Irodalomjegyzék

A) Általános jellegű művek

1. *Boltyanszkij, V. G.* és *Jaglom, I. M.:* Enciklopegyija elementarnoj matyematyiki, V. kötet. Nauka. 1966. 270—348. o.
2. *Courant, R.* és *Robbins, H.:* Mi a matematika? Gondolat, 1966.

Nagyon alapos és érdekes könyv. Egy egész fejezet foglalkozik geometriai szélsőérték-feladatokkal (a VII. fejezet).

3. *Pólya, Gy.:* Mathematics and plausible reasoning. Princeton, 1954.

Módszertani jellegű munka a matematikai alkotás általános alapelveiről (részben példamegoldásokon keresztül). Feladatgyűjteményünkhöz legközelebb áll a VIII. és X. fejezet (Maximumok és minimumok; Azonos kerületű alakzatok). Távolabbról, de azért még idevág a IX. fejezet (Fizikai matematika).

4. *Hadwiger, H.:* Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer, 1957.

Komoly monográfia. Részletesen elemzi többek között — szélsőérték-feladatokkal illusztrálva — a térfogat és a felszín fogalmát.

5. *Kazarinoff, N. D.:* Geometric inequalities. New York—Toronto, 1961.

Ez a kötet a neves amerikai kutatócsoport, a School Mathematics Study Group (SMSG) „New mathematic library" (Új matematikai könyvtár) c. sorozatában jelent meg. A szervezet az iskolai matematikaoktatás megújításán fáradozó kiváló matematikusokat és pedagógusokat fogja össze; a sorozat elsősorban a felsőbb osztályos tanulók érdeklődésére tarthat számot.

B) Algebrai egyenlőtlenségekkel foglalkozó művek

6. *Beckenbach, E.* és *Bellman, R.:* An introduction to inequalities. Yale University, 1961.

Elemi bevezetés az egyenlőtlenségek elméletébe, elsősorban középiskolások számára.

7. *Nyevjazsszkij, G. L.:* Nyeravensztva. Ucspedgiz, 1947.

Elsősorban középiskolai tanárok és pedagógiai főiskolák hallgatói számára készült összefoglaló.

8. *Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya Gy.:* Inequalities. Cambridge, 1959.

9. *Beckenbach, E., Bellman, R.:* Inequalities. Berlin, Springer, 1961.

A fenti két monográfia szakembereknek íródott, de kezdő matematikusok is haszonnal forgathatják. Mindkettő változatos és gazdag anyagot ölel fel.

10. *Krecsmar, V. O.:* Zadacsnyik po algebre. Nauka, 1964.

11. *Skljarszkij, D. O., Csencov, N. N., Jaglom, I. M.:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből. I. Aritmetika és algebra. Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

Az utóbbi két példatárban több fejezet foglalkozik algebrai egyenlőtlenségekkel.

C) Geometriai szélsőérték-feladatokat tartalmazó tankönyvek és példatárak

12. *Coxeter, H. S. M.:* Introduction to geometry. New York—London, Wiley, 1961.

13. *Hadamard, J.:* Leçons de géometrie élémentaire 1. Géometrie plane, Paris Colin, 1937.

E könyv részletesen tárgyalja az elemi geometriát, bár a szélsőérték-problémákkal viszonylag keveset foglalkozik. A feladatok között sok olyan példát találunk (részletesen kidolgozott megoldással), amely könyvünk témájával rokon.

14. *Vasziljev, N. B.* és *Gutenmaher, V. L.:* Prjamije i krivije. Nauka, 1970.

„Matematika—fizika tagozatú iskolák kiskönyvtára" sorozat kötete. Elsősorban a középiskolák felső osztályaiból forgathatják haszonnal a matematika iránt érdeklődő tanulók. Elég tág teret kapnak a kötetben a geometriai szélsőérték-feladatok.

15. *Leman, A. A. (szerk.):* Szbornyik zadacs moszkovszkih matyematyicseszkih olimpiad. Proszvescsenyije, 1965.

16. *Morozova, E. A.* és *Petrakov, I. Sz.:* Mezsdunarodnije matyematyicseszkije olimpiadi. Proszvescsenyije, 1968.

17. *Skljarszkij, D. O., Csencov, N. N., Jaglom, I. M.:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 3. Geometria II (Sztereometria). Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

18. *Szkopec, D. O.* és *Zsarov, V. A.:* Zadacsi i tyeoremi po geometrii. Ucspedgiz, 1962.
19. *Szivasinszkij, I. H.:* Nyeravensztva v zadacsah. Nauka, 1967.
20. *Gotman, E. G.:* Uravnyenyija, tozsdesztva, nyeravensztva pri resenyii geometricseszkih zadacs. Proszvescsenyije, 1965.

D) Könyvek a konvex testekről, a diszkrét és a kombinatorikus geometria elméletéről

21. *Fejes-Tóth, L.:* An arrangement of two-dimensional cells. Budapest, 1959.
22. *Rogers, C. A.:* Packing and Covering. Cambridge, Univ. Pr. 1964.

A [21] és [22] könyv az ún. „diszkrét geometria" kifejtését adja, amely diszkrét pontok vagy geometriai alakzatok és testek valamilyen értelemben vett „optimális", „ökonomikus" elhelyezkedésével foglalkozik. Mindkét könyv igen gazdag anyagot ölel fel. Fejes-Tóth könyve szemléletesebb, közelebb áll a kézzelfogható valósághoz (főleg két- és háromdimenziós példákon vizsgálja a diszkrét geometria problémáit). Rogers elsősorban az n-dimenziós tér diszkrét geometria feladataival foglalkozik. (Egyébként Fejes-Tóth könyvét is inkább a matematika szakos hallgatóknak és tanároknak ajánljuk, nem a tanulóifjúságnak.)

23. *Hadwiger, H.* és *Debrunner, G.:* Combinatorial geometry in the plane. New York etc. Holt, Rinehart and Winston, 1964.
24. *Boltyanszkij, V. G.* és *Gohberg, I. C.:* Tyeoremi i zadacsi kombinatornoj geometrii. Nauka, 1966.
25. *Dancer, L., Grunbaum, B., Klee, V.:* Tyeorema Helli. Mir, 1968.
26. *Baston, V. J. D.:* Some properties of polyhedra in Euclidean space. Oxford, 1965.
27. *Jaglom, I. M.:* Kak razrezaty kvadrat?, Nauka, 1968.

A fenti öt könyv az ún. kombinatorikus geometriával foglalkozik, [23] a legelemibb módon, [25] a legmélyebben. A kombinatorikus geometria pontok, alakzatok és testek véges rendszereinek kombinatorikus vizsgálatai alapján speciális geometriai szélsőérték-feladatokat vizsgál. Rendszerint valamilyen egész számokkal kifejezhető összefüggést kell megállapítani a kombinatorikus geometriában a fenti (általában konvex) test- vagy pontrendszerek között. Tipikus példa erre az az ősrégi (és igen nehéz) probléma, hogy egy adott gömbhöz maximálisan hány ugyanakkora, egymást nem metsző gömb illeszthető. (Részletesen foglalkozik ezzel a feladattal Fejes-Tóth [21] is.*)

*) A kombinatorikus geometriának elég nagy közös területe van a diszkrét geometriával (amelynek alapjait a [21] könyv fejti ki); sok geometriai szélsőérték-feladatot teljes joggal tekinthetünk egyszerre kombinatorikus és diszkrét geometriai jellegűnek.

28. *Krizsanovszkij, D. A.:* Izoperimetri. Fizmatgiz, 1959.

Ez a könyvecske elemi módon tárgyalja az ún. „izoperimetrikus feladatok" körét: adott *P* kerületű (vagy felszínű) konvex alakzatok (vagy testek) közül keressük meg a legnagyobb területűt (térfogatút).

29. *Boltyanszkij, V. G.* és *Jaglom, I. M.:* Vipuklije figuri i tyela. Enciklopegyija elementarnoj matyematyiki V. kötet, 181—269. oldal.
30. *Jaglom, I. M.* és *Boltyanszkij, V. G.:* Vipuklije figuri. Gosztyehizdat, 1951.
31. *Blaschke, V.:* Kreis und Kugel. Berlin, Gruyter, 1956.

A [29] cikk, a [30] és a [31] könyv a konvex testek elméletével foglalkozik, ezen belül részletesen elemezve a konvex alakzatokkal és testekkel kapcsolatos szélsőérték-feladatokat. A [30] könyv magyarázatokkal és részletes megoldásokkal kiegészített feladatgyűjtemény (hasonló formája van a [23] könyvnek is). Blaschke könyve ma már klasszikusnak tekinthető. Jelentős helyet foglalnak el benne a szélsőérték-feladatok; a magyarázatokban a differenciálgeometriára támaszkodik. Ezt a könyvet elsősorban a matematikus hallgatók forgathatják sikerrel.

32. *Bonnesen, T., Fenchel, W.:* Theorie der konvexen Körper. Berlin, 1934.
33. *Hadwiger, H.:* Altes und neues über konvexe Körper. Basel—Stuttgart, 1965.
34. *Eggleston, H. G.:* Convexity, Cambridge, 1958.
35. *Eggleston, H. G.:* Problems in Euclidean Space; Applications of Convexity. London, 1957.
36. *Benson, R. V.:* Euclidean Geometry and Convexity. New York, 1966.
37. *Valentine, F. A.:* Convex sets. New York, 1964.

A [32] - [37] könyvek már képzettebb olvasók számára íródtak. Mindegyik nagy figyelmet fordít a konvex testekkel kapcsolatos szélsőérték-feladatokra.

38. *Klee, V. L. (szerk.):* Convexity. Providence, 1963.

Ez a vaskos kötet a konvexitás problémájával kapcsolatos 1961-es amerikai szimpózium anyagát tartalmazza. Számos megjegyzés mellett (ezek jó része konkrét szélsőérték-problémákkal foglalkozik) nagyobb lélegzetű áttekintéseket, tanulmányokat is közöl. Ki kell emelnünk különösen Dancer, Grunbaum és Klee már említett [25] tanulmányát, Grunbaum további két tanulmányát a kombinatorikus geometria köréből, valamint H. S. M. Coxeter cikkét a diszkrét geometria problémáiról.

E) Irodalomjegyzék feladataink sorrendjében

1. *Vegyes feladatok*

39. *Rabinovics, V. L.:* O linyijah v kvadratnoj szetyi i v kubicseszkoj resetke. Ucsenije zapiszki Mordovszkovo gosz. unyiverszityeta, 1964. 4. szám, 73—86. oldal.
Ob otrezkah v giperkubicseszkoj resetke. Trudi II. Kazahsztanszkoj

naucsnoj konferencii po matyematyike i mehanyike, Alma-Ata, 1968. 175—178. old.
Eksztremalnaja zadacsa o raszpolozsenyii linyij v *n*-mernoj celocsiszlennoj resetke, Uo. 178—180. oldal.
40. *Bellman, R.:* Dynamic programming. Princeton University Press, 1957, Minimisation problem. Bull. Amer. Math. Soc. 62. (1956), 27. oldal, Referatyivnij Zsurnal Matyematyika, 1960. 2. szám, 156. oldal.
41. *Zalgaller, V. A.:* Kak vijtyi iz lesza? Matyematyicseszkoje proszvescsenyije (új sorozat) 1961. 6. szám, 191—195. oldal.
42. *Isbell, J. R.:* An optimal search pattern. Naveb. Res. Logist. Quart. 1957. 4. szám, 357—359. oldal.

2. *Geometriai becslések*

43. *Baron, H. J.:* Die Ankugeln des Tetraeders in Beziehung zur Umkugeln. Tohoku Math. Journ. 1941. 48. szám, 185—192. oldal.

3. *Geometriai mennyiségek szélsőértékeinek meghatározásával foglalkozó feladatok*

44. *Prokofjev, V. M.:* Nyekotorije szvojsztva kratcsajsej linyii, szojegyinyjajuscsej ljuboje csiszlo dannih tocsek ploszkosztyi. Ucsen. zap. Moszk. gosz. ped. insztyituta im. Lenina 51, 1957. 3. szám, 63—84. oldal.
45. *Steinhaus, H.:* Sto zadan. Warszawa. Pansw. Wydawn. Naukowe, 1958.

4. *Háromszöggel és tetraéderrel kapcsolatos feladatok*

46. *Pólya, Gy.—Szegő, G.:* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. 2. Bd. Berlin, Springer, 1925.
47. *Hajós Gy.:* A 8. feladat megoldása, Matematikai Lapok 1950. 1. szám, 313—316. oldal.
48. *Berkes, J.:* Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung. Elemente der Mathematik 22. 1967. 6. szám, 135—136. oldal.
49. *Erdős P.:* 3740. feladat, Amer. Math. Monthly 1935. 42. szám, 396. oldal;
L. J. Mordell—D. F. Barrow: A 3740. feladat megoldása, uo. 1937, 44. szám, 252—254. oldal.

50. *Mordell, L. J.:* Egy geometriai feladat megoldása. Középiskolai Matematikai Lapok 1935. 11. szám, 146—148. oldal.
51. *Kazarinoff, D. K.:* A simple proof of the Erdős—Mordell inequality for triangles. Michigan Math. Journ. 1957. 4. szám, 97—98. oldal.
52. *Bankoff, L.:* An elementary proof of the Erdős—Mordell theorem. Amer. Math. Monthly, 1958. 65. szám, 521. oldal.
53. *Veldkamp, G. R.:* De ongelijkheid van Erdős—Mordell. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, 1958. 45. szám, 193—196. oldal.
54. *Eggleston, H.G.:* A triangle inequality. Mathematical Gazette, 1958. 339. szám, 54—55. oldal.
55. *Bralant, H.:* Nog eens de ongelijkheid van Erdős—Mordell. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, 1959. 46. szám, 87. oldal.
56. *Szkopec, Z. A.:* Elementarnoje dokazatyelsztvo odnoj tyeoremi Erdősa, Matyematyicseszkoje proszvescsenyije, 1960. 5. szám, 151—152. oldal.
57. *Karlitz, L.:* Some inequalities for a triangle. Amer. Math. Monthly, 1964. 71. szám, 881—885. oldal.
58. *Oppenheim, A.:* Some inequalities for a spherical triangle and an internal point. Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu, Ser. Math. i fiz., 1967. 200—209. szám, 13—16. oldal.
59. *Florian, A.:* Zu einem Satz von P. Erdős. Elemente der Mathematik 13., 1958. 3. szám, 55—58. oldal
60. *Oppenheim, A.:* The Erdős inequality and other inequalities for a triangle. Amer. Math. Monthly, 1961. 68. szám, 226—230. oldal.
61. *Fejes-Tóth, L.:* Inequalities concerning Polygons and Polyhedra. Duke math. Journ. 1948. 15. szám, 817—822. oldal.
62. *Lenhard, H. Chr.:* Verallgemeinerung und Verschärfung der Erdős—Mordellschen Satz für Polygone. Archiv der Mathematik, 1961. 12. szám, 311—314. oldal.
63. *Leuenberger, F.:* Zum Mordellschen Beweis einer Ungleichung von Erdős. Elemente der Mathematik, 1962. 17. szám, 15—17. oldal.
64. *Voger, H.:* Eine Bemerkung zum Erdős—Mordellschen Satz für Polygone. Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Klasse, 1966. 103. szám, 241—251. oldal.
65. *Rabinovics, V. L.* és *Jaglom, I. M.:* O nyeravensztvah, rodsztvennih nyeravensztvu Erdős—Mordella dlja treugolnyika. Voproszi nyejevklidovoj geometrii (Ucsenije zapiszki Mosz. gosz. ped. insztyituta im. Lenina), 1970. 121—126. oldal.
66. *Kazarinoff, N. D.:* D. K. Kazarinoff's inequality for tetrahedra. Michigan Math. Journ. 1957. 4. szám, 99—104. oldal.