Megoldások

10. fejezet

10.1. Kúpszeletek és másodfokú egyenletek

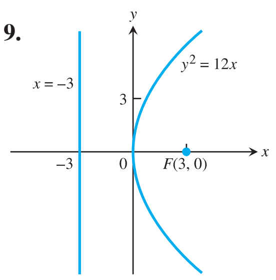
1. $y^2 = 8x$, $F(2,0)$, vezéregyenes: $x = -2$

3. $x^2 = -6y$, $F(0,-3/2)$, vezéregyenes: $y = 3/2$

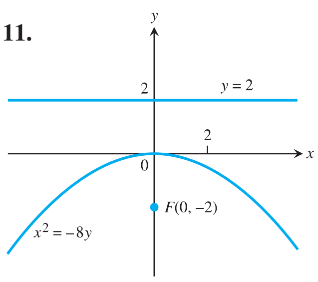
5. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $F(\pm\sqrt{13},0)$, $V(\pm 2,0)$, aszimptoták: $y = \pm\frac{3}{2}x$

7. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, $F(\pm 1,0)$, $V(\pm\sqrt{2},0)$

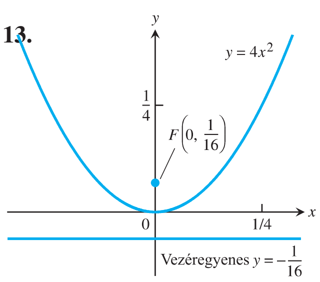
9.



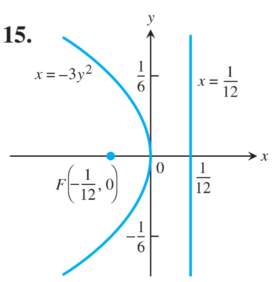
11.



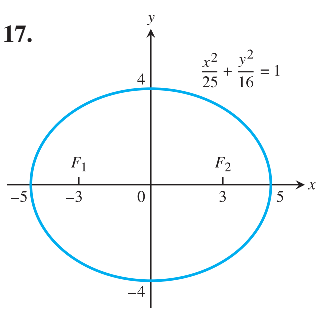
13.



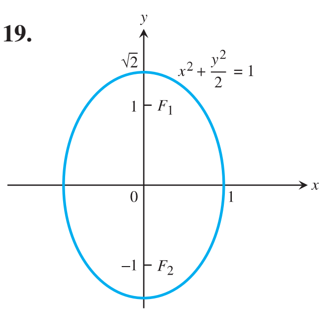
15.



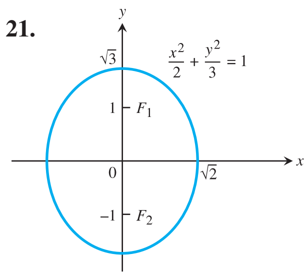
17.



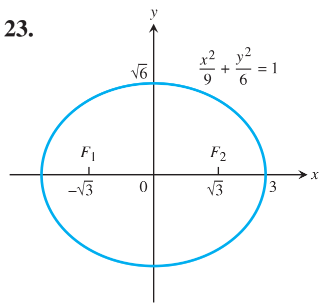
19.



21.

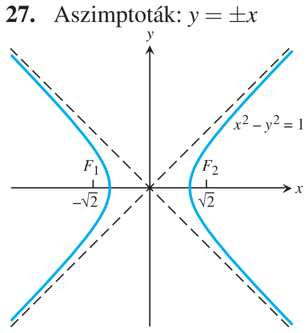


23.

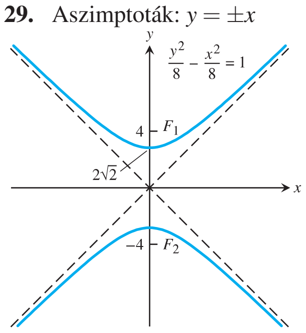


25. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

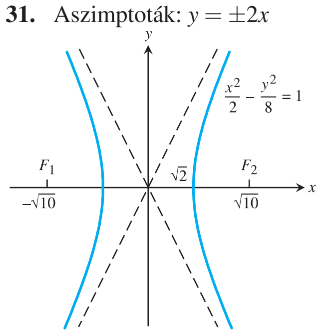
27. Aszimptoták: $y = \pm x$



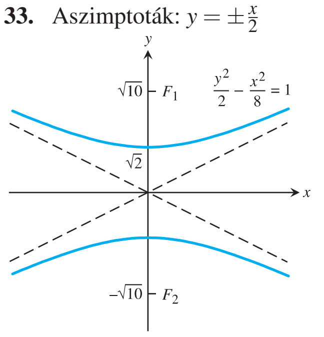
29. Aszimptoták: $y = \pm x$



31. Aszimptoták: $y = \pm 2x$



33. Aszimptoták: $y = \pm\frac{x}{2}$

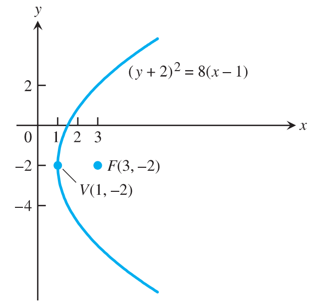


35. $y^2 - x^2 = 1$

37. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

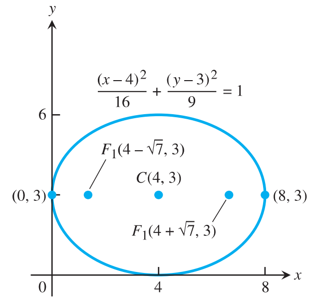
39. **(a)** tengelypont: $(1,-2)$, fókusz: $(3,-2)$, vezéregyenes: $x = -1$

(b)



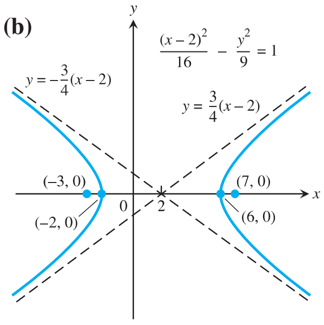
41. **(a)** fókuszok: $(4\pm\sqrt{7},3)$; tengelypontok: $(8,3)$ és $(0,3)$, középpont: $(4,3)$

(b)



43. **(a)** centrum: $(2,0)$; fókuszok: $(7,0)$ és $(-3,0)$, tengelypontok: $(6,0)$ és $(-2,0)$; aszimptoták: $y=\pm\frac{3}{4}(x-2)$

(b)



45. $(y+3)^2=4(x+2)$, $V(-2,3)$, $F(-1,-3)$, vezéregyenes: $x=-3$

47. $(x-1)^2=8(y+7)$, $V(1,-7)$, $F(1,-5)$, vezéregyenes: $y=-9$

49. $\frac{(x+2)^2}{6}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$, $F(-2\pm\sqrt{3}-1)$, $V(-2,\pm3-1)$, $C(-2,-1)$

51. $\frac{(x-2)^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{2}=1$, $F(3,3)$ és $F(1,3)$, $V(\pm\sqrt{3}+2,3)$, $C(2,3)$

53. $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$, $C(2,2)$, $F(5,2)$ és $F(-1,2)$, $V(4,2)$ és $V(0,2)$; aszimptoták: $(y-2)=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-2)$

55. $(y+1)^2-(x+1)^2=1$, $C(-1,-1)$, $F(-1,\sqrt{2}-1)$ és $F(-1,-\sqrt{2}-1)$, $V(-1,0)$ és $(V(-1,-2)$; aszimptoták: $(y+1)=\pm(x+1)$

57. $C(-2,0)$, $a=4$

59. $V(-1,1)$, $F(-1,0)$

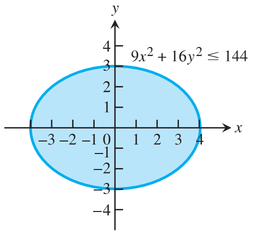
61. Ellipszis: $\frac{(x+2)^2}{5}+y^2=1$, $C(-2,0)$, $F(0,0)$ és $F(-4,0)$, $V(\sqrt{5}-2,0)$ és $V(-\sqrt{5}-2,0)$

63. Ellipszis: $\frac{(x-1)^2}{2}+(y-1)^2=1$, $C(1,1)$, $F(2,1)$ és $F(0,1)$, $V(\sqrt{2}+1,1)$ és $V(-\sqrt{2}+1,1)$

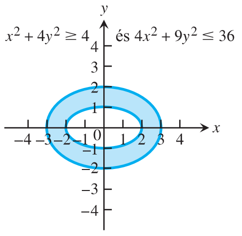
65. Hiperbola: $(x-1)^2-(y-2)^2=1$, $C(1,2)$, $F(1+\sqrt{2},2)$ és $F(1-\sqrt{2},2)$, $V(2,2)$ és $V(0,2)$; aszimptoták: $(y-2)=\pm(x-1)$

67. Hiperbola: $\frac{(y-3)^2}{6}-\frac{x^2}{3}=1$, $C(0,3)$, $F(0,6)$ és $F(0,0)$, $V(0,\sqrt{6}+3)$ és $V(0,-\sqrt{6}+3)$; aszimptoták: $y=\sqrt{2}x+3$ vagy $y=-\sqrt{2}x+3$

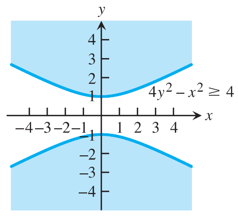
69.



71.



73.



77. $3x^2+3y^2-7x-7y+4=0$

79. $(x+2)^2+(y-1)^2=13$. A pont a kör belsejében van.

81. **(b)** 1 : 1

83. Hosszúság: $2\sqrt{2}$, szélesség: $\sqrt{2}$, terület: 4

85. 24π

87. $(0,16/(3\pi))$

10.2. Kúpszeletek osztályozása excentricitásuk alapján

1. $e=3/5$, $F(\pm3,0)$, $x=\pm25/3$

3. $e=1/\sqrt{2}$, $F(0,\pm1)$, $y=\pm2$

5. $e=1/\sqrt{3}$, $F(0,\pm1)$, $y=\pm3$

7. $e=\sqrt{2}/3$, $F(\pm\sqrt{3},0)$, $x=\pm3\sqrt{3}$

9. $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{36}=1$

11. $\frac{x^2}{4851}+\frac{y^2}{4900}=1$

13. $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

15. $e=1/2$, $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$

19. $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$, $F(1,4+\pm\sqrt{5})$, $e=\sqrt{5}/3$, $y=4\pm(9\sqrt{5}/5)$

21. $a=0$, $b=-4$, $c=0$, $e=\sqrt{3}/2$

23. $e=\sqrt{2}$, $F(\pm\sqrt{2},0)$, $x=\pm1/\sqrt{2}$

25. $e=\sqrt{2}$, $F(0,\pm4)$, $y=\pm2$

27. $e=\sqrt{5}$, $F(\pm\sqrt{10},0)$, $x=\pm2/\sqrt{10}$

29. $e=\sqrt{5}$, $F(0,\pm\sqrt{10})$, $y=\pm2/\sqrt{10}$

31. $y^2-\frac{x^2}{8}=1$

33. $x^2-\frac{y^2}{8}=1$

35. $e=\sqrt{2}$, $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$

37. $e=2$, $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

39. $\frac{(y-6)^2}{36}-\frac{(x-1)^2}{45}=1$

10.3. Másodfokú egyenletek és forgatások

1. hiperbola **3.** ellipszis **5.** parabola

7. parabola **9.** hiperbola **11.** hiperbola

13. ellipszis **15.** ellipszis

17. $x'^2-y'^2=4$, hiperbola

19. $4x'^2+16y'=0$, parabola

21. $y'^2=1$, párhuzamos egyenesek

23. $2\sqrt{2}x'^2+8\sqrt{2}y'=0$, parabola

25. $4x'^2+2y'^2=19$, ellipszis

27. $\sin\alpha=1/\sqrt{5}$, $\cos\alpha=2/\sqrt{5}$

29. $A' = 0{,}88$, $B' = 0{,}00$, $C' = 3{,}10$, $D' = 0{,}74$, $E' = -1{,}20$, $F' = -3;088x'^2 + 3{,}10y'^2 + 0{,}74x' - 1{,}20y' - 3 = 0$, ellipszis

31. $A' = 0{,}00$, $B' = 0{,}00$, $C' = 5{,}00$, $D' = 0$, $E' = 0$, $F' = -5$; $5{,}00y'^2 - 5 = 0$ vagy $y' = \pm 1{,}00$, párhuzamos egyenesek

33. $A' = 5{,}05$, $B' = 0{,}00$, $C' = -0{,}05$, $D' = -5{,}07$, $E' = -6{,}18$, $F' = -1$; $5{,}05x'^2 - 0{,}05y'^2 - 5{,}07x' - 6{,}18y' - 1 = 0$, hiperbola

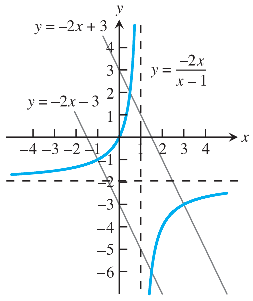
35. **(a)** $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$ **(b)** $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$
(c) $x'^2 + y'^2 = a^2$ **(d)** $y' = -\frac{1}{m}x'$
(e) $y' = -\frac{1}{m}x' + \frac{b}{m}$

37. **(a)** $x'^2 - y'^2 = 2$ **(b)** $x'^2 - y'^2 = 2a$

43. **(a)** parabola

45. **(a)** hiperbola

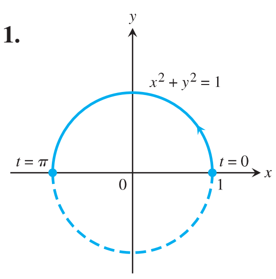
(b)



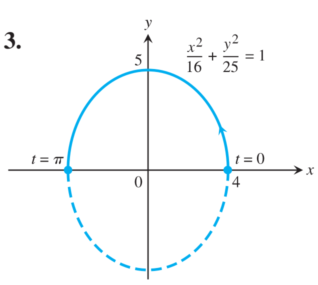
(c) $y = -2x - 3$, $y = -2x + 3$

10.4. Kúpszeletek és paraméteres egyenletek; a ciklois

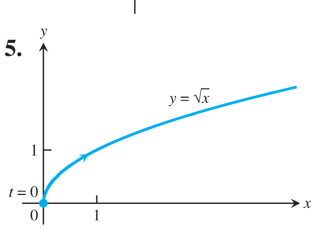
1.



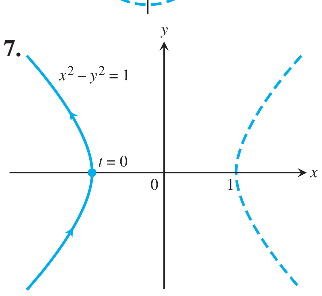
3.



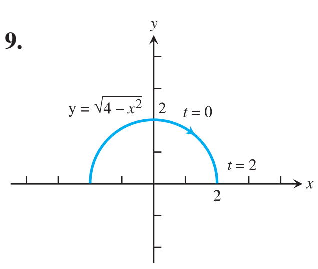
5.



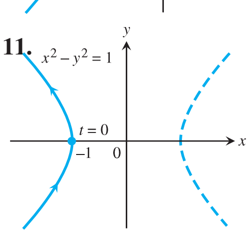
7.



9.



11.



13. $x = (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$
$y = (a-b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$

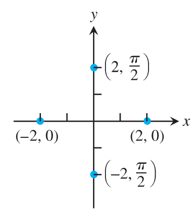
15. $x = a\sin^2 t\,\mathrm{tg}\,t$, $y = a\sin^2 t$

17. $(1,1)$

10.5. Polárkoordináták

1. a, e; b, g; c, h; d, f

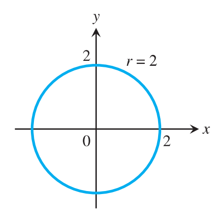
3.



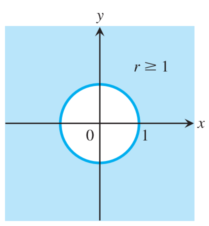
(a) $\left(2, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ és $\left(-2, \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right)$, n egész szám
(b) $(2, 2n\pi)$ és $(-2, (2n+1)\pi)$, n egész szám
(c) $\left(2, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)$ és $\left(-2, \frac{3\pi}{2} + (2n+1)\pi\right)$, n egész szám
(d) $(2, (2n+1)\pi)$ és $(-2, 2n\pi)$, n egész szám

5. **(a)** $(3,0)$ **(b)** $(-3,0)$ **(c)** $(-1,\sqrt{3})$
(d) $(1,\sqrt{3})$ **(e)** $(3,0)$ **(f)** $(1,\sqrt{3})$
(g) $(-3,0)$ **(h)** $(-1,\sqrt{3})$

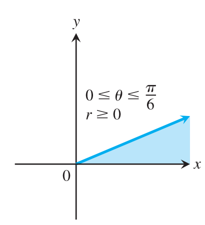
7.



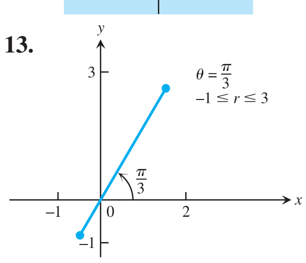
9.



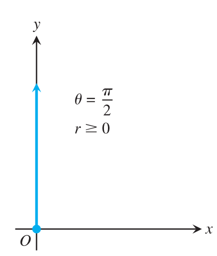
11.



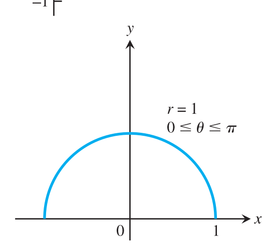
13.



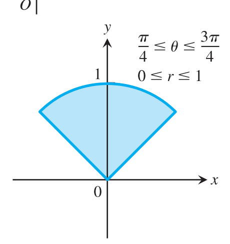
15.



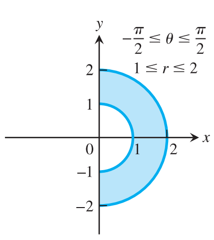
17.



19.



21.



23. $x = 2$, a $(2,0)$ ponton átmenő függőleges egyenes

25. $y = 0$, az x-tengely

27. $y = 4$, a $(0,4)$ ponton átmenő vízszintes egyenes

29. $x + y = 1$, egyenes, $m = -1$, $b = 1$

31. $x^2+y^2=1$, kör, $C(0,0)$, a sugár 1

33. $y-2x=5$, egyenes, $m=2$, $b=5$

35. $y^2=x$, parabola, tengelypontja a $(0,0)$ pont, jobbról nyitott

37. $y=e^x$, a természetes alapú logaritmusfüggvény grafikonja

39. $x+y=\pm1$, két egyenes vonal, meredekségük -1, az y-tengelyt a $b=\pm1$ pontokban metszi

41. $(x+2)^2+y^2=4$, kör, $C(-2,0)$, sugár 2

43. $x^2+(y-4)^2=16$, kör, $C(0,4)$, sugár 4

45. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$, kör, $C(1,1)$, sugár $\sqrt{2}$

47. $\sqrt{3}y+x=4$

49. $r\cos\theta=7$

51. $\theta=\pi/4$

53. $r=2$ vagy $r=-2$

55. $4r^2\cos^2\theta+9r^2\sin^2\theta=36$

57. $r\sin^2\theta=4\cos\theta$

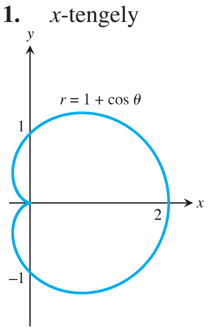
59. $r=4\sin\theta$

61. $r^2=6r\cos\theta-2r\sin\theta-6$

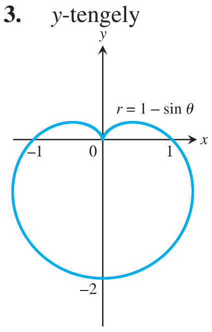
63. $(0,\theta)$, ahol θ valamilyen szög

10.6. Ábrázolás polárkoordinátákban

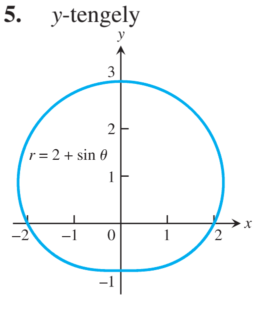
1. x-tengely



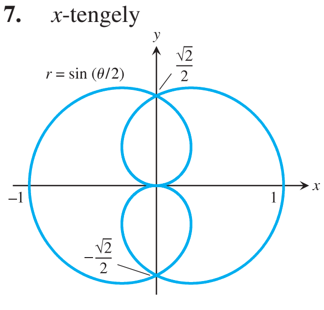
3. y-tengely



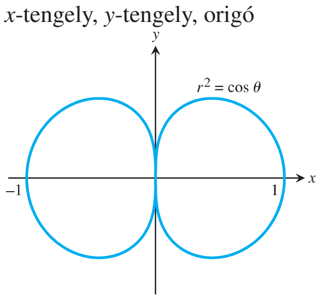
5. y-tengely



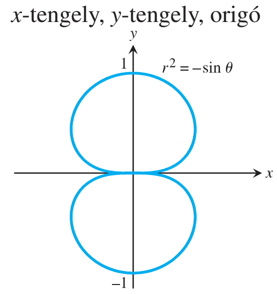
7. x-tengely



9. x-tengely, y-tengely, origó



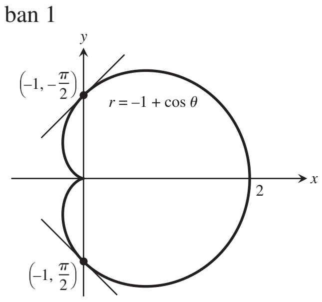
11. x-tengely, y-tengely, origó



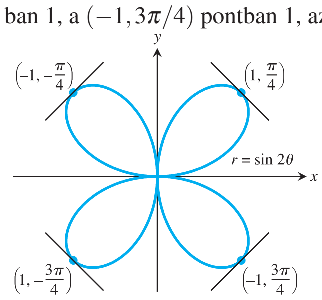
13. x-tengely, y-tengely, origó

15. origó

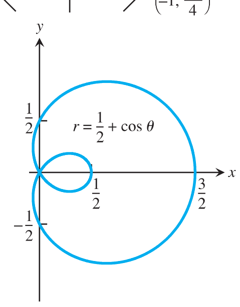
17. A $(-1,\pi/2)$ pontban a meredekség -1, a $(-1,-\pi/2)$ pontban 1



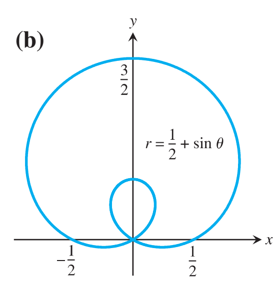
19. Az $(1,\pi/4)$ pontban a meredekség -1, a $(-1,-\pi/4)$ pontban 1, a $(-1,3\pi/4)$ pontban 1, az $(1,-3\pi/4)$ pontban -1



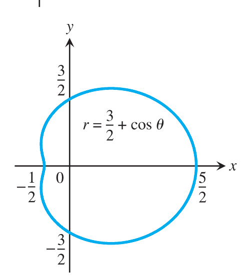
21. **(a)**



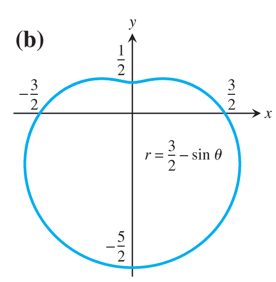
(b)



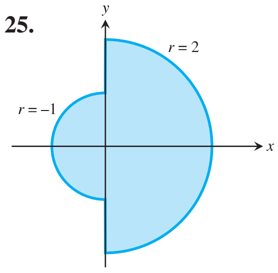
23. **(a)**



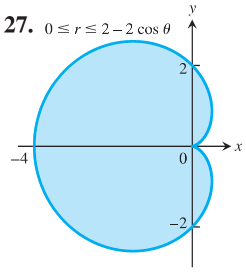
(b)



25.



27.



31. $(0,0)$, $(1,\pi/2)$, $(1,3\pi/2)$

33. $(0,0)$, $(\sqrt{3},\pi/3)$, $(-\sqrt{3},-\pi/3)$

35. $(\sqrt{2},\pm\pi/6)$, $(\sqrt{2},\pm5\pi/6)$

37. $(1,\pi/12)$, $(1,5\pi/12)$, $(1,13\pi/12)$, $(1,17\pi/12)$

43. (a)

51. $2y=\frac{2\sqrt{6}}{9}$

10.7. Terület és hosszúság polárkoordinátákban

1. 18π **3.** $\pi/8$ **5.** 2

7. $\frac{\pi}{2}-1$ **9.** $5\pi-8$ **11.** $3\sqrt{3}-\pi$

13. $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ **15.** $12\pi-9\sqrt{3}$ **17.** **(a)** $\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}$

19. $19/3$ **21.** 8 **23.** $3(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$

25. $\frac{\pi}{8}+\frac{3}{8}$ **27.** 2π **29.** $\pi\sqrt{2}$

31. $2\pi(2-\sqrt{2})$ **37.** $\left(\frac{5}{6}a,0\right)$

10.8. Kúpszeletek polárkoordinátákban

1. $r\cos(\theta-\pi/6)=5$, $y=-\sqrt{3}x+10$

3. $r\cos(\theta-4\pi/3)=3$, $y=-(\sqrt{3}/3)x-2\sqrt{3}$

5. $y=2-x$ **7.** $y=(\sqrt{3}/3)x+2\sqrt{3}$

9. $r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=3$ **11.** $r\cos\left(\theta\frac{\pi}{2}\right)=5$

13. $r=8\cos\theta$ **15.** $r=2\sqrt{\sin\theta}$

17. $C(2,0)$, a sugár = 2 **19.** $C(1,\pi)$, a sugár = 1

21. $(x-6)^2+y^2=36$, $r=12\cos\theta$

23. $x^2+(y-5)^2=25$, $r=10\sin\theta$

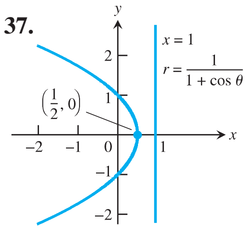
25. $(x+1)^2+y^2=1$, $r=-2\cos\theta$

27. $x^2+(y+1/2)^2=1/4$, $r=-\sin\theta$

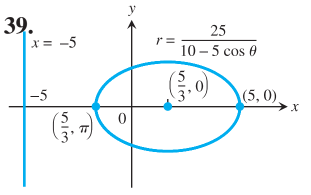
29. $r=2/(1+\cos\theta)$ **31.** $r=30/(1-5\sin\theta)$

33. $r=1/(2+\cos\theta)$ **35.** $r=10/(5-\sin\theta)$

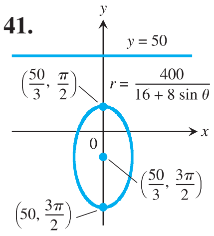
37.



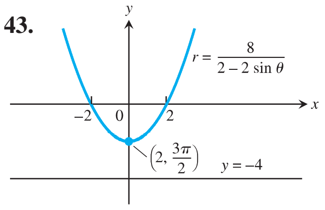
39.



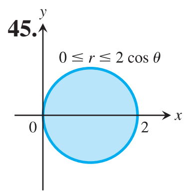
41.



43.



45.

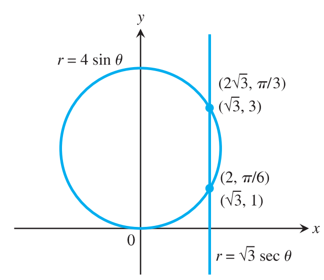


57. **(b)**

Bolygó	Perihélium	Afélium
Merkúr	0,3075 AU	0,4667 AU
Vénusz	0,7184 AU	0,7282 AU
Föld	0,9833 AU	1,0167 AU
Mars	1,3817 AU	1,6663 AU
Jupiter	4,9512 AU	5,4548 AU
Szaturnusz	9,0210 AU	10,0570 AU
Uránusz	18,2977 AU	20,0623 AU
Neptunusz	29,8135 AU	30,3065 AU
Plútó	29,6549 AU	49,2251 AU

59. **(a)** $x^2+(y-2)^2=4$, $x=\sqrt{3}$

(b)



61. $r=4/(1+\cos\theta)$

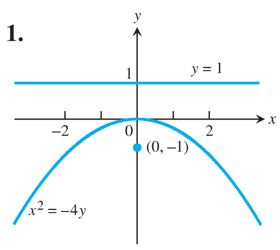
63. **(b)** A tűk egymástól 2 cm-re legyenek.

65. $r=2a\sin\theta$ (kör)

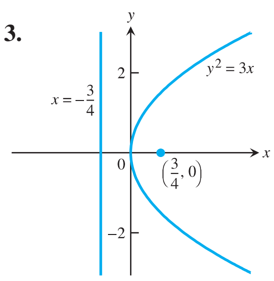
67. $r\cos(\theta-a)=p$ (egyenes)

Gyakorló feladatok

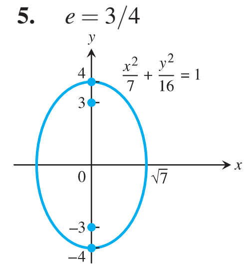
1.



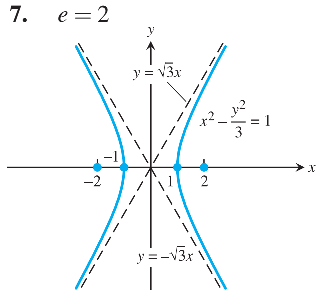
3.



5. $e=3/4$



7. $e=2$



9. $(x-2)^2=-12(y-3)$, $V(2,3)$, $F(2,0)$; vezéregyenes: $y=6$

11. $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+5)^2}{25}=1$, $C(-3,-5)$, $V(-3,0)$ és $V(-3,-10)$, $F(-3,-1)$ és $F(-3,-9)$

13. $\frac{(y-2\sqrt{2})^2}{8} - \frac{(x-2)^2}{2} = 1$, $C(2, 2\sqrt{2})$, $V(2, 4\sqrt{2})$ és $V(2, 0)$, $F(2, \sqrt{10}+2\sqrt{2})$ és $F(2, -\sqrt{10}+2\sqrt{2})$; aszimptoták: $y = 2x - 4 + 2\sqrt{2}$ és $y = -2x + 4 + 2\sqrt{2}$

15. Hiperbola: $\frac{(x-2)^2}{4} - y^2 = 1$, $F(2 \pm \sqrt{5}, 0)$, $V(2 \pm 2, 0)$, $C(2, 0)$; aszimptoták: $y = \pm\frac{1}{2}(x-2)$

17. Parabola: $(y-1)^2 = -16(x+3)$, $V(-3, 1)$, $F(-7, 1)$; vezéregyenes: $x = 1$

19. Ellipszis: $\frac{(x+3)}{16} + \frac{(y-2)}{9} = 1$, $F(\pm\sqrt{7} - 3, 2)$, $V(\pm 4 - 3, 2)$, $C(-3, 2)$

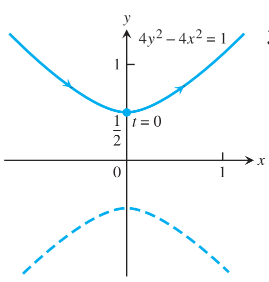
21. Kör: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$, $C(1, 1)$, sugár: $= \sqrt{2}$

23. Ellipszis **25.** Hiperbola **27.** Egyenes

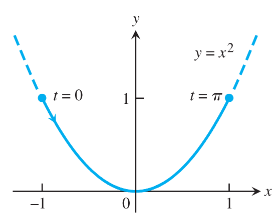
29. Ellipszis, $5x'^2 + 3y'^2 = 30$

31. Hiperbola, $y'^2 - x'^2 = 2$

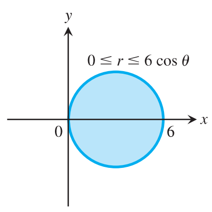
33.



35.



37.



39. (d) **41.** (l)

43. (k)

45. (i) **47.** $(0, 0)$

49. $(0, 0)$, $(1, \pm\pi/2)$ **51.** A grafikonok egybeesnek.

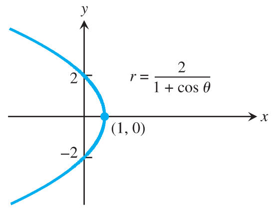
53. $\left(\sqrt{2}, \pi/4\right)$ **55.** $y = \left(\sqrt{3}/3\right)x - 4$

57. $x = 2$ **59.** $y = -3/2$

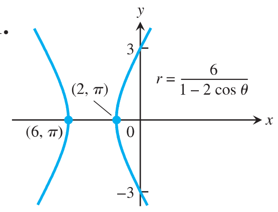
61. $x^2 + (y+2)^2 = 4$ **63.** $(x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2$

65. $r = -5\sin\theta$ **67.** $r = 3\cos\theta$

69.



71.



73. $r = \frac{4}{1+2\cos\theta}$ **75.** $r = \frac{2}{2+\sin\theta}$

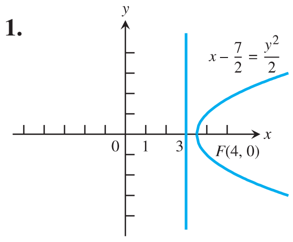
77. $9\pi/2$ **79.** $2 + \pi/4$

81. 8 **83.** $\pi - 3$

85. $(2 - \sqrt{2})\pi$ **87.** **(a)** 24π **(b)** 16π

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1.

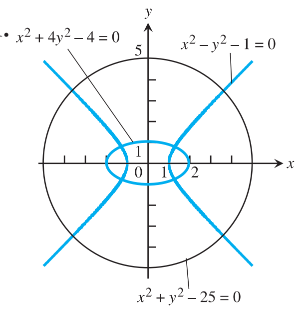


3. $3x^2 + 3y^2 - 8y + 4 = 0$

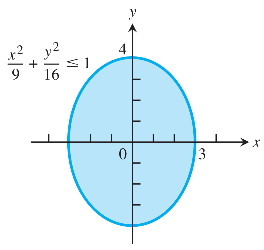
5. $(0, \pm 1)$

7. **(a)** $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{x^2}{48} = 1$ **(b)** $\frac{16\left(y+\frac{3}{4}\right)^2}{25} - \frac{2x^2}{75} = 1$

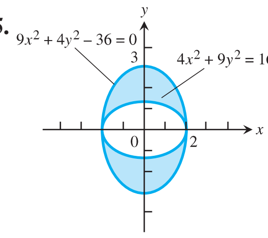
11.



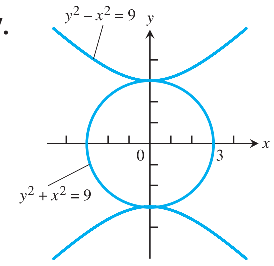
13.



15.



17.



19. $x = (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$,
$y = (a+b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$

21. **(a)** $r = e^{2\theta}$ **(b)** $\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi} - 1)$

23. $\frac{32\pi - 4\pi\sqrt{2}}{5}$ **25.** $r = \frac{4}{1+2\cos\theta}$

27. $r = \frac{2}{2+\sin\theta}$ **29.** **(a)** 120°

31. $1{,}6 \times 10^7$ km **33.** $e = \sqrt{2/3}$

35. Igen, egy parabola.

37. **(a)** $r = \frac{2a}{1+\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$ **(b)** $r = \frac{8}{3-\cos\theta}$ **(c)** $r = 31 + 2\sin\theta$

43. $\pi/2$ **47.** $\left(2, \pm\frac{\pi}{3}\right)$, $\frac{\pi}{2}$

51. $\pi/2$ **53.** $\pi/4$

11. fejezet

11.1. Sorozatok

1. $a_1 = 0$, $a_2 = -1/4$, $a_3 = -2/9$, $a_4 = -3/16$

3. $a_1 = 1$, $a_2 = -1/3$, $a_3 = 1/5$, $a_4 = -1/7$

5. $a_1 = 1/2,\ a_2 = 1/2,\ a_3 = 1/2,\ a_4 = 1/2$

7. $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \frac{127}{64}, \frac{255}{128}, \frac{511}{256}, \frac{1023}{512}$

9. $2, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$

11. 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55

13. $a_n = (-1)^{n+1}, n \geq 1$

15. $a_n = (-1)^{n+1}n^2, n \geq 1$

17. $a_n = n^2 - 1, n \geq 1$

19. $a_n = 4n - 3, n \geq 1$

21. $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}, n \geq 1$

23. Konvergens, 2

25. Konvergens, -1

27. Konvergens, -5

29. Divergens

31. Divergens

33. Konvergens, $\frac{1}{2}$

35. Konvergens, 0

37. Konvergens, $\sqrt{2}$

39. Konvergens, 1

41. Konvergens, 0

43. Konvergens, 0

45. Konvergens, 0

47. Konvergens, 1

49. Konvergens, e^7

51. Konvergens, 1

53. Konvergens, 1

55. Divergens

57. Konvergens, 4

59. Konvergens, 0

61. Divergens

63. Konvergens, e^{-1}

65. Konvergens, $e^{2/3}$

67. Konvergens, x, $(x > 0)$

69. Konvergens, 0

71. Konvergens, 1

73. Konvergens, $1/2$

75. Konvergens, $\pi/2$

77. Konvergens, 0

79. Konvergens, 0

81. Konvergens, $1/2$

83. Konvergens, 0

85. $x_n = 2^{n-2}$

87. **(a)** $f(x) = x^2 - 2$, $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$,
(b) $f(x) = \mathrm{tg}(x) - 1$, $\pi/4 \approx 0{,}7853981635$,
(c) $f(x) = e^x$, divergens

89. **(b)** 1

97. Növekvő, korlátos

99. Korlátos

101. Konvergens, Weierstrass tétele

103. Konvergens, Weierstrass tétele

105. Divergens, definíció

109. Konvergens

111. Konvergens

121. $N = 692$, $a_n = \sqrt[n]{0{,}5}$, $L = 1$

123. $N = 65$, $a_n = 0{,}9^n$, $L = 0$

125. **(b)** $\sqrt{3}$

11.2. Végtelen sorok

1. $s_n = \dfrac{2(1-(1/3)^n)}{1-(1/3)}$, 3

3. $s_n = \dfrac{1-(-1/2)^n}{1-(-1/2)^n}$, 2/3

5. $s_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+2}$, $\dfrac{1}{2}$

7. $1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{64} + \ldots$, $\dfrac{4}{5}$

9. $\dfrac{7}{4} + \dfrac{7}{16} + \dfrac{7}{64} + \ldots$, $\dfrac{7}{3}$

11. $(5+1) + \left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{9}\right) + \left(\dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{27}\right) + \ldots$, $\dfrac{23}{2}$

13. $(1+1) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5}\right) + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{25}\right) + \left(\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{125}\right) + \ldots$, $\dfrac{17}{6}$

15. 1

17. 5

19. 1

21. $-\frac{1}{\ln 2}$

23. Konvergens, $2 + \sqrt{2}$

25. Konvergens, 1

27. Divergens

29. Konvergens, $\frac{e^2}{e^2-1}$

31. Konvergens, $2/9$

33. Konvergens, $3/2$

35. Divergens

37. Divergens

39. Konvergens, $\frac{\pi}{\pi - e}$

41. $a = 1$, $r = -x$, ha $|x| < 1$, akkor $1/(1+x)$-hez konvergál

43. $a = 3$, $r = (x-1)/2$, ha $x \in (-1, 3)$, akkor $6/(3-x)$-hez tart

45. $|x| < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1-2x}$

47. $-2 < x < 0$, $\frac{1}{2+x}$

49. $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k$ egész szám; $\frac{1}{1-\sin x}$

51. $23/99$

53. $7/9$

55. $1/15$

57. $41\,333/33\,300$

59. **(a)** $\displaystyle\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$,
(c) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n-2)}$

69. **(a)** $r = 3/5$, **(b)** $r = -3/10$

71. $|r| < 1$, $\frac{1+2r}{1-r^2}$

73. 28 m

75. 8 m^2

77. **(a)** $3\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$,
(b) $A_n = A + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)A + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}A$,
$A = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 2\sqrt{3}/5$

11.3. Az integrálkritérium

1. Konvergens: mértani sor, $r = \frac{1}{10} < 1$

3. Divergens: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

5. Divergens: p-sor, $p < 1$

7. Konvergens: mértani sor, $r = \frac{1}{8} < 1$

9. Divergens: integrálkritérium

11. Konvergens: mértani sor, $r = 2/3 < 1$

13. Divergens: integrálkritérium

15. Divergens: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n+1} \neq 0$

17. Divergens: $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}/\ln n) \neq 0$

19. Divergens: mértani sor, $r = \frac{1}{ln 2} > 1$

21. Konvergens: integrálkritérium

23. Divergens: n-edik tag

25. Konvergens: integrálkritérium

27. Konvergens: integrálkritérium

29. Konvergens: integrálkritérium

31. $a = 1$

33. **(b)** kb. $41{,}55$

35. Igaz

11.4. Összehasonlító kritériumok

1. Divergens, vö. $\sum(1/\sqrt{n})$

3. Konvergens, vö. $\sum(1/2^n)$

5. Divergens: vö. n-edik tagok sorozata

7. Konvergens: $\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n < \left(\frac{n}{3n}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

9. Divergens: vö. $\sum(1/n)$

11. Konvergens: vö. $\sum(1/n^2)$

13. Divergens: vö. $\sum(1/n)$

15. Divergens: vö. $\sum(1/n)$

17. Divergens: integrálkritérium

19. Konvergens: vö. $\sum(/n^{3/2})$

21. Konvergens: $\frac{1}{n2^n} \le \frac{1}{2^n}$

23. Konvergens: $\frac{1}{3^{n-1}+1} < \frac{1}{3^{n-1}}$

25. Divergens: vö. $\sum(1/n)$

27. Konvergens: vö. $\lim(1/n^2)$

29. Konvergens: $\frac{\operatorname{arctg} n}{n^{1,1}} < \frac{\pi/2}{n^{1,1}}$

31. Konvergens: vö. $\sum(1/n^2)$

33. Divergens: vö. $\sum(1/n)$

35. Konvergens: vö. $\sum(1/n^2)$

11.5. A hányados- és a gyökkritérium

1. Konvergens: hányadoskritérium

3. Divergens: hányadoskritérium

5. Konvergens: hányadoskritérium

7. Konvergens: vö. $\sum(3/(1,25)^n)$

9. Divergens: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n = e^{-3} \neq 0$

11. Konvergens: vö. $\sum(1/n^2)$

13. Divergens: vö. $\sum(1/(2n))$

15. Divergens: vö. $\sum(1/n)$

17. Konvergens: hányadoskritérium

19. Konvergens: gyökkritérium

21. Konvergens: gyökkritérium

23. Konvergens: gyökkritérium

25. Konvergens: vö. $\sum(1/n^2)$

27. Konvergens: hányadoskritérium

29. Divergens: hányadoskritérium

31. Konvergens: hányadoskritérium

33. Konvergens: hányadoskritérium

35. Divergens: $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/n!} \to 1$

37. Konvergens: hányadoskritérium

39. Divergens: gyökkritérium

41. Konvergens: gyökkritérium

43. Konvergens: hányadoskritérium

47. Igen

11.6. Alternáló sorok, abszolút és feltételes konvergencia

1. Konvergens: 16. Tétel

3. Divergens: $a_n \not\to 0$

5. Konvergens: 16. Tétel

7. Divergens: $a_n \to \frac{1}{2}$

9. Konvergens: 16. Tétel

11. Abszolút konveergens: a tagok abszolútértékei mértani sort alkotnak

13. Feltételesen konvergens: $1/\sqrt{n} \to 0$, de $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergens

15. Abszolút konvergens: vö. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n^2)$

17. Feltételesen konvergens: $1/(n+3) \to 0$, de $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$ divergens (vö. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1/n)$)

19. Divergens: $\frac{3+n}{5+n} \to 1$

21. Feltételesen konvergens: $\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right) \to 0$, de $(1+n)/n^2 > 1/n$.

23. Abszolút konvergens: hányadoskritérium

25. Abszolút konvergens: integrálkritérium

27. Divergens: $a_n \not\to 0$

29. Abszolút konvergens: hányadoskritérium

31. Abszolút konvergens: $\frac{1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n^2}$

33. Abszolút konvergens: $\left|\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}}$ (konvergens p-sor)

35. Abszolút konvergens: gyökkritérium

37. Divergens: $a_n \to \infty$

39. Feltételesen konvergens: $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 1/\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right) \to 0$, de a tagok abszolútértékeiből álló sor divergens (vö. $\sum(1/\sqrt{n})$)

41. Divergens: $a_n \to 1/2 \neq 0$

43. Abszolút konvergens: $\operatorname{sech} n = \frac{2}{e^n+e^{-n}} = \frac{2e^n}{e^{2n}+1} < \frac{2e^n}{e^{2n}} = \frac{2}{e^n}$, az utóbbi konvergens mértani sor tagja

45. $|\text{hiba}| < 0,2$

47. $|\text{hiba}| < 2\cdot 10^{-11}$

49. 0,54030

51. **(a)** $a_n \ge a_{n+1}$, **(b)** $-1/2$

11.7. Hatványsorok

1. **(a)** $1,\ -1<x<1$, **(b)** $-1<x<1$, **(c)** sehol sem

3. **(a)** $1/4,\ -1/2<x<0$, **(b)** $-1/2<x<0$, **(c)** sehol sem

5. **(a)** $10,\ -8<x<12$, **(b)** $-8<x<12$, **(c)** sehol sem

7. **(a)** $1,\ -1<x<1$, **(b)** $-1<x<1$, **(c)** sehol sem

9. **(a)** $3,\ -3\le x\le 3$, **(b)** $-3\le x\le 3$, **(c)** sehol sem

11. **(a)** ∞, minden x-re, **(b)** minden x-re, **(c)** sehol sem

13. **(a)** ∞, minden x-re, **(b)** minden x-re, **(c)** sehol sem

15. **(a)** $1,\ -1\le x<1$, **(b)** $-1<x<1$, **(c)** $x=-1$

17. **(a)** $5,\ -8<x<2$, **(b)** $-8<x<2$, **(c)** sehol sem

19. **(a)** $3,\ -3<x<3$, **(b)** $-3<x<3$, **(c)** sehol sem

21. **(a)** $1,\ -1<x<1$, **(b)** $-1<x<1$, **(c)** sehol sem

23. **(a)** $0,\ x=0$, **(b)** $x=0$, **(c)** sehol sem

25. **(a)** $2,\ -4<x\le 0$, **(b)** $-4<x<0$, **(c)** $x=0$

27. **(a)** $1,\ -1\le x\le 1$, **(b)** $-1\le x\le 1$, **(c)** sehol sem

29. **(a)** $1/4,\ 1\le x\le 3/2$, **(b)** $1\le x\le 3/2$, **(c)** sehol sem

31. **(a)** $1,\ (-1-\pi)\le x<(1-\pi)$, **(b)** $(-1-\pi)<x<(1-\pi)$, **(c)** $x=-1-\pi$

33. $-1<x<3,\ 4/(3+2x-x^2)$

35. $0<x<16,\ 2/(4-\sqrt{x})$

37. $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\ 3/(2-x^2)$

39. $1<x<5,\ 2/(x-1);\ 1<x<5,\ -2/(x-1)^2$

41. **(a)** $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\dots$ minden x-re konv.

(b) és **(c)** $2x-\frac{2^3x^3}{3!}+\frac{2^5x^5}{5!}-\frac{2^7x^7}{7!}+\frac{2^9x^9}{9!}-\frac{2^{11}x^{11}}{11!}+\dots$

43. **(a)** $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}+\frac{17x^8}{2520}+\frac{31x^{10}}{14175},\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

(b) $1+x^2+\frac{2x^4}{3}+\frac{17x^6}{45}+\frac{62x^8}{315}+\dots,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

11.8. Taylor- és Maclaurin-sorok

1. $P_0(x)=0$,
$P_1(x)=x-1,\ P_2(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2$,
$P_3(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3$

3. $P_0(x)=\frac{1}{2},\quad P_1(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)$,
$P_2(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2$,
$P_3(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-\frac{1}{16}(x-2)^3$

5. $P_0(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$,
$P_1(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,
$P_2(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$,
$P_3(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$

7. $P_0(x)=2,\quad P_1(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)$,
$P_2(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2$,
$P_3(x)=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3$

9. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$

11. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-x^3+\dots$

13. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n3^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ **15.** $7\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}$

17. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

19. x^4-2x^3-5x+4

21. $8+10(x-2)+6(x-2)^2+(x-2)^3$

23. $21-36(x+2)+25(x+2)^2-8(x+2)^3+(x+2)^4$

25. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n$ **27.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^2}{n!}(x-2)^n$

33. $L(x)=0,\ Q(x)=-x^2/2$

35. $L(x)=1,\ Q(x)=1+x^2/2$

37. $L(x)=x,\ Q(x)=x$

11.9. A Taylor-sorok konvergenciája, Taylor tétele

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-5x)^n}{n!}=1-5x+\frac{5^2x^2}{2!}-\frac{5^3x^3}{3!}+\dots$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-1)^n(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}=$

$=-5x+\frac{5x^3}{3!}-\frac{5x^5}{5!}+\frac{5x^7}{7!}-\dots$

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{(2n)!}$

7. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\frac{x^5}{4!}+\dots$

9. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}=\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!}+\dots$

11. $x-\frac{\pi^2x^3}{2!}+\frac{\pi^4x^5}{4!}-\frac{\pi^6x^7}{6!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}$

13. $1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!}=$

$=1-\frac{(2x)^2}{2\cdot 2!}+\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}-\frac{(2x)^6}{2\cdot 6!}+\frac{(2x)^8}{2\cdot 8!}-\dots$

15. $x^2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n=x^2+2x^3+4x^4+\dots$

17. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+4x^3+\dots$

19. $|x|<0,06^{1/5}<0,56968$

21. $|\text{hiba}|<(10^{-3})^3/6<1,67\cdot 10^{-10},\ -10^{-3}<x<0$

23. $|\text{hiba}|<(3^{0,1})\cdot 0,1^3/6<1,87\cdot 10^{-4}$

25. $0,000293653$ **27.** $|x|<0,02$

31. $\sin x,\ x=0,1,\ \sin(0,1)$ **33.** $\operatorname{arctg} x,\ x=\pi/3$

35. $e^x\sin x=x+x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}-\frac{x^6}{90}\dots$

43. **(a)** $Q(x)=1+kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2$, **(b)** ha $0\le x<100^{-1/3}$

49. **(a)** -1, **(b)** $(1/\sqrt{2})(1+i)$, **(c)** $-i$

53. $x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5\dots$, minden x-re konvergens

11.10. Hatványsorok alkalmazása

1. $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}$

3. $1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3$

5. $1-x+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^3}{2}$

7. $1-\frac{x^3}{2}+\frac{3x^6}{8}-\frac{5x^9}{16}$

9. $1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{16x^3}$

11. $(1+x)^4=1+4x+6x^2+4x^3+x^4$

13. $(1-2x)^3=1-6x+12x^2-8x^3$

15. $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=e^{-x}$

17. $y=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n/n!)=e^x-1$

19. $y=\sum_{n=2}^{\infty}(x^n/n!)=e^x-x-1$

21. $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}=e^{x^2/2}$

23. $y=\sum_{n=0}^{\infty}2x^n=\frac{2}{1-x}$

25. $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\operatorname{sh}x$

27. $y=2+x-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!}$

29. $y=x-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}-3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

31. $y=a+bx+\frac{1}{6}x^3-\frac{ax^4}{3\cdot4}-\frac{bx^5}{4\cdot5}-\frac{x^7}{6\cdot6\cdot7}+\frac{ax^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8}+\frac{bx^9}{4\cdot5\cdot8\cdot9}\cdots$

33. 0,00267

35. 0,1

37. 0,0999444611

39. 0,100001

41. $1/(13\cdot6!)\approx0{,}00011$

43. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot5!}$

45. **(a)** $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}$

(b) $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3\cdot4}+\frac{x^6}{5\cdot6}-\frac{x^8}{7\cdot8}+\ldots+(-1)^{15}\frac{x^{32}}{31\cdot32}$

47. $1/2$

49. $-1/24$

51. $1/3$

53. -1

55. 2

59. 500 tag

61. 4 tag

63. **(a)** $x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}$, konvergenciasugár $=1$

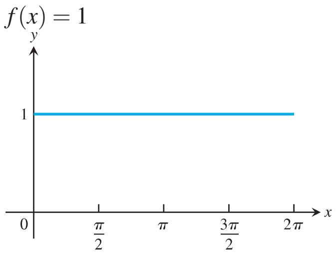
(b) $\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-\frac{5x^7}{112}$

65. $1-2x+3x^2-4x^3+\ldots$

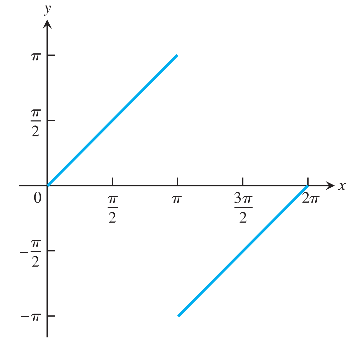
71. **(c)** $3/4$

11.11. Fourier-sorok

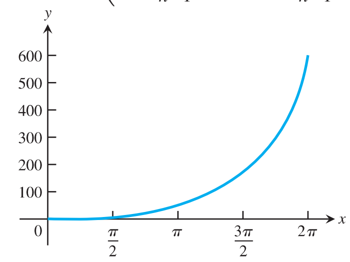
1. $f(x)=1$



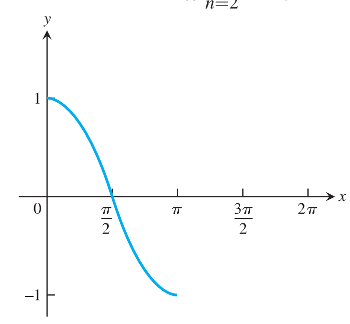
3. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$



5. $\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(nx)}{n^2+1}\right)$



7. $f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(1+(-1)^n)}{n^2-1}\sin nx$



Gyakorló feladatok

1. Konvergens, a határérték 1

3. Konvergens, a határérték -1

5. Divergens

7. Konvergens, a határérték 0

9. Konvergens, a határérték 1

11. Konvergens, a határérték e^{-5}

13. Konvergens, a határérték 3

15. Konvergens, a határérték $\ln 2$

17. Divergens

19. $1/6$

21. $3/2$

23. $e/(e-1)$

25. Divergens

27. Feltételesen konvergens

29. Feltételesen konvergens

31. Abszolút konvergens

33. Abszolút konvergens

35. Abszolút konvergens

37. Abszolút konvergens

39. Abszolút konvergens

41. **(a)** 3, $-7\le x<-1$, **(b)** $-7<x<-1$, **(c)** $x=-7$

43. **(a)** $1/3$, $0\le x\le 2/3$, **(b)** $0\le x\le 2/3$, **(c)** nincs ilyen

45. **(a)** ∞, minden x, **(b)** minden x, **(c)** nincs ilyen

47. **(a)** $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, **(b)** $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, **(c)** nincs ilyen

49. **(a)** e, $-e < x < e$, **(b)** $-e < x < e$, **(c)** üres halmaz

51. $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{5}$ **53.** $\sin x$, π, 0 **55.** e^x, $\ln 2$, 2

57. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ **59.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

61. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{5n}}{(2n)!}$ **63.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\pi x)/2)^n}{n!}$

65. $2 - \frac{(x+1)}{2 \cdot 1!} + \frac{3(x+1)^2}{2^3 \cdot 2!} + \frac{9(x+1)^3}{2^5 \cdot 3!} + \dots$

67. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4^2}(x-3) + \frac{1}{4^3}(x-3)^2 - \frac{1}{4^4}(x-3)^3$

69. $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} x^n = -e^{-x}$

71. $y = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} x^n = 3e^{-2x}$

73. $y = -1 - x + 2\sum_{n=2}^{\infty} (x^n/n!) = 2e^x - 3x - 3$

75. $y = 1 + x + 2\sum_{n=0}^{\infty} (x^n/n!) = 2e^x - 1 - x$

77. $0,4849171431$ **79.** $\approx 0,4872223583$

81. $7/2$ **83.** $1/12$

85. -2 **87.** $r = -3$, $s = 9/2$

89. **(b)** $|\text{hiba}| < |\sin(1/42)| < 0,02381$, a becslés alsó, mivel a maradék pozitív

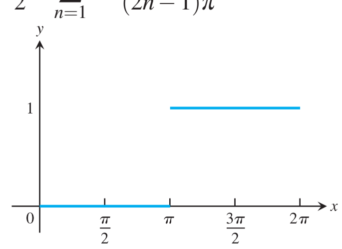
91. $2/3$

93. $\ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$, a sor összege $\ln\frac{1}{2}$

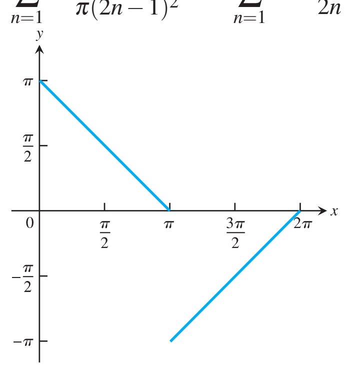
95. **(a)** ∞, **(b)** $a = 1$, $b = 0$

97. Konvergál

105. $\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin((2n-1)x)}{(2n-1)\pi}$



107. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos((2n-1)x)}{\pi(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin((2n-1)x)}{2n-1}$



Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. Konvergens: összehasonlító kritérium

3. Divergens: a tagokból álló sorozatra vonatkozó kritérium

5. Konvergens: összehasonlító kritérium

7. Divergens: a tagokból álló sorozatra vonatkozó kritérium

9. $a = \pi/3$-mal

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \dots$$

11. $a = 0$-val $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

13. $a = 22\pi$-vel

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}(x - 22\pi)^2 + \frac{1}{4!}(x - 22\pi)^4 - \frac{1}{6!}(x - 22\pi)^6 + \dots$$

15. Konvergens, a határérték b

17. $\pi/2$ **23.** $b = \pm 1/5$

25. $a = 2$, $l = -7/6$ **29.** **(b)** Igen

35. **(a)** $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, **(b)** 6, **(c)** $1/q$

37. **(a)** $R_n = C_0 e^{-kt_0}(1 - e^{-nkt_0})/(1 - e^{-kt_0})$, $R = C_0(e^{-kt_0})/(1 - e^{-kt_0}) = C_0/(e^{kt_0} - 1)$

(b) $R_1 = 1/e \approx 0,368$, $R_{10} = R(1 - e^{-10}) \approx R \cdot 0,9999546 \approx 0,58195$, $R \approx 0,58198$, $0 < (R - R_{10})/R < 0,0001$

(c) 7

12. fejezet

12.1. Háromdimenziós koordináta-rendszerek

1. A $(2,3,0)$ ponton átmenő egyenes párhuzamos a z-tengellyel.

3. Az x-tengely

5. Az xy-sík $x^2 + y^2 = 4$ köre.

7. Az $x^2 + z^2 = 4$ kör az xz-síkon.

9. Az $y^2 + z^2 = 1$ kör az yz-síkon.

11. Az $x^2 + y^2 = 16$ kör az xy-síkon.

13. **(a)** Az xy-sík első síknegyede.
(b) Az xy-sík negyedik síknegyede.

15. **(a)** Az origó középpontú, 1 sugarú gömbtest.

(b) Az összes olyan pont, amely 1-nél nagyobb távolságra van az origótól.

17. **(a)** Az 1 sugarú, origó középpontú felső félgömb.
(b) Az 1 sugarú, origó középpontú felső félgömbtest.

19. **(a)** $x = 3$ **(b)** $y = -1$ **(c)** $z = -2$

21. **(a)** $z = 1$ **(b)** $x = 3$ **(c)** $y = -1$

23. **(a)** $x^2 + (y-2)^2 = 4$, $z = 0$
(b) $(y-2)^2 + z^2 = 4$, $x = 0$

(c) $x^2+z^2=4,\ y=2$

25. **(a)** $y=3,\ z=-1$ **(b)** $x=1,\ z=-1$ **(c)** $x=1,\ y=3$

27. $x^2+y^2+z^2=25,\ z=3$

29. $0\le z\le 1$ **31.** $z\le 0$

33. **(a)** $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2<1$
(b) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2>1$

35. 3 **37.** 7 **39.** $2\sqrt{3}$

41. $C(-2,0,2),\ a=2\sqrt{2}$

43. $C(\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2}),\ a=\sqrt{2}$

45. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

47. $(x+2)^2+y^2+z^2=3$

49. $C(-2,0,2),\ a=\sqrt{8}$

51. $C\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right),\ a=\frac{5\sqrt{3}}{4}$

53. **(a)** $\sqrt{y^2+z^2}$ **(b)** $\sqrt{x^2+z^2}$ **(c)** $\sqrt{x^2+y^2}$

55. $\sqrt{17}+\sqrt{33}+6$

12.2. Vektorok

1. **(a)** $\langle 9,-6\rangle$ **(b)** $3\sqrt{13}$

3. **(a)** $\langle 1,3\rangle$ **(b)** $\sqrt{10}$

5. **(a)** $\langle 12,-19\rangle$ **(b)** $\sqrt{505}$

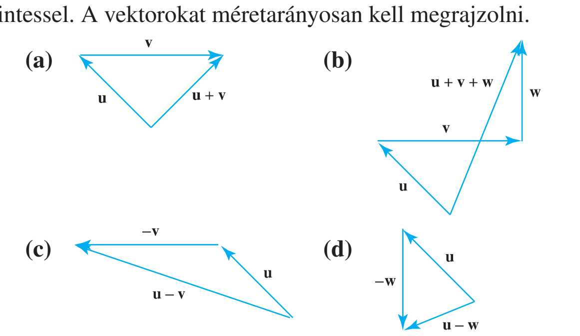
7. **(a)** $\left\langle \frac{1}{5},\frac{14}{5}\right\rangle$ **(b)** $\frac{\sqrt{197}}{5}$

9. $\langle 1,-4\rangle$ **11.** $\langle -2,-3\rangle$

13. $\left\langle -\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\rangle$ **15.** $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$

17. $\langle -3,2,-1\rangle$ **19.** $\langle -3,16,0\rangle$ **21.** $\langle 3,5,-8\rangle$

23. **v** vízszintes, **w** függőleges vektor, **u** 45° szöget zár be a vízszintessel. A vektorokat méretarányosan kell megrajzolni.



25. $3\left(\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$

27. $5(\mathbf{k})$

29. $\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$

31. **(a)** $2\mathbf{i}$ **(b)** $-\sqrt{3}\mathbf{k}$ **(c)** $\frac{3}{10}\mathbf{j}+\frac{2}{5}\mathbf{k}$ **(d)** $6\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

33. $\frac{7}{13}(12\mathbf{i}-5\mathbf{k})$

35. **(a)** $\frac{3}{5\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{4}{5\sqrt{2}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ **(b)** $(1/2,3,5/2)$

37. **(a)** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$ **(b)** $\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$

39. $A(4,-3,5)$ **41.** $a=\frac{3}{2},\ b=\frac{1}{2}$ **43.** $5\sqrt{3}\mathbf{i},\ 5\mathbf{k}$

45. $\approx\langle -338{,}095,\ 725{,}046\rangle$

47. **(a)** $(5\cos 60°,5\sin 60°)=\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$
(b) $(5\cos 60°+10\cos 315°,5\sin 60°+10\sin 315°)=$
$=\left(\frac{5+10\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{3}-10\sqrt{2}}{2}\right)$

49. **(a)** $\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ **(b)** $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ **(c)** $(2,2,1)$

12.3. Skalárszorzat

1. **(a)** $-25,\ 5,\ 5$ **(b)** -1 **(c)** -5 **(d)** $-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\sqrt{5}\mathbf{k}$

3. **(a)** $25,\ 15,\ 5$ **(b)** $\frac{1}{3}$ **(c)** $\frac{5}{3}$ **(d)** $\frac{1}{9}(10\mathbf{i}+11\mathbf{j}-2\mathbf{k})$

5. **(a)** $2,\ \sqrt{34}\ \sqrt{3}$ **(b)** $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{34}}$ **(c)** $\frac{2}{\sqrt{34}}$ **(d)** $\frac{1}{17}(5\mathbf{j}-3\mathbf{k})$

7. **(a)** $1-\sqrt{17},\ \sqrt{26},\ \sqrt{21}$ **(b)** $\frac{10+\sqrt{17}}{\sqrt{546}}$
(c) $\frac{10+\sqrt{17}}{\sqrt{26}}$ **(d)** $\frac{10+\sqrt{17}}{\sqrt{26}}(5\mathbf{i}+\mathbf{j})$

9. 0,75 radián **11.** 1,77 radián

13. Az A csúcsnál lévő szög $=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx 63{,}435$ fok, a B csúcsnál lévő szög $=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\approx 53{,}130$ fok, a C csúcsnál lévő szög $=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\approx 63{,}435$ fok.

17. $\left(\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}\right)+\left(-\frac{3}{2}\mathbf{i}+\frac{3}{2}\mathbf{j}+4\mathbf{k}\right)$

19. $\left(\frac{14}{3}\mathbf{i}+\frac{28}{3}\mathbf{j}-\frac{14}{3}\mathbf{k}\right)+\left(\frac{10}{3}\mathbf{i}-\frac{16}{3}\mathbf{j}-\frac{22}{3}\mathbf{k}\right)$

21. Két egyenlő hosszúságú vektor összege *mindig* merőleges a különbségükre, amint az a $(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)\cdot(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)=\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2=|\mathbf{v}_1|^2-|\mathbf{v}_2|^2=0$ azonosságból látható.

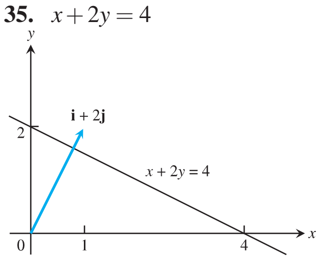
27. A vízszintes összetevő ≈ 396 m/s, a függőleges összetevő ≈ 55 m/s.

29. **(a)** Mivel $|\cos\theta|\le 1$, ezért
$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|=|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|\,|\cos\theta|\le|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|(1)=|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|$.

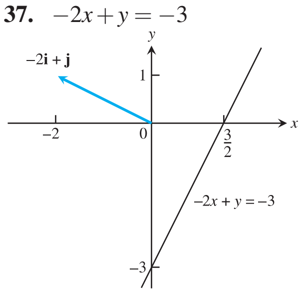
(b) Egyenlőséget akkor kapunk, ha $|\cos\theta|=1$ vagy ha **u** és **v** legalább egyike nulla. Ha a vektorok nem nullák, akkor egyenlőséget $\theta=0$ vagy π esetén kapunk, azaz amikor a vektorok párhuzamosak.

31. a

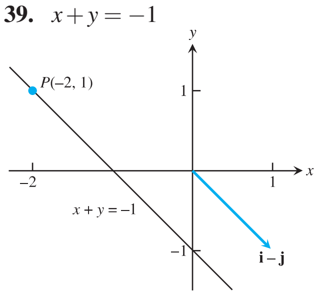
35. $x+2y=4$



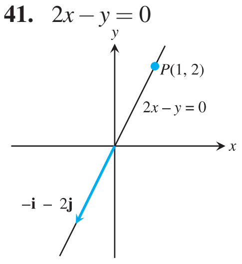
37. $-2x+y=-3$



39. $x+y=-1$



41. $2x-y=0$



43. 5 J **45.** 3464 J **47.** $\frac{\pi}{4}$

49. $\frac{\pi}{6}$ **51.** 0,14

53. $\frac{\pi}{3}$ és $\frac{2\pi}{3}$ minden pontra.

55. $(0,0)$-ban $\frac{\pi}{2}$; $(1,1)$-ben $\frac{\pi}{4}$ és $\frac{3\pi}{4}$

12.4. Vektoriális szorzat

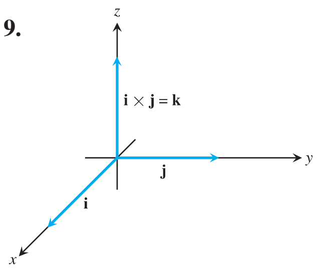
1. $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=3$, az irány $\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$; $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=3$, az irány $-\frac{2}{3}\mathbf{i}-\frac{1}{3}\mathbf{j}-\frac{2}{3}\mathbf{k}$.

3. $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=0$, az irány nincs meghatározva; $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=0$, az irány nincs meghatározva.

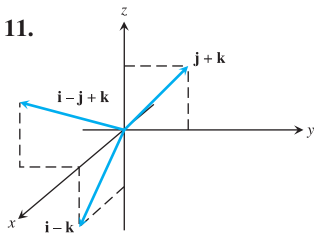
5. $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=6$, az irány $-\mathbf{k}$; $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=6$, az irány $\mathbf{k}$.

7. $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=6\sqrt{5}$, az irány $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i}-\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$; $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}|=6\sqrt{5}$, az irány $-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$.

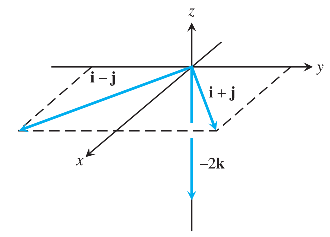
9.



11.



13.



15. **(a)** $2\sqrt{6}$ **(b)** $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

17. **(a)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(b)** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$

19. 8 **21.** 7

23. **(a)** Egyik sem **(b)** **u** és **w**

25. $10\sqrt{3}$ Nm.

27. **(a)** Igaz **(b)** Nem mindig igaz
(c) Igaz **(d)** Igaz
(e) Nem mindig igaz **(f)** Igaz
(g) Igaz **(h)** Igaz

29. **(a)** $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$ **(b)** $\pm\mathbf{u}\times\mathbf{v}$
(c) $\pm(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$ **(d)** $|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|$

31. **(a)** igen **(b)** nem **(c)** igen **(d)** nem

33. Nem, **v**-nek nem feltétlenül kell egyenlőnek lennie **w**-vel. Például, $\mathbf{i}+\mathbf{j}\neq-\mathbf{i}+\mathbf{j}$, de $\mathbf{i}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{i}+\mathbf{i}\times\mathbf{j}=0+\mathbf{k}=\mathbf{k}$ és $\mathbf{i}\times(-\mathbf{i}+\mathbf{j})=-\mathbf{i}\times\mathbf{i}+\mathbf{i}\times\mathbf{j}=0+\mathbf{k}=\mathbf{k}$.

35. 2 **37.** 13 **39.** 11/2 **41.** 25/2

43. Ha $\mathbf{A}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$ és $\mathbf{B}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}$, akkor

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&a_2&0\\b_1&b_2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

és a háromszög területe:

$$\frac{1}{2}\left|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right|=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}.$$

A $+$ előjelet kell használni, ha az xy-síkon a **A**-tól **B** felé mutató irányított szög az óramutató járásával ellentétes, és a $-$ előjelet, ha az óramutató járásával azonos irányú.

12.5. Egyenesek és síkok a térben

1. $x=3+t$, $y=-4+t$, $z=-1+t$

3. $x=-2+5t$, $y=5t$, $z=3-5t$

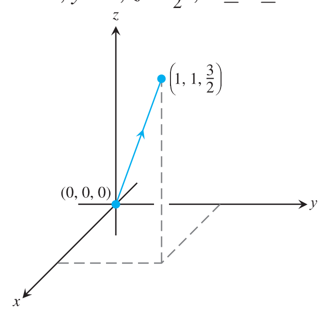
5. $x=0$, $y=2t$, $z=t$

7. $x=1$, $y=1$, $z=1+t$

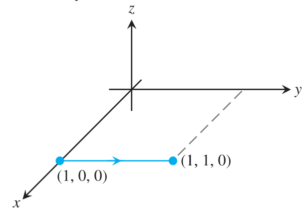
9. $x=t$, $y=-7+2t$, $z=2t$

11. $x=t$, $y=0$, $z=0$

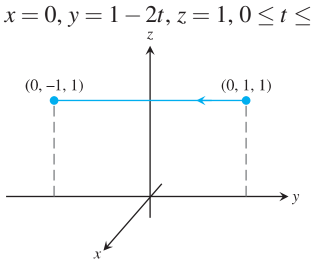
13. $x=t$, $y=t$, $z=\frac{3}{2}t$, $0\le t\le 1$



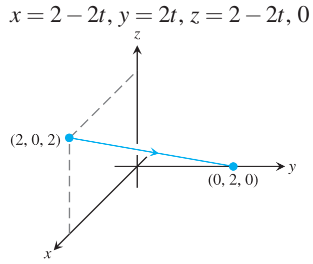
15. $x=1$, $y=1+t$, $z=0$, $-1\le t\le 0$



17. $x=0$, $y=1-2t$, $z=1$, $0\le t\le 1$



19. $x=2-2t$, $y=2t$, $z=2-2t$, $0\le t\le 1$



21. $3x-2y-z=-3$ **23.** $7x-5y-4z=6$

25. $x+3y+4z=34$ **27.** $(1,2,3)$, $-20x+12y+z=7$

29. $y+z=3$ **31.** $x-y+z=0$ **33.** $2\sqrt{30}$

35. 0 **37.** $\frac{9\sqrt{42}}{7}$ **39.** 3

41. $19/5$ **43.** $5/3$ **45.** $9/\sqrt{41}$

47. $\pi/4$ **49.** 1,76 radián **51.** 0,82 radián

53. $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ **55.** $(1,1,0)$

57. $x=1-t$, $y=1+t$, $z=-1$

59. $x=4$, $y=3+6t$, $z=1+3t$

61. $L1$ metszi $L2$-t; $L2$ párhuzamos $L3$-mal; $L1$ és $L3$ kitérők.

63. $x=2+2t$, $y=-4-t$, $z=7+3t$;
$x=-2-t$, $y=-2+(1/2)t$, $z=1-(3/2)t$

65. $\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $(-1,0,-3)$, $(1,-1,0)$

69. Több válasz lehetséges. Az egyik: $x+y=3$ és $2y+z=7$.

71. $(x/a)+(y/b)+(z/c)=1$ az összes síkot leírja az origón átmenő síkok és a koordinátatengelyekkel párhuzamos síkok kivételével.

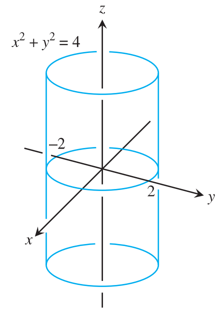
12.6. Hengerek és másodrendű felületek

1. **(d)** ellipszoid **3.** **(a)** henger

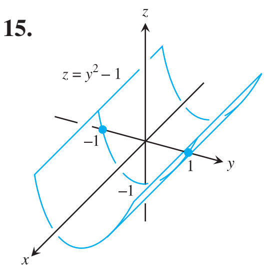
5. **(l)** hiperbolikus paraboloid **7.** **(b)** henger

9. **(k)** hiperbolikus paraboloid **11.** **(h)** kúp

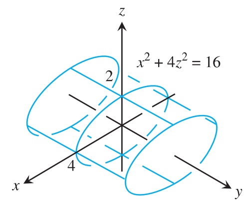
13.



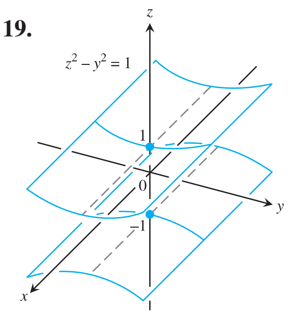
15.



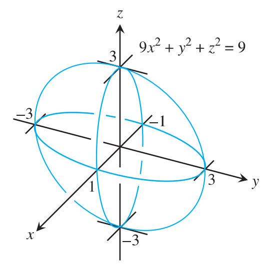
17.



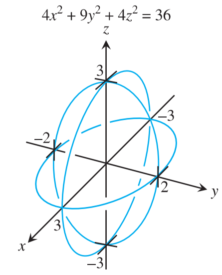
19.



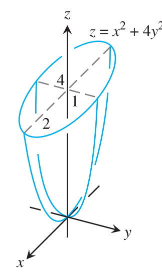
21.



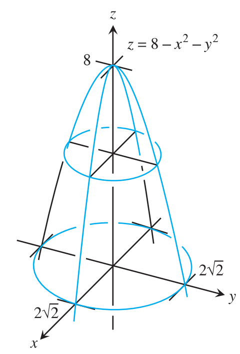
23.



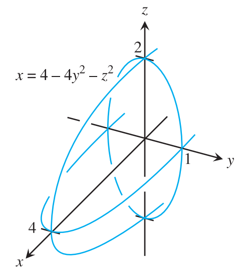
25.



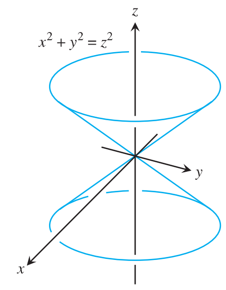
27.



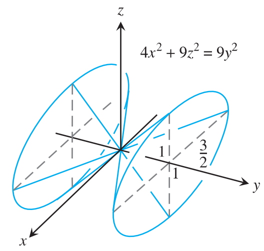
29.



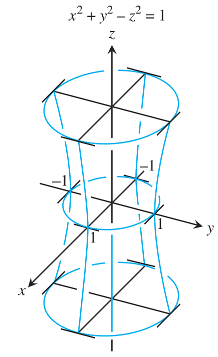
31.



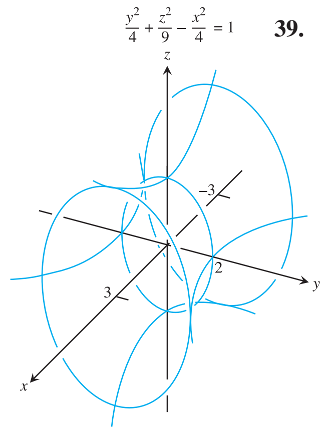
33.



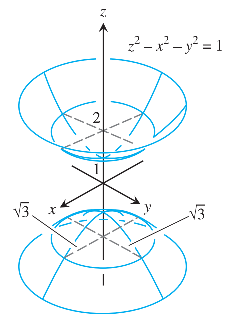
35.



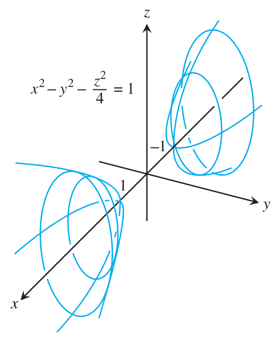
37.



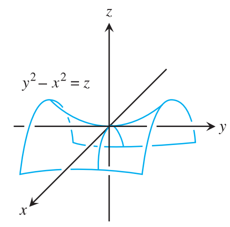
39.



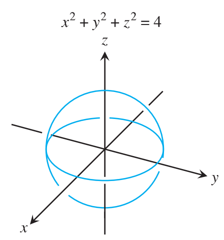
41.



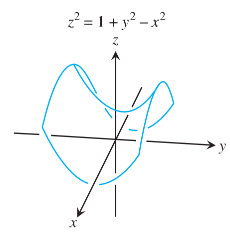
43.



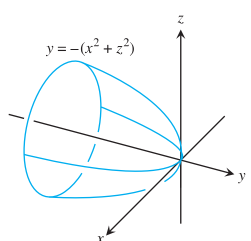
45.



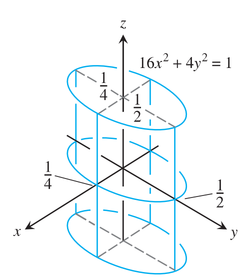
47.



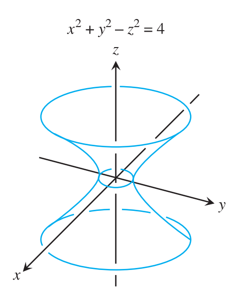
49.



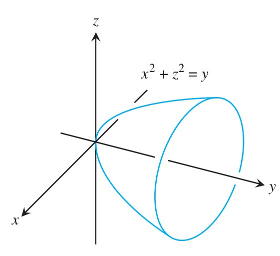
51.



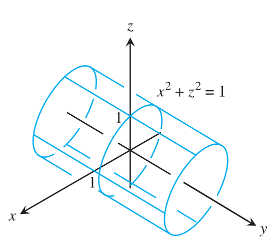
53.



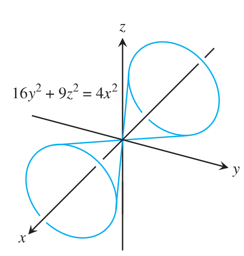
55.



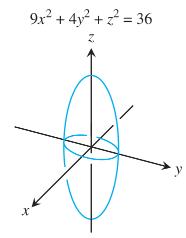
57.



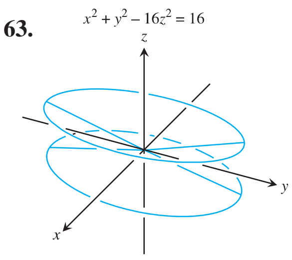
59.



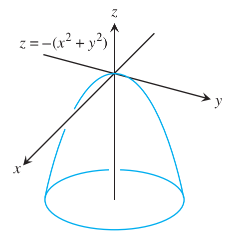
61.



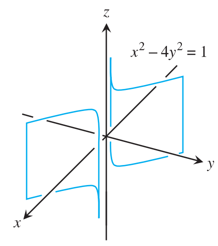
63.



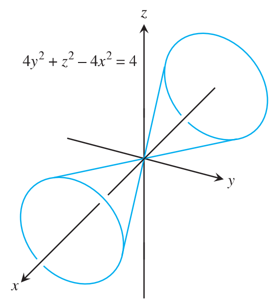
65.



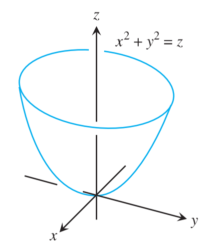
67.



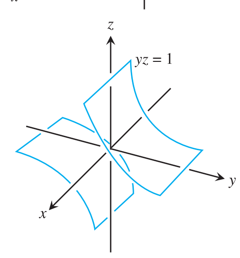
69.



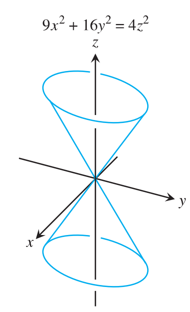
71.



73.



75.



77. **(a)** $\frac{2\pi(9-c^2)}{9}$ **(b)** 8π **(c)** $\frac{4\pi abc}{3}$

81. Csúcspont: $(0, y_1, cy_1^2/b^2)$, fókusz: $(0, y_1, c(y_1^2/b^2)-a^2/(4c))$

Gyakorló feladatok

1. **(a)** $\langle -17, 32\rangle$ **(b)** $\sqrt{1313}$

3. **(a)** $\langle 6, -8\rangle$ **(b)** 10

5. $\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ (az óramutató járásával ellentétes forgásirányt feltételezve)

7. $\left\langle \frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}\right\rangle$

9. A hosszúság $= 2$, az irány $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$.

11. $\mathbf{v}(\pi/2) = 2(-\mathbf{i})$

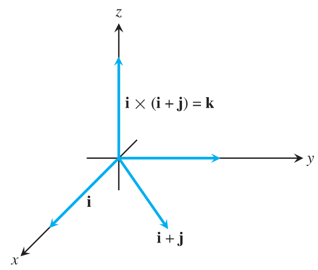
13. A hosszúság $= 7$, az irány $\frac{2}{7}\mathbf{i}-\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}$.

15. $\frac{8}{\sqrt{33}}\mathbf{i}-\frac{2}{\sqrt{33}}\mathbf{j}+\frac{8}{\sqrt{33}}\mathbf{k}$.

17. $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{u}| = 3$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3$, $\mathbf{v}\times\mathbf{u} = -2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = 2\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $|\mathbf{v}\times\mathbf{u}| = 3$, $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$, $|\mathbf{u}|\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{3}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$

19. $\frac{4}{3}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})-\frac{1}{3}(5\mathbf{i}+\mathbf{j}+11\mathbf{k})$

21. $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{k}$



23. $2\sqrt{7}$ **25.** **(a)** $\sqrt{14}$ **(b)** 1

29. $\sqrt{78}/3$ **31.** $x=1-3t,\ y=2,\ z=3+7t$

33. $\sqrt{2}$ **35.** $2x+y+z=5$ **37.** $-9x+y+7z=4$

39. $\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right),\ (-1,0,-3),\ (1,-1,0)$ **41.** $\pi/3$

43. $x=-5+5t,\ y=3-t,\ z=-3t$

45. **(b)** $x=-12t,\ y=19/12+15t,\ z=1/6+6t$

47. Igen, **v** párhuzamos a síkkal.

49. 3 **51.** $-3\mathbf{j}+3\mathbf{k}$

53. $\frac{2}{\sqrt{35}}(5\mathbf{i}-\mathbf{j}-3\mathbf{k})$ **55.** $\left(\frac{11}{9},\frac{26}{9},\frac{7}{9}\right)$

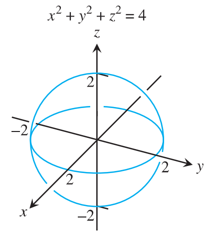
57. $(1,-2,-1);\ x=1-5t,\ y=-2+3t,\ z=-1+4t$

59. $2x+7y+2z+10=0$

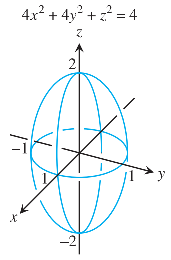
61. **(a)** nem **(b)** nem **(c)** nem **(d)** nem **(e)** igen

63. $11/\sqrt{107}$

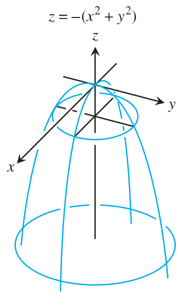
65.



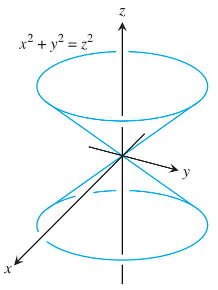
67.



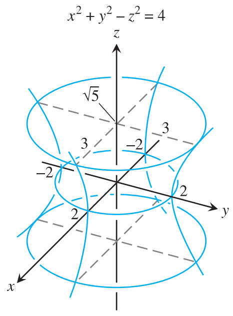
69.



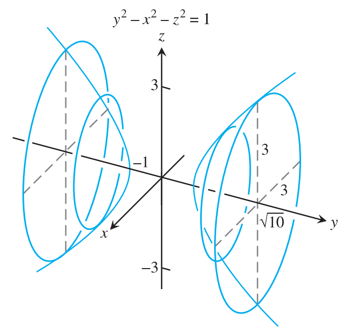
71.



73.



75.



Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. $(26,23,-1/3)$ **3.** $|\mathbf{F}|=81.6N$

7. **(a)** $\vec{BD}=\vec{AD}-\vec{AB}$ **(b)** $\vec{AP}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}$

13. $\frac{32}{41}\mathbf{i}+\frac{23}{41}\mathbf{j}-\frac{13}{41}\mathbf{k}$

15. **(a)** 0, 0 **(b)** $-10\mathbf{i}-2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ $-9\mathbf{i}-2\mathbf{j}+7\mathbf{k}$
(c) $-4\mathbf{i}-6\mathbf{j}+2\mathbf{k},\ \mathbf{i}-2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ **(d)** $-10\mathbf{i}-10\mathbf{k},\ -12\mathbf{i}-4\mathbf{j}-8\mathbf{k}$

25. **(a)** $|\mathbf{F}|=\frac{GMm}{d^2}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{(i^2+1)^{3/2}}\right)$ **(b)** igen

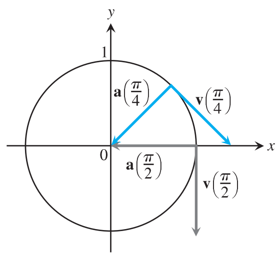
13. fejezet

13.1. Vektorfüggvények

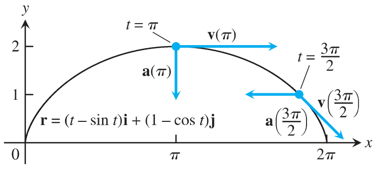
1. $y=x^2-2x,\quad \mathbf{v}=\mathbf{i}+2\mathbf{j},\quad \mathbf{a}=2\mathbf{j}$

3. $y=\frac{2}{9}x^2,\quad \mathbf{v}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j},\quad \mathbf{a}=3\mathbf{i}+8\mathbf{j}$

5. $t=\frac{\pi}{4}:\ \mathbf{v}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j},\ \mathbf{a}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j};$
$t=\frac{\pi}{2}:\ \mathbf{v}=-\mathbf{j},\ \mathbf{a}=-\mathbf{i}$



7. $t=\pi:\ \mathbf{v}=2\mathbf{i},\ \mathbf{a}=-\mathbf{j};\quad t=\frac{3\pi}{2}:\ \mathbf{v}=\mathbf{i}-\mathbf{j},\ \mathbf{a}=-\mathbf{i}$



9. $\mathbf{v}=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2\mathbf{k},\ \mathbf{a}=2\mathbf{j}$, sebesség: 3, irány: $\frac{1}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$,
$\mathbf{v}(1)=3\left(\frac{1}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$

11. $\mathbf{v} = (-2\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = (-2\cos t)\mathbf{i} - (3\sin t)\mathbf{j}$, sebesség: $2\sqrt{5}$, irány: $\left(-1/\sqrt{5}\right)\mathbf{i} + \left(2/\sqrt{5}\right)\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(\pi/2) = 2\sqrt{5}\left[\left(-1/\sqrt{5}\right)\mathbf{i} + \left(2/\sqrt{5}\right)\mathbf{k}\right]$

13. $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{t+1}\right)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \left(\frac{-2}{(t+1)^2}\right)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, sebesség: $\sqrt{6}$, irány: $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(1) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}\right)$

15. $\pi/2$

17. $\pi/2$

19. $t = 0,\ \pi,\ 2\pi$

21. $(1/4)\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + (3/2)\mathbf{k}$

23. $\left(\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

25. $(\ln 4)\mathbf{i} + (\ln 4)\mathbf{j} + (\ln 2)\mathbf{k}$

27. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{-t^2}{2} + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{-t^2}{2} + 3\right)\mathbf{k}$

29. $\mathbf{r}(t) = \left((t+1)^{3/2} - 1\right)\mathbf{i} + \left(-e^{-t} + 1\right)\mathbf{j} + (\ln(t+1) + 1)\mathbf{k}$

31. $\mathbf{r}(t) = 8t\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + (-16t^2 + 100)\mathbf{k}$

33. $x = t,\ y = -1,\ z = 1 + t$

35. $x = at,\ y = a,\ z = 2\pi b + bt$

37. **(a)** (i): konstans 1 (ii): igen (iii): $\curvearrowleft$ (iv): igen

(b) (i): konstans 2 (ii): igen (iii): $\curvearrowleft$ (iv): igen

(c) (i): konstans 1 (ii): igen (iii): $\curvearrowleft$ (iv): nem, a $(0,-1)$-ből

(d) (i): konstans 1 (ii): igen (iii): $\curvearrowright$ (iv): igen

(e) (i): változó (ii): nem (iii): $\curvearrowleft$ (iv): igen

39.
$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{6}{\sqrt{11}}t + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t - 2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t + 3\right)\mathbf{k} = \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2t}{\sqrt{11}}\right)(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

41. $\mathbf{v} = 2\sqrt{5}\mathbf{i} + \sqrt{5}\mathbf{j}$

43. $\max|\mathbf{v}| = 3,\ \min|\mathbf{v}| = 2,\ \max|\mathbf{a}| = 3,\ \min|\mathbf{a}| = 2$

13.2. Egy lövedék röppályájának leírása

1. 50 s

3. **(a)** 72,2 s, 25,51 m **(b)** 4020 m **(c)** 6378 m

5. $t \approx 2{,}139$ s, $x \approx 19{,}96$ m

7. **(a)** $v_0 \approx 9{,}9$ m/s **(b)** $\alpha \approx 18{,}4°$ vagy $\alpha \approx 71{,}6°$

9. 84,9 m/s

11. A golflabda nekimegy a fának.

13. **(a)** 45,4 m/s **(b)** 2,25 s

15. 39,9° vagy 50,7°

17. 14,2 m/s

21. 1,92 s, 22,5 m

23. 1,22 m, 2,38 m/s

25. $\mathbf{v_0}$-nak feleznie kell az *AOR* szöget.

27. **(a)** Feltéve, hogy az $x = 0$ helyen történik az ütés: $\mathbf{r}(t) = (x(t))\mathbf{i} + (y(t))\mathbf{j}$, ahol $x(t) = ((10{,}67)\cos 27°)t$ és $y(t) = 1{,}22 + ((10{,}67)\sin 27°)t - (4{,}9)t^2$.

(b) $t \approx 0{,}497$ másodpercnél, a maximális magasság $\approx 2{,}42$ m.

(c) A labda $t \approx 1{,}201$ másodperc múlva $\approx 11{,}41$ m távolságra ér földet.

(d) $t \approx 0{,}254$ és $t \approx 0{,}74$ másodpercnél, amikor ≈ 9 és $\approx 4{,}38$ méter távolságra van az ütés helyétől.

(e) Igen, a megemelt háló felett nem megy át a labda.

31. **(a)** $\mathbf{r}(t) = (x(t))\mathbf{i} + (y(t))\mathbf{j}$, ahol
$$x(t) = \left(\frac{1}{0{,}08}\right)\left(1 - e^{-0{,}08t}\right)(47\cos 20° - 5{,}36) \text{ és}$$
$$y(t) = 1 + \left(\frac{47}{0{,}08}\right)\left(1 - e^{-0{,}08t}\right)(\sin 20°) + \left(\frac{9{,}8}{0{,}08^2}\right)\left(1 - 0{,}08t - e^{-0{,}08t}\right).$$

(b) $t \approx 1{,}54$ másodpercnél, a maximális magasság $\approx 13{,}13$ m.

(c) A labda $t \approx 3{,}2$ másodperc múlva $\approx 109{,}8$ m távolságra ér földet.

(d) $t \approx 0{,}88$ és $t \approx 2{,}21$ másodpercnél, amikor $\approx 33{,}1$ és $\approx 78{,}6$ méter távolságra van az ütés helyétől.

(e) Nem. Legalább 3,9 m/s erősségű, az ütéssel egyező irányú széllökés szükséges ahhoz, hogy a labda átmenjen a kerítés felett.

13.3. Ívhossz és a normált érintővektor

1. $\mathbf{T} = \left(-\frac{2}{3}\sin t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{3}\cos t\right)\mathbf{j} + \frac{\sqrt{5}}{3}\mathbf{k}$, 3π

3. $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\mathbf{k}$, $\frac{52}{3}$

5. $\mathbf{T} = -(\cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}$, $\frac{3}{2}$

7. $\mathbf{T} = \left(\frac{\cos t - t\sin t}{t+1}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sin t + t\cos t}{t+1}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\sqrt{2}t^{1/2}}{t+1}\right)\mathbf{k}$, $\frac{\pi^2}{2} + \pi$

9. $(0, 5, 24\pi)$

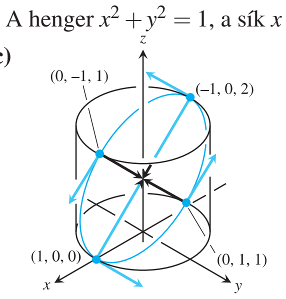
11. $s(t) = 5t$, $L = \frac{5\pi}{2}$

13. $s(t) = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}$, $L = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

15. $\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

17. **(a)** A henger $x^2+y^2=1$, a sík $x+z=1$.

(b) és **(c)**



(d) $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin^2 t}\,dt$ **(e)** $L\approx 7{,}64$

13.4. Görbület és a normált főnormális

1. $\mathbf{T}=(\cos t)\mathbf{i}-(\sin t)\mathbf{j},\ \mathbf{N}=(-\sin t)\mathbf{i}-(\cos t)\mathbf{j},\ \kappa=\cos t$

3. $\mathbf{T}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j},\ \mathbf{N}=\frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i}-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j},$
$\kappa=\frac{1}{2\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}$

5. **(b)** $\cos x$

7. **(b)** $\mathbf{N}=\frac{-2e^{2t}}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\mathbf{j}$
(c) $\mathbf{N}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-t^2}\mathbf{i}+t\mathbf{j}\right)$

9. $\mathbf{T}=\frac{3\cos t}{5}\mathbf{i}-\frac{3\sin t}{5}\mathbf{j}+\frac{4}{5}\mathbf{k},\ \mathbf{N}=(-\sin t)\mathbf{i}-(\cos t)\mathbf{j},$
$\kappa=\frac{3}{25}$

11. $\mathbf{T}=\left(\frac{\cos t-\sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\cos t+\sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j},$
$\mathbf{N}=\left(\frac{-\cos t-\sin t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{-\sin t+\cos t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j},$
$\kappa=\frac{1}{e^t\sqrt{2}}$

13. $\mathbf{T}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathbf{j},\ \mathbf{N}=\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{t^2+1}}-\frac{t\mathbf{j}}{\sqrt{t^2+1}},$
$\kappa=\frac{1}{t(t^2+1)^{3/2}}$

15. $\mathbf{T}=\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(t/a)}\right)\mathbf{i}+\left(\operatorname{th}\frac{t}{a}\right)\mathbf{j},$
$\mathbf{N}=\left(-\operatorname{th}\frac{t}{a}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(t/a)}\right)\mathbf{j},$
$\kappa=\frac{1}{a}\frac{1}{\operatorname{ch}^2(t/a)}$

19. $1/(2b)$

21. $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+y^2=1$

23. $\kappa(x)=\frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$

25. $\kappa(x)=\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$

13.5. Torzió és a normált binormális

1. $\mathbf{B}=\left(\frac{4}{5}\cos t\right)\mathbf{i}-\left(\frac{4}{5}\sin t\right)\mathbf{j}-\frac{3}{5}\mathbf{k},\ \tau=-\frac{4}{25}$

3. $\mathbf{B}=\mathbf{k},\ \tau=0$ **5.** $\mathbf{B}=-k,\ \tau=0$

7. $\mathbf{B}=\mathbf{k},\ \tau=0$ **9.** $\mathbf{a}=|a|\mathbf{N}$

11. $\mathbf{a}(1)=\frac{4}{3}\mathbf{T}+\frac{2\sqrt{5}}{3}\mathbf{N}$ **13.** $\mathbf{a}(0)=2\mathbf{N}$

15. $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}-\mathbf{k},\quad \mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j},$
$\mathbf{N}\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j},\quad \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\mathbf{k},$
simulósík: $z=-1$, normálsík: $-x+y=0$,
rektifikáló sík: $x+y=\sqrt{2}$

17. Igen. Ha az autó kanyarban halad ($\kappa\neq 0$), akkor $a_N=\kappa|\mathbf{v}|^2\neq 0$ és $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$.

21. $|\mathbf{F}|=\kappa\left(m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right)$

23. $\kappa=1/t,\ \rho=t$

29. $\mathbf{v}=(-1{,}8701,\ 0{,}7089,\ 1{,}000)$, $|\mathbf{v}|=2{,}2361$,
$\mathbf{a}=(-1{,}6960,\ -2{,}0307,\ 0)$, $\mathbf{T}=(-0{,}8364,\ 0{,}3170,\ 0{,}4472)$,
$\mathbf{N}=(-0{,}4143,\ -0{,}8998,\ -0{,}1369)$,
$\mathbf{B}=(0{,}3590,\ -0{,}2998,\ 0{,}8839)$,
$\kappa=0{,}5060$, $\tau=0{,}2813$, $a_T=0{,}7746$, $a_N=2{,}5298$

31. $\mathbf{v}=(2{,}0000,\ 0,\ 0{,}1629)$, $|\mathbf{v}|=2{,}0066$,
$\mathbf{a}=(0,\ -1{,}0000,\ 0{,}0086)$, $\mathbf{T}=(0{,}9967,\ 0,\ 0{,}0812)$,
$\mathbf{N}=(-0{,}0007,\ -1{,}0000,\ 0{,}0086)$,
$\mathbf{B}=(0{,}0812,\ -0{,}0086,\ -0{,}9967)$,
$\kappa=0{,}2484$, $\tau=-0{,}0411$, $a_T=0{,}0007$, $a_N=1{,}0000$

13.6. Bolygómozgás és műholdpályák

1. $T=93{,}2$ perc **3.** $a=6764$ km **5.** $D=6501$ km

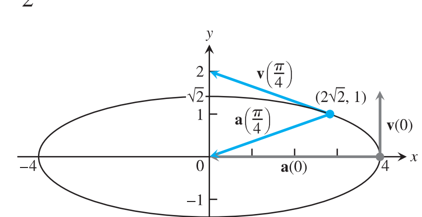
7. **(a)** 42168 km **(b)** 35789 km
(c) *Syncom 3*, *GOES4* és *Intelsat 5*

9. $a=383200$ km a Föld középpontjától, vagy körülbelül 376821 km a Föld felszínétől.

11. $2{,}97\cdot 10^{-19}\ \sec^2/\mathrm{m}^3$, $9{,}902\cdot 10^{-14}\ \sec^2/\mathrm{m}^3$, $8{,}045\cdot 10^{-12}\ \sec^2/\mathrm{m}^3$

Gyakorló feladatok

1. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{2}=1$



A $t=0$-ban: $a_T=0,\ a_N=4,\ \kappa=2$;
A $t=\frac{\pi}{4}$-ben: $a_T=\frac{7}{3},\ a_N=\frac{4\sqrt{2}}{3},\ \kappa=\frac{4\sqrt{2}}{27}$.

3. $|\mathbf{v}|_{\max}=1$ **5.** $\kappa=1/5$ **7.** $dy/dt=-x$,

11. A súlygolyó a földön van, körülbelül 19,05 méterre a dobás helyétől.

15. **(a)** 18,04 m/s **(b)** 22,73 m/s

19. $\kappa = \pi s$

21. $\frac{\pi}{4}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{16}} + \ln\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{16}}\right)$

23. $\mathbf{T}(0) = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$, $\mathbf{N}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$,
$\mathbf{B}(0) = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{4}{3\sqrt{2}}\mathbf{k}$, $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\tau = \frac{1}{6}$

25. $\mathbf{T}(\ln 2) = \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$, $\mathbf{N}(\ln 2) = -\frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$,
$\mathbf{B}(\ln 2) = \mathbf{k}$, $\kappa = \frac{8}{17\sqrt{17}}$, $\tau = 0$

27. $\mathbf{a}(0) = 10\mathbf{T} + 6\mathbf{N}$

29. $\mathbf{T} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathbf{k}$,
$\mathbf{N} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\mathbf{k}$,
$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$, $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tau = 0$

31. $\pi/3$

33. $x = 1+t$, $y = t$, $z = -t$

35. 5971 km, $1{,}639 \cdot 10^7$ km^2, a Föld 3,21%-a látható

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. **(a)** $\mathbf{r}(t) = \left(-\frac{8}{15}t^3 + 4t^2\right)\mathbf{i} + (-20t + 100)\mathbf{j}$;
(b) $\frac{100}{3}$ m

3. **(a)** $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=2\pi} = 2\sqrt{\frac{\pi g b}{a^2+b^2}}$

(b) $\theta = \frac{gbt^2}{2(a^2+b^2)}$, $z = \frac{gb^2t^2}{2(a^2+b^2)}$

(c) $\mathbf{v}(t) = \frac{gbt}{\sqrt{a^2+b^2}}$,
$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{bg}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{T} + a\left(\frac{bgt}{a^2+b^2}\right)^2\mathbf{N}$
A **B** irányú komponens együtthatója 0.

7. **(a)** $\frac{dx}{dt} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$, $\frac{dy}{dt} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$
(b) $\frac{dr}{dt} = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta$, $r\frac{d\theta}{dt} = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta$

9. **(a)** $\mathbf{a}(1) = -9\mathbf{u}_r - 6\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{v}(1) = -\mathbf{u}_r + 3\mathbf{u}_\theta$
(b) 6,5 cm

11. **(c)** $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}$,
$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$

14. fejezet

14.1. Többváltozós függvények

1. **(a)** Az xy-sík minden pontja **(b)** Minden valós **(c)** Az $y - x = c$ egyenesek **(d)** Nincsenek határpontok **(e)** Nyílt is és zárt is **(f)** Nem korlátos

3. **(a)** Az xy-sík minden pontja **(b)** $z \geq 0$ **(c)** $f(x,y) = 0$-ra z origó, $f(x,y) \neq 0$-ra ellipszisek, nagytengelyük az x-, kistengelyük az y-tengelyen **(d)** Nincsenek határpontok **(e)** Nyílt is és zárt is **(f)** Nem korlátos

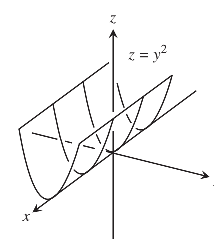
5. **(a)** Az xy-sík minden pontja **(b)** Minden valós **(c)** $f(x,y) = 0$-ra az x- és y-tengely, $f(x,y) \neq 0$-ra hiperbolák, amelyeknek a koordinátatengelyek az aszimptotáik
(d) Nincsenek határpontok **(e)** Nyílt is és zárt is **(f)** Nem korlátos

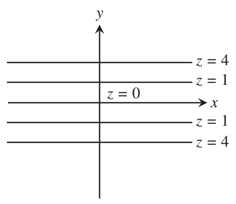
7. **(a)** Minden (x,y), amire fennáll $x^2 + y^2 < 16$ **(b)** $z \geq 1/4$
(c) Origó középpontú körök négynél kisebb sugárral **(d)** A határ az $x^2 + y^2 = 16$ kör **(e)** Nyílt **(f)** Korlátos

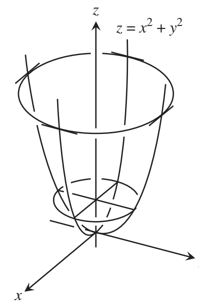
9. **(a)** $(x,y) \neq (0,0)$ **(b)** minden valós **(c)** Origó középpontú körök pozitív sugárral **(d)** A határ egyetlen pont, (0,0) **(e)** Nyílt **(f)** Nem korlátos

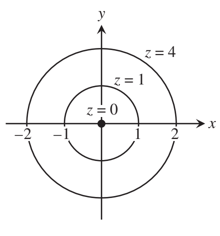
11. **(a)** Minden (x,y), amelyikre $-1 \leq y - x \leq 1$ **(b)** $-\pi/2 \leq z \leq \pi/2$ **(c)** $y - x = c$ alakú egyenesek, ahol $-1 \leq c \leq 1$ **(d)** A határ két egyenes: $y = 1 + x$, $y = -1 + x$ **(e)** Zárt **(f)** Nem korlátos

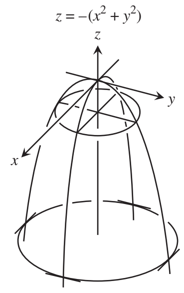
13. (f) **15.** (a) **17.** (d)

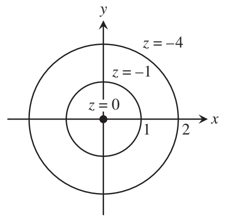
19. **(a)**


(b)


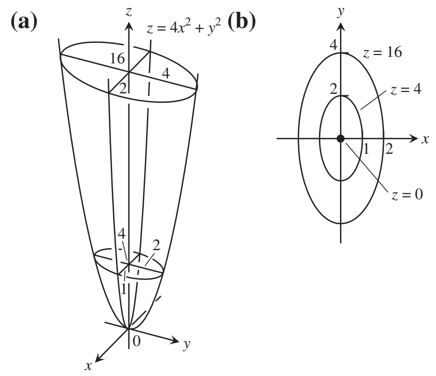
21. **(a)**


(b)


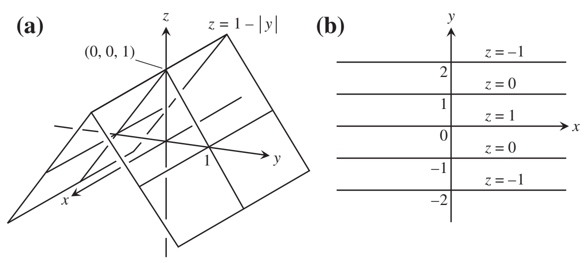
23. **(a)**


(b)


25. **(a)** **(b)**



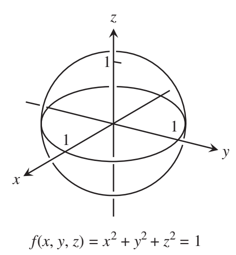
27. **(a)** **(b)**



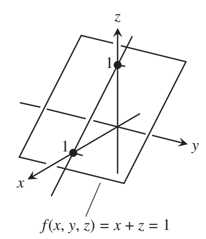
29. $x^2+y^2=10$

31. $\operatorname{arctg} y+\operatorname{arctg} x=2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$

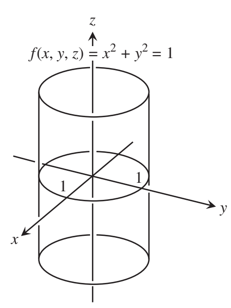
33.



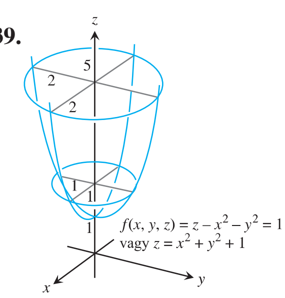
35.



37.



39.



41. $\sqrt{x-y}-\ln z=2$

43. $\frac{x+y}{z}=\ln 2$

45. Igen, 2000

47. 63 km

14.2. Határérték és folytonosság magasabb dimenzióban

1. 5/2 **3.** $2\sqrt{6}$ **5.** 1 **7.** 1/2 **9.** 1

11. 0 **13.** 0 **15.** -1 **17.** 2 **19.** 1/4

21. 19/12 **23.** 2 **25.** 3

27. **(a)** Minden (x,y) **(b)** Minden (x,y), kivéve $(0,0)$

29. **(a)** Minden (x,y), kivéve, ahol$xy=0$ **(b)** Minden (x,y)

31. **(a)** Minden (x,y,z)
(b) Minden (x,y,z), kivéve az $x^2+y^2=1$ henger belsejét

33. **(a)** Minden (x,y,z) ahol $z\neq 0$
(b) Minden (x,y,z), ahol $x^2+z^2\neq 1$

35. Közelítsünk $y=x$, $x>0$, ill. $y=x$, $x<0$ mentén

37. Közelítsünk $y=kx^2$ mentén, ahol k konstans

39. Közelítsünk $y=mx$ mentén, ahol $m\neq -1$ konstans

41. Közelítsünk $y=kx^2$ mentén, ahol $k\neq 0$ konstans

43. Nem **45.** A limesz 1 **47.** A limesz 0

49. **(a)** $f(x,y)|_{y=mx}=\sin 2\theta$, ahol $\operatorname{tg}\theta=m$

51. 0 **53.** Nem létezik **55.** $\pi/2$

57. $f(0,0)=\ln 3$ **59.** $\delta=0{,}1$ **61.** $\delta=0{,}005$

63. $\delta=\sqrt{0{,}015}$ **65.** $\delta=0{,}005$

14.3. Parciális deriváltak

1. $\frac{\partial f}{\partial x}=4x,\ \frac{\partial f}{\partial y}=-3$

3. $\frac{\partial f}{\partial x}=2x(y+2),\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2-1$

5. $\frac{\partial f}{\partial x}=2y(xy-1),\ \frac{\partial f}{\partial y}=2x(xy-1)$

7. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

9. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-1}{(x+y)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-1}{(x+y)^2}$

11. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-y^2-1}{(xy-1)^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-x^2-1}{(xy-1)^2}$

13. $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{x+y+1},\ \frac{\partial f}{\partial y}=e^{x+y+1}$

15. $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{x+y},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{x+y}$

17. $\frac{\partial f}{\partial x}=2\sin(x-3y)\cos(x-3y)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}=-6\sin(x-3y)\cos(x-3y)$,

19. $\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1},\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$

21. $\frac{\partial f}{\partial x}=-g(x),\ \frac{\partial f}{\partial y}=g(y)$

23. $f_x=y^2,\ f_y=2xy,\ f_z=-4z$

25. $f_x=1,\ f_y=-y(y^2+z^2)^{-1/2},\ f_z=-z(y^2+z^2)^{-1/2}$

27. $f_x=\frac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}},\ f_y=\frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}},\ f_z=\frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$

29. $f_x=\frac{1}{x+2y+3z},\ f_y=\frac{2}{x+2y+3z},\ f_z=\frac{3}{x+2y+3z}$

31. $f_x=-2xe^{-(x^2+y^2+z^2)},\ f_y=-2ye^{-(x^2+y^2+z^2)}$,
$f_z=-2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}$

33. $f_x=1/\operatorname{ch}^2(x+2y+3z),\ f_y=2/\operatorname{ch}^2(x+2y+3z)$,
$f_z=3/\operatorname{ch}^2(x+2y+3z)$

35. $\frac{\partial f}{\partial t}=-2\pi\sin(2\pi t-\alpha),\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}=\sin(2\pi t-\alpha)$

37. $\frac{\partial h}{\partial \rho}=\sin\phi\cos\theta,\ \frac{\partial h}{\partial \phi}=\rho\cos\phi\cos\theta,\ \frac{\partial h}{\partial \theta}=-\rho\sin\phi\sin\theta$

39. $W_p(P,V,\delta,v,g)=V,\ W_V(P,V,\delta,v,g)=P+\frac{\delta v^2}{2g}$,
$W_\delta(P,V,\delta,v,g)=\frac{Vv^2}{2g},\ W_v(P,V,\delta,v,g)=\frac{V\delta v}{g}$,
$W_g(P,V,\delta,v,g)=-\frac{V\delta v^2}{2g^2}$

41. $\frac{\partial f}{\partial x}=1+y,\ \frac{\partial f}{\partial y}=1+x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=1$

43. $\frac{\partial g}{\partial x}=2xy+y\cos x,\ \frac{\partial g}{\partial y}=x^2-\sin y+\sin x$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=2y-y\sin x,\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2-\cos y$,

$\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x} = 2x+\cos x$

45. $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{x+y},\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{x+y},\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y)^2},\ \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x+y)^2},$
$\frac{\partial^2 r}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2}$

47. $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{2x+3y},\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2x+3y},\ \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = \frac{-6}{(2x+3y)^2}$

49. $\frac{\partial w}{\partial x} = y^2+2xy^3+3x^2y^4,\ \frac{\partial w}{\partial y} = 2xy+3x^2y^2+4x^3y^3,$
$\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} 2y+6xy^2+12x^2y^3$

51. **(a)** x először **(b)** y először **(c)** x először
(d) x először **(e)** y először **(a)** y először

53. $f_x(1,2) = -13,\ f_y(1,2) = -2$

55. 12 **57.** -2

59. $\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{a}{bc\sin A'}\ \frac{\partial A}{\partial b} = \frac{c\cos A-b}{bc\sin A}$

61. $v_x = \frac{\ln v}{(\ln u)(\ln v)-1}$

77. Igen

14.4. A láncszabály

1. **(a)** $\frac{dw}{dt} = 0$, **(b)** $\frac{dw}{dt}(\pi) = 0$

3. **(a)** $\frac{dw}{dt} = 1$, **(b)** $\frac{dw}{dt}(3) = 1$

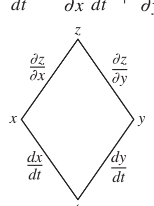
5. **(a)** $\frac{dw}{dt} = 4t\,\mathrm{arctg}\,t+1$, **(b)** $\frac{dw}{dt}(1) = \pi+1$

7. **(a)** $\frac{\partial z}{\partial u} = 4\cos v\ln(u\sin v)+4\cos v,$
$\frac{\partial z}{\partial v} = -4u\sin v\ln(u\sin v)+\frac{4u\cos^2 v}{\sin v}$
(b) $\frac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{2}(\ln 2+2),\ \frac{\partial z}{\partial v} = -2\sqrt{2}(\ln 2-2))$

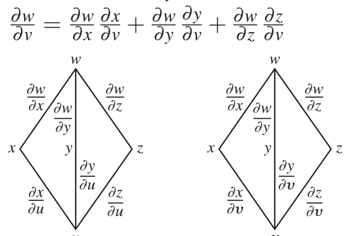
9. **(a)** $\frac{\partial w}{\partial u} = 2u+4uv,\ \frac{\partial w}{\partial v} = -2v+2u^2$ **(b)** $\frac{\partial w}{\partial u} = 3,\ \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{3}{2}$

11. **(a)** $\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{(z-y)^2},\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-y}{(z-y)^2}$
(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial u}{\partial z} = -2$

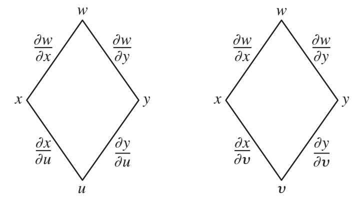
13. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dy}{dt}$



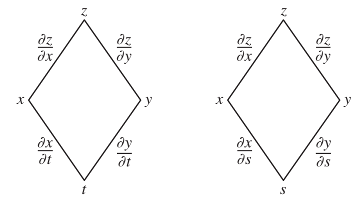
15. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$
$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$



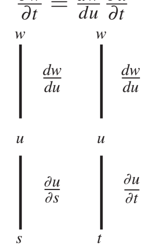
17. $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$
$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$



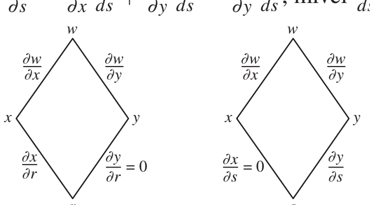
19. $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$
$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$



21. $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{du}\frac{\partial u}{\partial s},$
$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dw}{du}\frac{\partial u}{\partial t}$



23. $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dr}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dr} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dr}$, mivel $\frac{dy}{dr} = 0$
$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds}$, mivel $\frac{dx}{ds} = 0$



25. 4/3 **27.** $-4/5$ **29.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{4}$

31. $\frac{\partial z}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -1$ **33.** 12 **35.** -7

37. $\frac{\partial z}{\partial u} = 2,\ \frac{\partial z}{\partial v} = 1$ **39.** $-0{,}00005$ A/s

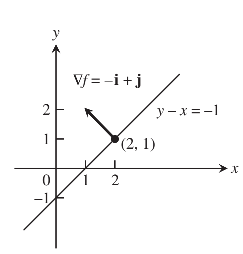
45. $(\cos 1, \sin 1, 1)$ és $(\cos(-2), \sin(-2), -2)$

47. **(a)** Maximum $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-nél és $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-nél,
minimum $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-nél és $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$-nél.
(b) Max.=6, Min.=2

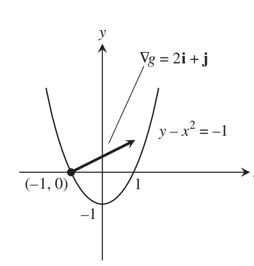
49. $2x\sqrt{x^8+x^3}+\int_0^{x^2}\frac{3x^2}{2\sqrt{t^4+x^3}}dt$

14.5. Iránymenti deriváltak és gradiens vektor

1.



3.



5. $\nabla f = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ **7.** $\nabla f = -\frac{26}{27}\mathbf{i} + \frac{23}{54}\mathbf{j} - \frac{23}{54}\mathbf{k}$

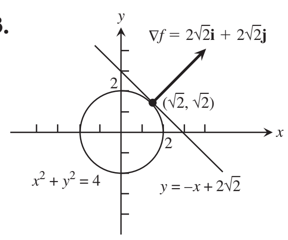
9. -4 **11.** 31/13 **13.** 3 **15.** 2

17. $\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $(D_\mathbf{u}f)_{P_0} = \sqrt{2}$, $-\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -\sqrt{2}$

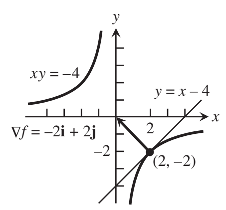
19. $\mathbf{u} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $(D_\mathbf{u}f)_{P_0} = 3\sqrt{3}$
$-\mathbf{u} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -3\sqrt{3}$

21. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $(D_\mathbf{u}f)_{P_0} = 2\sqrt{3}$, $-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$, $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -2\sqrt{3}$

23.



25.



27. $\mathbf{u} = \frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$, $-\mathbf{u} = -\frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$

29. Nem, a változás maximális gyorsasága $\sqrt{185} < 14$

31. $-\frac{7}{\sqrt{5}}$

14.6. Érintősíkok és differenciálok

1. **(a)** $x+y+z=3$ **(b)** $x = 1+2t$, $y = 1+2t$, $z = 1+2t$

3. **(a)** $2x - z - 2 = 0$ **(b)** $x = 2-4t$, $y = 0$, $z = 2+2t$

5. **(a)** $2x+2y+z-4=0$
(b) $x = 2t$, $y = 1+2t$, $z = 2+t$

7. **(a)** $x+y+z-1=0$ **(b)** $x=t$, $y=1+t$, $z=t$

9. $2x-z-2=0$ **11.** $x-y+2z-1=0$

13. $x=1$, $y=1+2t$, $z=1-2t$

15. $x=1-2t$, $y=1$, $z=\frac{1}{2}+2t$

17. $x=1+90t$, $y=1-90t$, $z=3$

19. $df = \frac{9}{11\,830} \approx 0{,}0008$ **21.** $dg = 0$

23. **(a)** $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{3} \approx 0{,}935$
(b) $\sqrt{3}\sin\sqrt{3} - \cos\sqrt{3} \approx 1{,}87$

25. **(a)** $L(x,y) = 1$ **(b)** $L(x,y) = 2x+2y-1$

27. **(a)** $L(x,y) = 3x-4y+5$ **(b)** $L(x,y) = 3x-4y+5$

29. **(a)** $L(x,y) = 1+x$ **(b)** $L(x,y) = -y+\frac{\pi}{2}$

31. $L(x,y) = 7+x-6y$; 0,06 **33.** $L(x,y) = x+y+1$; 0,08

35. $L(x,y) = 1+x$; 0,0222

37. **(a)** $L(x,y,z) = 2x+2y+2z-3$; **(b)** $L(x,y,z) = y+z$
(c) $L(x,y,z) = 0$

39. **(a)** $L(x,y,z) = x$; **(b)** $L(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$
(c) $L(x,y,z) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z$

41. **(a)** $L(x,y,z) = 2+x$
(b) $L(x,y,z) = x-y-z+\frac{\pi}{2}+1$
(c) $L(x,y,z) = x-y-z+\frac{\pi}{2}+1$

43. $L(x,y,z) = 2x-6y-2z+6$; 0,0024

45. $L(x,y,z) = x+y-z-1$; 0,00135

47. Maximális becslési hiba $\leq 0{,}31$

49. Maximális hiba százalékban $\pm 4{,}83\%$

51. A két dimenzió közül a kisebbnek kell több figyelmet szentelni, mert az eredményez nagyobb parciális deriváltat.

53. **(a)** 0,30% **55.** f a legérzékenyebb d változására.

57. Q a h-beli változásokra a legérzékenyebb.

61. $-\frac{\pi}{4}$-nél $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; 0-nál 0; $\frac{\pi}{4}$-nél $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

14.7. Szélsőértékek és nyeregpontok

1. $f(-3,3) = -5$, lokális minimum

3. $f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = 0$, lok.max. **5.** $f(-2,1)$, nyeregpont

7. $f\left(\frac{6}{5}, \frac{69}{25}\right)$, nyeregpont **9.** $f(2,1)$, nyeregpont

11. $f(2,-1) = -6$, lok.min. **13.** $f(1,2)$, nyeregpont

15. $f(0,0)$, nyeregpont

17. $f(0,0)$, nyeregpont; $f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{170}{27}$, lok.min.

19. $f(0,0) = 0$, lok.min.; $f(1,-1)$, nyeregpont

21. $f(0,0)$, nyeregpont; $f\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{81}$, lok.min.

23. $f(0,0)$, nyeregpont; $f(0,2) = -12$, lok. min.; $f(-2,0) = -4$, lok.max.; $f(-2,2)$, nyeregpont

25. $f(0,0)$, nyeregpont; $f(1,1) = 2$, $f(-1,-1) = 2$,lok.max.

27. $f(0,0) = -1$, lok.max.

29. $f(n\pi, 0)$, nyeregpont; $f(n\pi, 0) = 0$ minden n-re

31. Absz.max.: 1, (0,0)-nál; absz.min.: -5, (1,2)-nél

33. Absz.max.: 4, (0,2)-nél; absz.min.:0, (0,0)-nál

35. Absz.max.: 11, (0,-3)-nál; absz.min.:-10, (4,-2)-nél

37. Absz.max.: 4, (2,0)-nál; absz.min.:$\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $(3, -\frac{\pi}{4})$-nél, $(3, \frac{\pi}{4})$-nél, $(1, -\frac{\pi}{4})$-nél, $(1, \frac{\pi}{4})$-nél

39. $a=-3$, $b=2$

41. Legmelegebb: $2\frac{1}{4}^\circ$ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$-nél és $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$-nél; a leghidegebb $-\frac{1}{4}^\circ$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$-nál.

43. **(a)** $f(0,0)$, nyeregpont **(b)** $f(1,2)$, lok.min.
(c) $f(1,-2)$, lok.min.; $f(-1,-2)$, nyeregpont

49. $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{355}{36}\right)$

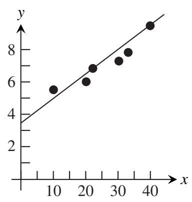
53. **(a)** A félkörön max $f = 2\sqrt{2}$, $t = \pi/4$-nél, min $f = -2$, $t = \pi$-nél. A negyedkörön max $f = 2\sqrt{2}$, $t = \pi/4$-nél, min $f = 2$, $t = 0, \pi/2$-nél.
(b) A félkörön max $g = 2$, $t = \pi/4$-nél, min $g = -2$, $t = 3\pi/4$-nél. A negyedkörön max $g = 2\sqrt{2}$, $t = \pi/4$-nél, min $g = 0$, $t = 0, \pi/2$-nél.
(c) A félkörön max $h = 8$, $t = 0$-nál, π-nél, min $h = 4$, $t = \pi/2$-nél. A negyedkörön max $h = 8$, $t = 0$-nál, min $h = 4$, $t = \pi/2$-nél.

55. i) min $f = -1/2$, $t = -1/2$-nél; max nincs; ii) max $f = 0$, $t = -1$nél, $t = 0$-nál; min $f = -1/2$, $t = -1/2$-nél, iii) max $f = 4$, $t = 1$-nél; min $f = 0$, $t = 0$-nál.

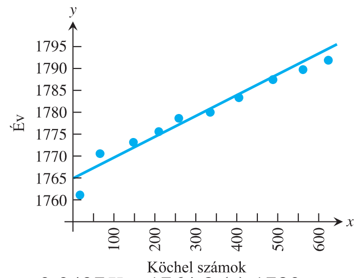
57. $y = -\frac{20}{13}x + \frac{9}{13}$, $y|_{x=4} = -\frac{71}{13}$

59. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}$, $y|_{x=4} = \frac{37}{6}$

61. $y = 0{,}122x + 3{,}59$



63. **(a)**



(b) $y = 0{,}0427K + 1764{,}8$ **(c)** 1780

14.8. Lagrange-multiplikátorok

1. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ **3.** 39 **5.** $(3, \pm 3\sqrt{2})$

7. **(a)** 8 **(b)** 64 **9.** $r = 2\text{cm}$ $h = 4\text{cm}$

11. Hossz$= 4\sqrt{2}$, szélesség$= 3\sqrt{2}$

13. $f(0,0) = 0$ min., $f(2,4) = 20$ max.

15. Legalacsonyabb=0°, legmagasabb=125°

17. $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$ **19.** 1 **21.** $(0,0,2)$, $(0,0,-2)$

23. $f(1,-2,5) = 30$ max., $f(-1,2,-5) = -30$ min.

25. 3,3,3 **27.** $\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$ egység

29. $(\pm 4/3, -4/3, -4/3)$ **31.** $U(8,14) = \$128$

33. $f(2/3, 4/3, -4/3) = \frac{4}{3}$ **35.** (2,4,4)

37. Maximum$=1+6\sqrt{3}$, $(\pm\sqrt{6}, \sqrt{3}, 1)$-nél; minimum$=1-6\sqrt{3}$, $(\pm\sqrt{6}, -\sqrt{3}, 1)$-nél

39. Max.=4, $(0, 0 \pm 2)$-nél; min.=2, $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0)$-nál

14.9. Feltételes parciális deriváltak

1. **(a)** 0 **(b)** $1 + 2z$ **(c)** $1 + 2z$

3. **(a)** $\frac{\partial U}{\partial P} + \frac{\partial U}{\partial T}\left(\frac{V}{nR}\right)$ **(b)** $\frac{\partial U}{\partial P}\left(\frac{nR}{V}\right) + \frac{\partial U}{\partial T}$

5. **(a)** 5 **(b)** 5

7. $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta = \cos\theta \; \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

14.10. Kétváltozós Taylor-formula

1. Másodfokú: $x + xy$; harmadfokú: $x + xy + \frac{1}{2}xy^2$

3. Másodfokú: xy; harmadfokú: xy

5. Másodfokú: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2)$; harmadfokú: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3)$

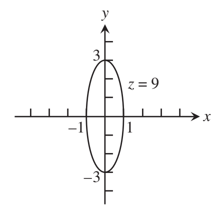
7. Másodf.: $\frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) = x^2 + y^2$; harmadf.: $x^2 + y^2$

9. Másodfokú: $1 + (x+y) + (x+y)^2$ harmadfokú: $1 + (x+y) + (x+y)^2 + (x+y)^3$

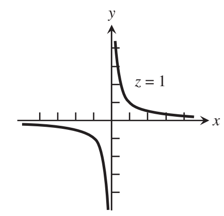
11. Másodfokú: $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$; $E(x,y) \le 0{,}00134$

Gyakorló feladatok

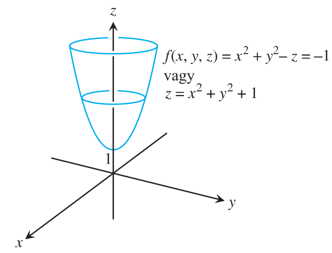
1. Értelmezési tartomány: minden (x,y) ; értékkészlet: $z \ge 0$; szintvonalak: ellipszisek, nagytengely az y-tengelyen, kistengely az x-tengelyen



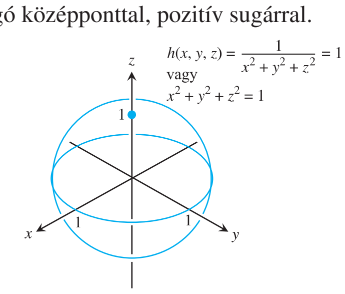
3. Értelmezési tartomány: minden (x,y) amire $x \ne 0$, $y \ne 0$; értékkészlet: $z \ne 0$; szintvonalak: hiperbolák, aszimptotáik az x- és y-tengely



5. Értelmezési tartomány: minden (x,y,z) pont; értékkészlet: minden valós szám; szintfelületek: forgásparaboloidok, tengelyük a z-tengely



7. Értelmezési tartomány: minden (x,y,z), ahol $(x,y,z) \ne$ $\ne (0,0,0)$; értékkészlet: pozitív valós számok; szintfelületek: gömbök, origó középponttal, pozitív sugárral.



9. -2 **11.** 1/2 **13.** 1 **15.** Legyen $y = kx^2$, $k \ne 1$

17. Nem; $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nem létezik

19. $\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta + \sin\theta$, $\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta + r\cos\theta$

21. $\frac{\partial f}{\partial R_1} = -\frac{1}{R_1^2}$, $\frac{\partial f}{\partial R_2} = -\frac{1}{R_2^2}$, $\frac{\partial f}{\partial R_3} = -\frac{1}{R_3^2}$

23. $\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{RT}{V}$, $\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{nT}{V}$, $\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}$, $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}$

25. $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2}$

27. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -30x + \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$

29. $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = -1$

31. $\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2,\ \left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2-\pi$

33. $\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=1} = -(\sin 1+\cos 2)(\sin 1)+$
$+(\cos 1+\cos 2)(\cos 1)-2(\sin 1+\cos 1)(\sin 2)$

35. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(0,1)} = -1$

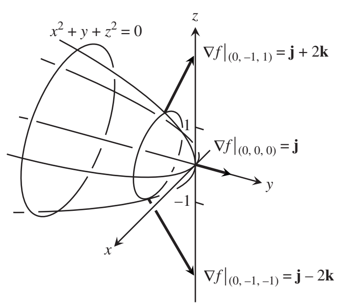
37. Leggyorsabb növekedés iránya: $\mathbf{u}= -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$;
leggyorsabb csökkenés iránya: $-\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$;
$D_{\mathbf{u}}f = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $D_{-\mathbf{u}}f = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $D_{\mathbf{u}_1}f = -\frac{7}{10}$, ahol $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

39. Leggyorsabb növekedés iránya: $\mathbf{u}= \frac{2}{7}\mathbf{i}+\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{6}{7}\mathbf{k}$;
leggyorsabb csökkenés iránya: $-\mathbf{u} = -\frac{2}{7}\mathbf{i}-\frac{3}{7}\mathbf{j}-\frac{6}{7}\mathbf{k}$;
$D_{\mathbf{u}}f = 7$; $D_{-\mathbf{u}}f = -7$; $D_{\mathbf{u}_1}f = 7$, ahol $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

41. $\pi/\sqrt{2}$

43. **(a)** $f_x(1,2) = f_y(1,2) = 2$ **(b)** 14/5

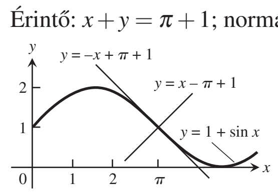
45.



47. Érintősík: $4x-y-5z=4$;
normálegyenes: $x=2+4t,\ y=-1-t,\ z=1-5t$

49. $2y-z-2=0$

51. Érintő: $x+y=\pi+1$; normálegyenes: $y=x-\pi+1$



53. $x=1-2t,\ y=1,\ z=1/2+2t$

55. A válasz $|f_{xx}|,\ |f_{yx}|,\ |f_{yy}|$-ra megállapított felső korláttól függ. Ha $M=\sqrt{2}/2$, akkor $|E|\le 0{,}0142$. Ha $M=1$, $|E|\le 0{,}02$.

57. $L(x,y,z)=y-3z,\ L(x,y,z)=x+y-z-1$

59. Ügyeljünk nagyon az átmérőre.

61. $dI = 0{,}038$, %-os változása I-nek: 15,83%, érzékenyebb a feszültségre

63. qbf (a) 5%

65. lokális minimum:-8, $(-2,-2)$-nél

67. Nyeregpont (0,0)-nál, $f(0,0)=0$; lok.max.:1/4, $(-1/2,-1/2)$-nél

69. Nyeregpont (0,0)-nál, $f(0,0)=0$; lok.min.:-4, (0,2)-nél; lok.max.:4, $(-2,0)$-nál; nyeregpont $(-2,2)$-nél, $f(-2,2)=0$

71. Absz.max.: 28, (4,0)-nál; absz.min.: $-9/4$, (3/2,0)-nál

73. Absz.max.: 18, $(2,-2)$-nél; absz.min.: $-17/4$, $(-2,1/2)$-nél

75. Absz.max.: 8, $(-2,0)$-nál; absz.min.: -1, (1,0)-nál

77. Absz.max.: 4, (1,0)-nál; absz.min.: -4, $(0,-1)$-nél

79. Absz.max.: 1, $(0,\pm 1)$-nél és (1,0)-nál; absz.min.: -1, $(-1,0)$-nál

81. Max.: 5, (0,1)-nél; min.:$-1/3$, $(0,-1/3)$-nál

83. Max: $\sqrt{3}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$-nál;
min: $-\sqrt{3}$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$-nál

85. Szélesség: $\left(\frac{c^2V}{ab}\right)^{1/3}$, mélység: $\left(\frac{b^2V}{ab}\right)^{1/3}$,
magasság: $\left(\frac{a^2V}{ab}\right)^{1/3}$

87. Max.: $\frac{3}{2}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$-nél és $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$-nél;
min.: $\frac{1}{2}$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$-nél és $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$-nél

89. **(a)** $(2y+x^2z)e^{yz}$ **(b)** $x^2e^{yz}\left(y-\frac{z}{2y}\right)$
(c) $(1+x^2y)e^{yz}$

91. $\frac{\partial w}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta},\ \frac{\partial w}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}$

97. $(t,-t\pm 4,t)$, t valós

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. $f_{xy}(0,0)=-1,\ f_{yx}(0,0)=1$

7. **(c)** $\frac{r^2}{2}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ **13.** $V=\frac{\sqrt{3}abc}{2}$

17. $f(x,y)=\frac{y}{2}+4,\ g(x,y)=\frac{x}{2}+\frac{9}{2}$

19. $y=2\ln|\sin x|+\ln 2$

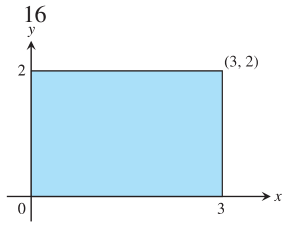
21. **(a)** $\frac{1}{\sqrt{53}}(2\mathbf{i}+7\mathbf{j})$ **(b)** $\frac{-1}{\sqrt{29097}}(98\mathbf{i}-127\mathbf{j}+58\mathbf{k})$

23. $w=e^{-c^2\pi^2t}\sin\pi x$

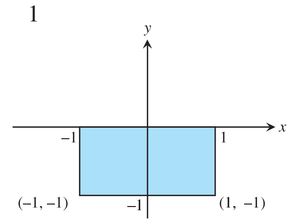
15. fejezet

15.1. Kettős integrál

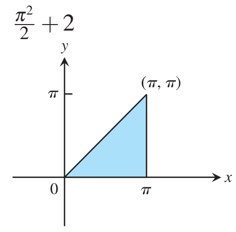
1. 16



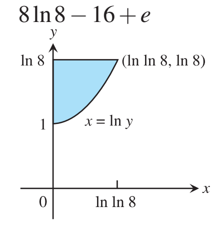
3. 1



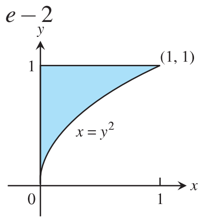
5. $\frac{\pi^2}{2}+2$



7. $8\ln 8-16+e$

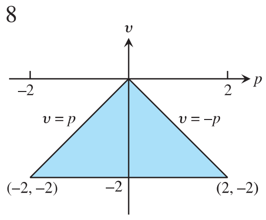


9. $e-2$

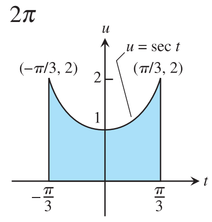


11. $\frac{3}{2}\ln 2$ **13.** $1/6$ **15.** $-1/10$

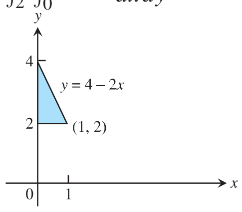
17. 8



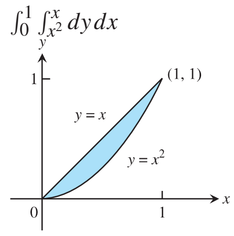
19. 2π



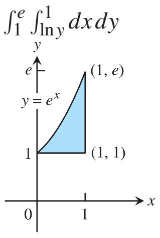
21. $\int_2^4 \int_0^{(4-y)/2} dx\,dy$



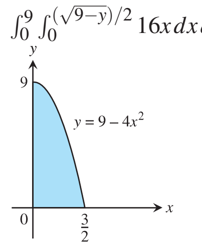
23. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx$



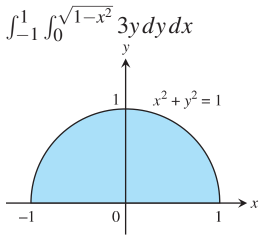
25. $\int_1^e \int_{\ln y}^{1} dx\,dy$



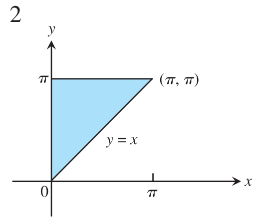
27. $\int_0^9 \int_0^{(\sqrt{9-y})/2} 16x\,dx\,dy$



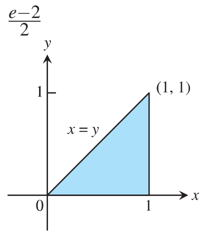
29. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y\,dy\,dx$



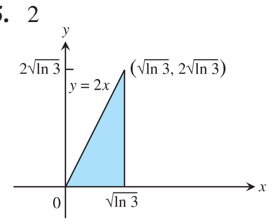
31. 2



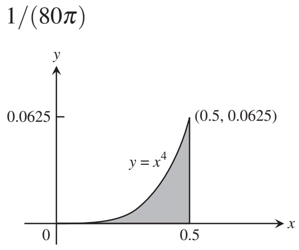
33. $\frac{e-2}{2}$



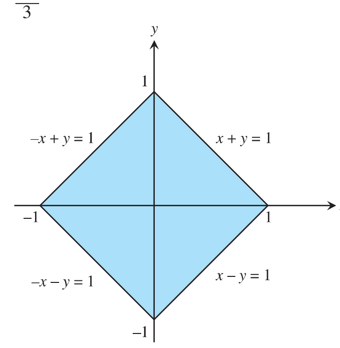
35. 2



37. $1/(80\pi)$



39. $\frac{-2}{3}$

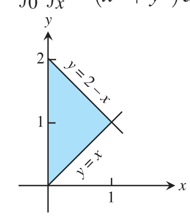


41. $\frac{4}{3}$ **43.** $\frac{625}{12}$ **45.** 16

47. 20 **49.** $2(1+\ln 2)$ **51.** 1

53. π^2 **55.** $-\frac{3}{32}$ **57.** $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

59. $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \frac{4}{3}$



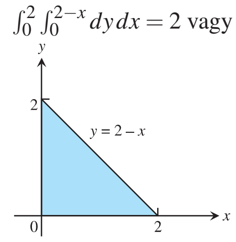
61. T azon (x, y) pontok halmaza, amelyekre $x^2+2y^2<4$

63. Nem, Fubini tétele szerint a két megoldásnak ugyanaz az eredménye kell legyen.

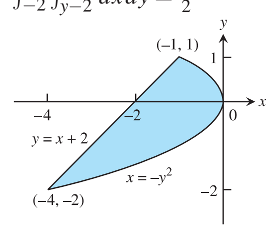
67. 0,603 **69.** 0,233

15.2. Terület, nyomaték, tömegközéppont

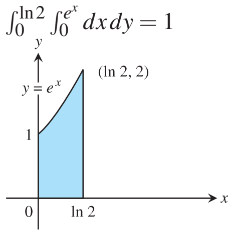
1. $\int_0^2 \int_0^{2-x} dy\,dx = 2$ vagy $\int_0^2 \int_0^{2-y} dx\,dy = 2$



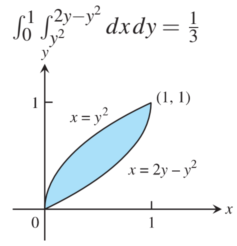
3. $\int_{-2}^1 \int_{y-2}^{-y^2} dx\,dy = \frac{9}{2}$



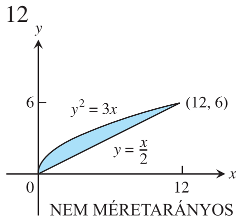
5. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} dx\,dy = 1$



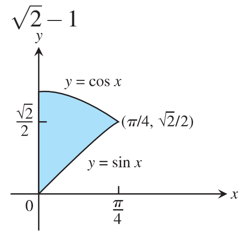
7. $\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} dx\,dy = \frac{1}{3}$



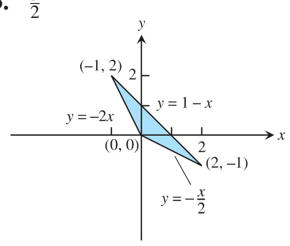
9. 12



11. $\sqrt{2}-1$



13. $\frac{3}{2}$



15. **(a)** 0 **(b)** $\frac{4}{\pi^2}$

17. $\frac{8}{3}$

19. $\bar{x}=\frac{5}{14}$, $\bar{y}=\frac{38}{35}$

21. $\bar{x}=\frac{64}{35}$, $\bar{y}=5/7$

23. $\bar{x}=0, \bar{y}=4/(3\pi)$

25. $\bar{x}=\bar{y}=4a/(3\pi)$

27. $I_x=I_y=4\pi, I_0=8\pi$

29. $\bar{x}=-1, \bar{y}=1/4$

31. $I_x=\frac{64}{105}, R_x=2\sqrt{\frac{2}{7}}$

33. $\bar{x}=3/8, \bar{y}=17/16$

35. $\bar{x}=11/3, \bar{y}=14/27, I_y=432, R_y=4$

37. $\bar{x}=0, \bar{y}=13/31, I_y=7/5, R_y=\sqrt{21/31}$

39. $\bar{x}=0, \bar{y}=7/10; I_x=9/10, I_y=3/10, I_0=6/5;$
$R_x=\frac{3\sqrt{6}}{10}, R_y=\frac{3\sqrt{2}}{10}, R_0=\frac{3\sqrt{2}}{5}$

41. $40\,000(1-e^{-2})\ln 7/2 \approx 43329$

43. Ha $0<a\le 5/2$, akkor a szerkezetnek 45°-nál nagyobb szögben kell megdőlnie, hogy felboruljon.

45. $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{2}{\pi},0\right)$

47. **(a)** 3/2 **(b)** Ugyanazok.

53. **(a)** (7/5, 31/10) **(b)** (19/7, 18/7)
(c) (9/2, 19/8) **(d)** (11/4, 43/16)

55. Ahhoz, hogy a tömegközéppont a határon legyen, $h=a\sqrt{2}$ kell legyen. Hogy belül legyen, $h>a\sqrt{2}$

15.3. Kettős integrálás polárkoordinátákkal

1. $\pi/2$ **3.** $\pi/8$ **5.** πa^2

7. 36 **9.** $(1-\ln 2)\pi$

11. $(2\ln 2-1)(\pi/2)$ **13.** $(\pi/2)+1$

15. $\pi(\ln 4-1)$ **17.** $2(\pi-1)$ **19.** 12π

21. $\left(\frac{3\pi}{8}\right)+1$ **23.** 4 **25.** $6\sqrt{3}-2\pi$

27. $\bar{x}=5/6, \bar{y}=0$ **29.** $\frac{2a}{3}$ **31.** $\frac{2a}{3}$

33. $2\pi(2-\sqrt{e})$ **35.** $\frac{4}{3}+\frac{5\pi}{8}$ **37.** **(a)** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ **(b)** 1

39. $\pi\ln 4$, nem **41.** $\frac{1}{2}(a^2+2h^2)$

15.4. Hármas integrál derékszögű koordináta-rendszerben

1. 1/6

3.
$$\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{3-3x-3y/2} dz\,dy\,dx,\quad \int_0^2\int_0^{1-y/2}\int_0^{3-3x-3y/2} dz\,dx\,dy,$$
$$\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{2-2x-2z/3} dy\,dz\,dx,\quad \int_0^3\int_0^{1-z/3}\int_0^{2-2x-2z/3} dy\,dx\,dz,$$
$$\int_0^2\int_0^{3-3y/2}\int_0^{1-y/2-z/3} dx\,dz\,dy,\quad \int_0^3\int_0^{2-2z/3}\int_0^{1-y/2-z/3} dx\,dy\,dz.$$
Mind a hat integrál értéke 1.

5.
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,dz\,dx\,dy,$$
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,dz\,dx\,dy,$$
$$\int_{-2}^{2}\int_{4}^{8-y^2}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\,dx\,dz\,dy+\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\,dx\,dz\,dy,$$
$$\int_{4}^{8}\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\,dx\,dy\,dz+\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\,dx\,dy\,dz,$$
$$\int_{-2}^{2}\int_{4}^{8-x^2}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\,dy\,dz\,dx+\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\,dy\,dz\,dx$$
$$\int_{4}^{8}\int_{-\sqrt{8-x}}^{\sqrt{8-x}}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\,dy\,dx\,dz+\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\,dy\,dx\,dz$$
Mind a hat integrál értéke 16π.

7. 1 **9.** 1 **11.** $\frac{\pi^3}{2}(1-\cos 1)$

13. 18 **15.** 7/6 **17.** 0

19. $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$

21. **(a)** $\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-x} dy\,dz\,dx$
(b) $\int_0^1\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{x^2}^{1-x} dy\,dx\,dz$
(c) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy\,dz$
(d) $\int_0^1\int_0^{1-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dz\,dy$
(e) $\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_0^{1-y} dz\,dx\,dy$

23. 2/3 **25.** 20/3 **27.** 1 **29.** 16/3

31. $8\pi-\frac{32}{3}$ **33.** 2 **35.** 4π **37.** 31/3

39. 1 **41.** $2\sin 4$ **43.** 4

45. a = 3 vagy a = 13/3

47. Az értelmezési tartomány mindazon (x,y,z) pontok halmaza, amelyekre $4x^2+4y^2+z^2\le 4$.

15.5. Tömeg és nyomaték három dimenzióban

1. $R_x=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{12}}, R_y=\sqrt{\frac{a^2+c^2}{12}}, R_z=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}$

3. $I_x=\frac{M}{3}(b^2+c^2), I_y=\frac{M}{3}(a^2+c^2), I_z=\frac{M}{3}(a^2+c^2)$

5. $\bar{x}=\bar{y}=0$, $\bar{z}=12/5$, $I_x=7904/105\approx 75{,}28$,
$I_y=4832/63\approx 76{,}70$, $I_z=256/45\approx 5{,}69$

7. **(a)** $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=8/3$ **(b)** $c=2\sqrt{2}$

9. $I_L=1386, R_L=\sqrt{\frac{77}{2}}$

11. $I_L=\frac{40}{3}, R_L=\sqrt{\frac{5}{3}}$

13. **(a)** 4/3 **(b)** $\bar{x}=4/5$, $\bar{y}=\bar{z}=2/5$

15. **(a)** $5/2$
(b) $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=8/15$
(c) $I_x=I_y=I_z=11/6$
(d) $R_x=R_y=R_z=\sqrt{\frac{11}{15}}$

17. 3

19. **(a)** $\frac{4}{3}g$ **(b)** $\frac{4}{3}g$

23. **(a)** $I_{tkp.}=\frac{abc(a^2+b^2)}{12}, R_{tkp.}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{12}}$
(b) $I_L=\frac{abc(a^2+7b^2)}{3}, R_L=\sqrt{\frac{a^2+7b^2}{3}}$

27. **(a)** $h=a\sqrt{3}$ **(b)** $h=a\sqrt{2}$

15.6. Hármas integrálok henger- és gömbi koordináta-rendszerben

1. $\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$ **3.** $\frac{17\pi}{5}$ **5.** $\pi(6\sqrt{2}-8)$

7. $\frac{3\pi}{10}$ **9.** $\frac{\pi}{3}$

11. **(a)** $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^1 r\,dr\,dz\,d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} r\,dr\,dz\,d\theta$

(c) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}}\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dz\,dr$

13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_0^{3r^2} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$

15. $\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{4-r\sin\theta} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$

17. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^{1+\cos\theta}\int_0^4 f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$

19. $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta}\int_0^{2-r\sin\theta} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$

21. π^2 **23.** $\frac{\pi}{3}$ **25.** 5π **27.** 2π

29. $(\frac{8-5\sqrt{2}}{2})\pi$

31. **(a)** $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta+$
$+\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{\csc\phi} \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_{\pi/6}^{\arcsin(1/\rho)} \rho^2\sin\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta+$
$+\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\pi/6} \rho^2\sin\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta$

33. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{\cos\phi}^2 \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{31\pi}{6}$

35. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1-\cos\phi} \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{8\pi}{3}$

37. $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\phi} \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta=\frac{\pi}{3}$

39. **(a)** $8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$
(b) $8\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$
(c) $8\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$

41. **(a)** $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^2 \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$
(b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$
(c) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$ **(d)** $5\pi/3$

43. $8\pi/3$ **45.** $9/4$ **47.** $\frac{3\pi-4}{18}$

49. $\frac{2\pi a^3}{3}$ **51.** $5\pi/3$ **53.** $\pi/2$

55. $\frac{4(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$ **57.** 16π **59.** $5\pi/2$

61. $\frac{4\pi(8-3\sqrt{3})}{3}$ **63.** $2/3$ **65.** $3/4$

67. $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=3/8$ **69.** $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,3/8)$

71. $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=5/6$ **73.** $I_z=30\pi, R_z=\sqrt{\frac{5}{2}}$

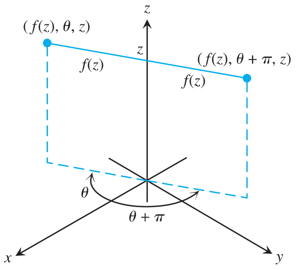
75. $I_x=\pi/4$ **77.** $\frac{a^4h\pi}{10}$

79. **(a)** $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{4}{5}), I_z=\frac{\pi}{12}, R_z=\sqrt{\frac{1}{3}}$
(b) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{5}{6}), I_z=\frac{\pi}{14}, R_z=\sqrt{\frac{5}{14}}$

83. $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{2h^2+3h}{3h+6}), I_z=\frac{\pi a^4(h^2+2h)}{4}, R_z=\frac{a}{\sqrt{2}}$

85. $\frac{3M}{\pi R^3}$

89. A felszín $r = f(z)$ egyenlete mutatja, hogy az $(r, \theta, z) = (f(z), \theta, z)$ pont minden θ esetén a felületen van. $(f(z), \theta + \pi, z)$ a felületen van, ha $(f(z), \theta, z)$ a felületen van, így a felület szimmetrikus a z-tengelyre.



15.7. Helyettesítés többes integráloknál

1. **(a)** $x = \frac{u+v}{3}, y = \frac{v-2u}{3}$; $\frac{1}{3}$ **(b)** Háromszögtartomány, határai: u=0, v=0, u + v = 3

3. **(a)** $x = \frac{1}{5}(2u - v), y = \frac{1}{10}(3v - u)$; $\frac{1}{10}$ **(b)** Háromszögtartomány, határai: 3v=u, v=2u, 3u + v = 10

7. 64/5

9. $\int_1^2 \int_1^3 (u+v)\frac{2u}{v}\,du\,dv = 8 + \frac{52}{3}\ln 2$

11. $\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}$ **13.** $\frac{1}{3}(1 + \frac{3}{e^2}) \approx 0{,}4687$

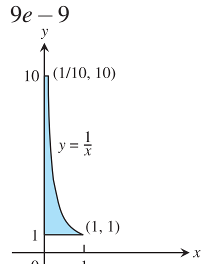
15. **(a)** $\begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u\cos^2 v + u\sin^2 v = u$

(b) $\begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = -u\sin^2 v - u\cos^2 v = -u$

19. 12 **21.** $\frac{a^2b^2c^2}{6}$

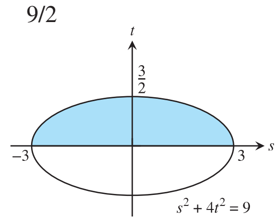
Gyakorló feladatok

1. $9e - 9$

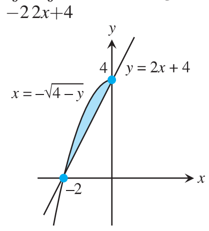


NEM MÉRETARÁNYOS

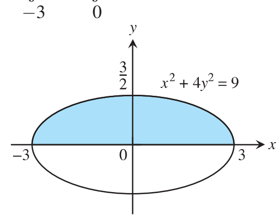
3. 9/2



5. $\int_{-2}^{0}\int_{2x+4}^{4-x^2} dy\,dx = \frac{4}{3}$



7. $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{(1/2)\sqrt{9-x^2}} y\,dy\,dx = \frac{9}{2}$



9. $\sin 4$ **11.** $\frac{\ln 17}{4}$ **13.** 4/3

15. 4/3 **17.** 1/4 **19.** $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{2-\ln 4}$

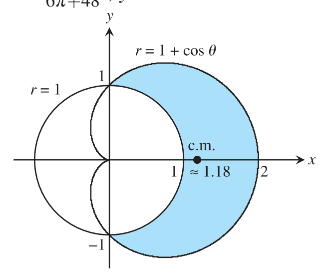
21. $I_0 = 104$ **23.** $I_x = 2\delta, R_x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

25. $M = 4, M_x = 0, M_y = 0$ **27.** π

29. $\bar{x} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}, \bar{y} = 0$

31. **(a)** $\bar{x} = \frac{15\pi+32}{6\pi+48}, \bar{y} = 0$

(b)



33. $\frac{\pi-2}{4}$ **35.** 0 **37.** 8/35

39. $\pi/2$ **41.** $\frac{2(31-3^{5/2})}{3}$

43. **(a)** $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 3\,dz\,dx\,dy$

(b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2} 3\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

(c) $2\pi(8 - 4\sqrt{2})$

45. $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi} \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{\pi}{3}$

47. $\int_0^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2xy\,dz\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2xy\,dz\,dy\,dx$

49. **(a)** $\frac{8\pi(4\sqrt{2}-5)}{3}$ **(b)** $\frac{8\pi(4\sqrt{2}-5)}{3}$

51. $I_z = \frac{8\pi\delta(b^5-a^5)}{15}$

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. **(a)** $\int_{-3}^{2}\int_{x}^{6-x^2} x^2\,dy\,dx$ **(b)** $\int_{-3}^{2}\int_{x}^{6-x^2}\int_0^{x^2} dz\,dy\,dx$

(c) 125/4

3. 2π **5.** $3\pi/2$

7. **(a)** Lyuk sugara =1, gömb sugara =2. **(b)** $4\sqrt{3}\pi$

9. $\pi/4$ **11.** $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ **15.** $1/\sqrt[4]{3}$

17. Tömeg $= a^2\arccos\left(\frac{b}{a}\right) - b\sqrt{a^2-b^2}$,

$I_0 = \frac{a^4}{2}\arccos\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{b^3}{2}\sqrt{a^2-b^2} - \frac{b^3}{6}(a^2-b^2)^{3/2}$

19. $\frac{1}{ab}(e^{a^2b^2}-1)$ **21.** **(b)** 1 **(c)** 0

25. $h=\sqrt{20}$ cm, $h=\sqrt{60}$ cm **27.** $2\pi\left[\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

16. fejezet

16.1. Vonalintegrál

1. (c) ábra **3.** (g) ábra **5.** (d) ábra
7. (f) ábra **9.** $\sqrt{2}$ **11.** $\frac{13}{2}$
13. $3\sqrt{14}$ **15.** $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}+9)$ **17.** $\sqrt{3}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
19. $\frac{10\sqrt{5}-2}{3}$ **21.** 8 **23.** $2\sqrt{2}-1$

25. **(a)** $4\sqrt{2}-2$ **(b)** $\sqrt{2}+\ ln(1+\sqrt{2})$

27. $I_z=2\pi\delta a^3,\ R_z=a$

29. **(a)** $I_z=2\pi\sqrt{2}\delta,\ R_z=1$ **(b)** $I_z=4\pi\sqrt{2}\delta,\ R_z=1$

31. $I_x=2\pi-2, R_x=1$

16.2. Vektormezők, cirkuláció, munka, áramlás

1. $\nabla f=-(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$

3. $\nabla g=-\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)\mathbf{i}-\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)\mathbf{j}+e^z\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F}=-\frac{kx}{(x^2+y^2)3/2}\mathbf{i}-\frac{ky}{(x^2+y^2)3/2)}\mathbf{j}$, bármely $k>0$

7. **(a)** 9/2 **(b)** 13/3 **(c)** 9/2

9. **(a)** 1/3 **(b)** - 1/5 **(c)** 0

11. **(a)** 2 **(b)** 3/2 **(c)** 1/2

13. 1/2 **15.** $-\pi$ **17.** 69/4
19. $-39/2$ **21.** 25/6

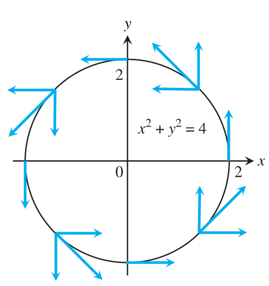
23. **(a)** $\text{cirk}_1=0$, $\text{cirk}_2=2\pi$, $\text{flux}_1=2\pi$, $\text{flux}_2=0$
(b) $\text{cirk}_1=0$, $\text{cirk}_2=8\pi$, $\text{flux}_1=8\pi$, $\text{flux}_2=0$

25. cirk = 0, flux $=a^2\pi$

27. cirk = $a^2\pi$, flux = 0

29. **(a)** $-\frac{\pi}{2}$ **(b)** 0 **(c)** 1

31.



33. **(a)** $\mathbf{G}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ **(b)** $\mathbf{G}=\sqrt{x^2+y^2}\mathbf{F}$

35. $\mathbf{F}=-\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

37. 48 **39.** π **41.** 0 **43.** $\frac{1}{2}$

16.3. Útfüggetlenség, potenciálfüggvény, konzervatív vektormező

1. Konzervatív **3.** Nem konzervatív
5. Nem konzervatív

7. $f(x,y,z)=x^2+\frac{3y^2}{2}+2z^2+C$

9. $f(x,y,z)=xe^{y+2z}+C$

11. $f(x,y,z)=x\ln x-x+\text{tg}(x+y)+\frac{1}{2}\ln(y^2+z^2)+C$

13. 49 **15.** -16 **17.** 1 **19.** $9\ln 2$
21. 0 **23.** -3

27. $\mathbf{F}=\nabla\left(\frac{x^2-1}{y}\right)$

29. **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** 1

31. **(a)** 2 **(b)** 2

33. **(a)** $c=b=2a$ **(b)** $c=b=2$

35. Bármelyik utat választhatjuk. A munka mindig ugyanakkora, mivel a mező konzervatív.

37. Az $\mathbf{F}$ erő konzervatív, mivel az M, N és P parciális deriváltja mind nulla. $f(x,y,z)=ax+by+cz+C$; $A=(xa,ya,za)$ és $B=(xb,yb,zb)$. Ezért $\int\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}=f(B)-f(A)=a(xb-xa)+ +b(yb-ya)+c(zb-za)=\mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

16.4. Green-tétel a síkban

1. fluxus = 0, cirk. = $2\pi a^2$ **3.** fluxus $=-\pi a^2$, cirk. = 0
5. fluxus = 2, cirk.= 0 **7.** fluxus = -9, cirk. = 9
9. fluxus = 1/2, cirk. =1/2

11. fluxus = 1/5, cirk. $=-1/12$

13. 0 **15.** 2/33 **17.** 0 **19.** -16π
21. πa^2 **23.** $\frac{3}{8}\pi$

25. **(a)** 4π, ha C pozitív irányítású
(b) $(h-k)$ (a tartomány területe)

35. **(a)** 0

16.5. Felület felszíne és felületi integrál

1. $\frac{13}{3}\pi$ **3.** 4
5. $6\sqrt{6}-2\sqrt{2}$ **7.** $\pi\sqrt{c^2+1}$
9. $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$ **11.** $3+2\ln 2$
13. $9a^3$ **15.** $\frac{abc}{4}(ab+ac+bc)$
17. 2 **19.** 18
21. $\frac{\pi a^3}{6}$ **23.** $\frac{\pi a^2}{4}$
25. $\frac{\pi a^3}{2}$ **27.** -32
29. -4 **31.** $3a^4$

33. $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$

35. $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$, $I_z=\frac{15\pi\sqrt{2}}{2}\delta$, $R_z=\frac{\sqrt{10}}{2}$

37. **(a)** $\frac{8\pi}{3}a^4\delta$ **(b)** $\frac{20\pi}{3}a^4\delta$

39. $\frac{\pi}{6}(13\sqrt{13}-1)$

41. $5\pi\sqrt{2}$

43. $\frac{2}{3}(5\sqrt{5}-1)$

16.6. Paraméteresen adott felületek

1. $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+r^2\mathbf{k}, 0\le r\le 2,$
$0\le\theta\le 2\pi$

3. $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+(r/2)\mathbf{k}, 0\le r\le 6,$
$0\le\theta\le\pi/2$

5. $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+\sqrt{9-r^2}\mathbf{k},$
$0\le r\le 3\sqrt{2}/2, 0\le\theta\le 2\pi$; tehát
$\mathbf{r}(\phi,\theta)=(3\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(3\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+(3\cos\phi)\mathbf{k},$
$0\le\phi\le\pi/4, 0\le\theta\le 2\pi$

7. $\mathbf{r}(\phi,\theta)=(\sqrt{3}\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(\sqrt{3}\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+$
$+(\sqrt{3}\cos\phi)\mathbf{k},\ \pi/3\le\phi\le 2\pi/3,\ 0\le\theta\le 2\pi$

9. $\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(4-y^2)\mathbf{k}, 0\le x\le 2, -2\le y\le 2$

11. $\mathbf{r}(u,v)=u\mathbf{i}+(3\cos v)\mathbf{j}+(3\sin v)\mathbf{k}, 0\le u\le 3, 0\le v\le 2\pi$

13. **(a)** $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+(1-r\cos\theta-r\sin\theta)\mathbf{k},$
$0\le r\le 3,\ 0\le\theta\le 2\pi$
(b) $\mathbf{r}(u,v)=(1-u\cos v-u\sin v)\mathbf{i}+(u\cos v)\mathbf{j}+(u\sin v)\mathbf{k},$
$0\le u\le 3,\ 0\le v\le 2\pi$

15. $\mathbf{r}(u,v)=(4\cos^2 v)\mathbf{i}+u\mathbf{j}+(4\cos v\sin v)\mathbf{k},$
$0\le u\le 3, -(\pi/2)\le v\le(\pi/2);$
Más módon: $\mathbf{r}(u,v)=(2+2\cos v)\mathbf{i}+u\mathbf{j}+(2\sin v)\mathbf{k},$
$0\le u\le 3, 0\le v\le 2\pi$

17. $\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{2}r\,dr\,d\theta=\frac{\pi\sqrt{5}}{2}$

19. $\int_0^{2\pi}\int_1^3 r\sqrt{5}dr\,d\theta=8\pi\sqrt{5}$

21. $\int_0^{2\pi}\int_1^4 1\,du\,dv=6\pi$

23. $\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{4u^2+1}\,du\,dv=\frac{(5\sqrt{5}-1)}{6}\pi$

25. $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi} 2\sin\phi\,d\phi\,d\theta=(4+2\sqrt{2})\pi$

27. $\iint_S x\,d\sigma=\int_0^3\int_0^2 u\sqrt{4u^2+1}\,du\,dv=\frac{17\sqrt{17}-1}{4}$

29. $\iint_S x^2\,d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\phi\cos^2\theta\,d\phi\,d\theta=\frac{4\pi}{3}$

31. $\iint_S z\,d\sigma=\int_0^1\int_0^1(4-u-v)\sqrt{3}\,dv\,du=3\sqrt{3}$
(amennyiben $x=u, y=v$)

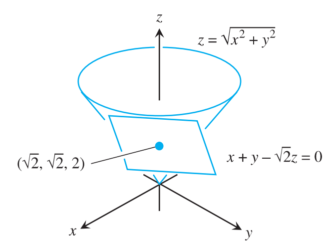
33. $\iint_S x^2\sqrt{5-4z}\,d\sigma=$
$=\int_0^1\int_0^{2\pi}u^2\cos^2 v\sqrt{4u^2+1}u\sqrt{4u^2+1}dv\,du=$
$=\int_0^1\int_0^{2\pi}u^3(4u^2+1)\cos^2\ v\,dv\,du=\frac{11\pi}{12}$

35. -32 **37.** $\frac{\pi a^3}{6}$ **39.** $\frac{13a^4}{6}$

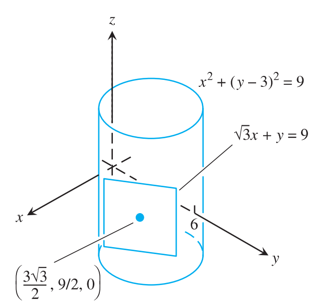
41. $2\pi/3$ **43.** $-73\pi/6$ **45.** (a/2, a/2, a/2)

47. $8\delta\pi a^4/3$

49.



51.



55. **(b)** $A=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[a^2b^2\sin^2\phi\cos^2\phi+b^2c^2\cos^4\phi\cos^2\theta+\right.$
$\left.+a^2c^2\cos^4\phi\sin^2\theta\right]^{1/2}d\phi\,d\theta$

57. $x_0x+y_0y=25$

16.7. Stokes-tétel

1. 4π **3.** $-5/6$ **5.** 0

7. -6π **9.** $2\pi a^2$ **13.** 12π

15. $-\pi/4$ **17.** -15π **25.** $16I_y+16I_x$

16.8. Gauss–Osztrogradszkij-tétel

1. 0 **3.** 0 **5.** -16

7. -8π **9.** 3π **11.** $-40/3$

13. 12π **15.** $12\pi\left(4\sqrt{2}-1\right)$

21. Az integrál értéke soha nem haladja meg a felület felszínét.

Gyakorló feladatok

1. Út1: $2\sqrt{3}$; Út2: $1+3\sqrt{2}$

3. $4a^2$ **5.** 0 **7.** $8\pi\sin(1)$

9. 0 **11.** $\pi\sqrt{3}$ **13.** $2\pi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

15. $\frac{abc}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$ **17.** 50

19. $\mathbf{r}(\phi,\theta)=(6\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(6\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+(6\cos\phi)\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{6}\le\phi\le\frac{2\pi}{3}, 0\le\theta\le 2\pi$

21. $\mathbf{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\mathbf{i}+(r\sin\theta)\mathbf{j}+(1+r)\mathbf{k}$, $0\le r\le 2, 0\le\theta\le 2\pi$

23. $\mathbf{r}(u,v)=(u\cos v)\mathbf{i}+2u^2\mathbf{j}+(u\sin v)\mathbf{k}$, $0\le u\le 1, 0\le v\le\pi$

25. $\sqrt{6}$ **27.** $\pi\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$

29. Konzervatív **31.** Nem konzervatív

33. $f(x,y,z)=y^2+yz+2x+z$ **35.** Út 1: 2; út 2: 8/3

37. **(a)** $1-e^{-2\pi}$ **(b)** $1-e^{-2\pi}$ **39.** 0

41. **(a)** $4\sqrt{2}-2$ **(b)** $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$

43. $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(1,\frac{16}{15},\frac{2}{3}\right)$;
$I_x=\frac{232}{45}, I_y=\frac{64}{15}, I_z=\frac{56}{9}$,
$R_x=\frac{2\sqrt{29}}{3\sqrt{5}}, R_y=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}}, R_z=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

45. $\bar{z}=\frac{3}{2}, I_z=\frac{7\sqrt{3}}{3}, R_z=\sqrt{\frac{7}{3}}$

47. $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,49/12), I_z=640\pi, R_z=2\sqrt{2}$

49. fluxus: $3/2$; cirk.: $-1/2$

53. 3 **55.** $\frac{2\pi}{3}\left(7-8\sqrt{2}\right)$

57. 0 **59.** π

Az anyag alaposabb elsajátítását segítő további feladatok

1. 6π **3.** 2/3

5. **(a)** $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k}$
(b) $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{i}+y\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{F}(x,y,z)=z\mathbf{i}$

7. $\frac{16\pi R^3}{3}$

9. $a=2, b=1$. A flux minimuma -4.

11. **(b)** $\frac{16}{3}g$
(c) Munka $=\left(\int_C gxy\,ds\right)\bar{y}=g\int_C xy^2\,ds=\frac{16}{3}g$

13. **(c)** $\frac{4}{3}\pi w$

19. Akkor, ha $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$.