \omega \in \mathbb{R}$ függvényt rendeli, azaz $\mathcal{F} : f(t) \to F(i\omega)$, ahol

$$F(i\omega) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

Fourier-transzformációnak nevezzük. Az $F(i\omega)$ komplex változós függvény pozitív valós, azaz $F(i\omega) = \bar{F}(-i\omega)$.

Az inverz *Fourier*-transzformációt a következőképp definiáljuk: $\mathcal{F}^{-1}$: $F(i\omega) \to f(t)$,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad t \in [0,\infty).$$

Az időfüggvények és *Fourier*-transzformáltjaik között a *Parseval*-tétel (a szakirodalomban *Plancherel*-tételként is szerepel) teremt kapcsolatot, amely kimondja, hogy ha a $f(t), g(t)$ függvényeknek létezik *Fourier*-transzformáltjuk, akkor

$$\int_0^\infty f(t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)G(-i\omega)d\omega.$$

Ebből a tételből következik, hogy

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)F(-i\omega)d\omega,$$

ami azt fejezi ki, hogy a $\mathcal{F}$ *Fourier*- és az $\mathcal{F}^{-1}$ inverz *Fourier*-transzformáció kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést hoz létre a fenti tulajdonságú függvények tere és a komplex változós függvények tere között. [1]

A rendszer- és irányításelméletben azt mondjuk, hogy a *Fourier*-transzformációval áttérünk az időtartományból a frekvenciatartományba, mivel az ω változó fizikai értelmezése az $\omega = 2\pi f[rad]$ körfrekvencia.

A Fourier transzformációval kapcsolatos ismeretanyag további bővítéséhez javasoljuk a [62] tankönyv feldolgozását.

[1] Azon függvények terét, amelyekre

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = \| f \|_{\mathcal{L}_2} < \infty,$$

$\mathcal{L}_2$ Lebesque-térnek, az $\| f \|_{\mathcal{L}_2}$ számot pedig az f függvény normájának nevezzük. Komplex változós függvények esetén azon függvények terét, amelyekre

$$\int_{-\infty}^\infty |F(i\omega)|^2 d\omega = \| F \|_{\mathcal{H}_2} < \infty,$$

Hardy-térnek, a $\| F \|_{\mathcal{H}_2}$ számot pedig az F függvény normájának nevezzük. A *Fourier*-transzformáció izomorfia a két tér között, a *Parseval*-tétel pedig azt mondja ki, hogy

$$\| f \|_{\mathcal{L}_2} = \| F \|_{\mathcal{H}_2} .$$

.

C. függelék
Mátrixszámítás és lineáris algebra

A $v_1,\ldots,v_n, \quad v_i \in \mathbb{R}, \forall i$ számokból alkotott alábbi formában összerendezett szám n-eseket:

$$v^T = [v_1,\ldots,v_n]$$

sorvektoroknak, a v oszlopba rendezett elemeket oszlopvektoroknak nevezzük, jelölésük $v \in \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$.

A $v,w \in \mathbb{R}^n$ vektorok között értelmezzük az ún. skalárszorzást:

$$v^T w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i,$$

aminek geometriai jelentése a v vektor vetülete a w vektorra, azaz $v^T w = |v||w|\cos\alpha$, ahol $|v|,|w|$ a vektorok abszolút értéke, az α pedig a közöttük lévő szög.

Az $a_{11},\ldots,a_{nm}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \forall i,j$ számokat egy $m \times n$ méretű táblázatba rendezve egy $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixot kapunk:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Egy A mátrix A^T transzponáltját úgy kapjuk meg, hogy felcseréljük a sorait és az oszlopait.

Mátrixok közötti műveletekre vonatkozó szabályok:

- *Összeadás, kivonás*. Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ azonos méretű mátrixok. Ekkor $C = A \pm B = B \pm A$ és a C összeg mátrixelemei a megfelelő mátrix elemek összegével (különbségével) azonosak.
- *Szorzás (nem kommutatív).* Legyenek $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ mátrixok. A szorzatmátrix $C = AB \in \mathbb{R}^{n\times p}$, elemei $c_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lj}$, azaz a c_{ij} elem az A mátrix i-edik sorának és a B mátrix j-edik oszlopának skalárszorzata.
- *Mátrixinvertálás, determináns:*
  Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix A^{-1} inverzét az
  $$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$
  azonossággal definiáljuk, az ennek eleget tevő inverz pedig
  $$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\,A}{\det A},$$
  ahol $\det A$ az A matrix determinánsa, az $\mathrm{adj}\,A$ pedig az adjungáltja. Az adjungált mátrixot úgy képezzük, hogy minden eleméhez hozzárendeljük a neki megfelelő előjeles aldeterminánst.

Látható, hogy az inverz akkor létezik, ha a mátrix determinánsa nem zérus. Az olyan mátrixokat, amelyeknek nem zérus a determinánsa, nemszinguláris mátrixoknak nevezzük.

C.25. PÉLDA. *Ha $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, azaz 2×2-es méretű mátrix esetén*

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$
$$\mathrm{adj}\,A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}. \end{bmatrix}$$

C.26. PÉLDA. *Lineáris egyetletrendszerek megoldása ha A nemszinguláris*

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0, \quad Ax = b \Rightarrow x = A^{-1}b.$$

Mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Belátható, hogy a $\det[\lambda I - A]$ egy n-edfokú polinom. A $\det[\lambda I - A] = 0$ egyenlet gyökeit az A mátrix sajátértékeinek nevezzük. Az algebra alaptétele szerint ennek a polinomnak n számú (általában valós és komplex) gyöke van, amiket $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \ldots, n$ jelölünk. A $[\lambda_i I - A]v_i = 0, i = 1, \ldots, n$ egyenletben a v_i vektorokat az A mátrix λ_i sajátértékéhez tartozó sajátvektorának nevezzük.

C.27. PÉLDA. *Határozzuk meg az*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. A mátrixnak három sajátértéke van, mivel

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -2 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

alapján: $\lambda_1 = 2$*,* $\lambda_2 = -1$*,* $\lambda_3 = 0$*. A három sajátértékhez tartozó sajátvektorokat az*

$$(A - \lambda I)v = 0$$

egyenlet alapján határozzuk meg. A λ_1 *sajátértékhez tartozó* v_1 *sajátvektor számítása a következő:*

$$(A - \lambda_1 I)v_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -2v_{11} & v_{11} - 2v_{12} + 2v_{13} & v_{12} - v_{13} \end{bmatrix}^T$$

A $\begin{bmatrix} -2v_{11} & v_{11} - 2v_{12} + 2v_{13} & v_{12} - v_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *mátrixegyenlet megoldása:* $v_{11} = 0$*,* $v_{12} = \alpha$ *és* $v_{13} = \alpha$ *tetszőleges* α*-val. A* v_1*-hez tartozó egyik sajátvektor a következő:* $v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$*. A másik két sajátértékhez is kiszámíthatjuk a sajátvektorokat. A* v_2*-höz tartozó egyik sajátvektor:* $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$*. A* v_3*-hoz tartozó egyik sajátvektor a következő:* $v_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$*. Azaz sajátvektorokat tartalmazó mátrix:*

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A lineáris algebra alapjai

Az n-elemű vektorokat úgy értelmezhetjük, mint az n-dimenziós euklideszi tér elemeit.[2] A $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}$ skalárszámra $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n = 0$, azaz ha valamennyi $\alpha_\ell = 0, \ell \in [1, \ldots, n]$. Azt mondjuk, hogy az n lineárisan független v_i vektor kifeszíti az $\mathbb{R}^n$ teret.

A v_i vektorok lineárisan függetlenek, ha a belőlük alkotott vektorok $V = [v_1, \ldots, v_n]$ mátrixa teljes rangú, azaz $rangV = n$.

Az $m \times n$ méretű mátrixokat úgy tekinthetjük, mint az m-dimenziós euklideszi térről az n-dimenziós euklideszi térre leképező lineáris operátorokat: $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, azaz ha $v \in \mathbb{R}^m$, akkor $Av \in \mathbb{R}^n$.

Ha A mátrix rangja $rangA = r$, akkor A az $\mathbb{R}^n$ vektorokat az r-dimenziós $\mathbb{R}^m$ térre képezi le, és azt mondjuk, hogy $\mathrm{Im}A = \mathbb{R}^r$, azaz $\mathbb{R}^r$ az A lineáris operátor képtere.

Azokat a $v \in \mathbb{R}^n$ vektorokat, melyeket az A mátrix zérus vektorba képezi le, azaz $Av = 0$, az A lineáris operátor magterének nevezzük, és $KerA$-val jelöljük. Tehát ha $v \in KerA \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow Av = 0$. Belátható, hogy a $KerA$ altér dimenziója $dimKerA = n - r$ és $r = rangA$. Az eredményeket lineáris egyenletrendszer megoldásánál használjuk.

A lineáris algebra további tanulmányozására javasoljuk a [60] tankönyvet.

[2] Az n-dimenziós euklideszi tér egy lineáris vektortér, ahol értelmezve van skalárral vett szorzás és vektor összeadás. Azaz, ha $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ és $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, akkor $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \mathbb{R}^n$

