Feladatmegoldások

1.1. feladat. A fogyasztási pálya teljes kisimítása esetén $c_i \equiv 1/3$. Mivel $c_0 > w_0$, a hitelkorlát miatt $c_0^* = 1/4$, tehát $c_1^* = c_2^* = 3/8$.

2.1. feladat. a) Feltevésünk szerint (2.4) és (2.5) számlálója közös. Két részre (munka-, illetve nyugdíjkorszak) bontva mindkét tört nevezőjét, az első összeg azonos, a második összeg (2.4)-ben kisebb, mint (2.5)-ben.

b) Ellenpéldánk:

$$c_L^{\mathrm{I}} = \frac{1+1/2\cdot 2\cdot 1/2}{1+1/2\cdot 1/2+1/2\cdot 1/4} = \frac{12}{11} \approx 1{,}091;$$
$$c_L^{\mathrm{N}} = \frac{1+2\cdot 1/2}{1+1/2+1/4} = \frac{8}{7} \approx 1{,}143.$$

3.1. feladat. Legyen φ a β_u és τ_w közti arányossági szorzó: $\beta_u(1-\tau_w) = \varphi\tau_w$. Új rendszerünkben $\beta_u = \beta_w = \varphi\tau_w^*$. Rendezve: $\tau_w^* = \tau_w/(1-\tau_w)$. Lásd az M.1. táblázatot.

3.2. feladat. A jelenérték-egyenlet a következő:

$$\sum_{j=0}^{L-1} b_j r^{-j} = \sum_{i=L}^{L+S} x_i r^{-i}.$$

a) $b_j = b_0$, $x_i = x_L$. Azaz

$$x_L = b_0 r^L \frac{I_{L-1}(1/r)}{I_S(1/r)}.$$

M.1. táblázat. Járulékkulcs a keresetnövekedés és a kamatláb függvényében, %

Reálkamatláb $100(r-1)$	Reálkereset növekedési ütem $100(\Omega-1)$	
	0	2
0	20,0	28,7
2	10,8	16,1
5	4,1	6,7

(Az eredeti világbanki táblázattól való kisebb eltérés oka némileg eltérő modellezés és a kerekítés lehet.)

b)

$$\sum_{j=0}^{L-1} b_j r^{-j} = \xi \sum_{i=L}^{L+S} w_i r^{-i}.$$

c) Számszerűen: $x_L^{\mathrm{a}} = 160{,}8$ E Ft, $x_L^{\mathrm{b}} = 86{,}4$ E Ft, $S^{\mathrm{b}} = 17$ év, tehát a hagyományos bankkölcsön a keresetfüggő diákkölcsönhöz képest túl rövid időre szól, és túl nagy a kezdő törlesztés reálértéke. (Infláció esetén a két séma közti különbség még nagyobb.)

4.1. feladat. A

$$\frac{\tau_v \sum_{i=L}^{R} l_i v_i \rho^{-i}}{\sum_{j=R+1}^{D} l_j b_j \rho^{-j}}$$

függvény nyilvánvalóan növekvő függvénye ρ-nak, s a $\rho = 1$ helyen az értéke éppen a (várható) befizetések/kifizetések hányadosa.

4.2. feladat. A pontrendszer képletébe behelyettesítve a 4.1. példabeli $\mathbf{v}_i \equiv \mathbf{v}_R g^{i-R}$ azonosságot:

$$b_{R+1} = \alpha_2^* \sum_{i=L}^{R} \frac{v_i}{\mathbf{v}_i} = \frac{\alpha_2^*}{\mathbf{v}_R} \sum_{i=L}^{R} v_i g^{R-i}.$$

4.3. feladat. $v^{(1)} = 531$ \$/hó kereset esetén $b^{(1)} = 0{,}9 \cdot 531 = 478$ \$. A tényleges nyugdíj $b = b^{(1)} + 0{,}32 \cdot (2000 - 531) = 948$ \$/hó.

4.4. feladat. A 4.4. táblázat szerint a referenciakereset 47 E Ft, és ezt a (4.15) képlet szerint meg kell szorozni a 4.3. táblázat szerinti $\chi_{40} = 0{,}74 + 0{,}015 \cdot 4 = 0{,}8$-cal: $b = 0{,}8 \cdot 47 = 37{,}6$ E Ft.

5.1. feladat. a) Hollandia: $b = \min\{b_{\mathrm{m}}, \beta_v v\}$, $b_{\mathrm{m}} = \beta_v v$, tehát $v^{\mathrm{o}} = b_{\mathrm{m}}/\beta_v$. b) Svájc: $b = b_{\mathrm{m}}^* + \beta_v^* v$. c) Ha a két ország keresetei és nyugdíjai makroszinten hasonlók, akkor a svájci minimum nagyobb, mint a holland: $b_{\mathrm{m}}^* > b_{\mathrm{m}}$; és a svájci maximum pedig kisebb, mint a holland: $b^*_{\mathrm{m}} + \beta^*_v v_{\mathrm{M}} < b_{\mathrm{m}} + \beta_v v_{\mathrm{M}}$. (A minimumkeresettől itt eltekintünk.)

5.2. feladat. Legyen τ_1 és τ_2 0 és 1 közötti valós szám, rendre a vegyes rendszer tb- és magánpillér járulékkulcsa. Tegyük föl, hogy a tb-rendszer az eszmei számla rendszerén alapul. A tiszta tb-nyugdíj

$$b^1_{R+1} = \alpha \sum_{i=L}^{R} v_i\,(\tau_1 + \tau_2)\, g_{i+1} \cdots g_R.$$

Egy $\bar{T}$ szolgálati idővel átlépő egyén vegyes rendszerbeli nyugdíját a 6.1. tételből kapjuk a következő módosítással:

$$b^{12}_{R+1} = \alpha \sum_{i=L}^{R} v_i \tau_1 g_{i+1} \cdots g_R + \alpha \sum_{i=L+\bar{T}}^{R} v_i \tau_2 r_{i+1} \cdots r_R.$$

Innen már adódik a képlet.

6.1. feladat. a) Legyen w_i az i-edik év teljes keresete, s ezután fizet τw_i tb-járulékot a dolgozó. A nyugdíjas b_j bruttó nyugdíjat kap a j-edik évben. Az adózás utáni nettó jövedelem $w_i(1-\tau) - \iota(w_i(1-\tau))$, illetve $b_j - \iota(b_j)$.

b) Ha a tb-nyugdíjrendszer bevezetése előtti állapotot nézzük, akkor τw_i a dolgozó i-edik évi adómentes megtakarítása, és $\iota(b_j)$ a b_j megtakarítás felhasználása után fizetett szja.

6.2*. feladat. A 4.4. táblázat (és az előtte ismertetett adat) szerint ennek az egyénnek a bruttó keresete havi 67,7 E Ft-volt. Valóban, levonva a 10%-os munkavállalói tb-járulékot és a 6.1. feladatban megadott adatokból számított éves 812 E Ft-os keresethez tartozó szja-t: $t^{(1)} = 0 + 0{,}2 \cdot 250 = 50$ E Ft, $t^{(2)} = 50 + 0{,}22 \cdot (300 - 250) = 61$ E Ft, $t^{(3)} = 61 + 0{,}31 \cdot (500 - 300) = 123$ E Ft, $t^{(4)} = 123 + 0{,}35 \cdot (700 - 500) = 193$ E Ft, $t = 193 + 0{,}39 \cdot (812 - 700) = 237$ E Ft, ebből levonva az alkalmazotti adójóváírás $= \min\{50{,}4 \text{ E Ft}; 0{,}2 \cdot v\} = 50{,}4$ E Ft-ot és $0{,}014 \cdot 812$ EFt $= 11{,}4$ E Ft: 175,2 E Ft, elosztva 12-vel: 14,6 E Ft: azaz $u = 67{,}7 - 6{,}8 - 14{,}6 = 46{,}3$ E Ft/hó.

A 812 E Ft-os bruttó keresetből 66% a bruttó nyugdíj; 536 E Ft. Az 1998-as szja értelemszerű alkalmazásával ez a 4. sávba esik: az évi adó, $t = 123 + 0{,}35 \cdot (536 - 500) = 135{,}6$ E Ft, alkalmazotti adókedvezmény: 50,4 E Ft, tehát az új nettó nyugdíj: $536 - 135{,}6 + 50{,}4 = 451$ E Ft. Havi értéke: 37,6 E Ft. Összevetve a 4.3. feladat eredményével: a két rendszer nettó nyugdíja fillérre azonos.

7.1. feladat. $E_0 = 73{,}145$ év.

7.2. feladat. a) Behelyettesítve a stabil népesség jellemzőit általános képletünkbe:

$$X(v) = \frac{\sum_k k l_k v^{-k}}{\sum_k l_k v^{-k}}.$$

b) Deriváljuk az $X(v)$ hányadosfüggvényt, és emeljük ki a számlálóból $1/v$-t.

c*) Tegyük föl, hogy $v_1 > v_2$. Az a) pontban kapott képlet segítségével igazolni fogjuk, hogy $X(v_1) < X(v_2)$. A kevéssé ismert Csebisev-egyenlőtlenség közlése helyett csak a bizonyítás gondolatmenetét alkalmazzuk. Valóban, felírva a bizonyítandó egyenlőtlenséget, és közös nevezőre hozva:

$$\sum_k k l_k v_1^{-k} \sum_j l_j v_2^{-j} < \sum_k k l_k v_2^{-k} \sum_j l_j v_1^{-j}.$$

Csoportosítva a (k,j)-s és a (j,k)-s tagokat, és osztva $l_j l_k$-val, kéttagonként igazolhatjuk az egyenlőtlenséget: $(k-j)(v_1^{-k}v_2^{-j} - v_1^{-j}v_2^{-k}) < 0$, $j < k$.

7.3. feladat. a) $l_1 f_1 v^{-1} = 1$ azaz $v = l_1 f_1$.

b)–d)

Idő (t)	Gyermek	Dolgozó	Öreg	Teljes népesség $v > 1$	$v = 2$
b) $f_1 = v$					
0	v^2	v	1	v^2+v+1	7
1	v^3	v^2	v	v^3+v^2+v	14
c) vagy $f_1' = 1$					
2	v^3	v^3	v^2	$2v^3+v^2$	20
3	v^3	v^3	v^3	$3v^3$	24
d) vagy $f_1'' = 1/v$					
2	v^2	v^3	v^2	v^3+2v^2	16
3	v	v^2	v^3	v^3+v^2+v	14

8.1. feladat. Mérlegeljük a megfelelően módosított (4.3) egyenletet:

$$\tau_v \sum_{i=R-t+1}^{R} l_i \rho_t^{-i} = b \sum_{j=R+1}^{D} l_j \rho_t^{-j}, \qquad t = 1, \dots, R, \tag{4.3*}$$

ahol

$$\tau_v \sum_{i=0}^{R} l_i (vr)^{-i} = b \sum_{j=R+1}^{D} l_j (vr)^{-j}. \tag{4.3**}$$

8.2. feladat. Az 1. fajta tőkésített nyugdíjrendszer költségvetési korlátja – a gyermekeket elhanyagolva –

$$\sum_{i=L}^{R} w_i r^{-i} = \sum_{j=L}^{D} c_j r^{-j}. \tag{1.1*}$$

Az 1. fajta tb-rendszer (PAYG1) költségvetési korlátja – a gyermekeket elhanyagolva –

$$\sum_{i=L}^{R} w_i (vg)^{-i} = \sum_{j=L}^{D} c_j (vg)^{-j}. \tag{1.1**}$$

A monotonitás miatt $vg < r$ esetén (1.1**) szűkebb korlát, mint (1.1*), tehát ekkor a tőkésített rendszer jobb fogyasztási pályát tesz lehetővé, mint a tb-rendszer.

8.3. feladat. Különböző költségvetési korláthoz általában különböző szerkezetű fogyasztási pálya tartozik (vö. 11. fejezet).

9.1. feladat. $E = S^2 b/2$, $Y = 4wT/3$, $b = \beta w$. Behelyettesítve: $E = S^2 \beta w/2$, $E/Y = 3S^2 \beta w/(8wT) = 15/8$.

9.2. feladat. a) 2000-ben már az összes nyugdíjjáruléknak körülbelül a 10 százaléka, a GDP-nek a 0,8%-a ment a második pillérbe – ez a Horn-kormány által vállalt felső korlát. b) A GDP $0{,}6 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}08 \cdot 100 = 1{,}2$%-a folyik majd a második pillérbe.

10.1. feladat. a) Tekintsük a szegényeket: $1 - \tau = \tau$, innen $\tau = 1/2$. b) Ha mindenki τ járulékkulcsot fizet, akkor a szegények, a közepes jövedelműek és a gazdag osztályonként rendre 4τ, $2 \cdot 2\tau$ és $1 \cdot 4\tau$ járulékot fizetnek, összesen: 12τ. Mivel mindenki azonos nyugdíjat kap, $b = 12\tau/7$. Visszatérve a szegényekhez: $b = 1 - \tau$, azaz $12\tau/7 = 1 - \tau$, azaz $\tau = 7/19 \approx 36{,}8\%$ szemben az eredeti 50%-kal.

10.2. feladat. Nyugdíj. Szegény: $b^{(1)} = b_1 + b_2$, közép: $b^{(2)} = b_1 + 2b_2$, gazdag: $b^{(3)} = b_1 + 4b_2$, összesen $B = 7b_1 + 12b_2$. Járulék: τ, 2τ és 4τ, összesen 12τ. Egyenlőség: $7b_1 + 12b_2 = 12\tau$. A középen a két nyugdíj egyenlő: $b_1 = 2b_2$. A szegény helyettesítési aránya egy: $b_1 + b_2 = 1 - \tau$. Fokozatos kiküszöböléssel: $\tau = 13/31$, $b_1 = 12/31$ és $b_2 = 6/31$. $b^{(1)} = 18/31 \approx 0{,}581$, $b^{(2)} = 24/31 \approx 0{,}774$ és $b^{(3)} = 36/31 \approx 1{,}161$.

11.1. feladat.

$$U(c_0, \ldots, c_D) = \sigma^{-1} \sum_{i=0}^{D} \delta^i \left(\frac{c_i}{g^i}\right)^{\sigma}, \quad \text{ha} \quad \sigma \neq 0, \qquad -\infty < \sigma < 1.$$

11.2. feladat. a) Leontief-hasznosságfüggvény esetén hitelkorlát nélkül $U = 1/3$, hitelkorláttal $U = 1/4$.

b) Cobb – Douglas-hasznosságfüggvény esetén hitelkorlát nélkül $U = 3 \cdot \log(1/3) = -3\log 3$, hitelkorláttal $U = \log(1/4) + 2\log(3/8)$.

11.3. feladat. $X_c = (L+R)/2$. Egy korfüggetlen PAYG pálya akkor és csak akkor hitelező, ha a nyugdíjasszakasz hosszabb, mint a gyermekkor: $D - R > L$.

11.4. feladat. A feladat Lagrange-függvénye $\mathscr{L}(c_0,\ldots,c_D) = U(c_0,\ldots, c_D) + \mu\sum_{i=0}^{D}(w_i - c_i)r^{-i}$. Az általános burkológörbe-tétel szerint $V'(r) = -\sum_{i=0}^{D}\mu i(w_i - c_i)r^{-i-1}$ stb. Tulajdonképpen a 11.2. tétel levezetésében a konkrét esetben bebizonyítottuk az általánosított burkológörbe-tételt.

12.1. feladat. a) A helytelenül differenciált rendszerben:

$$\beta_1 = \tau^*\frac{R_1}{D^* - R_1} \quad \text{és} \quad \beta_2 = \tau^*\frac{R_2}{D^* - R_2}.$$

A helyesen differenciált rendszerben:

$$\beta_1^* = \tau^*\frac{R_1}{D_1 - R_1} \quad \text{és} \quad \beta_2^* = \tau^*\frac{R_2}{D_2 - R_2}. \tag{M.19}$$

Az átlag tulajdonságai szerint $D_1 < D^* < D_2$, tehát $\beta_1 > \beta_1^*$ és $\beta_2 < \beta_2^*$.

b) Számszerűsítve: a helytelenül differenciált értékek $\beta_1 = 0{,}631$ és $\beta_2 = 1$; illetve a helyesen számított nyugdíjak $\beta_1^* = 0{,}68$; $\beta_2^* = 0{,}75$. Az átlagos nyugdíj a helytelen rendszerben $\beta = 0{,}723$; a helyes rendszerben pedig $\beta^* = 0{,}7$ lenne.

12.2. feladat. Rögzítve j-t, a részösszegekre alkalmazható a 12.3. tétel.

12.2. feladat. Vegyük a $\hat{b}(R)$ függvény logaritmikus deriváltját!

13.1. feladat. a) Racionális várakozás
Egyéni életpálya

$$s_{0,t}r_{t+1} + s_{1,t+1} = 0. \tag{13.2*}$$

Gale-féle egyszerűsítés:

$$s_{0,t} = s(r_{t+1}).$$

Alapegyenlet:

$$S_{\mathrm{R}}(r_t, r_{t+1}) = s(r_{t+1}) - r_t s(r_t) = 0, \tag{13.3*}$$

ahol r_{-1} adott.

b) Naiv várakozások

$$S_N(r_{t-1}, r_t) = s(r_t) - r_t s(r_{t-1}) = 0. \tag{13.4*}$$

Mindkét várakozásnál ugyanaz a két állandósult állapot létezik, s az $r_t = f(r_{t-1})$ explicit egyenletnél a lokális stabilitás feltétele a következő: $-1 < f'(r_F) < 1$. Az implicit függvény tétele szerint

$$\frac{dr_{t+1}}{dr_t} = \frac{-\partial S/\partial r_t}{\partial S/\partial r_{t+1}}.$$

14.1. feladat. $B_t = \sum_{k=R+1}^{D} l_k b_{k,t}$, $W_t = \mathbf{w}_t \sum_{i=L}^{R} l_i$ stb.

15.1. feladat. Ekkor

$$2\tau_U = b, \tag{15.1*}$$

$$\tau_F r(1+r) = b. \tag{15.2*}$$

Érett tb-rendszer:

$$e_0 = 0, \qquad e_1 = \frac{b}{2}, \qquad e_2 = b, \qquad E_0 = \frac{3b}{2}.$$

Érett tőkésített rendszer:

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = \tau_F r, \qquad a_2 = \tau_F r(1+r), \qquad A_2 = \tau_F r(2+r).$$

Az átmenet most két időszakra korlátozódik:

A $t = 1$ időszak elején $G_1 = r(b - 2\tau_U + 2\tau_F) = 2\tau_F r$, $a_{1,1} = a_{2,1} = \tau_F r$, $A_1 = 2\tau_F r$, a rész magánnyugdíj $b_1 = b/(1+r)$.

A $t = 2$ időszak elején $G_2 = r(b - b_1 - 2\tau_U + 2\tau_F) = b(2+r)/(1+r)$, s a többit már tudjuk. Az Olvasóra bízzuk: fusson végig az $r = 1$ eseten, ahol a képletek nagyon egyszerűvé válnak.

17.1. feladat. a) $\bar{k}$: $\sum_{k=0}^{\bar{k}} n_k < 0.5 \le \sum_{k=0}^{\bar{k}+1} n_k$. b) Ha v nő, akkor $\bar{k}$ csökken.

B.1. feladat. A (B.3) képletbe helyettesítve $c_{0,t} = c_{1,t+1}$ és $s_{i,t} = w_i - c_{i,t}$ képletet, adódik az egyenletrendszer.

B.2. feladat. Alkalmazzuk az $r_t = f'(k_t)$ és $w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$ összefüggéspárt!