A. függelék
Optimális nyugdíjösztönzés

Bevezetés

A 12. fejezetben a rugalmas nyugdíjkorhatár kérdését tanulmányoztuk, önkényesen választott járulékkulcs és nyugdíj–szolgálati idő függvény, röviden: *járadékfüggvény* alapján. Bár a tényleges kormányzatok is eléggé önkényes (például gyakran változó) szabályokat iktatnak törvénybe, a közgazdaságelméletben jelenleg megkívánják a normatív modell kidolgozását. Az ösztönzési bonyodalmat az *aszimmetrikus információ* okozza: az egyénnek több ismerete van saját élettartamáról és hasznosságfüggvényéről, mint a kormányzatnak.

Ebben a függelékben az *optimális nyugdíjösztönzés*t elemezzük, nevezetesen azt, hogy milyen $b(R)$ járadékfüggvényt és mekkora τ járulékkulcsot kell a 12. fejezetben bevezetett modellben érvényesíteni ahhoz, hogy az egyéni hasznosságmaximumok (transzformáltjainak) összegével definiált társadalmi jóléti függvény is maximális legyen.

Röviden a történelmi előzményekről: Mirrlees (1971) elemezett először ilyen ösztönzési feladatokat az optimális személyijövedelemadó-függvény esetében. A feladat nagyon bonyolult, és már Sheshinski (1972) is érdemesnek találta a gyakorlatban nagyon fontos lineáris személyi jövedelemadó-függvényt optimalizálni [lásd még Atkinson – Stiglitz (1980, 13. fejezet) és magyarul Gömöri (2001)].

A nyugdíjirodalomban először Diamond – Mirrlees (1978) és (1986) vizsgált optimális ösztönzési modellt. Náluk az egyének életkora és hasznosságfüggvénye egyaránt azonos, viszont véletlenül bármikor megrokkanhatnak, sőt, úgy tehetnek, mintha megrokkantak volna. A szerzők kiszámították, hogy a kormánynak milyen (egyébként bonyolult) ösztönzési rendszert kell bevezetnie a maximális hatékonyság érdekében.

A könyv írásával egy időben Diamond (2001, 7. fejezet) és Eső–Simonovits (2002) is foglalkozott az optimális járulékkulcs és járadékfüggvény kérdésével. Diamond végtelen (kontinuum) sok típusú (élettartamú és a vele korreláló fogyasztási rugalmasságú) egyénből álló sokaságot vizsgált, s az egyének két időpontban mehettek nyugdíjba: korán vagy későn. Eső–Simonovits (2002) véges sok típusú egyént feltételezett, akik csak élettartamukban különböztek egymástól, viszont tetszőleges korban nyugdíjba mehettek. Mindkét cikk meghatározta az optimális ösztönzést. Ebben a függelékben részben bonyolultabb, részben egyszerűbb feladatot oldunk meg: bonyolultabbat, mert az élettartam és a fogyasztási rugalmasság tetszőleges kétdimenziós eloszlású lehet; egyszerűbbet, mert általános járadékfüggvény helyett lineárist vizsgálunk (Simonovits, 2002).

A nyugdíjösztönzési modell

Röviden megismételjük a 12. fejezetben bevezetett modell alapfogalmait és alapgondolatát. $D =$ (várható felnőtt) élettartam, $R =$ szolgálati idő, $\tau =$ járulékkulcs, $b =$ életjáradék, $u(a) =$ dolgozói hasznosságfüggvény és $v(b) =$ nyugdíjas hasznosságfüggvény, ahol $a = 1-\tau > 0$ és $b > 0$. Különböző egyének különbözőképpen értékelik a szabadidőt, ezért egy ε paraméterrel bővítjük a hasznosságfüggvényeket: $u(\varepsilon,\cdot)$ és $v(\varepsilon,\cdot)$; nagyobb ε-hoz nagyobb u és v tartozik. Végül az egyéni életpálya-hasznosság

$$U(D,\varepsilon,\tau,b,R) = u(\varepsilon,1-\tau)R + v(\varepsilon,b)(D-R)$$

és az egyéni nettó életpálya-járulék

$$z(D,\tau,b,R) = \tau R - b(D-R).$$

Az egyéni optimum feltételét a 12.2.a. tétel adja meg.

E modellt a következőképpen fejlesztjük tovább. Megadjuk a (D,ε) egyéni jellemzők $F(D,\varepsilon)$ (valószínűség)eloszlási függvényét, amely nem feltétlenül normált. Ekkor (a τ-tól és b-től függő) az egy időpontban született egyénekből álló *korosztály nettó életpálya-járuléka*

$$\begin{aligned} Z[\tau,b] &= \int z(D,\varepsilon,\tau,b,R(D,\varepsilon))\,dF \\ &= \int \{\tau R(D,\varepsilon) - b(R(D,\varepsilon))[D-R(D,\varepsilon)]\}\,dF, \end{aligned} \tag{A.1}$$

és az aggregált egyensúlyi feltétel a következő:

$$Z[\tau,b]=0. \tag{A.2}$$

Egyébként a stacionaritási feltevés miatt a korosztályi nettó életpálya-járulék egyenlő a társadalom keresztmetszeti egyenlegével.

Legyen $U^*(D,\varepsilon,\tau,b)$ a (D,ε)-típusú egyén *maximális hasznossága*, adott τ járulékkulcs és b járadékfüggvény esetén. A legegyszerűbb *társadalmi jóléti függvény* az egyéni hasznosságmaximumok aggregált értéke:

$$V[\tau,b]=\int U^*(D,\varepsilon,\tau,b)\,dF. \tag{A.3$'$}$$

Az általános esetben az aggregálás előtt az egyéni hasznosságmaximumokat egy ψ skalár–skalár növekvő és konkáv függvénnyel transzformáljuk:

$$V[\tau,b]=\int \psi(U^*(D,\varepsilon,\tau,b))\,dF. \tag{A.3}$$

Az irodalomban (például Atkinson – Stiglitz, 1980 vagy Varian, 1999, 584–589. o.) három fontos speciális esetet szoktak vizsgálni: 1. *utilitarista*: $\psi=1$, 2. Cobb – Douglas-függvény: $\psi(U^*)=\log U^*$, feltéve, hogy $U^*>0$ és 3. Rawls-féle függvény: az egyéni optimumok minimuma: $V[\tau,b]=\min_{(D,\varepsilon)} U^*(D,\varepsilon,\tau,b)$.

E három speciális eset közös általánosítása a $\psi(U^*)=\phi^{-1}U^{*\phi}$ függvénycsalád, $\phi<1$ valós szám. (A harmadik esetben első látásra nincs ψ függvényünk, ha azonban $\phi\to-\infty$, akkor határesetben a Rawls-függvényt kapjuk.)

Felvetődik a kérdés, hogy nem kellene-e az egyéni hasznosságfüggvényt az élettartammal elosztva súlyozni a társadalmi jóléti függvényt. Ha a népességre vonatkozó stacionaritási feltevésre gondolunk, akkor láthatjuk, hogy nem kell/szabad súlyozni. Egyébként a tb-nyugdíjaknál sem csökkentik a női életjáradékot azért, mert a nők várhatóan tovább élnek, mint a férfiak.

A kormányzatnak olyan τ járulékkulcsot és $b(\cdot)$ járadékfüggvényt kell választania, amelynél az (A.3) társadalmi jóléti függvény maximális az (A.1)–(A.2) korlát mellett.

Stacionárius népességet tételezünk föl, ezért a korosztályi hosszmetszeti adatok megegyeznek az aggregált keresztmetszeti adatokkal.

Ebben a függelékben az egyszerűség kedvéért lineáris járadékfüggvényeket vizsgálunk:

$$b(R)=\gamma+\alpha R, \tag{A.4}$$

ahol γ a nulla szolgálati időhöz tartozó járadék és α az egy szolgálati évért járó többletjáradék. Ekkor a 12.2. tétel 5. következményeként adódik a következő egyéni optimumfeltétel:

A.1. tétel. *Jól viselkedő U hasznosságfüggvény, (A.4)-beli lineáris $b(R)$ járadékfüggvény és τ járulékkulcs esetén az optimális $R(D,\varepsilon)$ szolgálati idő–élettartamfüggvény kielégíti a következő egyenletet:*

$$u(\varepsilon,1-\tau)-v(\varepsilon,\gamma+\alpha R)+v_b'(\varepsilon,\gamma+\alpha R)\alpha(D-R)=0. \tag{A.5}$$

Most a következő összefüggések állnak:

$$U^*(D,\varepsilon,\tau,\alpha,\gamma)=\max_R U(D,\varepsilon,\tau,\alpha,\gamma,R),$$

és az (A.3)-beli, függvényen definiált V *funkcionál* a

$$V(\tau,\alpha,\gamma)=\int U^*(D,\varepsilon,\tau,\alpha,\gamma)\,dF$$

közönséges háromváltozós függvényre egyszerűsödik, amelyet az (A.1) és (A.2) korlátok mellett kell maximálizálni.

Egy absztrakt feladat

A megoldást áttekinthetőbbé teszi a következő absztrakt feladat elemzése. A kormányzati befolyást egy m_G-dimenziós q vektor írja le. Tegyük föl, hogy minden egyént egy m_P-dimenziós p paramétervektor jellemez, amelynek eloszlásfüggvénye $F(p)$. Az egyén hasznossága $U(p,q,e)$, a (p,q) paraméterpár és az n-dimenziós e egyéni döntés sima függvénye. Feltesszük, hogy az optimális $e(p,q)$ döntésfüggvény kielégíti az elsőrendű $U_e'(p,q,e(p,q))=0$ feltételt, és a maximumérték

$$U^*(p,q)=U(p,q,e(p,q)). \tag{A.6}$$

Legyen a társadalmi jóléti függvény

$$V(q)=\int \psi(U^*(p,q))\,dF(p). \tag{A.7}$$

Legyen $g(p,q,e)$ az egyén egyenlegfüggvénye. Ekkor teljesül egy aggregált korlát is:

$$\int g(p,q,e(p,q))\,dF(p)=0. \tag{A.8}$$

Ekkor igaz az

A.2. tétel. *Ha a kormányzat maximalizálja az (A.7)-beli $V(q)$ társadalmi jóléti függvényt az (A.8) korlát mellett, akkor létezik olyan μ skalár, amelyre*

$$\int \{\psi'(U^*(p,q))U'_q(p,q) + \mu g'_q(p,q,e(p,q)) - \\ - \mu g'_e(p,q,e(p,q))U''_{ee}(p,q)^{-1}U''_{eq}(p,q)\}\, dF(p) = 0,$$

ahol U''_{eq} és U''_{ee} rendre $n \times m_G$ és $n \times n$ mátrix, -1 pedig egy inverz mátrixra utal.

Megjegyzés. 1. Az egyenletrendszernek $m_G + 1$ ismeretlene és ugyanennyi egyenlete van, tehát tipikusan a feladat meghatározott.

2. A szükséges feltétel elégségessége is vizsgálható, de ettől eltekintünk.

Bizonyítás. Felírjuk a feladat Lagrange-függvényét:

$$\mathscr{L}(q) = \int \{\psi(U^*(p,q)) + \mu g(p,q,e(p,q))\}\, dF(p),$$

és vesszük a q vektor szerinti deriváltvektorát:

$$\mathscr{L}'_q(q) = \int \{\psi'(U^*(p,q))U^{*\prime}_q(p,q) + \\ + \mu g'_q(p,q,e(p,q)) + \mu g'_e(p,q,e(p,q))e'_q(p,q)\}\, dF(p).$$

Az utolsó egyenletben felhasználtuk a teljes derivált képletét. Alkalmazva a burkológörbe-tételt ($U^{*\prime}_q = U'_q$) és az implicit függvény tételét $U'_e(p,q,e) = 0$-ra, adódik az optimum szükséges feltétele (vö. Sydsater – Hammond (1995) 18. fejezet.) □

Optimális járulékkulcs és lineáris járadékfüggvény

Mivel nagyon nehéz általában megoldani az optimális nyugdíjösztönzésre vonatkozó feladatot, ebben a függelékben (és a 12. fejezetben) a lineáris (A.4) járadékfüggvények között keressük az optimálisat.

Lefordítva az absztrakt feladatot a nyugdíjösztönzés nyelvére: $p = (D, \varepsilon)$, $q = (\tau, \alpha, \gamma)$ és $e = R$, azaz $m_P = 2$, $m_G = 3$ és $n = 1$, $g = \tau R - (\gamma + \alpha R) \cdot (D - R)$.

Az A.2. tétel speciális eseteként adódik az

A.3. tétel. *Ha a τ járulékkulcs és az (A.4) lineáris járadékfüggvény optimális, akkor τ, α, γ és μ az (A.1)–(A.2) egyenlet mellett kielégíti az*

$$\int \{-\psi' u'_a R + \mu R + \mu \varphi u'_a / Q\}\, dF = 0,$$

$$\int \{\psi' v'_b R(D-R) - \mu R(D-R) -$$
$$- \mu\varphi[\alpha v''_{bb} R(D-R) + v'_b(D-2R)]/Q\}\, dF = 0$$

$$\int \{\psi' v'_b (D-R) - \mu(D-R) - \mu\varphi[\alpha v''_{bb}(D-R) - v'_b]/Q\}\, dF = 0$$

egyenleteket is, ahol

$$\varphi = \tau - \alpha D + 2\alpha R + \gamma, \qquad Q = \alpha^2 v''_{bb}(D-R) - 2\alpha v'_b;$$

és $R(D,\varepsilon,\tau,\alpha,\gamma)$ kielégíti az (A.5) egyéni optimalitási feltételt is, továbbá τ, α és μ pozitív.

Megjegyzés. A Lagrange-módszer alkalmazásánál megszokott helyzet áll elő: négy ismeretlenünk és négy egyenletünk van, amely tipikus esetben megoldható.

Bizonyítás. Konkretizáljuk az A.2. tétel egyenleteit: $g'_R = \varphi$.

$$U'_\tau = -u'_a R,$$
$$g'_\tau = R,$$
$$R'_\tau = -\frac{U''_{R\tau}}{U''_{RR}} = \frac{u'_a}{Q};$$

$$U'_\alpha = v'_b R(D-R),$$
$$g'_\alpha = -R(D-R),$$
$$R'_\alpha = -\frac{U''_{R\alpha}}{U''_{RR}} = -\frac{\alpha v''_{bb} R(D-R) + v'_b(D-2R)}{Q};$$

$$U'_\gamma = v'_b(D-R),$$
$$g'_\gamma = -D+R,$$
$$R'_\gamma = -\frac{U''_{R\gamma}}{U''_{RR}} = \frac{-\alpha v''_{bb}(D-R) + v'_b}{Q}.$$

Behelyettesítve e képleteket az általános feltételbe, adódik a speciális feltétel. □

A.1. példa. Tegyük föl, hogy a 12. fejezet CRRA-hasznosságfüggvényét tekintjük, és $\psi(U) = U$. Ekkor $u'_a(\varepsilon, a) = \varepsilon\lambda^{\sigma(1-\varepsilon)}a^{\sigma\varepsilon-1}$ és $v'_b(\varepsilon, b) = \varepsilon b^{\sigma\varepsilon-1}$, tehát az egyenletek viszonylag könnyen programozhatók, s a 12.3. táblázat adja a lineáris optimum egyéni jellemzőit. □

Megkockáztatunk egy sejtést az optimális mechanizmustervezés tapasztalatai alapján:

A.1. sejtés. *Az optimális lineáris járadékfüggvény meredeksége kisebb, a járulékkulcs pedig nagyobb, mint a naiv ösztönzésben.*

Következtetések

Az optimális mechanizmustervezés elméletét alkalmazva, a lehető legegyszerűbb modellben meghatároztuk az optimális lineáris járadékfüggvényt és a hozzá tartozó járulékkulcsot. Elhanyagoltunk több nagyon fontos tényezőt: a kereseti életkor függését és heterogenitását, a munkába lépési idők különbözőségét, végül, de nem utolsósorban, az adórendszer hatását. Ebben a végletekig lecsupaszított modellben is érdekes eredményeket kaptunk. További kutatásnak kell tisztáznia a kapott eredmények robusztusságát. Amit már ma is megtudtunk, hogy az úgynevezett tisztességes (vagy naiv) járadékfüggvény biztosításmatematikailag nem tisztességes.

B. függelék
Együttélő nemzedékek

A 13. fejezetben az együttélő korosztályok modellcsaládját körvonalaztuk, meglehetősen nagyvonalúan. Ebben a függelékben e modellcsalád legegyszerűbb esetét, az *együttélő nemzedékek*et vizsgáljuk részletesebben. A modellcsalád rövidítése az angol *Overlapping Generations* alapján OLG: s benne a mindenkori fiatalok és a mindenkori idősek dinamikus cserekapcsolatban vannak egymással. Először a cseregazdaságot vizsgáljuk, majd bevezetjük a tőke segítségével folytatott termelést, végül a nyugdíjrendszerekre alkalmazzuk az alapmodellben nyert eredményeket.

Egy OLG-cseregazdaság

Modigliani – Brumberg (1954) *életciklus*modellje után Samuelson (1958) viszonylag korán megkísérelte az *együttélő nemzedékek* (OLG) kölcsönhatását modellezni. A kérdéskör azonban csak Diamond (1965) óta vált a matematikai közgazdaságtan szerves részévé. Ma már a makroökonómiában az OLG szinte elmaradhatatlan. Ezt a térhódítást tükrözi a legtöbb emelt szintű makroökonómiai tankönyv (Blanchard – Fischer, 1989; Azariadis, 1993), amelyben az OLG-modellcsalád főszerepet játszik. A nyugdíjmodellekre vonatkozik Myles (1995) 13. fejezete. A jelen áttekintés Simonovits (1998b) B. függelékének rövidített változata.

A gazdaság sok, többé-kevésbé egyforma termelőből és fogyasztóból áll, akiket egy-egy reprezentatív termelő és fogyasztó képvisel. Ezért a makroökonómiai folyamatok minden időszakban egy vagy két aktor optimalizálásából vezethetők le.

Minden időszakban az előző időszakban született egyéneknek fejenként ν utóda születik, s minden utód két időszakig él.

A különböző modellek eltérnek egymástól abban, hogy adottnak veszik-e a jövedelmeket, vagy sem (csere- vagy termelőgazdaság), romlandó-e a termék, vagy sem. Ennek megfelelően az együttélő két nemzedék különféle cserekapcsolatban áll egymással.

Gale (1973) nyomán ebben az alfejezetben az OLG-modellcsalád segítségével egy *zárt cseregazdaság*ot vizsgálunk. Nem foglalkozunk a termeléssel, eltekintünk a termelékenység növekedésétől, és adottnak vesszük a kereseteket. A t-edik időszakban „született” (munkába lépő) egyén jövedelme fiatal- és öregkorában rendre w_0 és w_1 (időben állandó), fogyasztása rendre $c_{0,t}$ és $c_{1,t+1}$. A kereseteket normálva: $w_0 + w_1 = 1$. A $\{c_{0,t}, c_{1,t+1}\}$ fogyasztási pályák együttesét *program*nak nevezzük. Vezessük be a *megtakarítások*at: $s_{i,t} = w_i - c_{i,t}$.

A zárt cseregazdaságban a termékek romlandósága miatt nincs makroszintű megtakarítás. Ezért egy $\{c_{0,t}, c_{1,t+1}\}$ programot *megengedett*nek nevezünk, ha az összfogyasztás minden időszakban egyenlő az összkeresettel, azaz ha az összmegtakarítás nulla:

$$v s_{0,t} + s_{1,t} = 0. \qquad \text{(B.1)}$$

A neoklasszikus közgazdaságtanban megszokott módon a fogyasztást egy jól viselkedő (konkáv, nemcsökkenő és általában differenciálható) hasznosságfüggvény maximalizálásából vezetjük le. Az egyszerűség kedvéért legyen a hasznosságfüggvény additív:

$$U(c_{0,t}, c_{1,t+1}) = u(c_{0,t}) + v(c_{1,t+1}). \qquad \text{(B.2)}$$

Gyakran felteszik, hogy az időszaki hasznosságfüggvények csak egy skalárszorzóban, a *leszámítolási tényező*ben különböznek egymástól. Esetünkben

$$v(c) = \delta u(c), \qquad 0 < \delta \le 1.$$

CRRA-hasznosságfüggvény esetén most $u(c) = \sigma^{-1} c^{\sigma}$, $\sigma \neq 0$ vagy speciálisan $u(c) = \log c$ $(\sigma = 0)$ *Cobb – Douglas-hasznosságfüggvény*. Nagyon egyszerű és sok esetben realisztikus a *Leontief-hasznosságfügvény*: $U(c_{0,\,t}, c_{1,\,t+1}) = \min\{c_{0,\,t}, c_{1,\,t+1}\}$. Ekkor a feltételes optimumot a $c_{0,\,t} = c_{1,\,t+1}$ egyenlőség határozza meg.

Egyelőre adottnak vesszük a t-edik időszak r_t *kamattényező*jét $(= 1 +$ kamatláb). Föltesszük, hogy a megtakarítások és a tartozások a kamattényező szerint kamatoznak, és az életpálya-megtakarítás nulla:

$$r_{t+1} s_{0,t} + s_{1,t+1} = 0. \qquad \text{(B.3)}$$

Egy pályát *versenyzői pályá*nak nevezünk, ha alkalmas kamatlábpálya mentén minden szereplő optimális életpálya-megtakarítása nulla.

A megengedett versenyzői pályákat *egyensúlyi pályák*nak nevezzük.

Lássuk, hogyan működik a modell! (B.3)-ból kifejezzük $s_{1,t+1}$-et, és a keresetek hozzáadásával kapott fogyasztáspárt behelyettesítjük (B.2)-be. A belső maximum a következő elsőrendű feltételből határozható meg:

$$u'(c_{0,t}) = r_{t+1} v'(c_{1,t+1}). \tag{B.4}$$

Eztán w_i-k segítségével kifejezzük $s_{0,t}$-t és $s_{1,t+1}$-t mint r_{t+1} függvényét. Legyen $s_{0,t} = s(r_{t+1})$, ekkor $s_{1,t+1} = -r_{t+1}s(r_{t+1})$, ezek a *feltételes megtakarítási függvények*. Akárcsak Gale, mi is rövidre zárjuk a feladatot, s föltesszük, hogy e függvények időben változatlanok. Behelyettesítve az $s_{0,t} = s(r_{t+1})$ és $s_{1,t} = -r_t s(r_t)$ függvényeket a (B.1) megengedettségi feltételbe, adódik egy implicit egyenlet:

$$S(r_t, r_{t+1}) = \nu s(r_{t+1}) - r_t s(r_t) = 0. \tag{B.5}$$

Azért, hogy közelebb hozzuk az általános fogalmakat és tételeket, időnként megszakítjuk az okfejtést, és a legegyszerűbb hasznosságfüggvények esetén példákon és feladatokon szemléltetjük az elmondottakat.

B.1. példa. A Cobb – Douglas-esetben a feltételes fogyasztási és megtakarítási függvények

$$c_0(r) = \frac{w_0 + w_1 r^{-1}}{1+\delta} \qquad \text{és} \qquad s(r) = \frac{w_0\delta - w_1}{1+\delta}.$$

□

B.1. feladat. Mutassuk meg, hogy a Leontief-esetben a feltételes fogyasztási függvények

$$c_0(r) = \frac{rw_0 + w_1}{1+r} = c_1(r)!$$

A feltételes fogyasztási függvényeket behelyettesítve a (B.1) megengedettségi feltételbe, adódik a kamatláb-dinamika. Nem biztos azonban, hogy az implicit differenciaegyenletnek van megoldása, s ha van, akkor egyértelmű az állandósult állapottól távolabbi kezdeti értékekre.

B.2. példa. A Cobb – Douglas-hasznosságfüggvény esetében ($\sigma = 0$, azaz $\mu = 0$) a (B.5) feltétel az

$$r_{t+1} = \frac{\nu w_1}{w_1 + \delta w_0 - \nu\delta w_0 r_t}$$

differenciaegyenlethez vezet. □

Különleges szerepet játszanak a *stacionárius megtakarítási pályák*, más szóval, *állandósult állapotok*, ahol az egymást követő nemzedékek tagjainak megtakarítása pályája azonos, az $_\mathrm{F}$ alsó index a *megengedett* jelző angol megfelelőjére (*feasible*) utal:

$$s_{0,t} = s_{0,\mathrm{F}} \quad \text{és} \quad s_{1,t+1} = s_{1,\mathrm{F}}.$$

Találkozni fogunk egy speciális állandósult állapottal, ahol nincs csere, jelzője *autark*. A $_\mathrm{B}$ alsó index az általánosabb *kiegyensúlyozott* jelző angol megfelelőjére (*balanced*) utal:

$$s_{0,\mathrm{B}} = 0 \quad \text{és} \quad s_{1,\mathrm{B}} = 0.$$

Ismert, hogy az optimális pálya nem feltétlenül stacionárius. Az optimális állandósult állapotot viszont *aranyszabálypályá*nak nevezzük, s angol megfelelőjével (*golden rule*) megegyezően $_\mathrm{G}$ alsó indexszel utalunk rá.

Behelyettesítéssel:

$$v s_{0,\mathrm{F}} + s_{1,\mathrm{F}} = 0, \tag{B.1$^\mathrm{o}$}$$

$$r_\mathrm{F} s_{0,\mathrm{F}} + s_{1,\mathrm{F}} = 0 \tag{B.3$^\mathrm{o}$}$$

Összevonással adódik $(v - r_\mathrm{F})(c_{0,\mathrm{F}} - w_0) = 0$, azaz korábbi megállapodásunknak megfelelően a

B.1. tétel. *(Gale, 1973, 1. tétel.) Az OLG-cseregazdaságban kétféle állandósult állapot létezik: a) az aranyszabály vagy b) az autarkia:*

$$r_\mathrm{G} = v \quad \textit{vagy} \quad s_{0,\mathrm{B}} = 0, \quad r_\mathrm{B} = \frac{u'(w_0)}{v'(w_1)}.$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az aranyszabály esetén a (B.3$^\mathrm{o}$) költségvetési feltétel egybeesik a (B.1$^\mathrm{o}$) megengedettségi feltétellel. Ezért optimális az aranyszabály! Bevezetjük a következő megkülönböztetést. Egy OLG-cseregazdaság aranyszabályát attól függően *adós*nak vagy *hitelező*nek vagy *szimmetrikus*nak nevezzük, hogy az aranyszabály-állapotban a fiatalok túlköltekeznek vagy megtakarítanak vagy éppen egyensúlyban vannak:

$$s_{0,\mathrm{G}} < 0, \quad s_{0,\mathrm{G}} > 0, \quad s_{0,\mathrm{G}} = 0.$$

Gale (1973) klasszikus, samuelsoni és egybeeső modellről beszél, a magyar nyelvű irodalom korábban a *fiatalos*, az *érett* és a *szimmetrikus* jelzőt alkalmazta, azonban előnyben részesítjük Augusztinovics korábbi, szemléletesebb, és e könyv 13. fejezetében alkalmazott elnevezéspárját. A továbbiakban a rövidség kedvéért gyakran eltekintünk a szimmetrikus esettől.

B.3. példa. Diszkontált Cobb – Douglas-hasznosságfüggvény esetében az aranyszabály fogyasztáspár

$$c_{0,\mathrm{G}} = \frac{w_0 + w_1 v^{-1}}{1+\delta}, \quad c_{1,\mathrm{G}} = \frac{\delta + (1 - v^{-1})}{1+\delta}$$

és az autark kamattényező

$$r_\mathrm{B} = \frac{w_1}{\delta w_0}.$$

□

Az aranyszabály milyensége (hitelező vagy adós) az autark kamattényező és a népességnövekedési tényező viszonyától függ.

B.2. tétel. *(Gale, 1973, 2. tétel.) Az OLG-cseregazdaság aranyszabálya akkor és csak akkor adós (hitelező), ha az autark kamattényező nagyobb (kisebb), mint a népességnövekedési tényező:*

$$r_\mathrm{B} > v \quad (\textit{vagy} \quad r_\mathrm{B} < v). \tag{B.6}$$

Bizonyítás. Mivel $r_\mathrm{B} \neq v$, c_G nem elégíti ki (B.3°)-t, többe kerül annál: $r_\mathrm{B} s_{0,\mathrm{G}} + s_{1,\mathrm{G}} < 0$. (B.1°)-et kivonva, adódik $(r_\mathrm{B} - v)s_{0,\mathrm{G}} > 0$, amely a definíciókkal együtt (B.6)-ot adja. □

B.4. példa. Cobb – Douglas-illusztráció. A B.2. tétel igazsága könnyen látható a B.1. példa valamint a B.1. tétel segítségével. Valóban, $c_0(v) = (w_0 + w_1 v^{-1})/(1+\delta) > w_0$ és $r_\mathrm{B} = w_1/(\delta w_0) > v$ ekvivalens. □

Végül megfogalmazható a

B.3. tétel. *(Gale, 1973, 3. tétel.) Az OLG-cseregazdaságban az autark állapot akkor és csak akkor Pareto-optimális, ha az aranyszabály adós.*

Bizonyítás. *a)* Ha az aranyszabály hitelező, akkor $c_{0,\mathrm{G}} > w_0$. Így a $\{w_0, w_1\}$ pálya javítható, mert áttérhetünk a $\{c_\mathrm{G}\}$ pályára.

b) Ha az aranyszabály adós, akkor tekintsünk egy olyan $\{c_{0,t}, c_{1,t+1}\}$ pályát, amely legalább olyan jó, mint $\{w\}$. Ekkor a B.2. tétel bizonyításában alkalmazott elv szerint $r_\mathrm{B} s_{0,t} + s_{1,t+1} < 0$. Behelyettesítve a (B.1) feltételt $(t+1)$-re: $v s_{0,t+1} + s_{1,t+1} = 0$, rendezéssel adódik, hogy $r_\mathrm{B} s_{0,t} < v s_{0,t+1}$. Ismételve $t = 0,1,2,\ldots,(T-1)$-re adódik $r_\mathrm{B}^T s_{0,0} < v^T s_{0,T} \leq w_0$. A (B.6) egyenlőtlenség szerint $r_B > \nu$, és $s_{0,0} > 0$, azaz $T \to \infty$-nél ellentmondást kapunk. □

Emlékeztetünk arra, hogy a hagyományos általános egyensúlyelméletben (Arrow – Debreu, 1954) az egyensúly általában Pareto-optimális. Itt viszont azt látjuk, hogy az egyensúly nem mindig Pareto-optimális. A legkézenfekvőbb magyarázat az, hogy most végtelen sok termék és végtelen sok fogyasztó szerepel, s ez okozza a galibát. Mélyebbre tekintve azonban az igazi bonyodalom abból ered, hogy bizonyos piacok hiányoznak: például csak az együttélő nemzedékek kereskedhetnek egymással.

Termelő OLG-gazdaság

Miután áttekintettük a cseregazdaságról szóló legfontosabb tételeket, rátérünk a termelőgazdaság vizsgálatára. Blanchard – Fischer (1989) 3.1. alfejezete alapján először a decentralizált egyensúlyt tanulmányozzuk, amelyet összehasonlítunk a centralizált egyensúllyal is. A fogyasztási oldal változatlan, a kereseteket azonban most a termelésből magyarázzuk. Föltesszük, hogy a fiatalok dolgoznak és megtakarítanak, az öregek pedig nyugdíjban vannak és felélik megtakarításaikat. Azaz az aranyszabály hitelező, és $w_{0,t} = w_t$ és $w_{1,t} = 0$. Érdemes lesz a fogyasztói oldalt az új jelölésekkel fölírni.

A *decentralizált piacgazdaság* azonos fogyasztókból és vállalatokból áll. Legyen r_t a t-edik időszak kamattényezője. Egy t-edik időszakban született fogyasztó mérlegegyenletei a következők:

$$c_{0,t} + s_t = w_t \quad \text{és} \quad c_{1,t+1} = r_{t+1} s_t.$$

Az egyszerűség kedvéért most ismét föltesszük, hogy az egyes időszakok hasznosságfüggvényei csak a leszámítolás miatt különböznek egymástól:

$$U(c_{0,t}, c_{1,t+1}) = u(c_{0,t}) + \delta u(c_{1,t+1}), \quad \text{ahol} \quad 0 \le \delta \le 1. \tag{B.2$'$}$$

Az optimumfeltétel most

$$u'(c_{0,t}) = r_{t+1} \delta u'(c_{1,t+1}). \tag{B.4$'$}$$

A (B.4′) feltételből adódik az optimális fogyasztás.

A t-edik időszak fiatalkori megtakarítása $s_t = w_t - c_{0,t}$. Helyettesítéssel levezethető a fiatalkori *megtakarítási függvény*: $s_t = s(w_t, r_{t+1})$, ahol $0 \le s'_w \le 1$, s'_w az s függvény w szerinti parciális deriváltja.

Tegyük föl, hogy a hagyományos termelési függvény elsőfokú homogén lineáris, a szokásos konkavitási feltételekkel! Legyen k az egy főre jutó tőke, és $f(k)$ az egy főre jutó termelési függvény, $f'' < 0 < f'$! Elhanyagoljuk a technikai haladást, s föltesszük, hogy egy időszak alatt a tőke megsemmisül. A vállalatok viselkedését, nevezetesen $w(k_t)$ bért és $r(k_{t+1})$ kamattényezőt, a szokásos profitmaximalizálási feltétel határozza meg:

$$f(k_t) - k_t f'(k_t) = w_t, \tag{B.7}$$

$$f'(k_t) = r_t - 1. \tag{B.8}$$

Mivel a növekvő népességre jutó tőke a nettó megtakarításból származik, az árupiaci egyensúly feltétele

$$k_{t+1} = \frac{s(w_t, r_{t+1})}{v}. \tag{B.9}$$

Ha nem tételeznénk föl, hogy a tőke egy időszak alatt megsemmisül, akkor $vk_{t+1} = (1-\psi)k_t + s_t$ egyenlettel dolgoznánk, ahol ψ az egy időszakra jutó tőkekopás. E furcsa feltevés ($\psi = 1$) vélhetőleg a képletek egyszerűsítését szolgálja.

Most már fölírhatjuk a modell dinamikáját:

$$k_{t+1} = \frac{s[w(k_t), r(k_{t+1})]}{v},$$

azaz

$$k_{t+1} = \frac{s[f(k_t) - k_t\{f'(k_t)+1\}, f'(k_{t+1})+1]}{v}.$$

Az implicit függvény tétele szerint k_{t+1} a k_t függvényeként kifejezhető: $k_{t+1} = \phi(k_t)$. Az említett tétel szerint

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{-s'_w(k_t)k_t f''(k_t)}{v - s'_r(k_t) f''(k_t)}, \tag{B.10}$$

ahol s'_r az s függvény r szerinti parciális deriváltja. Az $f'' < 0$ egyenlőtlenség miatt a számláló pozitív. Ha $s'_r \geq 0$, akkor a nevező is pozitív, azaz $dk_{t+1}/dk_t > 0$, ϕ növekvő. *Állandósult állapot*ról beszélünk, ha $k_{t+1} = k_t = \cdots = k^o$. Ekkor $c_{t+1} = c_t = \cdots = c^o$.

Az elmondottakat foglalja össze a

B.4. tétel. *A termelőgazdaság OLG-modelljének dinamikáját a (B.9) azonosság határozza meg. Az OLG-modellben létezhet egy, több vagy nulla állandósult állapot.*

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy egyetlen állandósult állapot létezik. A stabilitás még ilyenkor is bonyolult kérdés. Ismét szemléltetjük az elmondottakat.

B.2. feladat. Legyen $f(k) = Ak^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $w_t = A(1-\alpha)k_t^{\alpha}$ és $r_t - 1 = A\alpha k_t^{\alpha-1}$, valamint

$$k_{t+1} = \frac{\delta A(1-\alpha)}{(1+\delta)\nu} k_t^{\alpha} = \kappa k_t^{\alpha},$$

azaz az állandósult állapot $k^{\mathrm{o}} = \kappa^{1/(1-\alpha)}$!

Az általános egyensúlyelmélet alapgondolata szerint mégha el is vonatkoztatunk az érdekeltségi és információs problémáktól, a *centralizált gazdaság* sem képes jobb teljesítményre, mint a decentralizált gazdaság. Nézzük meg, hogy áll a kérdés esetünkben! Mielőtt rátérnénk a centralizált optimum kérdésére, érintjük az optimális növekedés irodalmából ismert és az előző alfejezetben már a cseregazdaság esetére taglalt aranyszabályt. Állandósult állapotban $c = f(k) - (\nu - 1)k$, ezért

$$0 = \frac{dc}{dk} = f'(k) - \nu + 1. \tag{B.11}$$

Ismert, hogy az állandósult fogyasztás maximális, ha $r^{\mathrm{o}} - 1 = f'(k^{\mathrm{o}}) = \nu - 1$: a kamatláb azonos a népesség növekedési ütemével. Hasonlóan, $dc/dk > 0$, ha $f'(k) > \nu - 1$, azaz telítettség esetén tőkekivonással növelhető a fogyasztás.

Hogyan fest a centralizált optimum T egymást követő, de csak páronként együttélő nemzedék esetén? Legyen V egy társadalmi jóléti függvény:

$$V = \delta u(c_{1,0}) + \sum_{t=0}^{T-1} \delta^{*-t-1} U(c_{0,t}, c_{1,t+1}),$$

ahol δ^* a társadalmi leszámítolási együttható. Ha a tervező kevésbé törődik a jövővel, mint a jelennel, akkor $\delta^* > 1$. Ha egyformán törődik minden nemzedékkel, akkor $\delta^* = 1$. Végül ha figyelembe veszi a nemzedékek méretét is, akkor $\delta^* = 1/\nu$. Az új, nemzedékek közti mérlegegyenlet

$$k_t + f(k_t) = \nu k_{t+1} + c_{0,t} + \nu^{-1} c_{1,t}.$$

Kiejtve $c_{0,t}$-ket, adódik a centralizált optimum elsőrendű feltétele:

$$c_{1,t}: \qquad u'(c_{1,t}) - \delta^{*-1}\nu^{-1}u'(c_{0,t}) = 0, \tag{B.12}$$

$$k_t: \qquad -\nu u'(c_{0,t-1}) + \delta^{*-1}[1 + f'(k_t)]u'(c_{0,t}) = 0. \tag{B.13}$$

Kombinálva a két egyenletet:

$$u'(c_{0,t-1}) = [1 + f'(k_t)]\delta u'(c_{1,t}). \tag{B.14}$$

Összehasonlítva a centralizált optimum (B.14) következményét a decentralizált optimum (B.4$'$) feltételével, adódik a jól ismert összefüggés, tudniillik, a decentralizált és a centralizált optimum azonos, ha a kamatláb minden időszakban egyenlő a tőke határhozadékával: (B.7)

Vizsgáljuk meg az optimális állandósult állapotot, ahol c^{o} és k^{o} a megfelelő értékek. Behelyettesítve (B.12)–(B.13)-ba:

$$u(c_1^{\mathrm{o}}) = (r^{\mathrm{o}})^{-1}\nu^{-1}u'(c_0^{\mathrm{o}}), \tag{B.12$^{\mathrm{o}}$}$$

$$1 + f'(k^{\mathrm{o}}) = \nu r^{\mathrm{o}}. \tag{B.13$^{\mathrm{o}}$}$$

(B.13$^{\mathrm{o}}$) és (B.7) együtt adja a következő megállapítást.

B.5. tétel. *(Módosított aranyszabály.) A centralizált OLG-optimumban a kamattényező egyenlő a népességnövekedési tényező és a leszámítolási tényező szorzatával:*

$$r^{\mathrm{o}} = \nu\delta^*.$$

Mielőtt megemlítenénk a következő tételünket, vegyük a következő helyzetet. Tegyük föl, hogy az A és B város elég távol fekszik egymástól, és elég közel egy jó gyorsforgalmi úthoz! Az A-ból a B-be leggyorsabban úgy juthatunk el, ha minél hamarabb ráhajtunk a gyorsforgalmi útra, és minél tovább maradunk rajta. (Magyar példával élve: Székesfehérvárról mehetnénk közvetlenül a 70-es úton Siófokra, de érdemes minél előbb rátérni az M7-re és minél később letérni róla.) Előkészítésünk után már kimondható a

B.6. tétel. *(Gyorsforgalmi út.) Adott k_0 kezdeti és k_T végállapot, valamint elegendő hosszú T időhorizont mellett az OLG-beli optimális $\{k_t\}$ pálya az idő nagy részében az állandósult k^{o} állapot közelében halad.*

Már említettük, hogy bizonyos esetekben az OLG-modellben lehetséges a *dinamikus inefficiencia*, azaz legalább egy nemzedék jóléte növelhető úgy, hogy a többié nem csökken (vö. a B.2. tétel).

Legyen $c_t = c_{0,t} + \nu^{-1}c_{1,t}$ az egy gyermekre és a hozzá tartozó félszülőre jutó fogyasztás, és c^{o} az állandósult állapotbeli érték. Ezzel visszavezettük a kérdést a (B.11)-ben említett klasszikus feladatra, és beláttuk a cseregazdaságra vonatkozó B.2. tétel termelőgazdaságra vonatkozó megfelelőjét.

B.7. tétel. *Dinamikus inefficiencia. A termelő OLG-gazdaság állandósult fogyasztása növelhető tőkekivonással, ha az állandósult állapotbeli tőke nagyobb, mint az aranyszabály érték: $k^{\mathrm{o}} > k_{\mathrm{G}}$.*

A gyakorlatban nem szabad megfeledkezni a termelékenységnövekedésről sem. Jelenleg még nyitott kérdés, hogy a valóságban lehetséges-e ilyesfajta túlfelhalmozás, de kicsi a valószínűsége (Blanchard – Fischer, 1989, 3. fejezet).

Nyugdíjrendszer és tőkefelhalmozás

Ebben az alfejezetben a társadalombiztosítási (röviden tb) kérdéseket tanulmányozzuk a termelő OLG-modell segítségével. Egyébként az OLG-nek ez az egyik leggyakoribb alkalmazása. Most Blanchard – Fischer (1989) 3.2. alfejezete szolgál az ismertetés alapjául. Szükségünk lesz a (B.4′) optimumfeltétel új alakjára, amelyet a megtakarítás behelyettesítésével nyerünk:

$$u'(w_t - s_t) = r_{t+1}\delta u'(r_{t+1}s_t). \tag{B.15}$$

Eddigi jelöléseink mellé vezessük be a következőket: τw_t és b_t egy fiatal személy tb-hozzájárulása, illetve egy idős személy nyugdíja a t-edik időszakban.

Felidézzük a tőkésített és a felosztó-kirovó nyugdíjrendszer alapfogalmait. Az első rendszerben a fiatalok előre takarékoskodnak öregkorukra: $b_t = r_t \tau w_{t-1}$, a másodikban az állam az öregek mindenkori nyugdíját a fiatalok megadóztatásából fedezi: $b_t = \nu\tau w_t$. A tőkésített rendszer optimalitási feltételei a következők:

$$u'((1-\tau)w_t - s_t) = r_{t+1}\delta u'[r_{t+1}(s_t + \tau w_t)], \tag{B.16}$$
$$s_t + \tau w_t = \nu k_{t+1}. \tag{B.17}$$

A (B.16)–(B.17) egyenletpárt összevetve (B.15)–(B.8)-cal, adódik a

B.8. tétel. *Ha a tb-hozzájárulás nem haladja meg a tb nélküli rendszer megtakarításait ($\tau w_t \le \nu k_{t+1}$), akkor a tőkésített rendszer bevezetésénél k_t változatlan marad, ezért ez a nyugdíj nincs hatással az OLG-beli teljes tőkefelhalmozásra.*

A felosztó-kirovó rendszer optimalitási feltételei a következők:

$$u'((1-\tau)w_t - s_t) = r_{t+1}\delta u'[r_{t+1}s_t + \nu\tau w_t], \tag{B.18}$$
$$s_t = \nu k_{t+1}.$$

Az egyén szempontjából a tb-megtakarítások hozama $r_t - 1$ helyett $\nu - 1$. *Csupasz modellünkben a felosztó-kirovó rendszer akkor és csak akkor* *előnyösebb, mint a tőkésített, ha a népesség növekedési tényezője nagyobb a reálkamat-tényezőnél* (8.5. tétel: Aaron-elv). További kérdés: hogyan hat a felosztó-kirovó rendszer bevezetése a megtakarításokra? Kedvezőtlenül. Tegyük föl, hogy $\tau w_t = \tau w_{t+1}$ és differenciáljuk (B.18)-at:

$$\frac{ds_t}{d(\tau w_t)} = \frac{u_1 + \nu u_2''}{u_1 + r u_2''},$$

ahol u_1 és u_2 az u függvénynek a (B.18) egyenlet bal, illetve jobb oldalán szereplő helyen vett értéke. A megtakarítás tehát mindenképpen csökken. Az, hogy a relatív csökkenés, $|ds_t/d(\tau w_t)|$ kisebb-e, mint 1, attól függ, hogy $\nu < r$ teljesül-e. Hasonlóan igazolható a

B.9. tétel. *A PAYG bevezetése lassítja az OLG-beli tőkefelhalmozást valamint csökkenti az állandósult tőkeállományt. Ha $r > \nu$, akkor a PAYG bevezetése kedvez az első nemzedéknek a többi kárára. Ha azonban $r < \nu$, akkor mindenki nyer, mert csökken (esetleg megszűnik) a dinamikus inefficiencia. Ha $r = \nu$, akkor a felosztó-kirovó rendszer ekvivalens a tőkésítettel, így bevezetése közömbös.*

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a felosztó-kirovó rendszer tárgyalásánál mindvégig föltettük, hogy minden nemzedék hajlandó az előző nemzedék tb-költségeit fedezni. Szó szerint véve ehhez (megszámlálhatóan) végtelen sok nemzedékre van szükség, ugyanis, ha lenne egy utolsó nemzedék, annak nem lenne érdeke fizetni az utolsó előtti nemzedék költségeit stb., azaz a lánc megszakadna. Természetesen itt önző egyéneket feltételeztünk, s eltekintettünk a családon belüli kétirányú támogatásoktól. A kérdést részletesen tárgyalja Blanchard – Fischer (1989) 3. fejezete.

B.5. példa. A kolozsvári Caritas tevékenysége is a népesség végességén bukott meg 1994 közepén: negyedév alatt a pénz megnyolcszorozását ígérte, amely még az akkori évi 300 (negyedévi körülbelül 40) %-os infláció mellett – azonos nagyságú betétekkel számolva – a résztvevők számának negyedévenkénti majdnem meghatodszorozódását igényelte: $8 = 1{,}4 \cdot 5{,}7$. Az 1997 elején dicstelenül véget érő albán pilótajáték már egy egész nemzet gazdasági és társadalmi rendjét rengette meg.

Ez a gondolatmenet hasonlít ahhoz a matematikai paradoxonhoz, melyet a végtelen szobaszámú, teltházas szállodáról szoktak elmondani. Minden szoba egyágyas, minden szobában van vendég. Megérkezik egy új vendég, azt elszállásolják az 1. szobában, annak korábbi lakóját átküldik a 2. szobába stb. Ebben az értelemben egy ilyen szálloda sohasincs tele. □

Tanulságok

Az OLG- (együttélő nemzedékek) modellcsalád sikerrel magyarázza meg a dinamikus gazdaság olyan jelenségeit, amelyek az apák és fiúk (anyák és lányok) egymásra utaltságával kapcsolatosak. Az egyszektoros optimális növekedéselmélet egyes tételei (például az aranyszabály) érvényesek maradnak, mások (például a stabilitás) érvényüket vesztik. A megőrzött aranyszabály következményeként adódik, hogy a felosztó-kirovó rendszer mikor jobb a tőkésített rendszernél. Az OLG-cseregazdaságban elméleti tisztaságukban tanulmányozhatók egyes jelenségek (adós versus hitelező aranyszabály; ciklus és káosz). Az OLG-termelőgazdaságban pedig mind a tőkefelhalmozás, mind a kamatláb endogén. Ugyanakkor az OLG-modellcsaládban nagyon megszorító az a feltevés, hogy minden időszakban csak két korosztály-nemzedék (dolgozóké és nyugdíjasoké) él együtt. Emiatt az elemzési alapidőszak hossza eleve nagyon hosszú, mondjuk 30 év, az ezen belüli mozgások nem is értelmezhetőek. Csak két irreális következményt sorolunk fel. 1. A munkában és a nyugdíjban töltött időszak egyforma hosszú. 2. Nem nőnek a szolgálati idővel a keresetek. Sajnos, az OLG-modellek hívei gyakran elfeledkeznek modellcsaládjuk megszorító feltevéseiről, és túlzott magabiztossággal vonnak le gyakorlati következtetéseket e modell segítségével.