

Előszó: Törekvések és célok

Negyven évvel ezelőtt, segédgépészként eszembe sem jutott, hogy a matematika hivatásommá válhat, amikor kezembe került Richard Courant és Herbert Robbins klasszikus műve, a *Mi a matematika?* A címben felvetett kérdésre a szerzők végül is nem adtak választ, jobban mondva válasz gyanánt megismertettek a matematikával, de nem mondták meg, mi az. Csodálattal és élvezettel faltam a könyvet, de végére jutva újra megkérdezhettem magamtól: „Valójában mi a matematika?”

Ez a könyv gyökeresen más, a megszokottól eltérő választ kínál ugyanerre a kérdésre. Félredobtam a platonizmust és a formalizmust — bár felismertem az okokat, melyek fényében (váltakozva) ésszerűnek tűnnek — és azt mondtam: a filozófia felől nézve a matematikát egyfajta emberi tevékenységként kell értelmezni, társadalmi jelenségként, az emberi kultúra részeként, mely a történelem során alakult ki és fejlődött, s csakis társadalmi összefüggéseiben válik érthetővé. A humanizmus az én értelmezésemben mindazon bölcseszövegek összességét jelenti, amelyek a matematikát humán tevékenységnek, az emberi kultúra és társadalom termékének és jellegzetességének tekintik. A „társadalmi konceptualizmus”, „társadalmi-kulturális-történelmi” vagy „társadalmi-történelmi filozófia” fogalmakat saját egyéni nézeteim számára tartom fenn, abban az értelemben, ahogy azt a könyvben kifejtem.

Ez a könyv első pró támadás a matematika tradicionális filozófiája ellen. Radikalizmusa a matematika filozófiájára vonatkozik, nem érinti magát a matematikát. Először volt a matematika, azután a matematikáról való bölcselkedés, és nem fordítva. Miközben a platonizmust, a formalizmust és a neofregeianizmust ostromozom, tiszteletben tartom bárki jogát arra, hogy úgy matematizáljon, ahogy kedve tartja. Őszintén szólva épp a matematika szeretete és a létrehozói iránt érzett hála íratta velem ezt a könyvet.

Mindennapos és nyilvánvaló ismeret persze, hogy a matematika emberi tevékenység, társadalmi közegben művelhető és történetileg fejlődik. Ezekről az egyszerű megfigyelésekről azonban általában azt gondolják, hogy nem tartoznak a tárgyhoz, ha a matematika mibenlétét firtató filozófiai kérdéstről van szó. Ám a szociális és történelmi beágyazódások nélkül a matematika filozófiájának problémája megoldhatatlan. Ezen az alapon egy méltányos leírásnak és elemzésnek mégiscsak része kell legyen.

A könyv nem kíván matematikai vagy filozófiai előismereteket. A képleteket és számításokat egy külön fejezet tartalmazza Matematikai összefoglaló címen.

Sokatmondó párhuzam fedezhető fel a matematika jelenkori filozófiája és a harmincas évek tudományfilozófiája között. A tudományfilozófiát akkoriban az ún. „logikai empirizmus” vagy „pozitivizmus” uralta (Rudolf Carnap volt ennek az irányzatnak a legkiemelkedőbb képviselője). A pozitivisták úgy vélték, hogy kezükben van az a metodológia, melynek immár minden tudomány alávethető (l. 10. fejezet).

Az 1950-es években aztán észrevették, hogy a tudósok figyelmen kívül hagyták a pozitivista módszertant. Néhány destruktív hajlamú tudós — Karl Popper, Thomas Kuhn, Lakatos Imre, Paul Feyerabend — azt ajánlotta, hogy a tudomány filozófiájára úgy tekintsenek, mint a tudósok aktuális tevékenységére. Az általuk megrajzolt tudományképben alapvető szerepet kapott a változás, a növekedés és a polémia. A tudományfilozófia átalakult.

A matematika filozófiáját ez a forradalom nem érintette meg. Azt még mindig saját dogmatizmusa uralta. A „neofregeianizmus” kifejezést Philip Kitcher honosította meg a matematika filozófiájában. A neofregeiánusok azt állították, hogy a halmazelmélet a matematika egyetlen olyan fejezete, mely méltó a filozófiai vizsgálódásokra. Ez a felfogás a Frege—Russel—Brouwer—Hilbert-féle fundamentalista irányzat maradványa, mely nagyjából 1890 és 1930 között uralta a matematika filozófiáját. A valódi alapok keresése háttérbe szorult, paradox módon a matematika filozófiának köszönhetően — melynek célja éppen a matematika alapjainak kutatása lenne.

A neofregeiánusok nem hagyatkoztak a matematikusok nézeteire és gyakorlati tapasztalatára. Elszakadtak a matematikusoktól, a matematika alkalmazóitól, a matematikatanároktól. Néhány útkereső megpróbált új elveket meghonosítani — P. J. Davis, J. Echeverria, P. Ernest, N. Goodman, P. Kitcher, S. Restivo, G.-C. Rota, B. Rotman, A. Sfard, M. Tiles, T. Tymoczko, H. Freudenthal, P. Henrici, R. Thomas, J. P. van Bendegem és mások. Ez a könyv fáradozásaik eredményét adja közre.¹

A matematika tanítása

Az Egyesült Államok lakosságára általában jellemző a „számszony”, a középiskolások, ha csak lehet, kerülik a matematikát, s a főiskolai hallgatók 50%-a kudarcot vall a matematika elsajátításában. A jelenséget kiváltó okok között megemlítjük az iskolák szűkös anyagi lehetőségeit, a televíziózás következtében fellépő mentális elhasználódást, a matematikát nem szerető szülőket.

A sikertelenségnek van azonban egy másik összetevője is, amely eddig észrevétlen maradt: s ez a matematika természetének téves értelmezése. Ez a könyv nem szolgál iskolai osztályokban elvégzett kísérletek tapasztalataival, ötleteket sem ad az oktatás

¹ E könyv előzménye „Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics” című, 1978-ból származó cikkem, melyet Gian-Carlo Rota tett közzé az *Advances Mathematics*ben, valamint a Philip J. Davisszel közösen írt *A matematika élménye* című könyvem 7. és 8. fejezete.

mindennapi gyakorlatához. Annyiban mégis hozzájárulhat az oktatás reformjához, hogy segít a matematikatanároknak és általában az oktatóknak a matematika valódi természetének megértésében.

Az oktatás helyzetéről polemizál a *The Plight of the Working Mathematician* 1. fejezete valamint a *Teaching and Ideology* című munka 13. fejezete.

Az Első Rész vázlata

A könyv két fő részre tagolódik. Az első rész öt fejezete egymásra épül. A 6—12. fejezetekből álló második rész inkább történeti jellegű. Az egyes fejezeteket önmagukban is megálló szakaszokra osztottam. A 13. fejezet összegzés és egyben ismétlés.

A könyvet matematikai jegyzetek és kommentárok zárják. A főszövegben említett matematikai fogalmak jelentését gyakran a matematikai összefoglalóban tárgyaljuk meg bővebben. Figyelemfelkeltésül az ilyen fogalmakat a főszövegben (**) jelzéssel láttuk el.

Az első fejezet egy rejtvényvel indul: Hány részből áll egy négydimenziós kocka? Kétséges, hogy vajon létezik-e egyáltalán négydimenziós kocka. A szakaszt elolvasva az olvasó képes lesz megmondani a négydimenziós kocka alkotóelemeinek számát. Ezek után visszatérünk a négydimenziós kocka létezésére vonatkozó kérdésünkre. Ez a rejtvény a matematika filozófiájában alapvető szerepet játszó problémának egy paradigmája. Milyen értelemben beszélhetünk egy matematikai objektum létezéséről?

E bevezető után gyors pillantást vetünk a modern matematikára, és megismerkedünk a matematikai platonizmussal. Majd a könyv súlyponti része következik: a matematika szociálhistorikus filozófiája, amit én humanizmusnak nevezek. Hasonló, de újabb keletű filozófiákról olvashatunk a 11. és a 12. fejezetben.

A 2. fejezet a matematikafilozófia értékelésének kritériumait értékeli. Néhány standard kritérium fölöslegesnek bizonyul majd, más mellőzött kritériumokról pedig belátjuk, hogy lényegbevágóak. Később, a 13. fejezetben e kritériumok alapján önmagamat fogom minősíteni. A 3. fejezet első szakasza egy botrányt fed fel: a gyakorló matematikusok két egymásnak ellentmondó filozófia szószólói! A következő szakaszban végigvezetjük az olvasót a matematika frontvonalán, de bejárjuk néhány rejtett ösvényét is. Aztán megismerkedünk néhány matematikai mítosszal, hogy aztán a matematika kincseskamrájának mélyéből előásott anekdotákkal mindjárt porrá is zúzzuk őket. Ez a fejezet tanúsítani fogja, hogy az életből vett matematikai tapasztalatok a platonizmus vagy formalizmus ellenében a humanizmust támogatják.

A 4. és 5. fejezetben a humanista szemlélet alapján újraértelmezünk olyan megszokott, de vitatott fogalmakat, amilyen a

bizonyítás,
 intuíció,
 valószínűség,
 végtelen,
 létezés,
 jelentés,
 objektum kontra eljárás,
 invenció kontra felfedezés.

Mire való a sok történeti vonatkozás?

Nekem az a véleményem, hogy a matematikát történeti fejlődése mentén kell megismerni és megérteni. Ezért természetes számomra az is, hogy a különféle filozófiákat történeti összefüggésben vizsgáljam. Látni fogjuk, hogy a fundamentalizmus és a neofregeianizmus bölcsője a vallás, a teológia, valamint a filozófia főirányának évszázados összefonódása.

A múlt cserepeit rakosgatva váratlan dolgokra bukkanhatunk. René Descartes *Geometriájában* megszegi René Descartes híres *Módszereit*. George Berkley és David Hume különös aritmetikai és geometriai elképzelések lelkes hívei.

Két, egymástól független történetet beszélünk el. Az első Püthagoraszig és Platónig nyúlik vissza, s az idealizmus és az abszolutizmus fejlődését követi nyomon, mely irányzat képviselői a matematikát az ember fölött állónak illetve az embertől függetlennek mondták. Én őket hívom Többségnek. Történetükön meg nem szakadó fonalként húzódik végig a teológia és a matematika idealista filozófiájának kölcsönös egymásra hatása.

Ezután azokat a gondolkodókat vesszük sorra, kezdve Arisztotelészen, akik a matematikát humán tevékenységként fogták fel. Őket „humanistáknak vagy különcöknek” hívom. (A különc megjelölést először Aspray és Kitcher lebilincselő cikkében olvastam.)

Ehhez a nem éppen megszokott tárgyalásmódhoz Kurt Gödel egy érdekes megjegyzése is bátorítást adott: „Hiszem, hogy a lehetséges világszemléletek áttekintésének legtöbb sikerrel kecsegtető módja, ha a metafizikához (vagy valláshoz) fűződő viszonyuk vagy épp a metafizikától való elhatárolódásuk mértéke és módja szerint osztályozzuk őket. Ilyen módon két csoportot azonnal elkülöníthetünk egymástól: egyik oldalon áll a szkepticizmus, a materializmus és a pozitívizmus, a másik oldalon a spiritualizmus, az idealizmus, a teológia és egyebek... Ekkor bárki megmondhatja, hogy teszem azt az apriorizmus elveit tekintve a jobboldalon áll, az empirizmus pedig a baloldalon.” (Gödel 1995, 375. o.)

„A fehér hím halála”

Ha valaki egy futó pillantást vet az névmutatóra, máris láthatja, hogy az általam idézett szerzők többsége fehér férfi, sokan közülük már meg is haltak. Mindazonáltal a fehér férfiak az emberi fajnak csak egy kicsiny hányadát adják.

Miért van ez így?

A művészet, a zene, a költészet, a botanika és az építészet valamilyen formában minden ember és mindkét nem számára hozzáférhető. A bevásárlás számtana és az építészet geometriája is ilyenek. A matematika jelentéséről és természetéről való disputa azonban ideológiai s nem gyakorlati természetű. A nyugati társadalmak meghatározó egyedei, s egyben ideológusai azonban fehér férfiak voltak.

Ma ez már kevésbé igaz. Idézhetném Julia Floydot, Gila Hanna-t, Penelope Maddyt, Anna Sfardet, Mary Tiles-t. Örülök, hogy a publikációk nemek szerinti megoszlása a matematika területén is humanizálódott.

Hasonlóan áll a dolog a színes bőrű szerzőkkel.

Beszélek „gyakorló matematikusokról” és „akadémikus filozoferekről”, s ezzel az egyedeket valamiféle statisztikai skatulyákba sorolom. Megengedhető-e az egyedi különbségek figyelmen kívül hagyása? Nem is olyan régen a nemzeti különbségeket tartották érdekesnek és fontosnak. Manapság úgy gondolják, hogy a férfi és a nő, az elit és a hátrányos helyzetű réteg (a fehérek és a színes bőrűek) közötti különbözőségek a szignifikánsak.

Egyes emberek úgy vélik, hogy a matematikus nők és a színes bőrű matematikusok a fehér férfiaktól eltérően látják a matematika természetét. Én nem hiszek az efféle különbségek létezésében. Ha mégis vannak különbségek, akkor én nem vagyok kompetens ebben a témában véleményt mondani.

A könyv egyik hiányossága, hogy teljesen mellőzi a nem-nyugati matematikát. Tudjuk, a görög tudományt főként arab szerzőknek köszönhetően ismerhette meg Európa. India és Kína matematikája fontos üzeneteket hordozott Európa számára. Mégis, a görögökhöz hasonlítva alig tudunk valamit Indo—Amerika, Afrika, a Közel- és a Távol—Kelet matematikafilozófiájáról. A nem-nyugati matematika irodalma értékes, de nem filozofikus. A 12. fejezet, amikor Marcia Ascher munkáját méltatom, valamelyest enyhíti a könyv többi részének Európa-központúságát. Sajnos, én nem vagyok képes arra, hogy Mexikó City vagy Beijing levéltári anyagát átnézzem és lefordítsam.

Eltérő — keleti és nyugati — vallásfilozófiák eredményezhetnek-e más matematikafilozófiát? S ha igen, befolyásolhatja-e ez a tény magát a matematikát? A jövő tudománya majd biztosan fényt derít ezekre a csodálatos kérdésekre.

Santa Fe, N.M.
1996 December

Reuben Hersh