

A függelék

Csoportok és ábrázolásaik

A.1. A csoport definíciója

Egy G halmazt, amelynek elemei között az $f, g \rightarrow f \cdot g$ szorzás művelete oly módon van értelmezve, hogy

1. a szorzás nem vezet ki a halmazból, $f, g \in G \rightarrow f \cdot g \in G$,
2. létezik az egység elem, e , melyre $e \cdot f = f$,
3. minden $f \in G$ elemhez tartozik inverz, f^{-1} , $f \cdot f^{-1} = e$,
4. a szorzás asszociatív, $f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$,

csoportnak nevezünk. Azon csoportokat, amelyekben a szorzás kommutatív, $f \cdot g = g \cdot f$ ábelieknek nevezzük.

Egy csoport diszkrét, illetve folytonos attól függően, hogy milyen topológiával látható el. A folytonos Lie csoport dimenziója a csoport elemeket jellemző független, folytonos és valós paraméterek minimális száma. Az $n \times n$ méretű nem-elfajuló valós mátrixok halmaza a $GL(n)$ csoportot alkotja, amely n^2 dimenziós. Ezen belül az ortogonális mátrixok egy $n(n-1)/2$ dimenziós $O(n)$ alcsoportot alkotnak. A nem-elfajuló komplex $n \times n$ -es mátrixok csoportja $2n^2$ dimenziós, amelyben az unitér mátrixok az n^2 dimenziós $U(n)$ alcsoportot adják meg. Az $O(n)$ [$U(n)$] csoporton belül az egységnyi determinánsú mátrixok az $n(n-1)/2$ [$n^2 - 1$] dimenziójú $SO(n)$ [$SU(n)$] csoportot alkotják.

A.2. A generátor fogalma

Az egység-mátrix kellően kis környezetében a logaritmus függvény Taylor-sora konvergál, azaz a mátrixokat az $A = e^B$ alakban írhatjuk. Tehát

bármely folytonos csoport egység-elemének egy megfelelően kicsiny környezetében a csoport elemeinek logaritmusai, az elemek generátorainak lineáris kombinációi, jól definiált és a csoport dimenziójával megegyező dimenziójú lineáris teret alkot. Az $O(n)$ [$U(n)$] csoport generátorai $n \times n$ méretű anti-szimmetrikus [anti-hermitikus] mátrixok. A $\det A = 1$ tulajdonság a

$$\det A = e^{\operatorname{tr} \log A} \quad (\text{A.1})$$

összefüggés alapján a $\operatorname{tr} B = 0$ feltételnek felel meg. Tehát az $SO(n)$ és az $SU(n)$ csoportok generátorai spúrtalanok.

A.3. A Lie algebra

A Lie csoport generátorai algebrát alkotnak az $A, B \rightarrow [A, B] = AB - BA$ kommutátor műveletre, mint szorzásra nézve. Az ábeli csoportok Lie algebrájában a kommutátor azonosan nulla. Különböző folytonos csoportok, amelyeknek megegyeznek a Lie algebrái, lokálisan, azaz az egység körüli csoport elemekkel való szorzás szempontjából, ekvivalensek, de globálisan különbözhetnek.

Ado tétel: Bármely Lie algebra beágyazható egy alkalmasan választott mátrix-csoport Lie algebrájába. Tehát mindegyik folytonos csoport lokálisan egy mátrix csoporttal ekvivalens.

A.4. Az ábrázolás fogalma

Ha egy G csoport minden g eleméhez úgy rendelünk egy, a V lineáris téren ható $U[g] : V \rightarrow V$ leképezést megvalósító lineáris operátort, hogy a csoportbeli szorzás műveletét megőrizzük,

$$U[f \cdot g] = U[f]U[g], \quad (\text{A.2})$$

akkor a $g \rightarrow U[g]$ megfeleltetést a G csoport V téren való ábrázolásának hívjuk.

Anti-unitér operátor: Az A operátor anti-unitér, ha anti-lineáris,

$$A(c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle) = c_1^*A|\psi_1\rangle + c_2^*A|\psi_2\rangle, \quad (\text{A.3})$$

továbbá invertálható, azaz A^{-1} létezik és A hatása a normát megőrzi,

$$\|(|\psi\rangle)\| = \|A|\psi\rangle\|. \quad (\text{A.4})$$

Bizonyítás nélkül említjük meg Wigner Jenő egyik alapvető tételét: Ha egy vektortér transzformációja, $|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle$ megőrzi a skalár szorzat abszolút értékét, $|\langle U\psi|U\phi\rangle| = |\langle\psi|\phi\rangle|$, akkor U unitér vagy anti-unitér. Egy ábrázolás (anti)unitér, ha az ábrázolás operátorai (anti)unitérek.

Ekvivalens ábrázolások: A G csoport $U_1[g]$ és $U_2[g]$ ábrázolása unitér ekvivalens, ha létezik egy olyan unitér operátor, V , amelyre $U_1[g] =$

A.4. Az ábrázolás fogalma

261

A.1. táblázat. A fontosabb mátrix csoportok és tulajdonságai

csoport	jellemző tulajdonság	dimenzió
GL(N,C)	$\det A \neq 0$	$2N^2$
SL(N,C)	$\det A = 1$	$2N^2 - 2$
U(N)	$A^\dagger A = 1 \Rightarrow \det A = 1$	N^2
SU(N)	$A^\dagger A = 1, \det A = 1$	$N^2 - 1$
GL(N)	$\det A \neq 0$	N^2
SL(N)	$\det A = 1$	$N^2 - 1$
O(N)	$\tilde{A}A = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$	$\frac{1}{2}N(N - 1)$
SO(N)	$\tilde{A}A = 1, \det A = 1$	$\frac{1}{2}N(N - 1)$

$VU_2[g]V^\dagger$. Az unitér ekvivalens ábrázolások megkülönböztethetlenné a kvantummechanikában.

Ábrázolások direkt összege: Induljunk ki egy csoport két ábrázolásából, $U_i[g] : V_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$. A $g \rightarrow U_1[g] \oplus U_2[g]$ direkt összeggel definiált megfeleltetés a $V_1 \oplus V_2$ téren ad egy ábrázolást, amelyet az U_1 és az U_2 direkt összegének hívunk.

Invariáns altér: Egy ábrázolás terének lineáris alterét invariánsnak nevezünk, ha abból az ábrázolás operátorai nem vezetnek ki. Az ábrázolás teljes tere és az üres altér nyilvánvalóan invariáns, ezek a triviális invariáns terek. Az előbb említett direkt összeg ábrázolásnak két nem-triviális alterét ismerjük, V_1 és V_2 -t.

Reducibilis ábrázolás: Az L téren ható U ábrázolás reducibilis, ha L felbontható két nem-triviális invariáns altér direkt összegére, $V = V_1 \oplus V_2$. Ez esetben az eredeti ábrázolás direkt összeggé válik, $U = U_1 \oplus U_2$. Egy másik megfogalmazása a reducibilitásnak az, hogy találunk olyan bázist az ábrázolás terében, amelyben az ábrázolás mátrixai azonos blokk-diagonális struktúrát mutatnak.

Irreducibilis ábrázolás: Azt az ábrázolást, amely nem reducibilis, irreducibilisnek nevezük. Tehát egy ábrázolás irreducibilis, ha csupán triviális invariáns alterei vannak. Úgy is fogalmazhatunk, hogy egy ábrázolás akkor irreducibilis, ha az ábrázolási térnek bármely két eleméhez, $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ -hez található egy csoport elem, g , amelyhez tartozó operátor, $T[g]$ összeköti e két állapotot,

$$\langle \psi_1 | T[g] | \psi_2 \rangle \neq 0. \quad (\text{A.5})$$

Unitér ábrázolások mindig felbonthatók irreducibilis ábrázolások direkt összegére.

B függelék

A Dirac-egyenlet

Célunk a szabad feles spinű részecske relativisztikusan invariáns mozgásegyenletének levezetése. (Az egyenlet megoldásaival a 3.4. fejezetben részletesen foglalkozunk.)

A feles spinű elemi részecske a speciális Lorentz-csoport legegyszerűbb, $(1, 0)$ vagy $(0, 1)$ irreducibilis ábrázolását valósítja meg. E két ábrázolás nem ekvivalens, tehát úgy tűnik, hogy két különböző feles spinű részecske leírására van lehetőségünk. További kérdés a diszkrét szimmetriák ábrázolása, például az elektron állapotán elvégzett tértükrözés műveletének megjelenítése.

B.1. A tértükrözés

Az $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ impulzusmomentum axiálvektor, hiszen tértükrözés esetén nem vált előjelet. Tehát a tértükrözést ábrázoló \mathcal{P} operátor felcserélhető az impulzusmomentum operátorával, $[\mathcal{P}, \mathbf{L}] = 0$, és ennek következtében az $SO(3)$ forgáscsoporttal. Ily módon a forgáscsoport mindegyik irreducibilis ábrázolásában \mathcal{P} az egység-mátrix többszöröseként ábrázolódhat csak. Következésképpen azt kapjuk, hogy az "elemi részecskék" jól meghatározott paritással rendelkeznek és a forgáscsoport irreducibilis ábrázolásainak megalkotásával a tértükrözést is ábrázoltuk.

A helyzet elbonyolódik a relativisztikus szimmetriák esetén. Jelöljük a \mathbf{v} nagyságú boostot végrehajtó Lorentz-transzformáció mátrixát $\Lambda_{\mathbf{v}}$ -vel, ekkor a

$$\mathcal{P}\Lambda_{\mathbf{v}} = \Lambda_{-\mathbf{v}}\mathcal{P} \quad (\text{B.1})$$

egyenlet azt mutatja, hogy a tértükrözést nem lehet a speciális Lorentz-csoport egyetlen irreducibilis ábrázolásán belül elérni, hiszen $[\mathcal{P}, \Lambda_{\mathbf{v}}] \neq 0$.

Ha egy fermionnak a tükörben látható állapota megtalálható a természetben, akkor ennek a részecskének a leírásához a speciális Lorentz-csoportnak több irreducibilis ábrázolását kell együttesen felhasználnunk. A legegyszerűbb eset az, amikor egy $(1, 0)$ típusú ábrázolás állapotainak a tükörképeit az ezzel azonos dimenziójú $(0, 1)$ ábrázolásban keressük, azaz a tértükrözést a két ábrázolás vektorainak a felcserélésével ábrázoljuk. Mivel az $SO(3)$ forgáscsoport kétszeresen összefüggő topológiával rendelkezik, a rajta értelmezett hullámfüggvények kétértékűek oly módon, hogy az azonos pontban felvett értékek abszolút értéke megegyezik, azonban előjelük ellentétes. Az előjelkülönbség alapján a kiindulási állapot és annak 2π -vel való elforgatottja a fundamentális csoport $\pi_1(SO(3)) = Z_2 = \{1, -1\}$ ábrázolásait szolgáltatják. Ily módon \mathcal{P}^2 , amely a koordináta vektorok szempontjából az egység elemmel azonos, a hullámfüggvények terében ± 1 operátorként ábrázolódhat, hiszen a kétértékű hullámfüggvény Riemann-felületei felcserélődnek két egymásutáni tértükrözés alkalmazása után. A forgáscsoport ábrázolásai folytonosak, így egy irreducibilis altérnek bármely hullámfüggvényére \mathcal{P}^2 ábrázolása ugyanaz az előjel lesz, azaz a tértükrözés négyzetének lehetséges ábrázolásai a következők:

$$\mathcal{P}^2 = 1, \quad (\text{B.2})$$

vagy

$$\mathcal{P}^2 = -1. \quad (\text{B.3})$$

Belátható, hogy e két alternatíva csak a semleges feles spinű részecskék esetében vezet megfigyelhető különbségre. Ilyen részecske híján a választás tetszőleges, a tankönyvekben a (B.3) ábrázolás a jobban elterjedt.

A tértükrözés ábrázolása céljából a feles spinű részecskék leírására a speciális Lorentz-csoport $(1, 0) \oplus (0, 1)$ direkt-összeg ábrázolását használjuk. Ennek a négydimenziós térnek az elemeit, a $\psi = (\phi^a, \chi_A)$ vektorokat bispinoroknak hívjuk. A z -tengely körüli elforgatások során a (2.52) és (2.53) transzformálódási szabály az (2.56) metrikus tenzor felhasználásával a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \phi^1 \\ e^{i\alpha/2} \phi^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \chi_1 \\ e^{i\alpha/2} \chi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

alakot ölti. Tehát a tértükrözést, amely nem változtatja meg a spin vektortétét a

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} \longrightarrow i \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \longrightarrow i \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

módon ábrázoljuk.

B.2. A mozgásegyenlet

Olyan mozgásegyenletet keresünk, amely mind a bispinor térmennyiségben, mind pedig a részecske állapotát jellemző p^μ energia-impulzus kvantumszámban lineáris. Az energia-impulzus vektort célszerű a szokásos módon, egy 2×2 -es mátrixként kezelni,

$$p^\mu \longrightarrow p^\mu \sigma_\mu, \quad (\text{B.6})$$

amely a (2.48) transzformációs szabály alapján egy $(1, 1)$ típusú tenzor, p^{aA} . Szükségünk lesz a $p' = p_{Aa}$ tenzorra is, amelyet a

$$p' = (G(p^0 + \mathbf{p}\sigma)G^{tr})^* = p^0 - \mathbf{p}\sigma \quad (\text{B.7})$$

alakban állíthatunk elő a (2.54) és a $G^{tr} = -G$ összefüggések alkalmazásával. A p^{aA} , p_{Aa} , ϕ^a és a χ_A mennyiségekből az összeillő indexek kontrakciójával alkotunk kovariáns kifejezéseket, például $p^{aA}\chi_A$. Erre az $(1, 0)$ spinorra a legegyszerűbb feltételként a másik hasonló spinorral, a ϕ^a -val való arányosságot róhatjuk ki,

$$p^{aA}\chi_A = m\phi^a, \quad (\text{B.8})$$

ahol m egy tömegdimenziójú arányossági tényező. Hasonló módon kaphatunk még egy másik összefüggést:

$$p_{Aa}\phi^a = m'\chi_A. \quad (\text{B.9})$$

A $\chi \rightarrow \sqrt{\frac{m}{m'}}\chi$ átskálázással e két egyenlet a szimmetrikusabb

$$\begin{aligned} (p^0 + \mathbf{p}\sigma)\chi &= m\phi, \\ (p^0 - \mathbf{p}\sigma)\phi &= m\chi \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

alakra hozható, melyet a

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Dirac-mátrixok bevezetésével a szokásos

$$(p^0\gamma_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma})\psi = m\psi \quad (\text{B.12})$$

módon lehet felírni.

Az itt követett gondolatmenet a Schrödinger-egyenlet formális négyzetgyökeként előállított mozgásegyenletet eredményezi. A levezetésből azt a meglepő következtetést vonhatjuk le, hogy a speciális Lorentz-csoport szempontjából az elektron egy összetett, az $(1, 0) \oplus (0, 1)$ reducibilis ábrázoláshoz tartozó részecske. Az $(1, 0)$ és a $(0, 1)$ irreducibilis

B.2. A mozgásegyenlet

265

ábrázolásokat a részecske tömege csatolja össze. A tömegnélküli fermionokra, például a neutrínókra, (B.10) egyenlet alapján kétkomponensű spinor leírás alkalmazható.

A speciális Poincaré-csoport fényszerű irreducibilis multipliettjeiben csupán azonos helicitású állapotok találhatók. Egy tömegtelen fermion, például a neutrínó helicitását jobb ($\lambda = \frac{1}{2}$), illetve balkezesnek ($\lambda = -\frac{1}{2}$) hívjuk, ha az impulzus iránya szempontjából a spin jobb, vagy balkezes forgáshoz tartozik. A jobb és a balkezes állapotok egymástól függetlenül fejlődnek, a mozgásegyenlet nem keveri őket össze. A mozgásegyenlet tömegtagja összcsatolja a jobb és a balkezes állapotokat. A jobb- és a balkezes ú.n. királis altérre való vetítést a

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (\text{B.13})$$

és a

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad (\text{B.14})$$

Dirac-mátrixokkal érjük el, ahol

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

A térbeli elforgatások során a bispinor két spinor komponense ekvivalens módon transzformálódik. Ez a tulajdonság azt sugallja, hogy a nemrelativisztikus határesetben, amikor a "boost"-ok nélküli alcsoportra korlátozott szimmetriát reprezentáljuk, a két spinor összege és különbsége lesz az alkalmasabb változó. Erre bázisra az

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.16})$$

mátrixszal áttérve, kapjuk meg a Dirac-egyenlet 3.4. fejezetben használt alakját.

C függelék

Az időfejlődés a kvantumtérelméletben

A dinamikai időfejlődés az állapotvektorokon keresztül jelenik meg a Schrödinger-féle kvantummechanikában. Miután a térelméletben a térmennyiségek explicit időfüggést tartalmaznak, célszerűnek tűnik az időfejlődést az állapotokról egy bázistranszformációval az operátorokra átvinni. Kiderül azonban, hogy az eredményül kapott operátoregyenletek túl bonyolultak ahhoz, hogy a perturbációszámítást alkalmazzassuk. Ezért a kvantumtérelméletben olyan kompromisszum alapján írjuk le az időfejlődést, hogy a Hamilton-operátor szabad része felelős az operátorokban explicit módon fellépő időfüggésért, másrészt a kölcsönhatási Hamilton-operátor az állapotokat fejleszti az időben.

C.1. A Schrödinger reprezentáció

A Schrödinger reprezentációban az állapotvektorok az

$$i\hbar\partial_0|\psi(t)\rangle_S = H|\psi(t)\rangle_S \quad (\text{C.1})$$

Schrödinger-egyenlet megoldásával kapott

$$|\psi(t)\rangle_S = U(t, 0)|\psi(0)\rangle \quad (\text{C.2})$$

módon fejlődnek időben, ahol

$$U(t_f, t_i) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_i)H} \quad (\text{C.3})$$

és az A_S operátorok időfüggetlenek.

C.2. A Heisenberg reprezentáció

Az $e^{itH/\hbar}$ operátorral elvégzett bázistranszformáció után a Heisenberg reprezentációba jutunk, ahol a

$$|\psi(t)\rangle_H = e^{\frac{i}{\hbar}tH} |\psi(t)\rangle_S \quad (\text{C.4})$$

állapotok időfüggetlenek, az operátorok azonban az

$$A_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}tH} A_S e^{-\frac{i}{\hbar}tH} \quad (\text{C.5})$$

időfüggést mutatják, amely az

$$i\hbar\partial_0 A_H(t) = [A_H(t), H] \quad (\text{C.6})$$

Heisenberg mozgásegyenlettel ekvivalens. A Hamilton-operátor megegyezik a két reprezentációban.

C.3. A Dirac reprezentáció

A kölcsönhatási reprezentációban felbontjuk a Hamilton-operátort a H_0 szabad és a H_1 kölcsönhatási tag összegére, $H = H_0 + H_1$ és az operátorokat a szabad, az állapotokat pedig a kölcsönhatási Hamilton operátorral fejlesztjük időben:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I &= e^{\frac{i}{\hbar}tH_0} |\psi(t)\rangle_S, \\ A_I(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}tH_0} A_S e^{-\frac{i}{\hbar}tH_0}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

A mozgásegyenletekre

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_0 |\psi(t)\rangle_I &= H_{1I} |\psi(t)\rangle_I, \\ i\hbar\partial_0 A_I(t) &= [A_I(t), H_{0I}] \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

adódik. Ha $[H_0, H_1] \neq 0$, akkor $H_{1I} \neq H_1$ és H_{1I} időben változik.

C.4. A szórásmatrix

A részecskefizikai folyamatok alapvető jellemzője a kezdeti állapotban jelen nem lévő gerjesztések, részecskék keltése. Ez többféle módon történhet: a fékezési sugárzáshoz hasonló „lesugárzással”, vagy az új kvantumszámok rejtett megjelenésére kiváló alkalmat nyújtó párkeltéssel. Ebben a kvantummechanikai folyamatban a természetes fizikai objektum az a keltő operátor, ami a téridő meghatározott pontjában részecske megjelenését képes a kezdeti állapotra hatva formálisan is leírni. (Az alternatív művelet az adott részecskefajta eltűnését leíró eltüntetető operátor hatása.)

A szokásos kvantummechanikai tárgyalásban az állapot időbeli változása az objektum minőségi jegyeinek megmaradása mellett történik, ezért

az a leírás illeszkedik jól a jelenségekhez, amely az állapothoz rendel időbeli változást, míg a fizikai tulajdonságok operátorai időfüggetlenek. Pl. egyetlen mágneses momentum külső mágneses térben történő precessziója során, a mágneses térre merőleges mágneses momentum komponens forgása jól követhető az állapot bizonyos paramétereinek időfüggését leíró Schrödinger-egyenlet segítségével. Ennek oka az, hogy a precesszió során a mágneses momentum hordozója nem alakul át, mondjuk, elektronból protonná.

A részecskefizikai kísérletekben a kezdeti állapot ($t = -\infty$) és a végállapot ($t = +\infty$) határozott kvantumszámú részecskékből áll:

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |R_1(\mathbf{p}_i^1, S_{z,i}^1, I_{3,i}^1, Y_i^1), \dots, R_n(\mathbf{p}_i^n, S_{z,i}^n, I_{3,i}^n, Y_i^n)\rangle, \\ |f\rangle &= |R_1(\mathbf{p}_f^1, S_{z,f}^1, I_{3,f}^1, Y_f^1), \dots, R_m(\mathbf{p}_f^m, S_{z,f}^m, I_{3,f}^m, Y_f^m)\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

ahol az i index a kezdeti állapotra utal, amiben n részecske van jelen, míg f a végállapotbeli részecskéket indexeli. Utóbbiak száma m . A feltüntetett tulajdonságok, az impulzus, a saját impulzuszóránymomentum, valamint az izospin komponensei és a hipertöltés az erősen kölcsönható részecskékre adnak egy kvantumszám-halmazt. A leptonokra vagy az erőterek kvantumaira más, de jellegében hasonló választás jellemzi a reakcióban résztvevő állapotokat.

A kezdetiből a végállapotba sok-sok alternatív eseménysor vihet át, amelyek többek között abban különböznek, hogy egyes részecskék mely téríró pontban tűnnek el vagy keletkeznek. Az átalakulást jellemző operátort S -mátrixnak hívják:

$$|\Psi(t_f)\rangle = S|\Psi(t_i)\rangle \quad (\text{C.10})$$

és az időfüggő, részecskét eltüntető és keltő operátorokból épül fel.

Miután H_{1I} időfüggő, a módosított Schrödinger-egyenlet megoldása komplikáltabb, mint volt a Schrödinger-képben. A különböző időpontbeli kölcsönhatási Hamilton-operátorok általában nem cserélhetők fel, ezért a megoldást az infinitezimális időintervallumra vonatkozó lineáris közelítésre építjük:

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle_I = (I - \frac{i}{\hbar}H_{1I}(t)\Delta t)|\Psi(t)\rangle_I. \quad (\text{C.11})$$

Infinitezimális időintervallumra az előző kifejezés jobb oldalát exponencializálni lehet:

$$(I - \frac{i}{\hbar}H_{1I}(t)\Delta t)|\Psi(t)\rangle_I \approx e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t H_{1I}(t)}|\Psi(t)\rangle_I. \quad (\text{C.12})$$

C.4. A szórásmatrix

269

Véges intervallumra az időfejlődés eredménye az infinitezimális transzformációk egymásutáni „végtelenszeri” alkalmazásával kapható meg:

$$|\Psi(t_f)\rangle_I = e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t H_{1I}(t_f-\Delta t)} e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t H_{1I}(t_f-2\Delta t)} \dots e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t H_{1I}(t_i)} |\Psi(t_i)\rangle_I. \quad (\text{C.13})$$

A fenti végtelen szorzat definiálja az ú.n. időrendezett szorzatot, melyben tehát a növekvő időpontokhoz tartozó operátortényezők balról szorozzák a korábbi időpontbeli Hamilton-operátorokat tartalmazó részt:

$$|\Psi(t_f)\rangle_I = \hat{T} \left\{ e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} H_{1I}(t') dt'} \right\} |\Psi(t_i)\rangle_I \quad (\text{C.14})$$

Ezzel viszont éppen azt az operátort állítottuk elő, ami a részecskefizikai reakciók átmeneti valószínűségi amplitudóját adja. Ehhez a $t_i = -\infty$, $t_f = +\infty$ választást kell tenni:

$$S = \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} H_{1I}(t') dt'}. \quad (\text{C.15})$$

A perturbatív megoldást az exponenciális függvény hatványsorba fejtesével kapjuk meg. Emögött az az alkalmazási korlát áll, ami feltételezi, hogy H_{1I} mátrixelemei sokkal kisebbek a sorfejtés első tagjának, az egységoperátornak mátrixelemeinél, tehát egynél. A kezdeti $|\Psi(t_i)\rangle$ és egy speciálisan kiválasztott $|f\rangle$ végállapot közötti S mátrixelemet S_{fi} -vel jelölve, a sorfejtés első három tagja a következő:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \langle f | H_{1I}(t') | \Psi(-\infty) \rangle_I - \frac{1}{2\hbar^2} \hat{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \langle f | H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2) | \Psi(-\infty) \rangle_I + \dots \quad (\text{C.16})$$

Nyilván csak az utolsó tagban kell az időrendezést alkalmazni. Az integrandus t_1 és t_2 cseréjére mutatott szimmetriáját kihasználva könnyű látni, hogy a jobboldal utolsó tagját meghatározó operátor a következő határozott sorrendű alakra hozható:

$$-\frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_{1I}(t_1) H_{1I}(t_2). \quad (\text{C.17})$$

Nyilvánvaló, hogy bármi változással járó reakciót csak a (C.16) második tagjától kezdődő rész ír le. Ezekben a reakciókban a kezdő és végállapotok eredő négyesimpulzusai azonosak. Ezért az S -mátrix általános szerkezetére a következő felbontás tehető, ami az abban megjelenő T operátor definícióját adja:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \langle \Psi_f | T | \Psi_i \rangle_I. \quad (\text{C.18})$$

A megfelelő Dirac-delta függvény megjelenését az összes konkrét számolás igazolja.

C.5. A hatáskeresztmetszet

Az átmeneti valószínűséget a kölcsönhatást leíró rész abszolút értékének négyzete adja. Azonnal gondot jelent a Dirac-delta négyzetének értelmezése. Ez Fermi nyomán a következőképpen tehető meg. A Dirac-delta V térfogat és T időintervallumbeli Fourier-előállításából indulunk ki:

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) = \int_V d^3x \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)\mathbf{x} - i(p_f^0 - p_i^0)t}. \quad (\text{C.19})$$

Ha $p_f = p_i$, akkor az integrál értéke VT . Ezt éppen a másik δ -függvény biztosítja. Így Fermi javaslata szerint a δ négyzetére a következő értelmezés adódik:

$$[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i)]^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) VT. \quad (\text{C.20})$$

A szokásos kvantummechanikai esethez hasonlóan az időegységre jutó átmeneti valószínűséget kívánjuk kiszámolni, azaz az S -mátrixnak a kiszemelt kölcsönhatást leíró mátrixelemét elosztjuk T -vel.

Miután a kvantumszámok közül az impulzus folytonos valószínűségi változó, a következő lépés a végállapotban rögzített impulzusok körüli infinitezimális fázistérfogat-elemmel való szorzás:

$$\prod_{l=1}^m \frac{d^3p_l}{(2\pi\hbar)^3} V \quad (\text{C.21})$$

(miután a reakciók a térben bárhol azonos eséllyel következnek be, a fázistérfogat térszerű részét rögtön a V térfogattal való szorzással vehetjük figyelembe).

A határozott impulzusú részecskéket síkhullámok írják le. Egy síkhullám térben homogén részecske-eloszlást ír le, amelynek valószínűségi sűrűsége

$$\rho = i\hbar(\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi} \phi^*) = 2p^0. \quad (\text{C.22})$$

Ezért a reakció részecskeszámtól független jellemzése érdekében az időegységre jutó átmeneti valószínűséget el kell osztani a bejövő és a kimenő részecskék számával:

$$N = \prod_{l=1}^m (2p_{l,f}^0 V) \prod_{k=1}^n (2p_{k,i}^0 V). \quad (\text{C.23})$$

Közbülső összefoglalásul kijelenthetjük, hogy két részecske ütközésében a kezdeti állapotból a végállapotba történő átmenetek időegységre jutó valószínűségére a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{dW_{fi}}{T} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \frac{1}{2p_1^0 2p_2^0 V} |T_{fi}|^2 \prod_{l=1}^m \frac{d^3p_{f,l}}{(2\pi\hbar)^3 2p_{f,l}^0}. \quad (\text{C.24})$$

C.5. A hatáskeresztmetszet

271

A tipikus szórás kísérletben az egyik részecskéből nyugvó céltárgyat állítanak elő, amire a lövedékrészecskék áramát lövik rá. Ez esetben bevezethető a hatáskeresztmetszet, ami a fluxusegységre vetíti az időegységre jutó valószínűséget. A lövedékfluxus a V térfogatban v_2 sebességgel mozgó részecskéket leíró normált síkhullám állapotban

$$j_2 = \frac{v_2}{V}, \quad (\text{C.25})$$

amivel a differenciális hatáskeresztmetszet definíciójára

$$d\sigma = \frac{dw_{fi}}{T} \frac{1}{j_2} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) \frac{1}{2m_1 c^2 2p_2^0 v_2} |T_{fi}|^2 \prod_{l=1}^m \frac{d^3 p_{f,l}}{(2\pi\hbar)^3 2p_{f,l}^0} \quad (\text{C.26})$$

írható.

Feladat. (1) Mutassuk meg, hogy az

$$I = ((p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2)^{1/2} \quad (\text{C.27})$$

relativisztikusan invariáns kifejezéssel megadható a hatáskeresztmetszet fenti kifejezésében a $|T_{fi}|^2$ -et megelőző tényező nevezője.

(2) Mutassuk meg a

$$\frac{d^4 p}{(2\pi)^3} 2\Theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \quad (\text{C.28})$$

Lorentz-invariáns kifejezés alapján, hogy a fázistérfogat-elemet tartalmazó utolsó faktor maga is Lorentz-invariáns. ■

Az előző feladatok állításaiból következik a hatáskeresztmetszet relativisztikus invarianciája.

D függelék

A funkcionális Schrödinger reprezentáció

A kvantummechanika és a kvantumtérelmélet formális hasonlósága az ú.n. funkcionális Schrödinger reprezentációban a legnyilvánvalóbb.

Induljunk ki egy n -dimenziós térben mozgó első-kvantált részecskéből, amelynek szokásos kanonikus változói $x^\ell, \pi^\ell, \ell = 1, \dots, n$,

$$[x^k, \pi^\ell] = i\hbar\delta^{k\ell}. \quad (\text{D.1})$$

Az állapotok jellemzésére az $|y^\ell\rangle$

$$x^k|y^\ell\rangle = y^k|y^\ell\rangle \quad (\text{D.2})$$

koordináta sajátállapot segítségével bevezetett

$$\psi(x^\ell) = \langle x^\ell|\psi\rangle \quad (\text{D.3})$$

hullámfüggvényt használjuk.

A skalár kvantumtérelmélet egy olyan kvantummechanikai rendszer, amelyben a háromdimenziós tér minden \mathbf{x} pontjában egy független $\phi(\mathbf{x})$ dinamikai szabadsági fok található. Tehát az első-kvantált x^ℓ koordináta szerepét a $\phi(\mathbf{x})$ térmennyiség játssza. Az ℓ index, amely a különböző koordináta komponenseket különbözteti meg, a térelméletben a folytonos \mathbf{x} változóval helyettesítendő. Minden $\phi(\mathbf{x})$ dinamikai változóhoz tartozik egy $\pi(\mathbf{x})$ kanonikus impulzus

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\hbar\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{D.4})$$

Bevezetjük továbbá a $|\Phi(\mathbf{y})\rangle$ koordináta sajátállapotot,

$$\phi(\mathbf{x})|\Phi(\mathbf{y})\rangle = \Phi(\mathbf{x})|\Phi(\mathbf{y})\rangle. \quad (\text{D.5})$$

D. A funkcionális Schrödinger reprezentáció

273

A kvantumtérelmélet állapotait a $\phi(\mathbf{x})$ -függő $\Psi[\phi(\mathbf{x})]$ hullámfüggvény, a Schrödinger hullámfunkcionál jellemzi,

$$\Psi[\phi(\mathbf{x})] = \langle \phi(\mathbf{x}) | \Psi \rangle, \quad (\text{D.6})$$

amelyen a kanonikus operátorok hatása

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x})\Psi[\phi(\mathbf{y})] &= \phi(\mathbf{x})\Psi[\phi(\mathbf{y})] \\ \pi(\mathbf{x})\Psi[\phi(\mathbf{y})] &= \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \Psi[\phi(\mathbf{y})]. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Most bevezetünk egy infravörös és egy ultraibolya levágást oly módon, hogy a rendszert egy L méretű kvantálási dobozba tesszük, valamint a folytonos \mathbf{x} tér-koordinátát diszkrét rácspontokkal helyettesítjük,

$$\mathbf{x}_{\mathbf{n}} = a\mathbf{n}, \quad (\text{D.8})$$

ahol a a ráczállandó. A két levágási paraméter kapcsolatát a kvantálási dobozban található rácspontok

$$N = \frac{L^3}{a^3} \quad (\text{D.9})$$

száma fejezi ki. A rácregularizálásban a

$$\phi_r(\mathbf{n}) = a\phi(\mathbf{x}_{\mathbf{n}}) \quad (\text{D.10})$$

és

$$\pi_r(\mathbf{n}) = a^2\pi(\mathbf{x}_{\mathbf{n}}) \quad (\text{D.11})$$

dimenziótlan változókat vezetjük be, amelyekre a kanonikus felcserélési reláció

$$[\phi_r(\mathbf{n}), \pi_r(\mathbf{m})] = i\hbar\delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}} \quad (\text{D.12})$$

megyegyeznek a kvantummechanikai többtest-rendszer (D.1) összefüggésével.

A dinamikát a

$$H = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2}\pi^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\partial_j\phi(\mathbf{x}))^2 + V(\phi(\mathbf{x})) \right] \quad (\text{D.13})$$

Hamilton-operátor írja le, amely az ultraibolya levágással dimenziótlanított mennyiségekkel kifejezve

$$H_r = aH = \sum_{\mathbf{n}} \left[\frac{1}{2}\pi_r^2(\mathbf{n}) + \frac{1}{2} \sum_j (\phi_r(\mathbf{n} + \hat{j}) - \phi_r(\mathbf{n}))^2 + V(\phi_r(\mathbf{n})) \right]. \quad (\text{D.14})$$

alakú lesz.

Feladat. Bizonyítsa be, hogy a (D.13) Hamilton-operátorral megadott

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (D.15)$$

szabad elmélet vákuumának hullám-funkcionálja

$$\Psi_0[\phi(\mathbf{x})] = e^{-\frac{1}{2} \int dx dy \phi(\mathbf{x}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y})}, \quad (D.16)$$

ahol a $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ operátort a

$$K = \sqrt{m^2 - \nabla^2} \quad (D.17)$$

kifejezés definiálja. ■

Vezessük be a

$$H_0(\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\pi_r^2(\mathbf{n}) + 3\phi_r^2(\mathbf{n}) + V(\phi_r(\mathbf{n})) \quad (D.18)$$

a rácson is lokális operátort. Minden egyes $\mathbf{x}_\mathbf{n}$ pontnál a $\phi_r(\mathbf{n})$, $\pi_r(\mathbf{n})$ kanonikus pár egy kvantummechanikai rendszert határoz meg, amelynek $H_0(\mathbf{n})$ a Hamilton-operátora. Ezek a lokális rendszerek a

$$H_1(\mathbf{n}) = - \sum_{\hat{j}} \phi_r(\mathbf{n} + \hat{j}) \phi_r(\mathbf{n}) \quad (D.19)$$

operátor által leírt módon hatnak kölcsön a szomszédaikkal, hiszen

$$H = \sum_{\mathbf{n}} (H_0(\mathbf{n}) + H_1(\mathbf{n})). \quad (D.20)$$

Tehát a kvantumtérelméletet egy olyan N dimenziós H_0 kvantummechanikai rendszerként képzelhetjük el, amely a szomszédos szabadsági fokokat összecsatoló H_1 Hamilton operátorral jellemezhető. Vegyük észre, hogy a (D.20) felbontás lehetővé teszi nagy csatolási állandók esetén a kinetikus energiában, közelebbről a H_1 -ben való perturbációszámítást, rögzített véges a esetén.

E függelék

Kvantum anomália

A klasszikus rendszerek szimmetriáit esetenként sérti a kanonikus kvantálás eljárása. Ezt a sajátos kvantum effektust mutatjuk be a kvantummechanikában és a kvantumtérelméletben. A kvantum anomália valójában tágabb jelenségkörre utal, mint a szimmetriák jelenléte vagy sérülése. Szokásos használata csak annyiban kapcsolódik a szimmetriákhoz, amennyiben a szimmetria következményei és azoknak esetleges sérülései könnyen azonosíthatóak. A figyelmesebb vizsgálat arra az eredményre vezet, hogy a kvantum időfejlődés szingulárisabb módon történik, mint a klasszikus esetben, amit úgy is megfogalmazhatunk, hogy a kvantum részecske fraktális pályákon propagál és ennek következtében több, a klasszikus mechanikában levezethető összefüggés $O(\hbar)$ korrekciót tartalmaz.

Az ilyen jellegű korrekciók három fajtájára adunk példát ebben a függelékben. Az első anomália család a kanonikus koordináták nem-lineáris transzformációja esetén jelenik meg. A második anomália típus az időfejlődést közvetlenül megjelenítő, időderiváltat tartalmazó operátoregyenletekben található. Mivel egy szimmetria ismeretében számos egzakt klasszikus összefüggést és megmaradási tételt vezethetünk le, ezeket az anomáliákat általában a szimmetriák nem-lineáris, illetve lineáris megvalósítása esetében találjuk meg. Az anomáliák itt bemutatott harmadik osztálya pedig a levágás okozta effektusokat tartalmazza. Történelmi okok miatt, csupán ez utóbbiakat nevezik anomáliának, mert felfedezésük teljesen váratlan volt. Mivel mindhárom jelenségtípus forrása ugyanaz, a kvantum propagálás szinguláris jellege, ebben a függelékben egységesen az „anomália” jelzőt használjuk leírásuk során.

E.1. Anomália a kvantummechanikában

Induljunk ki a háromdimenziós térben mozgó szabad részecske

$$L_0 = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 \quad (\text{E.1})$$

Lagrange-függvényéből. A hozzátartozó

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (\text{E.2})$$

Hamilton-operátornak az eltolással és az elforgatással szemben tanúsított invarianciáját a

$$\begin{aligned} [H_0, \mathbf{p}] &= 0 \\ [H_0, \mathbf{L}] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

kommutációs szabályok rögzítik. Az

$$\mathbf{x} = \begin{cases} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

polár-koordinátákkal kifejezett

$$\tilde{L}_0 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \quad (\text{E.5})$$

Lagrange-függvény kvantálása a megszokottól eltérő eredményre vezet. A

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\delta L_0}{\delta \dot{r}} = m \dot{r}, \\ p_\theta &= \frac{\delta L_0}{\delta \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, \\ p_\phi &= \frac{\delta L_0}{\delta \dot{\phi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

kanonikus impulzusok segítségével kifejezett Hamilton-függvény a szokásos

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 &= p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m r^2} + \frac{p_\phi^2}{2m r^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

alakot ölti. Az impulzusokat az

$$[r, p_r] = [\theta, p_\theta] = [\phi, p_\phi] = i\hbar \quad (\text{E.8})$$

E.2. A szinguláris propagálás

277

Heisenberg felcserélési relációk alapján előírt

$$p_r = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial r}, \quad p_\theta = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad p_\phi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (\text{E.9})$$

módon ábrázolva

$$\tilde{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\partial_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(\partial_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right) \right]. \quad (\text{E.10})$$

Ezzel az Hamilton-operátorral az a probléma, hogy nem Galilei-invariáns, azaz $[\mathbf{p}, H_0] \neq 0$, $[\mathbf{L}, H_0] \neq 0$. Tehát a kanonikus kvantálás eljárása nem invariáns a nem-lineáris koordináta transzformációkkal szemben, amelyek az analitikus mechanikában megismert kanonikus transzformációk közé tartoznak.

Érdeemes felidézni a jól ismert, helyes eredményt,

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \right) \right], \quad (\text{E.11})$$

amely a deriváltak mellé beillesztett $(r^2, 1/r^2)$ és $(\sin \theta, 1/\sin \theta)$ faktorokat tartalmazza. Ezek a klasszikus szinten triviális, egyszerűsíthető szorzófaktorok a Hamilton-operátort a

$$\tilde{H}_0 \longrightarrow H_0 = \tilde{H}_0 + i \frac{\hbar}{2m} \left(\frac{2}{r} p_r + \cot \theta p_\theta \right) \quad (\text{E.12})$$

$O(\hbar)$ rendben módosítják a naív eredményhez képest és garantálják a kívánt (E.3) szimmetriát. Világos módon itt az operátorok szorzata rendezési problémájának egy esetével állunk szemben, amely az operátorok klasszikus-kvantum megfeleltetését (a korrespondancia elv alkalmazását) nem-egyértelművé teszi. De miért kell a nem-kommutáló faktorok szorzatát egy adott módon megválasztani és az ennek következtében felmerülő $O(\hbar)$ korrekciót bevezetnünk ahhoz, hogy a Galilei-szimmetriát megtartsuk?

E.2. A szinguláris propagálás

Az (E.5) Lagrange-függvényt a távolság négyzete

$$d\mathbf{x}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \approx dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{E.13})$$

$O(\Delta^2 x)$ rendjének figyelembevételével kaptuk meg. Az $O(\Delta^3 x)$ rend járuléka elhanyagolható, ha a trajektória differenciálható,

$$\Delta \mathbf{x} = O(\Delta t), \quad (\text{E.14})$$

ami teljesül a klasszikus egyenleteket kielégítő trajektóriákra. A kvantummechanikai propagátor,

$$\langle \mathbf{x} | e^{-\frac{i}{\hbar} t H_0} | \mathbf{y} \rangle = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{3/2} e^{\frac{im}{2\hbar t} (\mathbf{x}-\mathbf{y})^2}, \quad (\text{E.15})$$

megadja a $t = 0$ időpontban az \mathbf{y} pontban lokalizált részecske hullámfüggvényét a t időpillanatban

$$\begin{aligned} \psi(0, \mathbf{x}) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \psi(t, \mathbf{x}) &= \langle \mathbf{x} | e^{-\frac{i}{\hbar} t H_0} | \mathbf{y} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Az (E.15) kifejezést úgy ellenőrizhetjük, hogy meggyőződünk arról, hogy kielégíti az

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{x} | e^{-\frac{i}{\hbar} t H_0} | \mathbf{y} \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 \langle \mathbf{x} | e^{-\frac{i}{\hbar} t H_0} | \mathbf{y} \rangle \quad (\text{E.17})$$

Schrödinger-egyenletet és az

$$\langle \mathbf{x} | e^{-\frac{i}{\hbar} t H_0} | \mathbf{y} \rangle |_{t=0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{E.18})$$

kezdeti feltételt.

Feladat. Bizonyítsa be az (E.15) relációt. Útmutatás: az egyenlőség baloldalának mátrixelemében az időfejlesztő operátor mindkét oldalán szűrje be az egységoperátor

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |k\rangle \langle k| \quad (\text{E.19})$$

spektrálfelbontását. ■

Azt találjuk, hogy a hullámfüggvény időfüggése a normalizálási faktortól eltekintve olyan, hogy az adott Φ fáziskülönbségű tartományok¹ távolsága

$$\Delta \mathbf{x} = \sqrt{\frac{2\hbar t \Phi}{m}} \quad (\text{E.20})$$

módon függ az időtől. Tehát a kezdeti, a Dirac-féle δ -függvénnyel arányos amplitúdó a

$$\Delta \mathbf{x} = O(\sqrt{\Delta t}) \quad (\text{E.21})$$

összefüggésnek megfelelően folyik szét, ami kellően kicsi Δt -re független az esetleges kölcsönhatástól is. Tehát a kvantummechanikai amplitúdó a

¹Emlékeztetünk arra, hogy a hullámfüggvény relatív fázisa interferencia kísérletekkel mérhető.

diffúziós egyenlethez hasonlóan nem-differenciálható, fraktális trajektóriák mentén fejlődő propagálási járulékok interferenciájaként képzelhető el. Minél jobb időfelbontással próbáljuk követni a részecske koordinátájának időfejlődését, annál nagyobb fluktuációkat találunk a sebességben.

A differenciál-geometriában a tér geometriai tulajdonságait kellően sima görbék alapján osztályozzuk. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a kvantummechanikai részecskék szinguláris terjedésük folytán a koordinátater tulajdonságaitól bonyolultabb módon függenek, mint a klasszikus mechanikában. Például a koordináták nem-lineáris transzformációi során a Lagrange-függvény új alakjának előállításához szükségünk van a

$$\frac{\Delta^2 \mathbf{x}}{\Delta t} = \hbar \mathcal{O}((\Delta t)^0) \quad (\text{E.22})$$

rend figyelembevételére, amit a differenciálható trajektóriákra alapuló klasszikus mechanikában elhanyagolhatunk.

E.3. Az Ito-integrál

(E.21) egyik következménye, hogy az

$$S = \int dt L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (\text{E.23})$$

hatásban előforduló integrál nem Riemann-típusú, hanem Ito-integrál. A kettő közti különbséget jól érzékelteti az egydimenziós klasszikus mozgásra triviálisan fenálló

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{dF(x(t))}{dt} = \int_{F(t_i)}^{F(t_f)} dF = F(x(t_f)) - F(x(t_i)) \quad (\text{E.24})$$

azonosság. A $\Delta x = O(\sqrt{\Delta t})$ jellegű $x(t)$ trajektóriákra ez már nem teljesül. Induljunk ki az

$$F(x(t_f)) - F(x(t_i)) = \sum_{j=1}^N [F(x(t_{j+1})) - F(x(t_j))] \quad (\text{E.25})$$

azonosságból, ahol $t_1 = t_i$, $t_N = t_f$. Állítsuk elő a jobboldalon álló függvényértékeket az $\eta \in [0, 1]$ paraméterrel jellemzett

$$x_j^\eta = x(t_j) + \eta \Delta_j x \quad (\text{E.26})$$

$$\Delta_j x = x(t_{j+1}) - x(t_j) \quad (\text{E.27})$$

osztópontok körüli

$$\begin{aligned} F(x(t_{j+1})) &\approx F(x_j^\eta) + (1 - \eta) \Delta_j x F'(x_j^\eta) + \frac{1}{2} (1 - \eta)^2 \Delta_j^2 x F''(x_j^\eta), \\ F(x(t_j)) &\approx F(x_j^\eta) - \eta \Delta_j x F'(x_j^\eta) + \frac{1}{2} \eta^2 \Delta_j^2 x F''(x_j^\eta) \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

kifejtéssel,

$$F(x(t_f)) - F(x(t_i)) = \sum_{j=1}^N \left[\Delta_j x F'(x_j^\eta) + \left(\frac{1}{2} - \eta \right) \Delta_j^2 x F''(x_j^\eta) + O(\Delta_j^4 x) \right]. \quad (\text{E.29})$$

A jobboldal első tagja az (E.24) Riemann-integrálnak felel meg. Azonban a trajektória szinguláris viselkedése miatt az $O(\Delta^2 x)$ rend nem eltűnő, és (E.20) alapján az Ito-integrálra jellemző

$$\int_{F(t_i)}^{F(t_f)} dF = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{dF(x(t))}{dt} + \left(\frac{1}{2} - \eta \right) \frac{2\hbar}{m} \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d^2 F(x(t))}{dt^2} \quad (\text{E.30})$$

szokatlan eredményre vezet. Azzal a tanulsággal zárhatjuk ezt az egyszerű példát, hogy a kvantumozott természetű részecske szinguláris, nem-differenciálható trajektóriák mentén való propagálása miatt a nem-lineáris koordináta transzformációknál a klasszikus analízisben megszokott pontossághoz képest egy renddel tovább kell a járulékokat figyelembe venni. Ez vezet a Hamilton-operátor $O(\hbar)$ korrekciójához.

Feladat. Vezesse le a Hamilton-operátor poláris koordinátarendszerbeli alakját az (E.20) egyenlet segítségével. ■

E.4. Az Ito-potenciál

A kanonikus kvantálás segítségével megkapott \tilde{H} Hamilton-operátor az ultraibolya módusok fontossága miatt nem azonos az eredeti

$$H = \tilde{H} + \hbar U_I \quad (\text{E.31})$$

Hamilton-operátorral. Az itt megjelenő $O(\hbar)$ korrekciót Ito-potenciálnak hívják. Komplikált rendszerrel általában nem tudjuk algebrai módszerrel meghatározni a H Hamilton-operátor alakját a nemlineáris transzformáció után. Egyes esetekben azonban a szimmetrián alapuló megfontolások segíthetnek.

Tegyünk fel, hogy a szabad részecskéhez hasonlóan a G operátor egy olyan

$$[H, G] = 0 \quad (\text{E.32})$$

szimmetriáját írja le a rendszernek, amely nemlineárisan ábrázolódik az új koordinátákban. Ez a szimmetria nem valósul meg, „anomálissá” válik a kanonikus kvantálás során,

$$[\tilde{H}, G] \neq 0. \quad (\text{E.33})$$

Az eredeti szimmetrikus elméletet olyan $\hbar U_I$ „ellentagok” bevezetésével kapjuk meg, amelyek helyreállítják a kívánt szimmetriát,

$$[\hbar U_I, G] = -[\tilde{H}, G]. \quad (\text{E.34})$$

A kvantumtérelméleti szóhasználat („ellentag”) azért is indokolt, mert a sebességfüggő kölcsönhatás általában $O(\hbar)$ ultraibolya divergenciákat okoz a Schrödinger-Rayleigh perturbációszámításban.

Az (E.30) kvantummechanikai Ito-integrál sajátos tulajdonságát és az ennek következtében fellépő anomáliát a perturbációszámítás segítségével is levezethetjük. Ekkor olyan közbenső állapotokra való integrálokat találunk, amelyek integrandusaiban a $\Delta t \rightarrow 0$ limeszt az integrálás *után* kell elvégezni. Ezért tűnnek fel a klasszikus, azaz az integrálás *előtt* végrehajtott határérték-képzés eredményéhez képest új tagok. Vegyük észre, hogy a Δt paraméter az ultraibolya energia-levágás szerepét játssza a kvantummechanikában, hiszen a Schrödinger egyenletet valójában, mint a $\Delta t \rightarrow 0$ limeszben értelmezett, az időben véges differencia egyenletként származtatjuk. A levágás eltávolítása azonban még sebességfüggő kölcsönhatás hiányában, ultraibolya véges kvantumrendszerek esetén is, a klasszikus fizika szerint nem értelmezhető, anomális járulékokat hagy maga után a propagálás szinguláris viselkedése miatt.

E.5. A kvantumtérelmélet

A szinguláris kvantum-propagálás drámaibb következményekkel jár a másodkvantált elméletekben, mint a kvantummechanikában. Ennek megvilágítására a kvantumtérelméletnek a kvantummechanikához közelebb álló formalizmusát, a D függelékben bevezetett funkcionális Schrödinger reprezentációt fogjuk használni.

Induljunk ki a

$$H = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \pi^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\partial_j \phi(\mathbf{x}))^2 + V(\phi(\mathbf{x})) \right] \quad (\text{E.35})$$

Hamilton-operátorral jellemzett elméletből, amelynek időfejlesztő operátora

$$U(t) = e^{-itH}. \quad (\text{E.36})$$

A rövid idő alatt lezajló folyamatok szempontjából a potenciális energia elhanyagolható a kinetikus taghoz képest, így a $t \rightarrow 0$ limeszben a térmennyiség dinamikájára a $V(\phi) = 0$ közelítést alkalmazzuk. A Hamilton-operátort a (D.14) rácsközelítéssel helyettesítjük, amelynek a rácsállandóját választjuk az időfejlődés diszkrét lépésének. Az $U(a)$ időfejlesztő operátornak a térmennyiség sajátállapotai közti mátrixelemét a kvantummechanikai analógia alapján az $a\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} < 1$ normálmódusok (G.14) progatátorát használva, majd az \mathbf{n} koordinátákra visszatérve, $d = 3$ -ra a

$$\langle \phi_{rf}(\mathbf{n}) | e^{-iaH} | \phi_{ri}(\mathbf{n}) \rangle = \mathcal{N}^{-1} e^{\frac{i}{2} \sum_{\mathbf{n}} [(\phi_{rf}(\mathbf{n}) - \phi_{ri}(\mathbf{n}))^2 - (\phi_{rf}(\mathbf{n} + \hat{j}) - \phi_{rf}(\mathbf{n}))^2]} \quad (\text{E.37})$$

alakban kapjuk meg, ami a folytonos határesetben a

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \phi_f(\mathbf{x}) | e^{-i\Delta t H} | \phi_i(\mathbf{x}) \rangle = \mathcal{N}^{-1} e^{\frac{i}{2}\Delta t} \int d\mathbf{x} [(\frac{\phi_f(\mathbf{x}) - \phi_i(\mathbf{x})}{\Delta t})^2 - (\partial_j \phi_f(\mathbf{x}))^2] \quad (\text{E.38})$$

eredményt adja.

Feladat. Ellenőrizze, hogy az (E.38) propagátor kielégíti az

$$i\partial_t \langle \phi(\mathbf{x}) | e^{-itH} | \phi_i(\mathbf{x}) \rangle = \int d\mathbf{x} \left[-\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta \phi^2(\mathbf{x})} + \frac{1}{2} (\partial_j \phi(\mathbf{x}))^2 \right] \times \langle \phi(\mathbf{x}) | e^{-i\Delta t H} | \phi_i(\mathbf{x}) \rangle \quad (\text{E.39})$$

funkcionális Schrödinger-egyenletet. ■

Az (E.37) regularizált kifejezésből leolvashatjuk, hogy az $a \rightarrow 0$ határesetben a térmennyiség nem folytonos,

$$\lim_{a \rightarrow 0} (\phi_{rf}(\mathbf{n}) - \phi_{ri}(\mathbf{n}))^2 = \lim_{a \rightarrow 0} (\phi_{rf}(\mathbf{n} + \hat{j}) - \phi_{rf}(\mathbf{n}))^2 = O(a^0). \quad (\text{E.40})$$

Ez azt jelenti, hogy az eredeti, dimenziós térmennyiség végtelen nagy szakadásokkal rendelkezik,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle (\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x))^2 \rangle = O(a^{-2}). \quad (\text{E.41})$$

Belátható, hogy a perturbációs számításban felbukkanó ultraibolya divergenciáknak a tér-idő koordináták szerinti Fourier-transzformáltja éppen ezt a szingularitást jelzi.

Az ultraibolya levágás eltávolítása során, azaz az $a \rightarrow 0$ határesetben az

$$A = \int dx \mathcal{A}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (\text{E.42})$$

fizikai mennyiségek integráljaiban előforduló $\phi(x)$ belső térbeli koordináta az x függvényében végtelen nagy szakadásokkal rendelkezik. Így (E.42) a Riemann-integráltól az Ito-integrálnál radikálisabban eltérő, de egyelőre még nem ismert integrált tartalmaz. Az ezzel kapcsolatos problémákat még akkor sem kerülhetjük el, ha nem hajtunk végre nem-lineáris transzformációkat a $\phi(x)$ térmennyiségen, mert a deriváltak erősen divergálnak. Ezért a másodkvantált elméletek regularizálása és renormalizálása elkerülhetetlen².

²Érdeemes megjegyezni, hogy sebességfüggő kölcsönhatás esetén, mint például inhomogén mágneses térben mozgó elektrónra, az első kvantált rendszerek perturbációs számításában is divergenciák lépnek fel és hasonló lépésekre van szükség.

A nem-ábeli mértékelméletekben egy további komplikációval kell szembenéznünk, nevezetesen azzal, hogy a perturbációs számítás alkalmazása során az általánosított koordináták nem-lineáris transzformációja elkerülhetetlenné válik. A probléma a mértékrögzítésből fakad, ami az egyszerűség kedvéért legyen most a

$$\partial_\mu A_\mu = 0, \quad (\text{E.43})$$

feltétel. Ezt a feltételt egy, az általánosított koordinátatérbeli görbevonalú koordinátarendszer bevezetésével oldjuk meg. Egy tetszőleges $A_\mu(x)$ térkonfigurációt egy $\omega(x)$ mértéktranszformáció 3.1.2. alfejezetben tárgyalt végrehajtásával az (E.43) feltételt kielégítő alakra hozunk³. Az így definiált $\omega(x)$ mértéktranszformáció és az eredményül kapott, az adott mértékfeltételt kielégítő konfigurációban megmaradt \mathcal{Q} szabadságfokok együttese szolgáltatja a keresett $A_\mu(x) \rightarrow \{\mathcal{Q}, \omega(x)\}$ általánosított koordinátatranszformációt. Mivel a nem-ábeli mértéktranszformáció nem-lineáris $\omega(x)$ -ben, az új koordináták nem-lineáris módon képződnek. A mértékrögzítés annak felel meg, hogy a fizikai állapotok $\Psi[A_\mu]$ hullámfunkcionálját faktorizáljuk a mértékfüggő és a mértékfüggetlen változókban, $\Psi[A_\mu] = \chi[\omega]\phi[\mathcal{Q}]$ és az (E.43) alapján $\chi[\omega]$ -t lokalizáljuk,

$$\chi[\omega(x)] = \prod_x \delta(\omega(x) - \omega_0). \quad (\text{E.44})$$

Az (E.43) egyenlet lineáris a mértéktérben, ami lehetővé teszi, hogy egyszerű módon megtaláljuk a szóbanforgó nem-lineáris koordinátatranszformációhoz tartozó korrekciós tagokat. Eredményül egy $O(\hbar)$ Ito-potenciál adódik, amit a Faggyejev-Popov szellemterek bevezetésével szokás a perturbációs számítás szempontjából hasznosítható alakra hozni.

E.6. A mozgásegyenlet

A kvantum propagálás szingularitása nem csak a nem-lineáris transzformációk során vezet anomáliához, hanem az időfüggést meghatározó, az időderiváltat tartalmazó összefüggések esetén is. Ezt a mozgásegyenlet példáján fogjuk megmutatni. Az ilyen jellegű anomáliák abban különböznek az fentebb bemutatott, a nem-lineáris transzformációkra visszavezethető kvantum korrekcióktól, hogy azonosak kvantummechanikában

³Itt jegyezzük meg, hogy $\omega(x)$ csupán az $A_\mu(x) = o(x^{-1})$ aszimptotikus viselkedést mutató térkonfigurációkra határozódik meg egyértelműen. Az ennél lassabban lecsengő mértéktérkonfigurációkra az (E.43) mértékrögzítés nem egyértelmű és az ú.n. Gribov-másolatok jelennek meg a fizikai állapotterben. Az ilyen hosszú hatótávolságú konfigurációk, melyek az elmélet félklasszikus tárgyalásában jelennek meg a nem-ábeli mértékterek kanonikus kvantálását a perturbatív közelítés alkalmazhatósági területére szűkítik le. A nem-perturbatív kiterjesztés jelenleg csak a R. Feynman által kidolgozott pályaintegrál módszere segítségével lehetséges.

és a kvantumtérelméletben, valamint ez utóbbi esetében a tér-idő dimenziójától sem függenek. Az anomália arra vezethető vissza, hogy a kvantummechanika azon operátoregyenletei, amelyek az operátorok időderiváltját is tartalmazzák, minden alkalommal időrendezett szorzat formájában állnak elő. Ezt a C függelékben a Dirac reprezentációban felírt szórás mátrix esetére be is mutattuk. Az időrendezett szorzat azonban a reprezentáció megválasztásától és a perturbációs számítás alkalmazásától függetlenül is minden alkalommal megjelenik az időfejlődést tartalmazó operátoregyenletekben. Ennek oka az, hogy a későbbi időpontban ható operátorok szükségszerűen a korábbi időértékhez tartozó operátorok után hatnak az állapotokon.

Induljunk ki a (C.6) mozgásegyenletből, amely a

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x}) \quad (\text{E.45})$$

Hamilton-operátorral leírt rendszer esetén az

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{p}}(t) &\equiv \dot{\mathbf{p}}(t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}(t)) = 0 \\ E_{\mathbf{x}}(t) &\equiv m\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{p}(t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{E.46})$$

egyenlet-párhoz vezet, ahol

$$\dot{A}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t}. \quad (\text{E.47})$$

Innen már csak egy lépés az

$$E(t) \equiv \ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} V(\mathbf{x}(t)) = 0 \quad (\text{E.48})$$

mozgásegyenlet. Meglepőnek tűnik, de ezek az egyenletek nem állnak fenn az időrendezett szorzatokra. Pontosabban szólva, az $E(t)$, $E_{\mathbf{x}}(t)$, $E_{\mathbf{p}}(t)$ operátorokat a $T[O(t_1) \cdots O(t_n)]$ időrendezett szorzatba beillesztve nem minden esetben kapunk zérus eredményt,

$$T[O(t_1) \cdots O(t_n)E(t)] \neq 0, \quad (\text{E.49})$$

stb. mert a t időben felírt mozgásegyenletben fellépő idő szerinti derivált tartalmaz dinamikai változókat a $t \pm \Delta t$ időpontokban is. Ezt formálisan úgy is megfogalmazhatjuk, hogy nem mindegy, hogy az időderivált az időrendezett szorzaton kívül, vagy pedig belül hat,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_A} T[A(t_A)B(t_B)] &= \frac{d}{dt_A} \left(\Theta(t_A - t_B) A(t_A) B(t_B) \right. \\ &\quad \left. + \Theta(t_B - t_A) B(t_B) A(t_A) \right) \end{aligned}$$

$$= T \left[\frac{d}{dt_A} A(t_A) B(t_B) \right] + \delta(t_A - t_B) [A(t_A), B(t_B)]. \quad (\text{E.50})$$

Mivel a mozgásegyenlet operátora szükségképpen tartalmaz időderiváltat, az időrendezett szorzatba való beillesztése anomális, a kommutátort tartalmazó $O(\hbar)$ korrekciót von maga után.

Feladat. *Bizonyítsa be a következő összefüggéseket:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_p} T[p_k(t_p) x_{\ell_1}(t_1) \cdots x_{\ell_n}(t_n)] &= T[\dot{p}_k(t_p) x_{\ell_1}(t_1) \cdots x_{\ell_n}(t_n)] \\ &\quad - i\hbar \sum_{j=1}^n \delta(t_j - t_p) \delta_{k, \ell_j} T[x_{\ell_1}(t_1) \cdots \hat{x}_{\ell_j}(t_j) \cdots x_{\ell_n}(t_n)], \\ \frac{d}{dt_x} T[x_k(t_x) p_{\ell_1}(t_1) \cdots p_{\ell_n}(t_n)] &= T[\dot{x}_k(t_x) p_{\ell_1}(t_1) \cdots p_{\ell_n}(t_n)] \\ &\quad + i\hbar \sum_{j=1}^n \delta(t_j - t_x) \delta_{k, \ell_j} T[p_{\ell_1}(t_1) \cdots \hat{p}_{\ell_j}(t_j) \cdots p_{\ell_n}(t_n)], \\ \frac{d}{dt_A} T[A_k(t_A) B(t_1) \cdots B_n(t_n)] &= T[\dot{A}(t_A) B_1(t_1) \cdots B_n(t_n)] \\ &\quad - i\hbar \sum_{j=1}^n \delta(t_j - t_A) [A(t_A), B_j(t_j)] T[A_1(t_1) \cdots \hat{B}_j(t_j) \cdots B_n(t_n)] \end{aligned} \quad (\text{E.51})$$

ahol a kalap a $\hat{p}_{\ell_j}(t_j)$ és a $\hat{B}_j(t_j)$ operátoron azt jelenti, hogy az a tag hiányzik a szorzatból. ■

Egy $Q(t)$ mennyiségre fenálló klasszikus megmaradási tétel,

$$\frac{d}{dt} Q(t) = 0 \quad (\text{E.52})$$

természetes módon időderiváltat tartalmaz. A mozgásegyenletekhez hasonlóan a megmaradási tételek esetleges kvantumós sérüléseit is könnyen észrevehetjük, hiszen az (E.52) egyszerű és egzakt összefüggés⁴. Vegyük észre, hogy a kvantumtérelméletben az egyidejű kommutátorokról nemcsak azt tudjuk, hogy $O(\hbar)$ nagyságrendűek, hanem azt is, hogy a koordináta térben lokalizáltak, hiszen a térmennyiség bármely tér-időben lokális A és B függvényére teljesül a

$$\delta(t_A - t_B) [A(\mathbf{x}_A, t_A), B(\mathbf{x}_B, t_B)] = \delta(t_A - t_B) \delta^{(3)}(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B) C(t_A, \mathbf{x}_A) \quad (\text{E.53})$$

egyidejű kommutátor, ahol C szintén a térmennyiségnek egy lokális kifejezése.

⁴Az (E.52) megmaradási tételből az előző feladathoz hasonlóan levezethető, az időrendezett szorzatokat tartalmazó összefüggéseket a kvantumtérelméletben Ward-azonosságoknak nevezik.

E.7. A renormalizációs csoport

Az időrendezett szorzatokra definiált operátor-algebra tehát számos eltérést, anomáliát tartalmaz a klasszikus egyenletekhez képest a levágás körüli szinguláris viselkedés miatt. Mely eltérések okoznak véges, a levágástól független energiatartományban megjelenő módosítást a dinamikában?

Mint láttuk, a levágás bevezetése még az ultraibolya véges kvantummechanikában is megtörténik és eltávolítása nem mindig marad nyomtalan. Az ultraibolya divergenciák jobban hangsúlyozzák a levágási effektusok fontosságát. A továbbiakban olyan jelenségekről lesz szó, amelyet a levágás okoz, potosabban szólva olyan szimmetriákról, amelyet a levágás szükségszerűen megsért és amelyet a renormalizáció során se nyerünk vissza.

A renormalizációs csoport módszerével az elmélet operátorait azok alacsony energiás hatásai alapján osztályozzuk. A releváns vagy marginális operátorok, melyeket renormalizálhatónak neveztünk, azok, amelyek alacsonyabb energia felé haladva egyre fontosabb hatást fejtenek ki. Az irreleváns operátorok pedig elhanyagolható módon befolyásolják a levágástól független, véges energiájú dinamikát. Tegyük fel, hogy a mozgásegyenletek és a szimmetriák segítségével az

$$E_\alpha[\pi(x), \phi(x)] = 0 \quad (\text{E.54})$$

$\alpha = 1, 2, \dots$ klasszikus egyenleteket vezethetjük le. Az anomália azt jelenti, hogy ezek az egyenletek nem állnak fent az időrendezett szorzat segítségével bevezetett algebrában. Ennek következményét úgy fogjuk felmérni, hogy a kérdéses mennyiségeket hozzáadjuk az eredeti Hamilton-sűrűséghez,

$$H \rightarrow H_g = H + \sum_\alpha g_\alpha \int d\mathbf{x} E_\alpha[\pi(x), \phi(x)]. \quad (\text{E.55})$$

Ha (E.54) valódi operátor-egyenlet lenne, akkor H_g g_α -tól független volna. Tehát a g_α -függés teljesen az anomáliából, az ultraibolya tartományból származik, és renormalizálható g_α csatolási állandó esetén véges energián is észlelhető.

E.8. A skála anomália

Induljunk ki a skalár elmélet

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow e^{-\epsilon} x^\mu, \\ \phi(x) &\longrightarrow e^\epsilon \phi(e^\epsilon x) \end{aligned} \quad (\text{E.56})$$

dilatációs (nyújtási) transzformációjából. Az ehhez tartozó Noether-áram

$$J_D^\mu = \phi \frac{\delta L}{\delta \partial_\mu \phi} + x^\nu T_{\nu\mu}. \quad (\text{E.57})$$

A kanonikus csererelációk segítségével könnyen ellenőrizhető, hogy az (E.56) transzformáció generátora

$$D = \int d\mathbf{x} J_D^0 = \int d\mathbf{x} (\phi(x)\pi(x) + x^\nu T_{0\nu}). \quad (\text{E.58})$$

A J_D^μ áram megmaradó a klasszikusan skála-invariáns elméletben és ezzel összhangban a mozgásegyenlet segítségével

$$\partial_\mu J_D^\mu = m^2 \phi^2 \quad (\text{E.59})$$

adódik (a tömeg bevezetése skálát hoz be, amely sérti a skálainvarianciát).

Tekintsük az

$$E_s(x) = \partial_\mu J_D^\mu(x) - m^2 \phi^2(x) \quad (\text{E.60})$$

renormalizálható operátort. A klasszikus elméletben elvégzett variációszámítás az

$$E_s(x) = 0 \quad (\text{E.61})$$

egyenletet eredményezi. A kvantumelméletben egy újabb dimenziós paraméter, a levágás jelenik meg, amely ennek a dimenzió-analízissel levezetett egyenletnek a változásához vezet. Ez a változás naívan csak az ultraibolya tartományban, a levágás közelében tűnik fontosnak. De $E_s(x)$ releváns operátor, az ultraibolya tartományban kifejtett anomális hatása csak erősödik az alacsonyabb, véges energiájú tartományok felé haladva. A részletes perturbatív analízis $E_s(x)$ -re \hbar -sal arányos eredményre vezet. Tehát az ultraibolya tartomány szingularitásai, amelyek a levágás bevezetését vonják maguk után úgy módosítják az elmélet skálafüggését, hogy az a véges energiájú tartományban is érezhető marad. Mindez történik annak ellenére, hogy a levágással a végtelenbe tartunk, hiszen az (E.55) által megadott rendszer véges energiájú dinamikája g_α -függő. Az skálafüggés ilyen anomáliája, amely a 7.2.8. fejezetben bemutatott dimenzionális transzmutációként is megjelenhet, minden ultraibolya divergenciával rendelkező kvantumtérelméletben megtalálható.

E.9. A királis anomália

Tekintsük a másod-kvantált $\psi(x)$ elektron-teret egy külső, $A_\mu(x)$ vektorpotenciál háttér jelenlétében. Az elektron térmennyiség

$$\begin{aligned} J_V^\mu &= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \\ J_A^\mu &= \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi \end{aligned} \quad (\text{E.62})$$

áramaira az

$$L = \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - M] \psi \quad (\text{E.63})$$

Lagrange-sűrűség alapján levezethető klasszikus áram-divergenciák a következők:

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_V^\mu &= 0, \\ \partial_\mu J_A^\mu &= 2i\bar{\psi} M \gamma_5 \psi \end{aligned} \quad (\text{E.64})$$

Ezek az egyenlőségek sérülnek az ultraibolya divergenciák következtében. Mivel ezek a megmaradási tételek renormalizálható operátort tartalmaznak, a sérülés hatása alacsony energián is észlelhető. Ezt a mechanizmust a következő módon érthetjük meg egyszerűbben.

Induljunk az $M = 0$, tömegtelen elektronok esetéből, amelyekre ható külső foton-tér eltűnik negatív t -re. A jobb- és balkezes állapotok nem hatnak kölcsön és a $t < 0$ idejű vákuumot a negatív energiájú síkhullámokhoz tartozó állapotok betöltésével kapjuk meg. Mivel ugyanannyi jobb- és balkezes állapot van a Dirac-tengerben, a Q_5 királis töltés, amely a jobb- és a balkezes fermionok számának a különbsége a vákuumban, zérus. Tegyük fel, hogy a külső foton-tér olyan időfüggéssel rendelkezik, hogy $0 < t < \tau$ időpontokban gyenge homogén mágneses térünk van.

Feladat.

1. Ellenőrizze, hogy a H homogén mágneses térben lévő elektron spektruma az

$$(E_\pm(n, p_3))^2 = p_3^2 + (2n + 1)eH \pm eH \quad (\text{E.65})$$

egyenletnek tesz eleget, ahol p_3 az elektron impulzusának vetülete a mágneses tér irányára és n egy természetes szám (Landau-szintek).

2. A \pm előjel az elektron spin vetületének előjele a mágneses tér irányához viszonyítva. Mutassa meg, hogy ez megegyezik az elektron állapotának kiralitásával.

■

Tehát a jobb- és balkezes elektronok energiáját a mágneses tér a

$$H_m = -\mu \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{E.66})$$

csatolás segítségével ellenkező előjellel módosítja. Így a jobb és a balkezes negatív energiájú Dirac-tenger nem lesz degenerált, az egyik energia szintjei felfelé, a másiké pedig lefelé mozdulnak el. Válasszuk úgy a mágneses teret, hogy N jobbkezes állapot jelenjen meg pozitív energiával. Ugyanennyi állapottal lejjebb csúszik a balkezes elektronok Dirac-tengere. Természetesen a királis szimmetria továbbra is fennáll, a $Q_5 = 0$ királis töltés nem változik.

Ez az eredmény azonban azt feltételezi, hogy a Dirac-tenger végtelen mély, azaz bármelyik állapot szabadon csökkentheti az energiáját. Azonban a kvantum propagálásból fakadó ultraibolya divergenciákat a regularizáció és az azt követő renormalizáció segítségével távolítjuk el. Alkalmazzuk az energiában való levágást, mint regularizációt, azaz csak a $[-\Lambda, \Lambda]$ energia tartományba eső elektronállapotokat tartjuk meg. Ekkor a Dirac-tengerben csupán az $E > -\Lambda$ energiájú állapotokat találjuk meg. Az ezt követő renormalizáció, azaz az ellentagok bevezetése végessé teszi az elméletet és a közbenső állapotokra vett összegzés konvergense válik az ultraibolya tartományban, miközben $\Lambda \rightarrow \infty$. Ezt a konvergenciát tehát az ultraibolya tartomány járulékaiknak kellően erős elnyomásával biztosíthatjuk.

Figyeljük meg, hogy a $t < 0$ idejű $|0^-\rangle$ vákuum állapot nem a $t > \tau$ $|0^{+\tau}\rangle$ vákuumba fejlődik. Valóban, az utóbbi a negatív energiájú állapotok feltöltésével nyert Dirac-tenger, amelynek zérus a királis töltése. Ehhez képest $|0^-\rangle$ egy magasabb energiájú állapot. Különbözik-e $|0^-\rangle$ és $|0^{+\tau}\rangle$ a királis töltés szempontjából? Formálisan nem, hiszen a mágneses térhez való csatolás királisan invariáns. Azonban

$$Q_5|0^{+\tau}\rangle = 0 \quad (\text{E.67})$$

csak úgy kapható meg, ha feltételezzük, hogy a Dirac-tenger felszínén, az infravörös tartományban megfigyelhető töltéshozam a Dirac-tenger fenekén, az ultraibolya tartományban egy ellentétes folyamattal kompenzálódik. Azonban a renormalizáció elnyomja az ultraibolya tartomány járulékát és ez a kompenzáció nem jelenik meg a fizikai mennyiségekben, azaz

$$Q_5|0^{+\tau}\rangle = 2N|0^{+\tau}\rangle. \quad (\text{E.68})$$

Ezzel a királis töltés megmaradása „anomális” módon sérül. Az ultraibolya tartományban fellépő levágás okozta effektus a Dirac-tenger feltöltése következtében vezet véges energiájú fizikai jelenséghez.

Az időfüggő külső mágneses tér elektromos teret is indukál. Így nem annyira meglepő a perturbációszámítás segítségével levezethető

$$\partial_\mu J_A^\mu = 2iM \langle \bar{\psi} \gamma_5 \psi \rangle - \frac{i}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (\text{E.69})$$

"anomália" egyenlet, ahol nemrelativisztikus jelöléssel

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (\text{E.70})$$

Az (E.69) egyenlet jobboldalának első tagja a királis szimmetriának az elektron nullától különböző tömegéből fakadó sértését tükrözi, a második

tag pedig a vákuum járuléka. A

$$H \rightarrow H_g = H + g_\chi \int d\mathbf{x} (\partial_\mu J_A^\mu - iM \langle \bar{\psi} \gamma_5 \psi \rangle) \quad (\text{E.71})$$

Hamilton operátor által meghatározott dinamika érzékenyen reagál g_χ megválasztására, hiszen $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$ a kvantumelektrodinamika renormalizálható, pszeudoskalár operátora, így az $M = 0$ esetben a klasszikus szinten megfigyelhető királis szimmetriát az ultraibolya kvantum-fluktuációk az infravörös tartományban érezhető módon sértik.

F függelék

A Feynman propagátor

Ebben a függelékben a perturbációszámításnál használt Feynman propagátort vezetjük be. Miután a perturbációszámítás alapján a propagátort a szabad rendszerből származtatjuk, csupán szabad terekre szorítkozunk. Ebben a függelékben a skalár tér esetét részletesen tárgyaljuk, az elektrodinamika propagátorait a 3.7.1. és a 3.7.2. alfejezetekben ismertetjük.

A skalár térelméletet

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \quad (\text{F.1})$$

Lagrange-sűrűség jellemzi. Első lépésként megmutatjuk, hogy az

$$T[\phi(x)\phi(y)] = \Theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \Theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) \quad (\text{F.2})$$

operátor valójában egy komplex szám-függvény, mely a következő egyenletnek tesz eleget:

$$(\partial^2 + m^2)iT[\phi(x)\phi(y)] = \delta^4(x - y). \quad (\text{F.3})$$

Ebben az egyenletben az időrendezett T szorzat a térkoordináták szerinti deriválást nem befolyásolja, csupán az időderiválást teszi bonyolulttá:

$$\begin{aligned} \partial_{x^0}^2 T[\phi(x)\phi(y)] &= \partial_{x^0}^2 \left(\Theta(x^0 - y^0)\phi(x)\phi(y) + \Theta(y^0 - x^0)\phi(y)\phi(x) \right) \\ &= \partial_{x^0} \left(\Theta(x^0 - y^0)\partial_{x^0}\phi(x)\phi(y) \right. \\ &\quad \left. + \Theta(y^0 - x^0)\phi(y)\partial_{x^0}\phi(x) \right. \\ &\quad \left. + \delta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)] \right). \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Az utolsó tag eltűnik a kanonikus koordináták azonos időbeli

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = 0 \quad (\text{F.5})$$

felcserélhetősége miatt. A maradékot tovább egyszerűsítve

$$\begin{aligned} \partial_{x^0}^2 T[\phi(x)\phi(y)] &= \Theta(x^0 - y^0) \partial_{x^0}^2 \phi(x)\phi(y) \\ &\quad + \Theta(y^0 - x^0) \phi(y) \partial_{x^0}^2 \phi(x) \\ &\quad + \delta(x^0 - y^0) [\partial_{x^0} \phi(x), \phi(y)] \\ &= T[\partial_{x^0}^2 \phi(x)\phi(y)] - i\delta^4(x - y), \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

adódik a

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{y})] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{F.7})$$

kanonikus kommutációs reláció alapján, ahol $\pi(x) = \partial_0 \phi(x)$. A

$$(\partial_0^2 - \partial_i^2 + m^2)\phi(x) = 0 \quad (\text{F.8})$$

mozgásegyenletből

$$\partial_0^2 \phi(x) = (-m^2 + \partial_i^2)\phi(x), \quad (\text{F.9})$$

amit (F.6)-be behelyettesítve a

$$\partial_{x^0}^2 T[\phi(x)\phi(y)] = T[(\partial_i^2 - m^2)\phi(x)\phi(y)] - i\delta^4(x - y) \quad (\text{F.10})$$

egyenletet eredményezi. Az $(m^2 - \partial_i^2)$ faktort a T-szorzatból kiemelve, megkapjuk az (F.3) egyenletet. Cseréljük ki a tömeg-négyzetet az $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$ infinitezimális képzetes részt tartalmazó mennyiségre. Ezt az előírást azért alkalmazzuk, hogy a $\partial^2 + m^2$ Klein-Gordon operátor inverzét egyértelműen definiáljuk. Ekkor (F.3) megoldható,

$$iT[\phi(x)\phi(y)] = \frac{1}{\partial_\mu^2 + m^2 - i\epsilon} \delta^4(x - y), \quad (\text{F.11})$$

bizonyítva, hogy $iT[\phi(x)\phi(y)]$ szám, pontosabban disztribúció, nem pedig operátor. Az

$$iG(x, y) = iT[\phi(x)\phi(y)] = i\langle 0|T[\phi(x)\phi(y)]|0\rangle \quad (\text{F.12})$$

mennyiséget propagátornak hívják. (Egyezményesen a vákuum állapotban vett mátrixelemmel szokás a függvény-jelleget hangsúlyozni.)

A propagátor, a mozgásegyenlet Green-függvényét leíró

$$G(x, y) = -\frac{i}{\partial^2 + m^2} \delta^4(x - y) \quad (\text{F.13})$$

kifejezés nem egyértelműen definiált a Klein-Gordon operátor zérus módusai miatt. A zérus módusok éppen a klasszikus síkhullám megoldásai a Klein-Gordon egyenletnek:

$$\phi(x) = e^{-ipx}, \quad p^2 = m^2, \quad (\text{F.14})$$

így nyilvánvalóan különleges gondot kell a velük kapcsolatos probléma megoldására fordítani. A síkhullámok a rendszer aszimptotikus $t \rightarrow \pm\infty$ állapotait jellemzik, tehát a velük kapcsolatos megfontolás a $t \rightarrow \pm\infty$ határfeltétellel kapcsolatos.

Ha egy térfogatelemet a $t \rightarrow \infty$ határesetben vizsgálunk, az abban eredetileg található gerjesztések részecskék formájában szétsugárzódnak. A termodinamikai végtelen térfogat határesetben eltekinthetünk a részecskéknek a térfogat határáról való visszatérésétől. Így a $t \rightarrow \infty$ határfeltételnek az összes gerjesztés, részecske eltűnését szabjuk meg. Ez a probléma annyira fontos, hogy érdemes két, egymástól kissé különböző érvelést is bemutatni a megoldására. Az egyszerűbb módszer arra a megjegyzésre alapul, hogy az

$$m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon \quad (\text{F.15})$$

negatív infitezimális képzetes rész bevezetése a tömeg négyzetében kiküszöböli a részecske állapotokat a $t \rightarrow \infty$ határesetben. Hogy ezt megértjük, induljunk ki az

$$U(t) = e^{-itH} \quad (\text{F.16})$$

időfejllesztő operátorból szabad részecskékre, ahol a Hamilton-operátor sajátértékei az $E(\mathbf{p}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ típusú egyrészecskés gerjesztési energiák összege. Az (F.15) módosítás következtében $E(\mathbf{p})$ és ezzel együtt a Hamilton-operátor nem-zérus sajátértékei negatív infitezimális képzetes részt kapnak és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat $U(\infty)$ elnyomja.

Egy formálisabb, de bevilágító gondolatmenet alapján a valós időben lezajló kvantum folyamatokat a képzetes időre alapozott formalizmusból való analitikus kiterjesztéssel kívánjuk definiálni. Ezt a szokatlan ötletet az a megfigyelés sugallja, hogy az $U(t)$ időfejllesztő operátor képzetes idejű analitikus elfolytatása, $U_E(t) = U(-it) = e^{-iH/\hbar}$ az összes gerjesztett állapotot eltünteti a $t \rightarrow \infty$ határesetben, ha az alapállapot energiáját nullában rögzítjük. Mivel az invariáns skalárszorzat $x \cdot p$ komplikált, nehezen követhető függvényeken keresztül jelenik meg, érdemes az idő analitikus kiterjesztését az energia hasonló elfolytatásával együtt végezni oly módon, hogy a skalárszorzat ne változzék. A $t \rightarrow -it$ és az $E \rightarrow -iE$ Wick-forgatás együttese épp ezt éri el, miközben az $x \cdot p = x^0 p^0 - x^i p^i$ Minkowski metrika a $-x \cdot p_E = -(x^0 p^0 + x^i p^i)$ euklideszi metrikára változik. Az euklideszi tér-időben nincsen a Klein-Gordon egyenletnek korlátos, fizikailag elfogadható megoldása, aminek az felel meg, hogy a

$$G_E(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)_E}}{p_E^2 + m^2} \quad (\text{F.17})$$

euklideszi propagátorban előforduló nevező sohasem tűnik el. A $t \rightarrow it$, $p^0 \rightarrow ip^0$ analitikus elfolytatás után kapott integrandusnak pólusai van-

nak a $p^0 = \pm\omega(\mathbf{p})$ tömeghéjon. Az energia integrációs kontúrjának deformációja következtében a pozitív energiájú pólust felfelé, a negatív energiájút pedig lefelé kerüljük meg a komplex energia síkon. Könnyű belátni, hogy az (F.15) tömeggel definiált Minkowski térídejű propagátor is épp így kerüli meg a pólusokat, aminek következtében $G(x, y) = iG_E(ix^0, \mathbf{x}, iy^0, \mathbf{y})$.

Továbbiakban a fenti módszerrel meghatározzuk az általános Lorentz mértékbeli relativisztikus foton propagátort.

Az (3.229) mértékfeltétellel kiegészített Lagrange-függvényből a

$$\square A^\mu - (1 - \lambda)\partial^\mu\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (\text{F.18})$$

mozgásegyenlet következik. Ezt kihasználva, a skalártérre bemutatott eljárással a fototér propagátorára a következő egyenletet nyerjük:

$$\left[\square_x g_\rho^\mu - (1 - \lambda)\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x^\rho} \right] \langle 0|T[A^\rho(x)A^\nu(y)]|0\rangle = ig^{\mu\nu}\delta^{(4)}(x - y). \quad (\text{F.19})$$

Ezt az egyenletet Fourier-transzformációval oldjuk meg. Formálisan a megoldásra a

$$\langle 0|T[A^\mu(x)A^\nu(y)]|0\rangle = -i \int \frac{d^k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[\frac{g^{\mu\nu}}{k^2} + \frac{1 - \lambda}{\lambda} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2)^2} \right] \quad (\text{F.20})$$

kifejezést kapjuk. Ha a k_0 integrált Minkowski téridőben kívánjuk elvégezni, akkor az integrálás tartományában $k_0 = \pm|k|$ -nál pólust találunk. Ezért az integrálnak a pólusok k_0 komplex síkbeli megkerülését előírva adhatunk értelmet. Feynman nyomán a fotonpropagátor Fourier előállítását a $k^2 \rightarrow k^2 + i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) előírással értelmezzük.

Az integrandus átcsoportosítható egy, a k_μ térben transzverzális és egy longitudinális tag összegére. Bevezetve a

$$T^{\mu\nu}(k) = g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}, \quad L^{\mu\nu}(k) = \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \quad (\text{F.21})$$

négyesimpulzus térbeli projektor tenzorokat, a propagátor kifejezésére a

$$\langle 0|T[A^\mu(x)A^\nu(y)]|0\rangle = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \frac{1}{k^2} \left[T^{\mu\nu}(k) + \frac{1}{\lambda} L^{\mu\nu}(k) \right] \quad (\text{F.22})$$

alakot kapjuk. Látható, hogy csak a longitudinális rész függ az önkényesen választható λ paramétertől. Nyilván semmilyen fizikai eredmény nem függhet λ értékétől.

G függelék

Az aszimptotikus szabadság

Ebben a függelékben a négydimenziós nem-ábeli mértékelméletek aszimptotikus szabadságát mutatjuk meg: kiszámoljuk a kölcsönhatás erősségét jellemző futó csatolási állandót, ami a nagyenergiás tartományban nullához tart. Megemlítettük a 7.1.2. fejezetben, hogy a csupasz csatolási állandó felfogható, mint a futó csatolási állandó az ultrabolya tartományban, a levágás közelében. Ezt a hasonlóságot kihasználva azt fogjuk bemutatni, hogy a csupasz csatolási állandót a (7.11) összefüggésnek megfelelő módon kell nullához tartatni miközben a levágást eltávolítjuk, hogy a levágási skálához képest infravörös, alacsonyfrekvenciás skálán a fizikai mennyiségek változatlanul maradjanak.

Egy szórási folyamat energiáját az aszimptotikus állapotok energiája adja meg. Feltételezve, hogy a szórásamplitudó hasonló módon függ a szórási folyamatoknak esetleges további energia dimenziójú paramétereitől, egy külső forrás által létrehozott tér jelenlétében fogjuk a szórási folyamatokat megvizsgálni. Hogy a párkeltést, ami a külső teret azonnal leárnyékolja, elkerüljük, egy \mathbf{H}^a homogén makroszkópikus színmágneses teret vezetünk be és az annak jelenlétében kialakuló $g(H)$ futó csatolási állandót fogjuk meghatározni. Mivel a mágneses tér energianégyzet dimenziójú, a H -t E^2 -tel helyettesítve kapott $g(E^2)$ függvény a csatolási állandó energiafüggését mutatja.

G.1. A futó csatolási állandó

Tekintsük az $SU(2)$ mértékelméletben, az egyszerűség kedvéért fermionok nélkül, egy adott, külső, homogén \mathbf{H}^a színmágneses tér jelenlétében a

$$Z(H) = \text{Tr} e^{-\frac{i}{\hbar} T \hat{H}(H)} \quad (\text{G.1})$$

mennyiséget, ahol $\hat{H}(H)$ a mértékelmélet Hamilton operátora.

Mivel a (3.84) energia sűrűség

$$E_{pot} = \frac{1}{2g^2} \int d^3x H^2 \quad (\text{G.2})$$

potenciális energiájában fellépő $1/g^2$ a (G.1) egyenlet jobboldalának exponenciális energiájában megjelenő Planck-állandót megszorozza, a g^2 szerinti perturbációs számítás a szemiklasszikus kifejtésnek felel meg, $\log Z = \log Z^{(0)} + \hbar g^2 \log Z^{(1)} + \dots$. A vezető rendben, a kvantumfluktuációk teljes elhanyagolásával a klasszikus mechanika szabályai szerint

$$Z^{(0)}(H) = e^{-\frac{i}{\hbar g^2} TVH^2} \quad (\text{G.3})$$

adódik. Az exponensben iT/\hbar együtthatója a klasszikus energia, amelyet a (3.84) képlet alapján számoltunk ki.

A perturbációs számítás következő rendjében figyelembe kell venni a kvantumfluktuációkat, de azok kölcsönhatásait elhanyagolhatjuk. Az elmélet normálmódusait a 2.6. fejezetben elmondottak alapján a kölcsönhatás elhanyagolásával kapott harmonikus oszcillátorok adják. Mivel a kölcsönhatás a Lagrange-sűrűségbeli térmennyiségekben magasabb hatványú tagoknak felel meg, a normálmódusokat a hatásfunkcionál kvadratikusan részben által meghatározott harmonikus oszcillátorok adják. Tehát a (G.1) kifejezéssel megadott amplitudóhoz a vezető kvantumjárulékot az adott külső tér jelenlétében fellépő harmonikus oszcillátor-sereg adja.

Az ilyen, vagy az ennél pontosabb eljárással kapott amplitudót a

$$Z^{(0)}(H)Z^{(1)}(H)\dots \equiv e^{-\frac{i}{\hbar g^2(H)} TVH^2} \quad (\text{G.4})$$

alakban írva, az abban fellépő $g^2(H)$ paraméter az adott külső tér jelenlétében megvalósuló kvantumfluktuációk által indukált effektív csatolási állandónak a definícióját szolgáltatja.

A szabad kvantumfluktuációk rendjében a $Z(H)$ amplitudó a

$$Z^{(1)}(H) = \sum_{\{n(\alpha)\}} e^{-\frac{i}{\hbar} T \sum_{\alpha} \epsilon(\alpha) n(\alpha)} \quad (\text{G.5})$$

alakban írható, ahol $n(\alpha)$ az α kvantumszámmal jellemzett normálmódus betöltési száma, $\epsilon(\alpha)$ pedig a normálmódus energiája. Bár a (G.5) kifejezést azonnal kiszámolhatnánk, a térelméletekben fellépő végtelenül sok normálmódus a szokásos ultraibolya divergenciákhoz vezet a végeredményben. Ennek a divergenciának a regularizálása, amely „technikai” bonyodalmakhoz vezet, egyszerűbb egy, a (G.5) kifejezéssel megegyező

$$Z^{(1)}(H) = \frac{C}{\sqrt{\det K}} \quad (\text{G.6})$$

kifejezés esetén, ahol C a külső \mathbf{H} tértől független állandó és \mathcal{K} a hatás második funkcionális deriváltja az adott mágneses térkonfigurációnál, az esetlegesen fellépő zérus módusok elhagyásával. Az ebben a képletben megjelenő, kissé meglepő determináns eredetét a következőképp érthetjük meg. A normálmódusok a (G.2) potenciális energia második funkcionális deriváltjának, mint a fluktuációk függvényterében ható operátornak a sajátvektorai. $Z^{(1)}(H)$ -ben a független módusok járulékaik összeszoródnak, lásd (G.5). Tehát a determináns megjelenése bizonyos fokig természetes, hiszen az épp a sajátértékek szorzata. Amit még tisztázni kell, az egyrészt az, hogy miért a hatást vettük a potenciális energia helyett és hogy miért épp a funkcionális derivált inverz négyzetgyöke szerepel a képletben. Ezekre a kérdésekre úgy találjuk meg egyszerűen a választ, hogy végigkövetjük a független módus közelítést egy harmonikus oszcillátorral kezdve és a térelmélettel befejezve.

G.2. A harmonikus oszillátor

A kvantumtérelmélet normálmódusait harmonikus oszcillátorok alkotják, így először a

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + U(x), \quad U(x) = \frac{m\omega^2}{2}x^2 \quad (\text{G.7})$$

Hamilton függvénnyel jellemzett harmonikus oszcillátorra számoljuk ki háromféleképpen a

$$G(x_1, x_2, t) = \langle x_2 | e^{-\frac{i}{\hbar}tH} | x_1 \rangle \quad (\text{G.8})$$

propagátort. A propagátor fontos mennyiség számunkra, hiszen segítségével a (G.1) mennyiség megfelelőjét, a

$$Z = \text{Tr} e^{-i\frac{t}{\hbar}H} \quad (\text{G.9})$$

amplitudót egyszerűen megkaphatjuk a

$$Z = \int dx G(x, x, t). \quad (\text{G.10})$$

módon.

A legegyszerűbb módszer a propagátor formális kiszámítására a spektrális felbontás,

$$G(x_1, x_2, t) = \sum_n \psi_n(x_2) \psi_n^*(x_1) e^{-it\omega(n+\frac{1}{2})}. \quad (\text{G.11})$$

Valamivel komplikáltabb, de a jelen esetben hatékonyabb eljárás a propagátor által kielégített egyenletek megkeresése és megoldása. Mivel a

$G(x_1, x_2, t)$ megoldja az

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} G(x_1, x_2, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{x_2} + U(x_2) \right] G(x_1, x_2, t) \quad (\text{G.12})$$

Schrödinger-egyenletet a

$$G(x_1, x_2, 0) = \delta(x_1 - x_2) \quad (\text{G.13})$$

kezdeti feltétellel együtt, egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a

$$G(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar/m}} \sqrt{\frac{\omega}{\sin \omega t}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m\omega}{\sin \omega t} [(x_2^2 + x_1^2) \cos \omega t - 2x_1 x_2]} \quad (\text{G.14})$$

kifejezés adja a keresett függvényt. Azonban a (G.12) Schrödinger-egyenlet kvantumtérelméleti megfelelője nehezebben kezelhető az ultraibolya divergenciák miatt, ezért a térelméletre egyszerűbben általánosítható módszerrel is bemutatunk a propagátor előállítására.

Írjuk a propagátort a

$$G(x_1, x_2, t) = e^{\frac{i}{\hbar} S(x_1, x_2, t)} \quad (\text{G.15})$$

alakban (az ú.n. WKB közelítésben) és keressük az $S_1 = \text{Re} S$ és $S_2 = \text{Im} S$ függvényeket, amelyekre vonatkozó mozgásegyenlet

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= \frac{\hbar}{2m} \Delta_{x_2} S_2 + \frac{1}{2m} \left((\nabla_{x_2} S_1)^2 - (\nabla_{x_2} S_2)^2 \right) + U(x_2), \\ \dot{S}_2 &= -\frac{\hbar}{2m} \Delta_{x_2} S_1 + \frac{1}{m} \nabla_{x_2} S_1 \nabla_{x_2} S_2. \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

A harmonikus oszcillátor esetében a (G.14) megoldás alapján S_1 \hbar -tól független, míg S_2 azzal arányos. Tehát S_1 a klasszikus mechanikából is származtatható, hiszen a hullámfüggvény fázisára vonatkozó Schrödinger-egyenlet éppen a klasszikus mechanika Hamilton-Jacobi egyenletévé egyszerűsödik, azaz $S_1(x_1, x_2, t)$ az x_1 pontból kiinduló és t idő múlva az x_2 pontba érkező harmonikus oszcillátor trajektóriához tartozó klasszikus hatás.

A propagátor abszolút értékének, amelyet S_2 határoz meg, egy időfüggő, de ω -tól független szorzófaktor erejéig történő előállítására a következő lehetőség adódik. Induljunk ki a hatás

$$\mathcal{K}_\omega = -\frac{m}{2} \partial_t^2 - \frac{m\omega^2}{2} \quad (\text{G.17})$$

G.2. A harmonikus oszillátor

299

második funkcionális deriváltjának a determinánsából. A második derivált, mint operátor diagonális a frekvencia térben az $x_1 = x_2$ választás esetén,

$$\det \mathcal{K}_\omega = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{2\pi n}{t} \right)^2 - \frac{m\omega^2}{2} \right). \quad (\text{G.18})$$

Ez a kifejezés divergens, azonban ez a klasszikusan értelmezhetetlen járulékok ω -független, azaz megegyezik a szabad részecske esetében talált szingularitással. Ez adja az ötletet, hogy a szabad részecskéhez tartozó determinánssal normalizálva távolítsuk el a divergenciát,

$$\frac{\det \mathcal{K}_\omega}{\det \mathcal{K}_0} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{(2\pi)^2 n^2} \right). \quad (\text{G.19})$$

A

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2} \right) \quad (\text{G.20})$$

összefüggés segítségével a harmonikus oszcillátorhoz tartozó determináns a

$$\det \mathcal{K}_\omega = \frac{\sin \frac{\omega t}{2}}{\omega} \det \mathcal{K}_0 \quad (\text{G.21})$$

alakban írható fel. Összefoglalva a harmonikus oszcillátor propagátorára kapott eredményeket, a

$$G(x_1, x_2, t) = \frac{C(t)}{\sqrt{\det \mathcal{K}_\omega}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_1, x_2, t)} \quad (\text{G.22})$$

előállítást kapjuk, ahol $S_{cl}(x_1, x_2, t)$ a klasszikus hatás. Tehát a (G.6) mennyiségnek a harmonikus oszcillátorra érvényes megfelelője az $x_1 = x_2 = x$ pontok közötti propagátor amplitúdó,

$$Z(x) = Z^{(0)}(x) Z^{(1)}(x) = G(x, x, t) = \frac{C(t)}{\sqrt{\det \mathcal{K}_\omega}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x, x, t)}. \quad (\text{G.23})$$

Érdeemes megkülönböztetni a kvantumfizikában megjelenő két, az eredetét illetően különböző divergenciát. A megszokottabb, amely a szabadsági fokok számának minden határon túli növelésekor jelenik meg és a 6.2. fejezetben ismertetett módszerrel, például a normálmódusok impulzusára bevezetett $|\mathbf{p}| \leq \Lambda$ felső határral, azaz az elmélet által felbontott $a = \hbar/\Lambda$ minimális távolsággal lehet regularizálni. A renormalizálható elméletekben a paraméterekre oly módon lehet Λ -függést előírni, hogy a $\Lambda \rightarrow \infty$ határesetben a megfigyelhető mennyiségek véges, Λ -független értékekhez tartanak. Ettől eltérően az E függelékben és a (G.18), (G.21)

kifejezésekben egy olyan divergencia fordul elő, amely egyetlen szabadsági fokhoz tartozik, és a WKB közelítés $O(\hbar)$ rendjében jelenik meg. Az ilyen igazi kvantum divergenciák a kvantum propagálás fraktál jellegéből fakadnak és az E_{max} maximális energia bevezetésével, a $2\pi\hbar n/t \leq E_{max}$ levágással regularizálhatóak. Az $E_{max} \rightarrow \infty$ határesetet, amely (G.22) esetében csupán egy időfüggő szorzófaktor megfelelő leválasztását vonja maga után, a számolás végén kell végrehajtani. Amennyiben a Hamilton-operátorban az impulzus és a koordinátafüggő tagok összeadódnak, akkor az időfejlődés unitaritása kizárja az ilyen divergenciák megjelenését. Azonban a kanonikusan nem-kommutáló operátorok szorzatának megjelenése a Hamilton-operátorban általában szingularitásokhoz vezet a $t \rightarrow 0$ limeszben a WKB közelítésben levezetett S függvényre vonatkozó mozgásegyenlet kezdeti feltételében.

Feladat. Ellenőrizze a

$$\text{Tr} e^{-\frac{i}{\hbar}tH} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}tE_n} \quad (\text{G.24})$$

azonosságot a harmonikus oszcillátor esetében a (G.22) összefüggésből kiindulva. ■

Az anharmonikus oszcillátor esetében a Lagrange-függvénynek a trajektóriát a másodiknál magasabb hatvánnyal tartalmazó tagjai miatt az itt leírt módszer nem adja meg az egzakt propagátort. Azonban az S_1 és az S_2 függvényeknek a $\hbar \rightarrow 0$ határesetben mutatott aszimptotikus viselkedése a (G.15) egyenletek alapján ugyanolyan, mint a harmonikus esetben és így a (G.22) kifejezés a propagátor vezető rendű WKB közelítésének felel meg. Természetesen a képletben előforduló \mathcal{K} funkcionális deriváltat az x_1 és x_2 végpontokhoz tartozó klasszikus trajektóriánál kell kiszámolni.

G.3. A kvantumtérelmélet

A kvantumtérelméletben kiszámítandó (G.5) a normálmódusokra vett (G.24) típusú tagok szorzatából áll. A térelmélet hatásfunkcionáljának második funkcionális deriváltja, \mathcal{K} , épp a különböző módusokhoz tartozó és a (G.22) képletben feltüntetett determinánsok szorzata. Ugyanakkor a hatás a függetlennek tekintett módusokhoz tartozó járulékok összege. Ezek alapján a D függelékben bevezetett Schrödinger reprezentációbeli

$$\mathcal{G}[\phi_1, \phi_2, t] = \langle \phi_2 | e^{-\frac{i}{\hbar}tH} | \phi_1 \rangle \quad (\text{G.25})$$

propagátor, amely a ϕ térmennyiségeknek a $|\phi_1\rangle$ és a $|\phi_2\rangle$ sajátállapotai közti átmenet amplitudója a független módus közelítésben, a

$$\mathcal{G}[\phi_1, \phi_2, t] = \frac{C(t)}{\sqrt{\det \mathcal{K}}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}}, \quad (\text{G.26})$$

módon írható fel, ahol S_{cl} a ϕ_1 és a ϕ_2 kezdeti és végső konfigurációk között interpoláló és a klasszikus Euler-Lagrange mozgásegyenletet kielégítő időfüggő konfigurációhoz tartozó hatás és \mathcal{K} a hatásnak ezen trajektóriánál vett második funkcionális deriváltja.

Előfordulhat, hogy a \mathcal{K} operátor zérus módusokkal is rendelkezik, amelyek a (G.26) kifejezést értelmetlenné teszik. Azonban egy eltűnő sajátérték azt jelenti, hogy a hatás degenerált a hozzátartozó sajátvektor-nak megfelelő konfigurációs fluktuációkkal szemben. Ez a degeneráció az egyensúlyi állapothoz visszatérítő erő gyengeségét jelzi, ezért a kérdéses fluktuáció különleges elbánást igényel. A megfelelő kollektív változók bevezetésével belátható, hogy a zérusmódusok járuléka a (G.26) propagátor független módus közelítésében csak a ϕ_1 és ϕ_2 végpontoktól független $C(t)$ együtthatót befolyásolják, és ily módon a $\det \mathcal{K}$ determináns számolásánál csupán a nem zérus módusok alterére szorítkozhatunk.

G.4. Az $SU(2)$ Yang-Mills elmélet

Az általánosságok után térjünk rá a (G.26) mennyiség kiszámolására az $SU(2)$ Yang-Mills elméletben. Az egyszerűség kedvéért euklideszi téridőn mutatjuk be a számítást, a valós időre való Wick-forgatás ugyanis nem változtatja meg az így kapott futó csatolási állandót. A számolás elején leválasztjuk a gluon térről a g csatolási állandót, $A_\mu^a \rightarrow gA_\mu^a$, hogy a kölcsönhatási Lagrange-sűrűség $O(g)$ nagyságrendű legyen $O(g^0)$ amplitudójú fluktuációk esetén. Az így kapott gluonteret felbontjuk az \mathcal{A} külső tér és a B kvantumfluktuáció összegeként $A = \mathcal{A} + B$. A normál módusok a B_μ^a térmennyiség által leírt harmonikus oszcillátorok lesznek. A hozzájuk tartozó Lagrange-sűrűség

$$\begin{aligned} L(A) &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(A) F_{\mu\nu}^a(A) \\ &= L(\mathcal{A}) + \frac{1}{2} B_\mu^a \left(D^2 \delta_{\mu\nu} - D_\mu D_\nu \right)^{ab} B_\nu^b \\ &\quad - g \epsilon^{abc} B_\mu^a B_\nu^b F_{\mu\nu}^c(\mathcal{A}) + L_i \end{aligned} \quad (\text{G.27})$$

ahol

$$F_{\mu\nu}^a(\mathcal{A}) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + g \epsilon^{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c \quad (\text{G.28})$$

az \mathcal{A} külső mértéktérhez tartozó térerősség,

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu + g \epsilon^{acb} \mathcal{A}_\mu^c \quad (\text{G.29})$$

a külső háttéren értelmezett kovariáns derivált, továbbá

$$L_i = -g \epsilon^{abc} (D_\mu B_\nu)^a B_\mu^b B_\nu^c - \frac{g}{4} \epsilon^{abc} \epsilon^{ade} B_\mu^b B_\nu^c B_\mu^d B_\nu^e \quad (\text{G.30})$$

a normálmódusok kölcsönhatásáért felelős kölcsönhatási Lagrange-sűrűség, amely a fluktuációkat magasabb rendben tartalmazza.

Válasszuk az

$$\mathcal{A}_\mu^a = \delta^{3a} \delta_{2\mu} Hx \quad (\text{G.31})$$

külső teret, amely a 3-as szín és a z koordinátatengely irányába mutató homogén színmágneses térnek felel meg. Ekkor egyszerű behelyettesítéssel kapjuk meg az $F_{\mu\nu}^a(\mathcal{A}) = H\delta^{3a}(\delta_{1\mu}\delta_{2\nu} - \delta_{2\mu}\delta_{1\nu})$, $L(\mathcal{A}) = -H^2/2$ kifejezéseket. A hatáshoz adjuk hozzá a külső téren értelmezett kovariáns deriváltat tartalmazó mértékrögzítő tagot,

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L + \frac{\lambda}{2}(D_\mu B_\mu^a)^2 \\ &= L(\mathcal{A}) + \frac{1}{2}B_\mu^a \left[D^2 \delta_{\mu\nu} + (\lambda - 1)D_\mu D_\nu \right]^{ab} B_\nu^b \\ &\quad - g\epsilon^{abc} B_\mu^a B_\nu^b F_{\mu\nu}^c(\mathcal{A}) + L_i. \end{aligned} \quad (\text{G.32})$$

Az így definiált Lagrange-sűrűség integráljaként kapott hatás B_μ szerinti második funkcionális deriváltja a

$$\mathcal{K}_{\mu\nu}^{ab} = -(D^2)^{ab} \delta_{\mu\nu} + (1 - \lambda)(D_\mu D_\nu)^{ab} - g\epsilon^{abc} F_{\mu\nu}^a(\mathcal{A}) \quad (\text{G.33})$$

operátor. Az egyszerűség kedvéért válasszuk a $\lambda = 1$ Feynman-mértéket. A $\mathcal{K}_{\mu\nu}^{ab} B_\nu^b = \lambda B_\mu^a$ sajátértékegyenlet megoldásai közül az $a = 3$ értékhez tartozóak H -tól függetlenek. Ezért a (G.6) kifejezésben a járulékok egy konstans, ami a futó csatolási állandó meghatározása szempontjából elhagyható. Az $a = 1, 2$ választásnál a sajátértékfeltétel

$$\begin{aligned} \lambda B_\mu^a &= \left[-(\square + g^2 H^2 x^2) \delta^{ab} g_{\mu\nu} + igxH \delta_{\mu\nu} (\sigma_2)^{ab} \right. \\ &\quad \left. + igxH (\sigma_2)^{ab} (\delta_{2\nu}\delta_{1\mu} - \delta_{1\nu}\delta_{2\mu}) \right] B_\nu^b \end{aligned} \quad (\text{G.34})$$

ahol σ_2 a színindexekre ható Pauli-mátrix. A megoldások megalkotásához különválasztjuk a $\mu = 1, 2$ és a $\mu = 3, 4$ eseteket. (A $\mu = 4$ irány az euklideszi időhöz tartozik.)

A $\mu = 3, 4$ választás esetén \mathcal{K} diagonális a tér-idő vektorindexben és a sajátfüggvények a homogén mágneses térbeli Schrödinger-egyenlet megoldásával kaphatók meg. Az y , z és t változóktól való függés az $\exp(iyk_y + izk_z + itk_4)$ síkhullámnak felel meg, az x függést pedig egy $\Omega = 2gH$ frekvenciájú és az $x_0 = qk_y/gH$ pont körül rezgő harmonikus oszcillátor sajátfüggvénye adja meg, ahol $q = \pm 1$ a normálmódus színtöltés kvantumszáma, amelyet a σ_2 mátrix diagonalizálásával kapunk. Ennek megfelelően a spektrum

$$\lambda_{k,n} = k_z^2 + k_4^2 + (2n + 1)gH. \quad (\text{G.35})$$

A $\mu = 1, 2$ esetben a téridő vektorindexén ható $i(\delta_{2\nu}\delta_{1\mu} - \delta_{1\nu}\delta_{2\mu})$ mátrix diagonalizálásából az $s = \pm 1$ spin-kvantumszám adódik, és a spektrum a

$$\lambda_{s,q,k,n} = k_z^2 + k_4^2 + (2n + 1 - 2sq)gH \quad (\text{G.36})$$

alakban írható.

A nulla tömegű egyes spinű részecskéknél csak két helicitásállapotot találhatjuk a fizikai állapotok között. Az időszerű és a longitudinális módusokat a $B_4 = 0$ és a $D_i B_i = 0$, ($i = 1, 2, 3$) mellékfeltételek kirovásával fogjuk kizárni¹. Az első, $B_4 = 0$ feltétel egyszerűen a $\mu = 4$ normálmódusok elhagyását jelenti. A térbeli tranzverzalizást a degenerált normálmódusok alkalmas lineáris kombinációi használatával lehet elérni.

Egy további komplikáció adódik a homogén színmágneses térhez tartozó vákuum instabilitásából. Vegyük észre, hogy a (G.36) sajátérték negatívvá válik $n = 0$ és $k_z^2 + k_4^2 < gH$ esetén, és a megfelelő normálmódus energetikailag instabil. Az igazi, nemperturbatív vákuumot ettől kezdve legfeljebb a variációszámítás segítségével, a vákuumenergia minimalizálásával lehet megkapni. Sajnálatos módon az energiaminimum körül erős, $\mathcal{A} = O(g^{-1})$ külső színmágneses teret találunk, amelynek jelenlétében a kvantumfluktuációk nem perturbatívok. Ezért a stabil vákuumban végtelenül sok normálmódus jelenik meg nagy amplitudóval, azaz az egyszerűen kezelhető, kevés paramétert tartalmazó variációs hullámfunkciók nem hasznosak a vákuum leírására. Mivel az aszimptotikus szabadság felléptének ellenőrzéséhez csupán az aszimptotikusan nagyenergiájú, nagy impulzusú gerjesztések viselkedésének ismeretére van szükség, ezért természetes annak a feltételezésére támaszkodni, miszerint a vákuum stabilizálása csak a véges hullámvektorú, $k^2 \approx gH$ módusokat érinti. Ez alapján ugyanis ez az instabilitás nem fontos, egyszerűen elhanyagolható az aszimptotikus szabadság megvalósulásának szempontjából.

Térjünk most vissza a (G.1) amplitúdóra, amelyet a (G.6) független módus közelítésben a $\det \mathcal{K} = \text{Tr} \log \mathcal{K}$ azonosság felhasználásával az

$$\begin{aligned} -\frac{1}{VT} \log Z(H) &= \frac{1}{2}H^2 + \frac{gH}{(2\pi)^3} 2 \left[\frac{1}{2} \int_{k^2 > gH} d^2 k \log(k^2 - gH) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^2 k \log(k^2 + gH) \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2 k \log(k^2 + (2n + 1)gH) \right] \quad (\text{G.37}) \end{aligned}$$

¹Ugyan a fizikai állapotokra való megszorításnak ez a heurisztikus módja elegendő a perturbációszámítás adott rendjében, azonban magasabb rendekben szükséges a Faggyjev-Popov szellemter bevezetése.

alakban írhatunk fel. A jobboldal első két sora az $n = 0$ esetben az $sq = 1$ és $sq = -1$ kombinációk járulékat tartalmazza az instabil módusok elhagyásával, a harmadik sorban pedig az $n \geq 1$ sajátértékek szerepelnek. A jobboldali szögletes zárójelet szorzó gH -val arányos szorzófaktor az x koordinátatengely mentén kialakuló állapotűrűségéből ered.

A keresett mennyiség, (G.37) divergál a módusok számának végtelebe tartásakor. Ezt a problémát egy regularizálási eljárással, azaz egy ultraibolya levágási paraméter bevezetésével lehet elkerülni. A legtermészetesebb levágás a Λ maximális impulzus és az E_{max} energia bevezetése, amelyek véges értékeire (G.37) is véges marad. Az impulzus vagy az energiatérbeli levágás azonban sérti a regularizált elméletnek a (3.38) mértéktranszformációval szembeni invarianciáját. Ezt azért kell minden áron elkerülnünk, mert a mértékinvariancia elvesztése a töltésmegmaradás és a Noether-áram (3.23) transzverzalizálásának elvesztéséhez vezet. Ennek következtében a $j^{a\mu} A_\mu^a$ minimális csatolás kölcsönhatást létesít a töltés és a mértékter longitudinális komponense, a fizikai és nem fizikai szabadságfokok között. A vákuumpolarizáció során töltés keltődhet, amely a vákuum globális tulajdonságait megváltoztatja, infravörös divergenciát kelt és a perturbációszámítást alkalmazhatatlanná teszi.

Az ultraibolya módusoknak a mértékinvariáns elnyomása vagy a téridő kontinuum rácsregularizálásával, vagy pedig a perturbációszámítás divergáló kifejezéseinek olyan analitikus elfolytatása révén érhető el, amellyel egy ϵ , esetleg teljesen formális paraméter nullához tartásával nyerjük csak vissza a divergenciákat. Ebben az analitikus regularizációban az ϵ játsza a levágási paraméter szerepét. Helyettesítsük a (G.37) képletben fellépő logaritmikusat az $\alpha \rightarrow 0^+$ limeszben a

$$konst. - \alpha \log r = \frac{r}{\Gamma(1 + \alpha)} \int_0^\infty ds s^\alpha e^{-sr} \quad (\text{G.38})$$

összefüggésből származó kifejezéssel. A (G.38) képlet helyességéről úgy győződhetünk meg, hogy mindkét oldalnak az r szerinti deriváltját összehasonlítjuk. Ez az első pillanatban meglepőnek tűnő összefüggés azért hasznos, mert az s integrált utolsónak hagyva (analitikus kiterjesztés!) a (G.37) kifejezésnek az $r \rightarrow \infty$ limeszben fellépő divergenciáit minden $s > 0$ értékre kiküszöböltük. Egyszerűen látható, hogy az eredeti infravörös, illetve ultraibolya divergenciák az s integrál $s = \infty$, illetve $s = 0$ tartományába képződnek le. Ezután egyszerűen bevezetünk egy levágást a kis s -ekre, mondjuk oly módon, hogy a $(0, \infty)$ intervallum helyett csak az (ϵ, ∞) tartományon integrálunk és az így bevezetett $\epsilon \rightarrow 0^+$ mennyiség lesz az új ultraibolya levágási paraméter. Vegyük észre, hogy tulajdonképpen két levágási paraméterünk van, az eredeti, az impulzus és az energiatérbeli levágás és a most bevezetett ϵ paraméter. Az utóbbi a

mértékszimmétrikus. Az ϵ -t véges értéken tartva, a gondot okozó levágási paramétereket eltávolíthatjuk és ily módon az $\epsilon \rightarrow 0$ limesz is mértékinvariánssá válik.

Az itt vázolt eljárás elég hosszadalmas, de egyszerűen megvalósítható az esetünkben. A (G.38) összefüggés alkalmazásával a (G.37) képletben az n -re való összegzés és a k integrál könnyen elvégezhető egy tetszőleges, fixen tartott s értékre. Az így kapott s integrált két tag összegére bontjuk, az elsőben a $0 < s < 1/gH$, a másodikban pedig a $1/gH < s < \infty$ tartományban integrálva. Az ultraibolya divergenciák az első tagban vannak, amelyet az $s > \epsilon$ levágással regularizálunk. Vigyánunk kell arra, hogy a $\Lambda \rightarrow \infty$ limeszben, az impulzustérbeli levágás véges s -nél való eltávolításakor ne toljuk el az impulzus változókat, hiszen a divergens integrálok ultraibolya végpontjainak járuléka nem mindig eltűnő, amit már nem látunk a $\Lambda \rightarrow \infty$ limesz után. Az aszimptotikus szabadság szempontjából a véges integrál elhanyagolható és csak az első, az $\epsilon \rightarrow 0$ limeszben divergáló és a külső tértől függő járulék ismerete szükséges. A divergáló H -független és véges H -függő tagok elhagyásása után és a $H \rightarrow H/g$ jelölésre visszatérve az

$$\frac{1}{VT} \log Z(H) = -\frac{1}{2g^2} H^2 + \frac{11H^2}{96\pi^2} \int_{\epsilon}^{H^{-1}} \frac{ds}{s} \quad (\text{G.39})$$

eredményt kapjuk, amit a következőképpen értelmezhetünk. A külső tér okozta vákuumpolarizáció módosítja az energiasűrűséget és a (G.3) klaszikus kifejezés helyett a (G.6) energiasűrűséget találjuk a független normálmódus közelítésben. Ezt az effektust a csatolási állandónak a (G.4) parametrizálással bevezetett alakjával vesszük figyelembe,

$$\frac{1}{g^2(H)} = \frac{1}{g^2} - \frac{11}{48\pi^2} \int_{\epsilon}^{H^{-1}} \frac{ds}{s}. \quad (\text{G.40})$$

Ahhoz, hogy a $g(H)$ effektív kölcsönhatási állandó az adott külső tér skáláján ne függjön a mesterségesen bevezetett levágási paramétertől, az elmélet eredeti csatolási állandójával zérushoz kell tartanunk az $\epsilon \rightarrow 0$ limeszben, a (7.11) összefüggéssel kvalitatív megegyezésben. Az impulzustérbeli Λ levágás és ϵ egyidejű megtartásával belátható, hogy az $\int ds/s$ divergenciának a $2 \log \Lambda^2/gH$ tag felel meg, ami a

$$\frac{1}{g^2(\Lambda^2)} = \frac{1}{g^2(H)} + \frac{11}{24\pi^2} \log \frac{\Lambda^2}{H} \quad (\text{G.41})$$

eredményt adja.

A fentiekben követett eljárás általánosítása $SU(N)$ mértékszimmétriájú, anyagtereket is tartalmazó elméletekre újabb elvi problémák felmerülése nélkül elvégezhető, és a (7.11) összefüggéssel megegyező eredményre vezet.