Előszó az első magyar kiadáshoz

Ez a könyv újabb kötete annak a feladatgyűjteménynek, amely a moszkvai állami Lomonoszov Egyetem irányításával működő középiskolás matematikai szakkör és a moszkvai olimpiák példaanyagából állt össze.

A sorozat első kötetében aritmetikai és algebrai példákat tettünk közzé, sok foglalkozik ezek közül az egyenlőtlenségekkel, valamint különböző mennyiségek legnagyobb, illetve legkisebb értékének meghatározásával. Ez a könyv aratta a legnagyobb sikert: négy kiadást ért meg, több nyelvre lefordították, túlzás nélkül állíthatjuk, hogy világszerte ismertté vált.

A másik két kötet sorsa sokkal kedvezőtlenebbül alakult.

A sorozat második kötete síkgeometriai feladatokkal foglalkozik. Először 1952-ben jelent meg, s az újabb kiadás 1967-ig váratott magára. A geometriában sokkal nehezebb dolog nem sablonos feladatokat összehozni (ezt tanúsítja egyébként a moszkvai Lomonoszov Egyetem irányításával működő középiskolás matematikai szakkör munkássága is) — sokkal nehezebb, mint aritmetikai, algebrai, kombinatorikai vagy tisztán logikai feladatokat válogatni vagy készíteni. A szerzők törekvése ellenére a „Válogatott feladatok és tételek" második kötete — főleg az 1952. évi első kiadás — még túlságosan sok szokványos szerkesztési és bizonyításos feladatot tartalmazott, amelyek nem sok segítséget nyújtanak a modern matematika módszereinek elsajátításához. Elsősorban V. P. Palamodov érdeme, hogy 1967-ben sikerült tető alá hozni a kötet teljesen átdolgozott új kiadását. Igaz, még ebben az új formában is kevésbé tekinthető ez a könyv „olimpiai" feladatgyűjteménynek, mint az első kötet. (Egy olimpiai feladatgyűjteménynek nézetünk szerint olyan feladatokat kell tartalmaznia, amelyeknek sem szövegezése, sem megoldásai nem szokványosak — hiszen a versenyfeladatok összeállítóinak ki kell zárniuk annak lehetőségét, hogy a versenyzők már korábbról ismerjék a kitűzött feladatot vagy a megoldáshoz szükséges gondolatmenetet.)

A sorozat harmadik kötete térgeometriai feladatokat tartalmaz, ezeket nagyrészt N. N. Csencov állította össze. Először 1954-ben jelent meg*. Újabb kiadása még nincsen, bár elég régen dolgoznak rajta.

* Ennek alapján készült az 1967. évi magyar kiadás. — A ford.

A geometriai feladatgyűjtemény munkálatai tehát meglehetősen elhúzódtak. Hozzájárult ehhez az is, hogy a szerkesztők nem akarták a könnyebb utat, a gyűjtemény tessék-lássék fejlesztésének útját választani.

Miközben a matematikatanítás forradalmában a geometria tudománya valóságos válságot él át, az elemi geometriának egy viszonylag szűk fejezete — a geometriai szélsőértékek tana — páratlan virágzásnak indult. Az érdeklődés homlokterébe kerültek az olyan feladatok, amelyek geometriai mennyiségek legnagyobb vagy legkisebb értékeinek kiszámításával kapcsolatosak, azzal, hogy előnyös-e, gazdaságos-e bizonyos értelemben valamilyen geometriai érték.

Ebből a tematikából nőtt ki a háború utáni években például a „diszkrét geometria" [21], [22][1] és a „kombinatorikus geometria" [23]—[27]. Az utóbbit joggal nevezhetnénk korunk elemi geometriájának. A geometriai szélsőértékek iránti érdeklődést a különböző mechanizmusok és bonyolult rendszerek optimális működésének meghatározásával kapcsolatos irányzatok keltették fel újra. E kérdések vizsgálatára az utóbbi évtizedekben új tudományos diszciplinák keletkeztek („lineáris programozás", „dinamikus tervezés", „játékelmélet", „operációkutatás", „optimális irányítás", „információelmélet" stb.), némelyik egyszerűen a diszkrét geometria közvetlen alkalmazásaként.

Könnyű lett volna tehát a geometriai példatárakat azzal felfrissíteni, sőt tudományosan aktuálisabbá tenni, hogy egyszerűen megnöveljük bennük a szélsőérték-feladatok számát.

Ehelyett azonban a „Válogatott feladatok és tételek" második részének átdolgozásánál még azokat a szélsőérték-feladatokat is kihagytuk az 1967-es második kiadásból, amelyek a könyv első kiadásában még szerepeltek[2]. Jól láttuk ugyanis, hogy a geometriai egyenlőtlenségekkel és a különböző geometriai mennyiségek meghatározásával kapcsolatos feladatok szerepe mennyire megnövekedett, s külön kötetet akartunk szentelni az ilyen természetű feladatoknak. Sőt, a kötetek osztódása még ezzel sem ért véget. E könyv anyagán dolgozva meggyőződtünk arról, hogy egyedül a szélsőérték-feladatok száma is olyan nagy, hogy célszerű különválasztani őket két önálló, különböző jellegű kötetbe.

Ez a kötet elsősorban bizonyos „klasszikus" geometriai szélsőérték-feladatok (3. feladatcsoport) és az azokból közvetlenül következő geometriai szélsőérték-problémák (4. feladatcsoport) kifejtésével foglalkozik. A sorozat készülő következő kötete tér ki bővebben a geometria „modernebb" témáira, a diszkrét és kombinatorikus geometria problémáira.

A jelen kötet abba a sorozatba illeszkedik bele, amely a Lomonoszov Egyetem mellett működő középiskolás matematika-szakkör és a moszkvai matematikai olim-

[1] A szögletes zárójelben levő szám a könyv végén levő bibliográfiában az adott sorszámú ajánlott irodalmat jelöli.

[2] Egyébként a [17] könyv több jellegzetes példáját tartalmazza könyvünknek, például a 11—13., 16., 35—37., 44., 48—50. és jó néhány más feladatot.

piák sokéves tapasztalatát önti formába. (Ez fejeződik ki a fiktív szerzői kollektíva sorrendjében is.) Igaz, néhány feladat *megfogalmazása* (a 38—42. feladat) már a matematika új irányzatainak hatását mutatja; de nem kevés a „klasszikus" geometriai szélsőérték-feladatok száma sem, amelyek a XIX. századból vagy még korábbról valók (pl. a 3. fejezet sok feladata). Az itt közölt *megoldások* azonban még tagadhatatlanul a középiskolás matematika század eleji hagyományait őrzik. Ezek a hagyományok még elevenen hatottak abban az időben, amikor a moszkvai egyetem középiskolás matematika-szakkörének Dodik Skljarszkij egyetemi hallgató volt az egyik vezéralakja — a szélsőérték-feladatok megoldásában ezek azt jelentették, hogy lehetőleg „direkt" módon, nem „közvetett" úton kellett keresni a megoldást.

Ennél a kérdésnél érdemes megállnunk pár szóra.

A szélsőérték-feladatokat, függetlenül attól, hogy aritmetikai, algebrai, geometriai vagy az analízis körébe vágó feladatok, két alapvetően különböző úton lehet megoldani. Egy meghatározott alakzatról szólva a megoldást akkor nevezzük direktnek, ha ki tudjuk mutatni, hogy a feladat feltételeit kielégítő valamennyi alakzattal egybevetve alakzatunkat, az jobb (vagy nem rosszabb) az összes többinél. A közvetett bizonyítás gondolatmenete ezzel szemben annak igazolására szolgál, hogy bizonyos alakzaton (vagy alakzatokon) kívül semmilyen más alakzat nem lehet a feladat megoldása, mivel minden más alakzathoz lehet találni egy nála „jobbat" — a feladat megoldása tehát az az alakzat, amit nem lehet tovább javítani.

Ez az okoskodás azonban valahol sántít: előfordulhat ugyanis, hogy a feladatnak egyáltalán nincs megoldása, s ekkor hibás a gondolatmenet. Külön feladatot jelent tehát a megoldás egzisztenciájának bizonyítása, ami történhet egészen más úton is. Geometriai feladatok esetében az ilyen meggondolásokat a topológiai körébe utaljuk. A topológia, a geometria „kisöccse", amely a XX. században jött létre, ma már sikeresen konkurrál idősebb testvérével, a klasszikus geometriával.

A geometriai szélsőérték-feladatok megoldásában a közvetett módszer roppant hasznos. Erre már Steiner, az ismert svájci geométer rámutatott a XIX. század első felében. A közvetett módszerek nagy szerepet játszottak Steiner kortársának, a főleg analízissel foglalkozó Dirichlet-nek az életművében is.

A XIX. század második felében Steinert és Dirichlet-t hevesen bírálta Weierstrass. Az ő konstruktív kritikájából és az ezzel kapcsolatos vizsgálódásokból kerekedett ki később a topológia. Weierstrass kritikája azonban annyira lejáratta a szélsőérték-feladatok megoldásában a közvetett módszereket, hogy még századunk első felében is tudománytalannak (vagy ha elnézőbbek akartak lenni: nem eléggé szigorúnak) tekintették az ilyen bizonyítást. „Külön kell foglalkoznunk a szélsőértékek meghatározásával kapcsolatos feladatokkal" — írta 1947-ben a szerkesztő, D. I. Perepelkin professzor Hadamard „Elemi geometria" című könyvéhez írt bevezetésében. — „A nehezebb feladatoknál a szerző egyenesen azt ajánlja, hogy a megoldásnál előre tételezzük fel: létezik a szélsőértéket kifejező alakzat. Ez a megoldási mód többé-kevésbé még természetes volt Hadamard idejében*, de ma már elfogadhatatlannak tartjuk..." [13] (13—14. oldal).

[21] szerzője már a következő történelmi korszak szülötte — ő nagyobb mérsékletet tanúsít a szélsőérték-feladatok direkt és közvetett megoldásának összehasonlításában: „Ha figyelmen

* Azaz a XIX. század végén (I. J.).

kívül hagyjuk az esztétikai és didaktikai jellegű meggondolásokat, a közvetett módszert természetesebbnek kell tekintenünk, és sok esetben célszerűbbnek is. Amikor még nem ismerünk egy extremális alakzatot, csak a definícióját, eléggé természetes, ha először félretesszük azt a kérdést, létezik-e egyáltalán ilyen alakzat, s csak azon törjük a fejünket, hogyan és milyen esetben lehet „javítani" az adott alakzaton. A bizonyításban használt közvetett módszer egyébként nem is annyira elemi és nem kizárólag geometriai.... Ami a bizonyítás direkt módszerét illeti, az kétségkívül meggyőzőbb, hiszen közvetlenül bizonyít. Az egzisztencia kérdése itt külön fel sem merülmivel a bizonyítás ezt automatikusan megoldja. A direkt bizonyítást különben sokszor az elem, geometria legegyszerűbb állításaira sikerül visszavezetni, ami a közvetett módszernél elvileg lehei tetlen. De mivel a direkt bizonyítás gyakran nagy művészetet igényel, történelmileg az ilyen bizonyítások általában később keletkeztek, akkor, amikor már ismertek voltak a feladatok kevésbé elegáns közvetett megoldásai" [21] (26—27. lap).

Részletesebben elidőztünk a direkt és közvetett módszernél, mert véleményünk szerint elvi kérdés ennek tisztázása.

A jövő kétségkívül a közvetett módszereké — a modern alkalmazott matematikában már ma is sokkalta nagyobb a jelentőségük, mint a direkt módszereké. Azokat az esztétikai jellegű meggondolásokat, amelyekkel egyes szerzők a direkt módszerek mellett érvelnek, nem kell komolyan venni. A direkt módszerek csak bonyolultságuk folytán „szebbek" a közvetett módszereknél, ahogyan a görbe vonalú alakzatok területének meghatározására szolgáló ódon, választékos módszerek szebbek, mint az őket kiszorító integrálszámítás automatikus megoldási módszerei. Nem kétséges, hogy a kifinomult éleselméjűséget kívánó bonyolult módszerek esetenként szebbnek tűnnek, mint az adekvát matematikai apparátust felhasználó egyszerű megoldási módszerek — idők múltával azonban szükségképpen átengedik helyüket ezeknek az egyszerűbb módszereknek. Az az érv, hogy a közvetett módszerek nem elemiek, mivel megkövetelik az alakzat létezésének bizonyítását, ma talán még helytálló, bár nehéz lenne előre megmondani, merre fejlődik a következő évtizedben az elemi geometria.

A középiskolás feladatgyűjteményben egyelőre azért vagyunk kénytelenek előnyben részesíteni a direkt módszert a szélsőérték-feladatok megoldásában, mert nincs az egzisztenciatételekről olyan hozzáférhető irodalom, amelyre hivatkozni lehetne. Ezért alkalmaztunk mostani könyvünkben is majdnem kizárólag direkt módszereket a szélsőérték-feladatok megoldásánál — melegen ajánljuk azonban az olvasónak, hogy gondolja végig a kapott eredményeket az [1] cikk álláspontjáról (tanulságos a [30] könyv 1. függeléke is ebből a szempontból). Ezek a gondolatok ugyan ellentétesek a Lomonoszov Egyetem középiskolás matematikai szakkörének hagyományaival, de világosan tükrözik napjaink néhány fontos módszertani törekvését.

Kötetünk 120 feladatot tartalmaz négy fejezetben, bár maga az, hogy egy feladat melyik fejezetbe került, még nem határozza meg egyértelműen a feladat jellegét. Könnyen felfedezhető például a rokonság különböző fejezetek feladatai között (46. és 94. a, 47. és 94. c, 75. és 104. a vagy a 81. a és 104. b).

A kötet tagolása hasonló, mint az előző köteteké: az első oldalakon közöljük a feladatok szövegét, a könyv végén megtalálhatják olvasóink a feladatok végeredményét és némi útbaigazítást a feladatok megoldásához, középütt pedig megadjuk a feladatok részletes kidolgozását[1]. Ahol szükségesnek látszik, magyarázó megjegyzéseket is fűzünk a feladat szövegéhez.

Legjobban teszi az olvasó, ha először megpróbálja önállóan megoldani a feladatokat, anélkül, hogy bármi segítséghez folyamodna. Csak ha ez nem sikerül, akkor lapozzon a kötet végére, és keresse meg a feladathoz tartozó útbaigazítást vagy végeredményt (ennek ismerete szintén megkönnyítheti a feladat megoldását). A részletes megoldást akkor érdemes csak megnézni, ha hosszabb ideig töprengett a feladaton eredménytelenül, vagy ha megoldotta a feladatot, és ellenőrizni akarja a gondolatmenetét.

A könyv végéhez csatolt ajánlott irodalom listája nem törekszik teljességre, és nem meríti ki a szerző által felhasznált forrásokat. Inkább a tanárnak szól, nem a tanulóknak; hasznosnak bizonyulhat viszont az iskolai matematika-szakkör munkájában.

A szerzőt könyvének megírásában nagyban segítette az, hogy V. G. Boltyanszkij és L. I. Golovna, a moszkvai Lomonoszov Egyetem középiskolás matematika-szakkörének veteránjai, — a szerzővel együtt D. O. Skljarszkij tanítványai — figyelmesen átolvasták a könyv kéziratát s értékes megjegyzéseket tettek. Így sikerült sok hibát kiküszöbölni és néhány feladat megoldását leegyszerűsíteni. A könyv átdolgozásához a „Válogatott feladatok és tételek..." 2. részének első kiadását vettük alapul, amelyet a szerző N. N. Csencovval és a matematika-szakkör más munkatársaival együtt állított össze. Az anyag átdolgozásában és kiegészítésében nagy segítséget nyújtott V. P. Palamodov.

Átvettünk néhány feladatot a „Matematikai—fizikai iskola kiskönyvtára" [14] c. kiadványból a szerzőknek, N. B. Vasziljevnek V. L. Gutenmahernek, valamint V. L. Rabinovicsnak (Petropavlovszk, Kazahsztan) és G. A. Tonojannak (Jereván) az engedélyével. Egyébként főleg Vasziljev állította össze a „Matyematyika v skolje" folyóirat számára azokat az áttekintő cikkeket is, amelyek nekünk is hasznos forrást jelentettek a matematikai olimpiák feladatainak feldolgozásában (l. a „Matyematyika v skolje" 1965. évi 3. és 5., az 1966. évi 5., az 1967. évi 1. és 5. és az 1969. évi 4. számait). Eredeti megoldásokat közöltek több feladatra E. G. Gotman (Arzamasz), V. L. Gutenmaher, V. L. Rabinovics és Z. A. Szkopec (Jaroszlavl). Az ábravázlatok jelentős részét I. V. Letnyikov szerkesztette V. V. Firszov közreműködésével.

Mindannyiuknak őszinte köszenetét fejezi ki segítségükért a szerző,

I. M. Jaglom

[1] Nem szükséges ezt a sorrendet követni az egy-, különösen pedig a kétcsillagos feladatoknál. Ezekre vonatkozólag azt tanácsolhatjuk, hogy rögtön a szöveg elolvasása után nézze meg az olvasó a feladathoz tartozó útbaigazítást, s csak ezután kezdjen hozzá a feladat megoldásához. Az ilyen feladatokat — főleg a két csillaggal jelölteket — „elméletnek" is tekinthetjük, s rögtön elolvashatjuk a megoldásukat.